

## ABSTRACT

The absorption of momentum by the vegetation is studied in this work through an analytical approach which also provides the appropriate formulations to describe wind velocity and diffusivities profiles above and inside the space occupied by the foliage elements. A first comparison between the observed and calculated profiles of wind velocity for Amazonian forest (Reserva Ducke, Manaus - AM) is presented to test the realism of the model.

## ASPECTS GENERAUX

L'étude du champ de vitesse du vent en conditions naturelles, au-dessus et à l'intérieur des couverts végétaux, est développée avec le support de certains concepts et résultats obtenus dans le domaine de la mécanique des fluides théorique et expérimentale. Cette étude fournit en contrepartie le moyen pour expliquer certaines variables qui apparaissent dans les analyses plus générales des transferts de masse et d'énergie, notamment en ce qui concerne les diffusivités turbulentes

Ainsi le concept de couche limite rugueuse, créé pour expliquer les caractéristiques particulières d'écoulement d'un fluide sur une paroi rugueuse, peut être étendu et adapté à l'analyse de l'écoulement de l'air sur les surfaces naturelles. Pour cela on définit une couche limite associée à la surface terrestre, dans laquelle on retrouve quelques évidences expérimentales de similarité avec les observations de laboratoire malgré l'environnement non contrôlé où se déroule l'écoulement, et notamment les complications induites par le champ variable de températures.

Dans le cas de neutralité atmosphérique, la variation de la vitesse du vent en fonction de la distance verticale à la surface, dans la région située au-dessus des éléments rugueux existants sur cette surface, est gouvernée par une équation différentielle simple du type,

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{u_*}{\kappa z} \quad (01)$$

ou,

$u$  → vitesse du vent (m/s)

$u_*$  → vitesse de friction (m/s)

$k$  → constante de von Karman (adim.=0,4)

$z$  → coordonnée verticale (m)

Instituto Nacional de Pesquisas da Amazônia-INPA, Coordenação de Pesquisas em Hidrometeorologia, Caixa Postal 478 - 69011-970 - Manaus, Amazonas, Brasil

Chaire de Bioclimatologia - INRA - France

Formellement, le flux de quantité de mouvement ( $\text{Kg/ms}^2$ ) peut être exprimé par le produit d'une diffusivité turbulente,  $K_M (\text{m}^2/\text{s})$ , associée au transfert de quantité de mouvement et du gradient vertical de la concentration correspondante dans l'air, sous la forme:

$$\tau = \rho u_*'^2 = \rho \overline{u'w'} = K_M \frac{\partial(\rho u)}{\partial z} \quad (2)$$

où  $\rho$  représente la densité de l'air, tandis que  $u'$  et  $w'$  représentent les fluctuations produites par la turbulence des vitesses respectivement horizontale et verticale. À partir des égalités 1 et 2, on peut déduire l'équation supplémentaire suivante:

$$K_M = (\kappa z)^2 \frac{\partial u}{\partial z}$$

Dans la région où l'équation 1 peut être appliquée, le flux de quantité de mouvement est constant, ce qui implique que  $\partial\tau/\partial z=0$ . La valeur constante de ce flux représente l'effet global de transfert de quantité de mouvement de l'écoulement de l'air pour les éléments rugueux et pour la surface sous-jacente, elle-même.

Cette façon relativement simple d'aborder l'étude de l'écoulement de l'air au-dessus des couverts végétaux, devient plus compliquée lorsqu'on essaie de caractériser ce même écoulement dans l'espace occupé par la végétation. À chaque niveau de cet espace, la partie de la végétation intervenant dans l'absorption de la quantité de mouvement est différente ; et ces différences ne peuvent générer qu'un flux de quantité de mouvement variable en fonction de la quantité, de la forme, de la distribution et de l'orientation des éléments de surfaces végétales. En considérant les feuilles comme les agents principaux dans ce processus, on peut exprimer la variation du flux de quantité de mouvement en fonction de  $z$ , de la façon suivante:

$$\frac{\partial\tau}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \rho K_M \frac{\partial u}{\partial z} \right) = c_d a(z) u^2 \quad (3)$$

dans laquelle,  $c_d$  représente un coefficient de traînée des éléments individuels, un paramètre qui exprime l'efficacité de chaque élément pour absorber le mouvement de l'écoulement de l'air dans la voisinage de l'élément, et  $a(z)$  la densité de surface foliaire dans la zone considérée.

La généralisation de l'équation 1 pour traiter les différentes conditions de stabilité atmosphérique a été faite par MONIN & OBUKHOV (1954), qui utilisent l'analyse dimensionnelle pour définir les relations appropriées entre flux et gradients, non seulement pour le flux de quantité de mouvement, mais aussi pour les autres flux tels que les flux de masse et d'énergie. L'ensemble de leur analyse constitue actuellement ce qu'on appelle la théorie de Monin-Obukhov. Cette théorie est valable pour l'étude des transferts dans la couche limite superficielle, où la turbulence est complètement développée. On trouve dans la littérature quelques développements supplémentaires ou analyses critiques concernant ce sujet, telles que : CALDER (1967), MONIN (1970), MONIN & YAGLOM (1975) entre autres.

En ce qui concerne l'analyse du flux de quantité de mouvement à l'intérieur des couverts végétaux, et des profils de vitesse du vent et de diffusivités turbulentes associées, un des premiers essais pour résoudre l'équation différentielle 3 a été fait par CIONCO (1965). Dans son travail, il suppose que les diffusivités turbulentes au sein du couvert peuvent être associées à une longueur de mélange essentiellement constante pour chaque type de couvert. Par ailleurs, en reconnaissant la nécessité de généraliser cette approche initiale, notamment dans le sens de favoriser une description plus flexible pour les diffusivités turbulentes, KONDO & AKASHI (1975) et PERRIER (1976) ont exploré, analytiquement et numériquement certaines possibilités de les associer aux caractéristiques structurales de la végétation, aussi bien qu'à la distribution selon la verticale des éléments végétaux et à leurs caractéristiques individuelles.

D'autre part, COWAN (1968) présente son analyse sur l'équation 3, en supposant que les profils de diffusivités turbulentes sont qualitativement similaires aux profils de vitesse du vent à l'intérieur du couvert. La solution analytique qu'il propose correspond au cas où la distribution foliaire selon la verticale est constante. Plus récemment, dans cette même ligne de recherche, on peut mentionner les travaux de BACHE (1986) et de MASSMAN (1987).

Quelques preuves expérimentales obtenues pour les végétations éparées (notamment en ce qui concerne les flux de chaleur sensible et de chaleur latente), DENMEAD & BRADLEY (1985) montrent les limitations de l'utilisation des équations différentielles, dans lesquelles les flux sont associés aux gradients via le coefficient de diffusivité turbulente. Pour ce type de couvert, la contribution locale associée au gradient de concentration locale n'est pas suffisante pour la composition finale du flux : il faut considérer les contributions de grande échelle, qui seront d'autant plus importantes que de l'espace libre dans la végétation est disponible. Par contre, dans le cas de végétation dense une telle approche est parfaitement justifiable, l'estimation du flux en fonction du gradient local étant suffisante, spécialement dans la partie haute du couvert où sont concentrés les éléments végétaux, conformément à la discussion sur ce sujet présentée par BACHE (1986).

Dans ce contexte, les objectifs poursuivis sont les suivants :

- 1) Développement des profils de vitesse du vent et de diffusivités turbulentes dans l'espace situé au-dessus de la végétation, à partir de l'ensemble des équations résultant de l'application de la théorie de Monin-Obukhov dans cette zone;
- 2) Ces mêmes profils seront développés à l'intérieur du couvert à travers la résolution d'une équation différentielle similaire à celle représentée dans l'équation 3, en y introduisant certaines hypothèses simplificatrices sur l'évolution du profil de diffusivité turbulente.

## CHAMP DE VITESSE DU VENT AU-DESSUS DE COUVERTS VÉGÉTAUX

La variation de la vitesse du vent en fonction de la coordonnée verticale  $z$ , pour un écoulement turbulent au-dessus d'un ensemble végétatif, qui présente une certaine homogénéité horizontale, est dépendante, suivant ce que préconise la théorie de Monin-Obukhov dans ces conditions, du flux de quantité de mouvement, du flux de chaleur sensible ( $H_s$ ), organisés dans l'équation classique suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{u_*}{\kappa(z-d)} \phi_M \left( \frac{z-d}{L} \right) \quad (4)$$

dans laquelle,  $d$  représente la hauteur de déplacement du plan de référence effectif, paramètre important pour les végétations fortement développées selon la verticale et  $L$  représente un paramètre dénommé longueur de stabilité de Monin-Obukhov, dont la définition est la suivante:

$$L = - \frac{u_*^3 \rho C_p \theta}{\kappa g H_s}$$

où,  $\theta$  - température;  $C_p$  - chaleur spécifique;  $g$  - accélération de la gravité.

La fonction adimensionnelle  $\phi$  qui apparaît dans l'équation 4 résulte de l'analyse dimensionnelle (Monin & Obukhov, 1954), et sa forme doit être en principe déterminée par l'expérimentation ou par l'analyse théorique complémentaire. Cette fonction incorpore les effets de la stratification thermique de l'atmosphère sur les relations flux-gradient, qui s'y déroulent. Pour la neutralité atmosphérique,  $L$  tend vers l'infini et la fonction  $\phi$  est égale à 1. En condition d'instabilité atmosphérique, cette fonction présente des valeurs inférieures à 1 (flux de chaleur sensible >0), tandis que pour l'atmosphère stable (flux de chaleur <0) ses valeurs sont supérieures à 1.

L'intégration formelle de l'équation 4 produit le profil de vitesse du vent pour la région  $z > h$ ,  $h$  étant la hauteur de la végétation, sous la forme

$$u = \frac{u_*}{k} \left[ Ln(z-d) - \int \frac{1-\phi_M}{z-d} dz + C \right] \tag{5}$$

où, l'intégrale qui reste peut être en principe une fonction du type

$$\int \frac{1-\phi_M}{z-d} dz = \Psi\left(\frac{z-d}{L}\right) + C_1(L)$$

et pour laquelle, on doit déterminer la forme de la fonction  $C_1(L)$  à partir des restrictions physiques que les conditions de stabilité imposent. En effet, pour la neutralité atmosphérique, cas où  $L \rightarrow \infty$ , on doit respecter l'égalité suivante:

$$\int \frac{1-\phi_M}{z-d} dz = 0 = \lim_{L \rightarrow \infty} \Psi\left(\frac{z-d}{L}\right) + C_1(L)$$

ce qui implique, finalement l'équation 6, ci-après,

$$\int \frac{1-\phi_M}{z-d} dz = \Psi\left(\frac{z-d}{L}\right) - \Psi(0) \tag{6}$$

Compte tenu de la région de validité théorique de l'équation différentielle originale (équation 4), un dernier commentaire sur la forme de cette dernière intégrale est nécessaire; l'équation 6 qui la définit représente bien une intégrale indéfinie en  $z$ ;  $\psi(0)$  étant le résultat de l'imposition d'un référentiel lié au paramètre  $L \rightarrow \infty$ . Il faut considérer encore que la zone de validité de cette intégrale ne peut être différente de celle du propre profil  $z > d + z_0$ . Bien souvent on se limite à la zone plus restreinte  $z > h$ .

D'autre part, la constante d'intégration de l'équation 5 doit être déterminée à partir d'une condition que l'on impose sur le profil de vitesse du vent. La condition  $(z-d)=z_0, u=0$  produit la solution suivante:

$$u = \frac{u_*}{k} \left[ L \ln \left( \frac{z-d}{z_0} \right) - \Psi \left( \frac{z-d}{L} \right) + \Psi \left( \frac{z_0}{L} \right) \right] \quad (7)$$

Le paramètre  $z_0$  introduit pour compléter l'intégration de l'équation 4 donne une mesure des rugosités effectives de la végétation.

Pour le traitement postérieur des profils à l'intérieur du couvert, il est nécessaire de développer les expressions qui décrivent la vitesse du vent et la diffusivité turbulente au sommet de la végétation en fonction de valeurs connues de ces grandeurs au niveau de référence  $z_R$  au-dessus de la végétation. Cela peut être fait à travers une simple combinaison des expressions de vitesse au niveau de référence et au sommet, données toutes les deux par l'équation 7, ce qui proportionne comme résultat l'équation,

$$u_H = u_{zR} \frac{\left[ L \ln \left( \frac{h-d}{z_0} \right) - \Psi \left( \frac{h-d}{L} \right) + \Psi \left( \frac{z_0}{L} \right) \right]}{\left[ L \ln \left( \frac{z_R-d}{z_0} \right) - \Psi \left( \frac{z_R-d}{L} \right) + \Psi \left( \frac{z_0}{L} \right) \right]} \quad (8)$$

La diffusivité turbulente pour la quantité de mouvement peut être aussi définie en fonction de cette vitesse au niveau de référence, si l'on considère la relation classique suivante:

$$K_M = \frac{\kappa (z-d) u_*}{\Phi_M \left( (z-d) / L \right)}$$

qui est la définition appropriée aux diffusivités dans le cas général de stratification thermique de l'atmosphère. La combinaison de cette dernière équation avec l'équation 7, produit l'expression,

$$K_M(h) = \frac{\kappa^2 (h-d) u_{zR}}{\left[ L \ln \left( \frac{z_R-d}{z_0} \right) - \Psi \left( \frac{z_R-d}{L} \right) + \Psi \left( \frac{z_0}{L} \right) \right]} \frac{1}{\Phi_M \left( \frac{h-d}{L} \right)} \quad (9)$$

Dans ce contexte, il est intéressant de faire la remarque suivante: les diffusités turbulentes associées aux flux de chaleur et de vapeur d'eau peuvent en principe être obtenues par des expressions similaires à celles de l'équation 9; la seule modification nécessaire serait à l'égard de la fonction adimensionnelle, qui devrait être remplacée par des fonctions correspondantes à chacun de ces flux.

#### CHAMP DE VITESSE DU VENT A L'INTERIEUR DE LA VEGETATION

Dans l'étude des profils de vitesse du vent et de diffusivité turbulente à l'intérieur de couverts végétaux, on peut développer l'équation qui exprime la variation du flux de quantité de mouvement (équation 3) sous la forme,

$$K_M \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial K_M}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial z} - c_d(z) a(z) u^2 = 0 \quad (10)$$

L'hypothèse de similarité entre les profils de vitesse du vent et de diffusivité, proposée par COWAN (1968), est généralisée en admettant ici que cette similarité soit affectée par une fonction quelconque  $\eta(z)$ , produite à partir de considérations théoriques ou d'observations expérimentales, conformes à l'équation:

$$\frac{K_M(z)}{K_M(h)} = \frac{u(z)}{u(h)} \eta(z) \quad (11)$$

Par ailleurs, la fonction  $a(z)$  ne reçoit quant à elle aucune restriction, tandis que  $c_d(z)$  est considérée indépendante de la vitesse du vent dans cette première approximation, tout en restant une fonction de  $z$ . En regroupant toutes ces fonctions de  $z$  par la définition de la fonction  $\lambda(z)$ ,

$$\lambda^2(z) = \frac{c_d(z) a(z) u(h)}{\eta(z) K_M(h)} \quad (12)$$

et en substituant  $K$  et  $dK/dz$  par des expressions obtenues à partir de l'équation 11, on développe l'équation différentielle 10 sous la forme équivalente,

$$u \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\eta'}{\eta} u \frac{\partial u}{\partial z} + \left[ \frac{\partial u}{\partial z} \right]^2 - \lambda^2 u^2 = 0 \quad (13)$$

C'est une équation homogène en sa variable dépendante  $u(z)$ , dont l'ordre peut être réduit par la transformation

$$u(z) = e^{\int p_a(z) dz} \quad (14)$$

$p_a(z)$  étant une nouvelle variable ou fonction décrite par une équation différentielle de premier ordre. De cette dernière relation, on obtient les dérivées première et seconde de la fonction  $u(z)$ , qui introduites dans l'équation 13 donnent origine à une différentielle de premier ordre en  $p_a(z)$ ,

$$\frac{\partial p_a}{\partial z} + 2p_a^2 + \frac{\eta'}{\eta} p_a - \lambda^2 = 0 \quad (15)$$

Cette équation est une différentielle non-linéaire connue comme l'équation de Riccati, dont la solution peut être développée, si l'on connaît à priori une solution particulière  $p(z)$  quelconque, sous la forme suivante,

$$p_a(z) = \frac{p(z) e^{\int 2p(z) dz} \left[ C + 2 \int e^{-\int 4p(z) dz} \left( \frac{1}{\eta(z)} \right) dz \right] + \frac{e^{-\int 2p(z) dz}}{\eta(z)}}{e^{\int 2p(z) dz} \left[ C + 2 \int e^{-\int 4p(z) dz} \left( \frac{1}{\eta(z)} \right) dz \right]} \quad (16)$$

La forme "simplifiée" de cette solution est obtenue par l'utilisation des égalités suivantes:

$$e^{\int [4p(z) + \eta'(z)/\eta(z)] dz} = \eta(z) e^{\int 4p(z) dz}$$

et,

$$e^{-\int [4p(z) + \eta'(z)/\eta(z)] dz} = \frac{e^{-\int 4p(z) dz}}{\eta(z)}$$

Ensuite, la solution relative à la fonction originale  $u(z)$  est déterminée tout simplement à partir de la relation 14, ce qui donne l'expression,

$$u \cdot C_1 = e^{\int_a^z p(z) dz} \sqrt{C + 2 \int_a^z e^{-\int_a^z 4p(z) dz} \cdot \left(\frac{1}{\eta(z)}\right) dz} \quad (17)$$

Les constantes d'intégration de cette dernière équation,  $C$  et  $C_1$ , doivent être explicitées à partir des conditions aux limites imposées au profil de vitesse du vent. Dans le cas présent, on utilise les conditions suivantes:

$$\begin{array}{ll} z = 0 & u = 0 \\ z = h & u = uh \end{array}$$

L'introduction de ces conditions dans la solution obtenue pour la fonction  $u(z)$  donne les expressions suivantes pour les constantes d'intégration

$$C = -2 \int_a^0 e^{-\int_a^z 4p(z) dz} \cdot \left(\frac{1}{\eta(z)}\right) dz$$

$$C_1 = \frac{e^{\int_a^h p(z) dz}}{u(h)} \sqrt{C + 2 \int_a^h e^{-\int_a^z 4p(z) dz} \cdot \left(\frac{1}{\eta(z)}\right) dz}$$

L'équation 17, spécifiée pour ces constantes, produit après les simplifications le profil de vitesse du vent décrit par la formule, (MARQUES FILHO (1991)),

$$u(z) = u(h) e^{-\int_z^h p(z) dz} \sqrt{\frac{\int_0^z e^{-\int_0^z 4p(z) dz} \cdot \left(\frac{1}{\eta(z)}\right) dz}{\int_0^h e^{-\int_0^z 4p(z) dz} \cdot \left(\frac{1}{\eta(z)}\right) dz}} \quad (18)$$

En ce qui concerne le profil de diffusivité turbulente à l'intérieur du couvert, on peut l'exprimer à partir de la relation 11, suivant l'équation

$$K(z) = K(h) \eta(z) e^{-\int_z^h p(z) dz} \sqrt{\frac{\int_0^z e^{-\int_0^z 4p(z) dz} \cdot \left(\frac{1}{\eta(z)}\right) dz}{\int_0^h e^{-\int_0^z 4p(z) dz} \cdot \left(\frac{1}{\eta(z)}\right) dz}} \quad (19)$$



Les solutions seront complètes dès que la forme de la solution particulière  $p(z)$  sera précisée, ce qui représente l'objet des analyses suivantes.

#### DEVELOPPEMENT DE $p(z)$ EN SERIE DE TAYLOR

Dans le cas général, on est libre de choisir la forme et d'imposer une condition limite à la fonction  $p(z)$ , pourvu que celle-ci représente une solution de l'équation différentielle 15.

Le développement en Série de Taylor d'une fonction quelconque présente l'allure classique suivante:

$$p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^{(n)}(z_1) (z-z_1)^n}{n!} \quad (20)$$

où, le symbole  $p^{(n)}(z)$  représente en fait  $\partial^n p(z)/\partial z^n$ .

La seule partie que l'on connaît de ce développement de Taylor, est l'expression de la dérivée première de la fonction  $p(z)$ , mais c'est déjà suffisant pour l'obtention de toutes les autres dérivées. Par contre, il faut définir un point sur le plan  $(z,p)$  par lequel la fonction  $p(z)$  va passer (équivalent à imposer une condition limite). De toute évidence c'est un choix arbitraire qui permet d'apporter quelques simplifications à l'équation 20. On a choisi le point suivant:  $z = 0; p(0) = 0$ .

En ce qui concerne les dérivées d'ordre supérieur, on peut les exprimer à partir de l'équation 15 (dérivée du premier ordre), en profitant du théorème sur la dérivation du produit de deux fonctions (Leibniz) et en définissant la fonction auxiliaire suivante:

$$\eta_1(z) = \eta'(z)/\eta(z)$$

pour obtenir l'expression générale de la dérivée d'ordre  $m+1$ , sous la forme

$$p^{(m+1)} = \sum_{j=0}^m C_m^j \left[ \lambda^{(m-j)} \cdot \lambda^{(j)} - 2p^{(m-j)} \cdot p^{(j)} - \eta_1^{(m-j)} \cdot p^{(j)} \right] \quad (21)$$

valable pour  $m \geq 0$ . Les coefficients  $C$ , produits de l'analyse combinatoire, respectent l'équation,

$$C_m^j = \frac{m!}{(m-j)! j!}$$

où, par convention on considère que  $0!$  est égal à l'unité.

Il est clair que dans le développement en série, la détermination de  $p(z)$  ne doit comporter qu'un nombre limité de termes, pour que finalement la procédure soit elle-même justifiable d'un point de vue temps de calcul sur l'ordinateur. Dans le cas présent, on utilise un total de 20 termes de la série pour obtenir une précision de l'ordre de  $\pm 1.e-10$ ; la composition de  $p(z)$  pour une région donnée du plan est essentiellement obtenue par des déterminations successives, à partir du point de départ choisi.

Les profils de vitesse du vent et de diffusivité turbulente, définis par les équations 18 et 19 respectivement, sont ainsi déterminés en étroite dépendance avec les spécificités des fonctions  $\lambda(z)$  et  $\eta(z)$ . Ce développement est absolument général, mais son caractère itératif restreint et rend difficile son insertion dans les modélisations générales des transferts poursuivies ici. Toutefois, il demeure comme la procédure classique de contrôle sur les analyses plus détaillées de la fonction  $p(z)$  qui se suivront.

**DEVELOPPEMENT DE  $p(z)$  POUR LE CAS OU  $\lambda(z)$  EST DONNÉE SOUS LA FORME D'HISTOGRAMME**

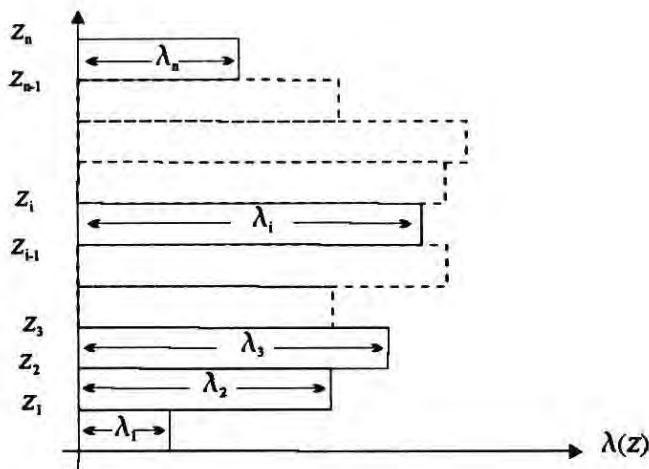
Si la fonction  $\lambda(z)$  est présentée sous la forme d'histogramme, on peut développer directement une forme analytique pour les solutions 18 et 19. L'intérêt d'une telle analyse réside dans la performance largement plus favorable en temps de calcul des équations exactes ainsi obtenues par rapport aux solutions approximatives générées par le développement en série de Taylor.

Il s'agit dans ces conditions d'approfondir l'approche et de produire des expressions pour les différentes composantes de l'équation,

$$\frac{u(z)}{u(h)} = \frac{1}{\eta(z)} \frac{K_M(z)}{K_M(h)} = e^{-\int_z^h p(z) dz} \sqrt{\frac{\int_0^z e^{-\int_0^z 4p(z) dz} \cdot \left(\frac{1}{\eta(z)}\right) dz}{\int_0^h e^{-\int_0^z 4p(z) dz} \cdot \left(\frac{1}{\eta(z)}\right) dz}} \quad (22)$$

où, la fonction  $p(z)$  est la solution particulière de l'équation différentielle de Ricatti (équation 15). D'autre part, la fonction  $\lambda(z)$  se présente comme l'indique la figure 1 ci-dessous,

Figure 1 – La fonction  $\lambda(z)$  discrétisée



En choisissant la fonction  $p(z)$  comme celle qui passe par le point  $z = 0$   $p(0) = 0$  (comme auparavant), et en définissant la limite inférieure d'intégration a égal à zéro (un choix arbitraire), on complète l'ensemble des éléments permettant le développement suivant; dans la première tranche,  $0 < z < z_1$ , la fonction  $p(z)$  répond à l'équation,

$$p(z) = \frac{\lambda_1}{\sqrt{2}} \left[ \frac{\left(p_0 + \frac{\lambda_1}{\sqrt{2}}\right) e^{\sqrt{2}\lambda_1(z-z_0)} + \left(p_0 - \frac{\lambda_1}{\sqrt{2}}\right) e^{-\sqrt{2}\lambda_1(z-z_0)}}{\left(p_0 + \frac{\lambda_1}{\sqrt{2}}\right) e^{\sqrt{2}\lambda_1(z-z_0)} - \left(p_0 - \frac{\lambda_1}{\sqrt{2}}\right) e^{-\sqrt{2}\lambda_1(z-z_0)}} \right] \quad (23)$$

qui est obtenue comme la solution de l'équation différentielle, valable pour ladite tranche,

$$\frac{\partial p(z)}{\partial z} + 2p^2(z) - \lambda_1^2 = 0$$

avec la condition limite  $z = 0 \rightarrow p_0 = 0$ ; les termes  $p_0 = z_0 = 0$  demeurent dans la solution pour faciliter la mise en évidence de la loi de formation du développement.

L'équation 23 fournit pour  $z = z_1$ , niveau associé au sommet de la première tranche, la valeur suivante:

$$z = z_1 \qquad p(z) = p(z_1) = p_1$$

qui représentera ensuite la condition limite imposée à la fonction  $p(z)$  dans la deuxième tranche. L'équation qui gouverne  $p(z)$  dans cette tranche est la suivante:

$$p(z) = \frac{\lambda_2}{\sqrt{2}} \left[ \frac{\left(p_1 + \frac{\lambda_2}{\sqrt{2}}\right) e^{\sqrt{2}\lambda_2(z-z_1)} + \left(p_1 - \frac{\lambda_2}{\sqrt{2}}\right) e^{-\sqrt{2}\lambda_2(z-z_1)}}{\left(p_1 + \frac{\lambda_2}{\sqrt{2}}\right) e^{\sqrt{2}\lambda_2(z-z_1)} - \left(p_1 - \frac{\lambda_2}{\sqrt{2}}\right) e^{-\sqrt{2}\lambda_2(z-z_1)}} \right] \quad (24)$$

représentant cette fois la solution de l'équation différentielle,

$$\frac{\partial p(z)}{\partial z} + 2p^2(z) - \lambda_2^2 = 0$$

La valeur de  $p(z)$  au sommet de la deuxième tranche ( $z = z_2$ ;  $p = p_2$ ) représente tout naturellement la condition limite pour la prochaine tranche.

Cette séquence produit le terme général valable pour une tranche  $i$  quelconque, sous la forme,

$$p(z) = \frac{\lambda_i}{\sqrt{2}} \left[ \frac{\left( p_{i-1} + \frac{\lambda_i}{\sqrt{2}} \right) e^{\sqrt{2}\lambda_i(z-z_{i-1})} + \left( p_{i-1} - \frac{\lambda_i}{\sqrt{2}} \right) e^{-\sqrt{2}\lambda_i(z-z_{i-1})}}{\left( p_{i-1} + \frac{\lambda_i}{\sqrt{2}} \right) e^{\sqrt{2}\lambda_i(z-z_{i-1})} - \left( p_{i-1} - \frac{\lambda_i}{\sqrt{2}} \right) e^{-\sqrt{2}\lambda_i(z-z_{i-1})}} \right] \quad (25)$$

Si l'on connaît la fonction  $p(z)$  pour toutes les tranches (conforme à la description présentée ci-dessus) on peut passer à l'étude des autres termes existants dans l'équation 22.

Pour simplifier le développement des expressions, on définit les fonctions auxiliaires,  $w(z)$  et  $v(z)$ , valables pour  $z_{i-1} \leq z \leq z_i$ , sous les formes suivantes:

$$w(z) = \left[ \left( p_{i-1} + \frac{\lambda_i}{\sqrt{2}} \right) e^{\sqrt{2}\lambda_i(z-z_{i-1})} - \left( p_{i-1} - \frac{\lambda_i}{\sqrt{2}} \right) e^{-\sqrt{2}\lambda_i(z-z_{i-1})} \right] \quad (25a)$$

$$v(z) = \left[ \left( p_{i-1} + \frac{\lambda_i}{\sqrt{2}} \right) e^{\sqrt{2}\lambda_i(z-z_{i-1})} + \left( p_{i-1} - \frac{\lambda_i}{\sqrt{2}} \right) e^{-\sqrt{2}\lambda_i(z-z_{i-1})} \right] \quad (25b)$$

Ceci établi, on commence par la détermination de l'intégrale de  $p(z)$  dans une même tranche; on peut vérifier d'abord que la fonction  $p(z)$  respecte en chaque tranche l'égalité

$$p(z) = \frac{1}{2} \frac{1}{w(z)} \frac{\partial w(z)}{\partial z}$$

À partir de cette constatation, on peut réaliser l'intégration de  $p(z)$  et obtenir le résultat suivant:

$$\int_{z_{i-1}}^z p(z) dz = \text{Ln} \sqrt{\frac{w(z)}{\sqrt{2}\lambda_i}}$$

L'expression plus générale correspondante à l'intégration de cette fonction à partir du niveau  $z_k$  jusqu'à  $z_n$ , en considérant des tranches d'épaisseur égale à  $\Delta z = z_i - z_{i-1}$ , est donnée par l'équation suivante:

$$P(z) = \int_{z_k}^{z_n} p(z) dz = \text{Ln} \sqrt{\prod_{i=k+1}^n \left[ \frac{w_i}{\sqrt{2}\lambda_i} \right]} \quad (26)$$

où  $w_i = w(z_i)$ .

Or, comme conséquence de ce dernier résultat, on peut exprimer la fonction exponentielle dépendante de l'intégrale de  $p(z)$ , sous la forme,

$$e^{-P(z)} = e^{-\int_{z_k}^{z_n} p(z) dz} = \sqrt{\prod_{i=k+1}^n \left[ \frac{\sqrt{2}\lambda_i}{w_i} \right]} \quad (27)$$

Les équation 25, 26 et 27 sont largement suffisantes pour compléter et développer les intégrales encore restantes dans l'équation 22.

En fait ce qui manque, c'est une description pour l'intégrale,

$$H(0, z_k) = H(z_k) = \int_0^{z_k} \left( \frac{1}{\eta(z)} \right) e^{-\int_0^z p(z) dz} \cdot dz$$

Cette intégrale ne peut être explicitée directement en fonction des équations précédentes, un développement par tranche étant nécessaire pour déterminer l'expression qui la définit.

Ainsi, dans la première tranche, il s'agit de résoudre l'intégrale

$$H(z_0, z \leq z_1) = \int_0^{z \leq z_1} \frac{1}{\eta_1} \left( \frac{\sqrt{2}\lambda_1}{w(z)} \right)^2 \cdot dz$$

Le développement de la solution dans ce cas passe par l'argumentation suivante: si l'on définit les fonctions antérieures  $w(z)$  et  $v(z)$ , on peut démontrer que la relation suivante est valable:

$$w(z) dv(z) - v(z) dw(z) = 2\sqrt{2}\lambda_1 (\lambda_1^2 - 2p_0^2) \cdot dz$$

et que, par conséquent, la solution de l'intégrale peut s'exprimer comme

$$H(z_0, z_1) = \frac{\lambda_1/\eta_1}{\sqrt{2}(\lambda_1^2 - 2p_0^2)} \int_0^{z_1} \frac{w(z) dv(z) - v(z) dw(z)}{w^2(z)} = \frac{\lambda_1/\eta_1}{\sqrt{2}(\lambda_1^2 - 2p_0^2)} \left[ \frac{v(z)}{w(z)} \right]_0^{z_1}$$

Compte tenu de la définition de  $p_1$  (équation 23, pour  $z = z_1$ ), le résultat final de l'intégration sera donné par

$$H(z_0, z_1) = \left( \frac{p_1 - p_0}{\lambda_1^2 - 2p_0^2} \right) \frac{1}{\eta_1} \quad (28)$$

Ensuite, pour la deuxième tranche, il est nécessaire de résoudre l'intégrale,

$$H(z_1, z \leq z_2) = \int_{z_1}^{z \leq z_2} \frac{1}{\eta_2} \left[ \frac{\sqrt{z} \lambda_1}{w_1} \right]^2 \left[ \frac{\sqrt{z} \lambda_2}{w(z)} \right]^2 dz$$

En utilisant la procédure antérieure (tranche 1) pour développer la partie variable de l'intégrale en analyse, on obtient dans le cas présent le résultat,

$$H(z_1, z_2) = \left( \frac{\sqrt{z} \lambda_1}{w_1} \right)^2 \left( \frac{p_2 - p_1}{\lambda_2^2 - 2p_1^2} \right) \frac{1}{\eta_2} \quad (29)$$

Le terme général qui émerge de la séquence présente est gouverné par l'équation,

$$H(z_{i-1}, z_i) = \prod_{j=0}^{i-1} \left( \frac{\sqrt{z} \lambda_j}{w_j} \right)^2 \left( \frac{p_i - p_{i-1}}{\lambda_i^2 - 2p_{i-1}^2} \right) \frac{1}{\eta_i} \quad (30)$$

D'après ces expressions, comme précédemment, on peut définir l'intégrale à partir du niveau  $z = 0$  jusqu'au niveau  $z_i$ , sommet de la couche  $i$ , sous la forme,

$$H(z_0, z_i) = \sum_{k=1}^i \left[ \prod_{j=0}^{k-1} \left( \frac{\sqrt{z} \lambda_j}{w_j} \right)^2 \right] \left( \frac{p_k - p_{k-1}}{\lambda_k^2 - 2p_{k-1}^2} \right) \frac{1}{\eta_k} \quad (31)$$

Dans les deux équations précédentes, la partie affectée par le signe du produit présente des valeurs particulières égales à l'unité lorsque  $j = 0$  (équations 30 et 31). En fait, dans ces deux cas l'expression correspondante doit être évaluée en considérant  $\Delta z = 0$ , le résultat ainsi obtenu étant d'ailleurs compatible avec le développement associé à la première tranche (équation 28).

Les profils de vitesse du vent et de diffusivités à l'intérieur des couverts végétaux, donnés par l'équation 22, sont complètement déterminés notamment en connexion avec les équations 27 et 31 développées ci-dessus, ou par l'équation:

$$\frac{u(z_i)}{u(h)} = \frac{1}{\eta(z_i)} \frac{K_M(z_i)}{K_M(h)} = e^{-P(z)} \sqrt{\frac{H(z_0, z_i)}{H(z_0, h)}} \quad (32)$$

## DEFINITION D'UN COEFFICIENT DE TRAINEE $c_d$ MOYEN POUR CHAQUE TRANCHE

THOM (1968) a déterminé expérimentalement la variation de  $c_d$  d'un élément individuel soumis à un écoulement, en fonction des angles ( $\theta$ ) que cet élément (feuilles artificielles) présente par rapport à la direction principale de l'écoulement. Si l'on considère une interpolation linéaire des résultats ainsi obtenus, on peut écrire la relation suivante:

$$c_d(\theta) = 0,05 + \frac{0,45 \cdot \theta}{\pi/2}$$

dans laquelle les valeurs limites pour  $\theta = 0$ ;  $c_d = 0.05$  (horizontale), et pour  $\theta = \pi/2$ ;  $c_d = 0.5$ , sont en accord avec l'expérimentation.

Il faut aussi définir la variation de cette fonction par rapport aux azimuts des divers éléments, si l'on envisage de l'utiliser dans l'étude des ensembles végétaux; une des définitions possibles est:

$$c_d(\theta, \phi) = 0,05 + \frac{0,45 \theta |\cos\phi|}{\pi/2}$$

La détermination d'un coefficient moyen pour chaque couche dans la végétation doit être pondérée par la fonction  $g(\theta, \phi)$  qui exprime la probabilité d'existence de surfaces végétales dans chaque direction ROSS (1981). L'équation qui définit ce coefficient moyen dans ce contexte est la suivante,

$$c_d = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} c_d(\theta, \phi) g(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi$$

Si l'on réalise l'intégration avec la fonction définie ci-dessus pour décrire  $c_d$ , et pour le cas de la distribution équiprobable des éléments dans chaque couche horizontale, on obtient le résultat suivant

$$c_d = 0,05 + \frac{1,8}{\pi^2} = 0,23$$

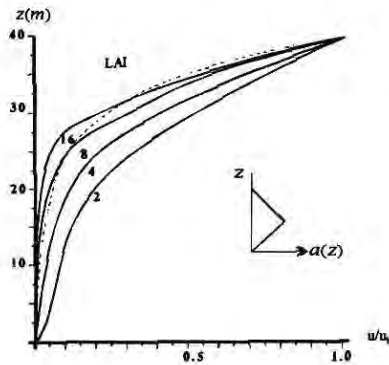
qui sera adopté comme valeur de base dans les calculs qui se suivront.

**DEPENDANCE ENTRE LES PROFILS DE VITESSE DU VENT (DIFFUSIVITE) ET LA FONCTION  $a(z)$**

On analyse ici les formes présentées par les profils de vitesse du vent (diffusivité) à l'intérieur du couvert en fonction de la forme de distribution des surface végétales selon la verticale (fonction  $a(z)$ ). Le coefficient  $c_d$  sera considéré constant (0,23) et à la fonction  $\eta(z)$ , on attribue la valeur unitaire ( $\eta(z) = 1$ ), évitant une analyse complémentaire pour la définir. D'autre part, le calcul des profils est fait à travers l'équation 22, dont la composition finale passe par l'utilisation des équations 27 et 31.

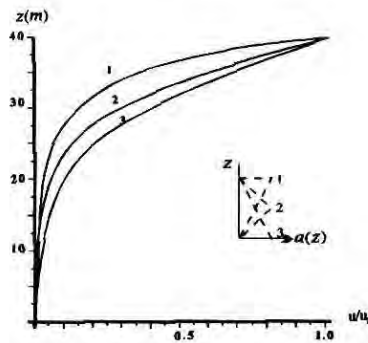
Ainsi, la figure 2, ci-dessous, représente, pour une distribution triangulaire de la fonction  $a(z)$ , l'évolution au sein du couvert des profils de vitesse du vent en fonction de différentes valeurs attribuées au LAI de la végétation. À titre de comparaison, on présente dans cette figure une courbe supplémentaire correspondant à une distribution constante des surfaces végétales et à LAI égal à 8.

**Figure 2** – L'évolution du profil du vent en fonction de la distribution de surface foliaire  $a(z)$ , selon la verticale.



D'autre part, la variation de ces profils en fonction de la localisation de la densité maximale de surfaces végétales selon la verticale est présentée sur la figure 3. La forme de la fonction  $a(z)$  adoptée est aussi triangulaire.

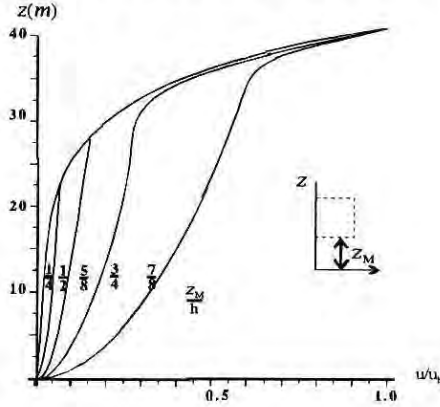
**Figure 3** – La dépendance du profil de vitesse du vent par rapport à la forme de courbe de la densité de surface foliaire.





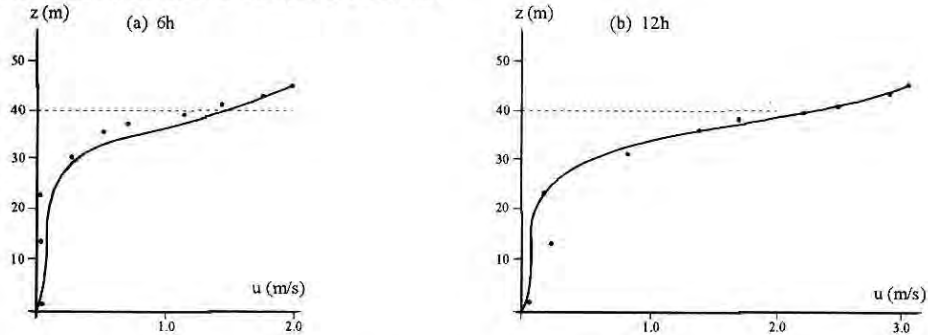
L'existence de l'espace libre au sein du couvert, notamment dans la zone occupée par les troncs de certain types de végétation, et son effet sur les profils est illustrée dans la figure 4, ci-après.

**Figure 4** – Profils de vitesse du vent en fonction de différents formes de la fonction  $a(z)$ .

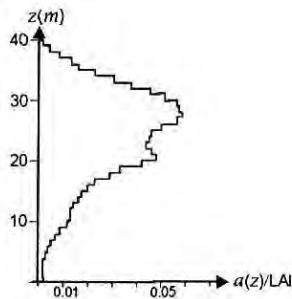


Finalement, la figure 5 illustre pour la forêt amazonienne (Reserva Florestal Ducke), la situation relative du profil de vitesse du vent calculé par le modèle proposé dans ce travail et du profil observé à l'intérieur du couvert (14-04-85, 6 et 12 heures). Le LAI adopté pour la composition de cette figure a été égal à 8, et la distribution des surfaces végétales selon la verticale pour ce type de végétation est donnée ailleurs dans la figure 6.

**Figure 5** – Profils de vitesse du vent observés et modélisés.



**Figure 6** – la distribution de surface foliaire selon la verticale.



## CONCLUSION

Dans l'étude de la quantité de mouvement à l'intérieur de la végétation, et notamment en ce qui concerne la description des profils de vitesse du vent et de diffusivité turbulente, on a développé la solution générale de l'équation différentielle qui les décrivent au sein du couvert, à partir d'une hypothèse étendue sur la similarité entre les profils de vitesse du vent et les profils de diffusivité dans le couvert. Ces profils peuvent finalement être décrits par des équations qui donnent des résultats comparables aux profils mesurés.

Les extensions de cette dernière analyse peuvent se concentrer, d'une part sur la description de la fonction  $\eta(z)$ , qui doit exprimer en fait le degré de discordance existant entre les deux profils (vitesse, diffusivité), et d'autre part, dans une optique purement mathématique, une analyse de l'évolution des équations 27 et 31, voire même les équations 22 et 32, lorsqu'on fait  $\Delta z$  tendre à zéro, (la courbe  $\lambda(z)$  donnée par un histogramme s'approchera d'une courbe continue), peut proportionner des nouvelles informations sur l'équation différentielle non-linéaire ici traitée (équation de Ricatti). Le développement en série de Taylor peut jouer dans cette analyse envisagée un rôle fondamentale.

## BIBLIOGRAPHIE

- BACHE, D. H., 1986a - "Momentum Transfert to Plant Canopies: Influence of Structure and Variable Drag" - Atmospheric Environment - vol. 20, n. 7: 1369-378
- BACHE, D. H., 1986b - "On the Theory of Gaseous Transport to Plant Canopies" - Atmospheric Environment - vol. 20, n.7: 1379-388
- BRUTSAERT, W., 1981 - "Evaporation into the Atmosphere" D. Reidel -Mass.
- CALDER, K. L., 1967 - "A criticism of Bernstein's new adimensional approach to the Flux-Gradient Relationship Near the Ground" - Quart. J.R. Met.Soc. 93:544-551.
- COWAN, I. R., 1968a - "Mass, Heat and Momentum Exchange between Stands of Plants and Their Atmospheric Environment" Quart. J.Royal Meteorology Soc. 94: 523-544.
- CIONCO, R.M., 1965 - "A Mathematical Model for Air Flow in a Vegetative Canopy" - Journal of Applied Metereology 4: 617-22.
- DENMEAD, O. T., BRADLEY, E. F., 1985 - " Flux-gradient Relationship in a Forest Canopy" - in "The Forest Atmosphere Interaction": 421-442. edit. B.A. Hutchison and B. B. Hicks.
- KONDO, J. AKASHI, S., 1976 - "Numerical Studies of the Two-dimensional Flow in Horizontally Homogeneous Canopy Layers" Boundary Layer Meteorology 10: 255-272.
- MARQUES FILHO, A. O., 1991 - "Bilan énégetique d'une forêt équatoriale - Modélisation Mathématique", Thèse Doctorat; 183 p; INAPG, Paris.
- MASSMAN, W. J., 1987a - "A Comparative Study of Some Simple Mathematical Models of Mean Wind Structure and Aerodynamic Drag of Plant Canopies"

- Boundary Layer Meteorology 40: 179-197.
- MASSMAN, W.J., 1987b - "Heat Transfert to and From Vegetated Surfaces: an Analytical Method for the Bulk Exchange Coefficients" Boundary Layer Meteorology 40: 1269-281.
- MONIN, A. S., 1970 - "The Atmospheric Boundary Layer" Ann. Rev. Fluid Mechanics 2: 225-250.
- MONIN, A. S., OBUKHOV, A. M., 1954 - "Basic Regularity In Turbulent Mixing in the Surface Layer of the Atmosphere" - Trudy Geophy. Inst. ANSSSR, n° 64, p. 163.
- MONIN, A. S., YAGLOM, A. M., 1971 - "Statistical Fluid Mechanics: mechanics of turbulence - The M.I.T. Press, Cambridge, Massachussets, London.
- PERRIER, A., 1976 - "Etude et Essai de Modélisation des Echanges de Masse et d'Energie au Niveau des Couverts Végétaux" - Thèse de Doctorat d'Etat - Université Pierre et Marie Curie - Paris.
- ROSS, J., 1981 - "The Radiation Regime and the Architecture of Plant Stands" - Dr W. Junk Publ., The Netherlands.
- THOM, A. S., 1968 - "The Exchange of Momentum, Mass and Heat Between an Artificial Leaf and the Air-flow in a Wind-tunnel" - Quart.J.R. Met.Soc.; - 94: 44-55.

(Aceito para publicação em 23.11.1992)