SÔBRE A FÓRMULA QUE DÁ O ÂNGULO DE DUAS FACES EM SISTEMA CRISTALOGRÁFICO RETANGULAR *

EDUARDO A. SALGADO

E. S. A. "LUIZ DE QUEIROZ"

1. INTRODUÇÃO

O ângulo determinado por duas faces de um cristal, em sistema coordenado retangular, é obtido através de fórmula da geometria analítica, adaptada à cristalografia.

Vamos deduzir tal fórmula, por via diferente.

2. DEDUÇÃO

X, Y, Z, são, na figura 1, os eixos cristalográficos do sistema rômbico; A e B os polos de faces tendo, respectivamente, para símbolos de Miller, $(h_1\ k_1\ l_1)$ e $(h_2\ k_2\ l_2)$ e sendo as coordenadas esféricas φ das faces medidas a partir de Y .

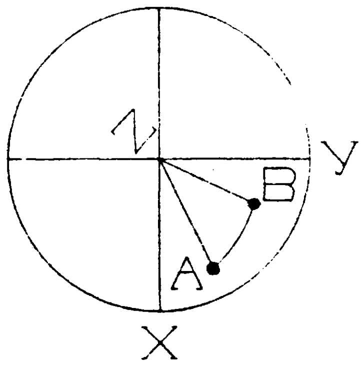

FIGURA 1

Tem-se, no triângulo ABZ:

$$\cos AB = \cos \rho A . \cos \rho B + \operatorname{sen} \rho A . \operatorname{sen} \rho B . \cos (\varphi A - \varphi B).$$

Dividindo por sen ρ A. sen ρ B:

$$\frac{\cos AB}{\operatorname{sen} \rho A . \operatorname{sen} \rho B} = \cot \rho A . \operatorname{cotg} \rho B + \operatorname{sen} \varphi A . \operatorname{sen} \varphi B + \cos \varphi A . \cos \varphi B \quad (1)$$

* *Recebido para publicação em 17/7/62 .*

As "fórmulas diretas de Ansheles" dão, para a face A :

$$h_1 : k_1 : l_1 = \frac{\operatorname{sen} \varphi\, A}{\operatorname{sen} \varphi\, U} : \frac{\cos \varphi\, A}{\cos \varphi\, U} : \frac{\operatorname{cotg} \rho\, A}{\operatorname{cotg} \rho\, U} \;\ldots \quad (2)$$

De (2) tira-se :

$$h_1 = \alpha \frac{\operatorname{sen} \varphi A}{\operatorname{sen} \varphi U},\; k_1 = \alpha \frac{\cos \varphi A}{\cos \varphi U},\; l_1 = \alpha \frac{\operatorname{cotg} \rho\, A}{\operatorname{cot} \rho\, U} \ldots (3),$$ sendo α um coeficiente de proporcionalidade.

Expressões idênticas são obtidas para a face B, sendo γ o coeficiente de proporcionalidade.

Levando os valôres assim conseguidos em (1), tem-se:

$$\cos AB = \frac{\operatorname{sen} \rho\, A . \operatorname{sen} \rho\, B}{\alpha\, \gamma} \left\{ h_1 h_2 \operatorname{sen}^2 \varphi\, U \;\; k_1 k_2 \cos^2 \varphi\, U + l_1 l_2 \operatorname{cotg}^2_\rho \cdot U \right\} \quad (4)$$

Sabe-se que, para a face parametral $\underline{U}$, $am = bn = pc$, sendo $\underline{m}$, $\underline{n}$, $\underline{p}$ os seus cosenos diretores. Tem-se :

$$\left.\begin{aligned} m &= \operatorname{sen} \rho\, U . \operatorname{sen} \varphi\, U \therefore \operatorname{sen}^2 \varphi\, U = \frac{m^2}{\operatorname{sen}^2 \rho\, U} = \frac{b^2 n^2}{a^2 \operatorname{sen}^2 \rho\, U} \\ n &= \operatorname{sen} \rho\, U . \cos \varphi\, U \therefore \cos^2 \varphi\, U = \frac{n^2}{\operatorname{sen}^2 \rho\, U} \\ p &= \cos \rho\, U = \frac{bn}{c} \therefore \cos^2 \rho\, U = \frac{b^2 n^2}{c^2} \end{aligned}\right\} (5)$$

Levando êstes valôres de $\operatorname{sen}^2 \varphi\, U$, $\cos^2 \varphi\, U$ e $\cos^2 \rho\, U$ em (4), tem-se:

$$\cos AB = \frac{\operatorname{sen} \rho\, A . \operatorname{sen} \rho\, B .\, b^2 n^2}{\alpha \gamma \operatorname{sen}^2 \rho\, U} \left\{ \frac{h_1 h_2}{a^2} + \frac{k_1 k_2}{b^2} + \frac{l_1 l_2}{c^2} \right\} =$$

$$= \frac{\dfrac{h_1\, h_2}{a^2} + \dfrac{k_1\, k_2}{b^2} + \dfrac{l_1\, l_2}{c^2}}{\dfrac{\alpha \operatorname{sen} \rho\, U}{bn . \operatorname{sen} \rho\, A} \times \dfrac{\gamma \operatorname{sen} \rho\, U}{bn . \operatorname{sen} \rho\, B}} \ldots (6)$$

Vamos demonstrar que, para a face A:

$$\sqrt{\frac{h_1^2}{a^2}+\frac{k_1^2}{b^2}+\frac{l_1^2}{c^2}} = \frac{\rho \operatorname{sen} \rho U}{bn.\operatorname{sen} \rho A} \qquad \ldots (7)$$

De (3) e (5) obtem-se:

$$\frac{h_1^2}{a^2} = \frac{\alpha^2 \operatorname{sen}^2 \varphi A.\operatorname{sen}^2 \rho U}{b^2 n^2}, \frac{k_1^2}{b^2} = \frac{\alpha^2 \cos^2 \varphi A.\operatorname{sen}^2 \rho U}{b^2 n^2}, \frac{l_1^2}{c^2} = \frac{\alpha^2 \cos^2 \rho A.\operatorname{sen}^2 \rho U}{b^2 n^2.\operatorname{sen}^2 \rho A} \quad (8)\,..$$

Podemos escrever, então :

$$\frac{h_1^2}{a^2}+\frac{k_1^2}{b^2}+\frac{l_1^2}{c^2} = \frac{\alpha^2 \operatorname{sen}^2 \rho U}{b^2 n^2}\left\{\operatorname{sen}^2 \varphi A + \cos^2 \varphi A + \frac{\cos^2 \rho A}{\operatorname{sen}^2 \rho A}\right\} =$$

$$= \frac{\alpha^2 \operatorname{sen}^2 \rho U}{b^2 n^2}\left\{1 + \frac{\cos^2 \rho A}{\operatorname{sen}^2 \rho A}\right\} = \frac{\alpha^2 \operatorname{sen}^2 \rho U}{b^2 n^2}\left\{\frac{\operatorname{sen}^2 \rho A + \cos^2 \rho A}{\operatorname{sen}^2 \rho A}\right\} =$$

$$= \frac{\alpha^2 \operatorname{sen}^2 \rho U}{b^2 n^2} \times \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \rho A}$$ e se tem provado (7), ocorrendo

coisa idêntica com a face B.

A expressão (6) transforma-se, pois, em :

$$\cos AB = \frac{\frac{h_1 h_2}{a^2} + \frac{k_1 k_2}{b^2} + \frac{l_1 l_2}{c^2}}{\sqrt{\frac{h_1^2}{a^2}+\frac{k_1^2}{b^2}+\frac{l_1^2}{c^2}} \times \sqrt{\frac{h_2^2}{a^2}+\frac{k_2^2}{b^2}+\frac{l_2^2}{c^2}}}$$

3. SUMÁRIO

Valendo-se das "fórmulas diretas" de Ansheles, o autor apresenta uma nova dedução da fórmula que permite calcular o ângulo de duas faces, de símbolos conhecidos, em sistema cristalográfico retangular.

4. SUMMARY

Using the "direct formulas" by Ansheles, the author presents a new deduction of the formula that makes possible to calculate the angle of two faces of a crystal, in the rectangular crystallographic systems.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1 - BOLDYREV, A.K. - Cristalografia. Trad. para o espanhol de Rafael Candel Vila. Madrid, Editorial Labor, 1934.

2. WENTWORTH, G. & SMITH, D.E. - Plane and spherical trigonometry. Chicago, Editôra Ginn and Company, s.d.