ENSAIOS EM PARCELAS SUBDIVIDIDAS DELINEADOS EM BLOCOS INCOMPLETOS BALANCEADOS. I - EQUAÇÕES NORMAIS (*)

A.F. IEMMA **
H. CAMPOS ***

RESUMO

Com o objetivo de ampliar o uso dos ensaios com parcelas subdivididas na pesquisa agropecuária, realizou - se um estudo de tais ensaios delineados em blocos incompletos balanceados. Adotou-se, para tanto, o modelo tradicionalmente usado no delineamento completo. Optou-se pela existência de correlação constante entre subparcelas distintas. A obtenção das estimativas para efeitos de blocos ocorreu como nos ensaios em blocos incom

* Baseado na tese para obtenção do grau de Doutor em Agronomia, área de concentração: Estatística e Experimentação Agronômica, ESALQ/USP, maio de 1981. Entregue para publicação em 18/02/1982.

** Instituto Básico de Biologia Médica e Agrícola, UNESP/ Botucatu, SP.

*** Departamento de Matemática e Estatística, E.S.A. "Luiz de Queiroz, USP.

pletos balanceados, enquanto que as estimativas para efeitos de tratamentos secundários e para a interação tratamentos principais x tratamentos secundários portaram-se como nos ensaios com parcelas subdivididas em blocos (completos) casualizados.

INTRODUÇÃO

O experimentos com parcelas subdivididas em blocos casualizados têm sido de grande utilidade na pesquisa agropecuária. No entanto, se por um lado os blocos casualizados são recomendáveis, por outro eles podem apresentar o inconveniente de fugir ao controle do experimentador, quando num ensaio com parcelas subdivididas o número de tratamentos secundários for relativamente grande. Ademais, existem imposições de caráter restritivo à formação dos blocos completos, como por exemplo quando se deseja testar um grande número de tratamentos em ensaios com suinos, conservando-se como tradicionalmente, o uso de leitegada como bloco. Assim como esta, existem inúmeras outras situações, na pesquisa agropecuária, que sugerem uma utilização menos restritiva da teoria dos ensaios em parcelas subdivididas, permitindo ao experimentador uma maior abrangência no tocante a suas aplicações: os ensaios em parcelas subdivididas delineados em blocos incompletos: Propôs-se, então, como um dos objetivos deste trabalho, o estudo dos casos delineados em blocos incompletos balanceados. Dada a extensão do tema, apresenta-se aqui, o estudo e a solução do sistema de equações normais.

DESENVOLVIMENTO TEÓRICO

Cabe ressaltar inicialmente, que a matriz de covariâncias adotada neste estudo é do tipo uniforme, que, conforme GEISSER (1963), pressupõe variâncias e covarian cias constantes. Desse modo, segundo GRAYBILL (1976), o método dos mínimos quadrados ordinários pode ser usado em lugar do método dos mínimos quadrados generalizado. Ademais, testes de homogeneidade e uniformidade são pré-requisitos básicos para a adequação do modelo proposto (IEMMA, 1981).

Tomando-se, como em CHAKRABARTI (1962), o modelo linear $Y = X\theta + \varepsilon$, obteve-se o sistema de equações normais $X'X\hat{\theta} = X'Y$. Onde, para **v** tratamentos principais, **a** blocos, **u** tratamentos secundários; X é a matriz dos coeficientes dos parâmetros, de dimensões (urv) x (v+a+u + +uv+1); θ é o vetor das soluções dos mínimos quadrados, para os efeitos dos parâmetros (v+a+u+uv+1) x (1); Y é o vetor dos valores observados, de dimensões (urv) x (1).

Partindo-se a matriz X em

$$X = [X_1 \mid X_2 \mid X_3 \mid X_4 \mid X_5]$$

onde X_1 é o vetor que envolve a média geral, de dimensões (urv) x (1); X_2 é a matriz dos coeficientes associados aos tratamentos principais, de dimensões (urv) x (v); X_3 é a matriz dos coeficientes associados aos blocos, de dimensões (urv) x (a); X_4 é a matriz dos coeficientes associados aos tratamentos secundários, de dimensões (urv) x (u) e X_5 é a matriz dos coeficientes associados aos pares $(tt^*)_{is}$, de dimensões (urv) x (uv); obteve-se:

$$\begin{bmatrix} n & x & y & z & w \\ x' & R & N & P & S \\ y' & N' & A & K & V \\ z' & P' & K' & U & H \\ w' & S' & V' & H' & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{m} \\ \hat{\tau} \\ \hat{\beta} \\ \hat{\tau}^* \\ \hat{\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G \\ T \\ B \\ T^* \\ \Delta \end{bmatrix} \qquad (1)$$

onde

$$n = X_1'X_1 = urv$$

$$x = X_1'X_2 = ur \, . \, \underset{(1)(v)}{E}$$

r = número de repetições dos tratamentos principais;

E = matriz cujos elementos são todos unitários

$y = X_1'X_3 = uk \cdot \underset{(1)(a)}{E}$; k=nº de parcelas por bloco;

$z = X_1'X_4 = rv \cdot \underset{(1)(u)}{E}$;

$w = X_1'X_5 = r \cdot \underset{(1)(uv)}{E}$;

$X_2'X_2 = R = ur \cdot I_{(v)}$; $I_{(v)}$ = matriz identidade (v) x (v);

$X_2'X_3 = N$, de dimensões (v) x (a), onde,

$$n_{ij} = \begin{cases} u, & \text{se o tratamento principal i ocorre no bloco j} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$X_2'X_4 = P = r \cdot \underset{(v)(u)}{E}$

$$X_2'X_5 = S = \underset{(v)}{}\begin{bmatrix} r & \dots & r & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & r & \dots & r & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & r & \dots & r \end{bmatrix}_{(uv)}$$

$X_3'X_3 = A = uk \cdot I_{(a)}$

$X_3'X_4 = K = k \cdot {}_{(a)}E_{(u)}$

$X_3'X_5 = V$, de dimensões (a) x (uv), onde

$$v_{j,is} = \begin{cases} 1, & \text{se } (tt^*)_{is} \text{ ocorre no bloco j} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$X_4'X_4 = U = rv \cdot I_{(u)}$

$X_4'X_5 = H = {}_{(u)}[\, r \cdot I_{(u)} \mid r \cdot I_{(u)} \mid \dots \mid r \cdot I_{(u)} \,]_{(uv)}$

$X_5'X_5 = L = r \cdot I_{(uv)}$

Ademais,

$\hat{\tau}' = [\hat{t}_1, \hat{t}_2, \ldots, \hat{t}_v]$; $\hat{\beta}' = [\hat{b}_1, \hat{b}_2, \ldots, \hat{b}_a]$;

$\hat{\tau}^{*\prime} = [\hat{t}_1^*, \hat{t}_2^*, \ldots, \hat{t}_u^*]$;

$\hat{\delta}' = [\widehat{tt}_{11}^*, \widehat{tt}_{12}^*, \ldots, \ldots, \widehat{tt}_{1u}^*, \ldots, \ldots, \widehat{tt}_{v1}^*, \widehat{tt}_{v2}^*, \ldots, \widehat{tt}_{vu}^*]$

E, também,

$G = X_1'Y$; $T' = Y'X_2 = [T_1, T_2, \ldots, T_v]$

$B' = Y'X_3 = [B_1, B_2, \ldots, B_a]$;

$T^{*\prime} = Y'X_4 = [T_1^*, T_2^*, \ldots, T_u^*]$;

$\Delta' = Y'X_5 = [TT_{11}^*, \ldots, TT_{vu}^*]$.

Efetuando-se, então, os produtos indicados em (1) e considerando-se as restrições dadas em COCHRAN & COX (1976) e PIMENTEL GOMES (1976), entre outros:

$$\sum_{i=1}^{v} \hat{t}_i = \sum_{j=1}^{a} \hat{b}_j = \sum_{s=1}^{u} \hat{t}_s^* = \sum_{i}^{v} (tt^*)_{is} = \sum_{s=1}^{u} (tt^*)_{is} = 0,$$

obtiveram-se

$$\left.\begin{array}{llr} n\hat{m} & = G & (2.1.) \\ x'\hat{m} + R\hat{\tau} + N\hat{\beta} & = T & (2.2.) \\ y'\hat{m} + N\hat{t} + A\hat{\beta} & = B & (2.3.) \\ z'\hat{m} \qquad\qquad + U\hat{\tau}^* & = T^* & (2.4.) \\ w'\hat{m} + S'\hat{\tau} + V'\hat{\beta} + H'\hat{\tau}^* + L\hat{\delta} & = \Delta & (2.5.) \end{array}\right\} \quad (2)$$

Assim, de (2.1.) resultou, para a média geral

$$\hat{m} = \frac{G}{urv} \qquad (\alpha.1)$$

Por sua vez, (2.2) e (2.3) portaram-se de modo análogo ao sistema de equações normais para ensaios em blocos incompletos balanceados, discutido em PIMENTEL GOMES (1967), resultando para efeitos de tratamentos principais ajustados para efeitos de blocos:

$$\hat{\tau} = M^{-1}Q \qquad (\alpha.2)$$

onde:

$$M^{-1} = \frac{K}{\lambda uv} I_{(v)} \quad ; \quad Q = T - NA^{-1}B$$

e λ = número de vezes em que um mesmo par de tratamentos principais ocorre no experimento.

Para tratamentos secundários obteve-se, de (2.4)

$$\hat{\tau}^* = U^{-1} (T^* - z'\hat{m}) \qquad (\alpha.3)$$

resultando, como de modo usual nos ensaios com parcelas subdivididas em blocos (completos) casualizados:

$$t^*_s = \frac{1}{rv} T^*_s - \hat{m} \qquad (\alpha.3.1)$$

Na determinação dos efeitos estimados dos pares $(tt^*)_{is}$ foram substituídos em (2.5) os valores de $\hat{\tau}$, β e $\hat{\tau}$; obtidos respectivamente em (2.2), (2.3) e (2.4), resultando:

$$\hat{\delta} = L^{-1} \begin{bmatrix} \Delta - S'R^{-1}T + (S'R^{-1}N - V')\ A^{-1}B - H'U^{-1}T^* + \\ + (V' - S'R^{-1}N)\ A^{-1}\ N'\hat{\tau} + \\ + (S'R^{-1}x' + H'U^{-1}z' + V'A^{-1}y' - S'R^{-1}NA^{-1}y' - w')\hat{m} \end{bmatrix}$$

e, efetuando-se, obteve-se

$$\delta = \frac{1}{r}\begin{bmatrix} TT^*_{11} \\ TT^*_{12} \\ \cdots \\ TT^*_{1u} \\ \cdots \\ \cdots \\ TT^*_{v1} \\ TT^*_{v2} \\ \cdots \\ TT^*_{vu} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tilde{m}_1 \\ \tilde{m}_1 \\ \cdots \\ \tilde{m}_1 \\ \cdots \\ \cdots \\ \tilde{m}_v \\ \tilde{m}_v \\ \cdots \\ \tilde{m}_v \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{m}^*_1 \\ \hat{m}^*_2 \\ \cdots \\ \hat{m}^*_u \\ \cdots \\ \cdots \\ \hat{m}^*_1 \\ \hat{m}^*_2 \\ \cdots \\ \hat{m}^*_u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{m} \\ \hat{m} \\ \cdots \\ \hat{m} \\ \cdots \\ \cdots \\ \hat{m} \\ \hat{m} \\ \cdots \\ \hat{m} \end{bmatrix}$$

onde $\tilde{m}_i$ refere-se ao efeito médio estimado do i - ésimo tratamento principal, sem o ajuste para o efeito de blocos.

Desse modo, o efeito estimado para um elemento qualquer $(tt^*)_{is}$, ficou:

$$\hat{\delta}_{is} = \frac{TT^*_{is}}{r} - \hat{m} - \tilde{t}_i - \hat{t}^*_s \qquad (\alpha.4)$$

onde $\tilde{t}_i = T_i/ur - \hat{m}$ é o efeito estimado do i-ésimo tratamento principal sem o ajuste para efeitos de blocos. É esse resultado é idêntico àqueles obtidos para efeitos estimados dos pares $(tt^*)_{is}$, nos ensaios com parcelas subdivididas delineados em blocos (completos) casualizados.

CONCLUSÕES

a) O modelo matemático tradicionalmente adotado para ensaios em parcelas subdivididas com tratamentos principais dispostos em blocos (completos) casualizados, foi adotado para o delineamento aqui proposto, sem apresentar desvantagens aparentes.

b) O sistema de equações normais apresentou solução análoga aos casos de delineamentos completos: comportou-se como nos ensaios em blocos incompletos balanceados quando das estimativas dos efeitos de tratamentos principais ajustados para efeitos de blocos e, como nos ensaios em parcelas subdivididas em blocos (completos) casualizados, quando das estimativas dos efeitos de tratamentos secundários e dos efeitos de interação tratamentos principais x tratamentos secundários.

SUMMARY

A STUDY OF SPLIT PLOT DESIGN IN BALANCED IN COMPLETE BLOCKS

This paper deals with the study of split plot design in balanced incomplete blocks in order to increase the usage of such designs in the agricultural research. The mathematical model adopted was the one traditionally used in the complete design. The presence of constant correlation between two subplots of the same plot and the subplots of distinct plots were considered as well. The estimates of the main treatments adjusted by block effects were analogous to those found in the literature of the balanced incomplete block design, while the other estimates were analogous to the correspondent ones in the split plot randomized block design.

LITERATURA CITADA

CHAKRABARTI, M.C., 1962. **Mathematics of design and analysis of experiments**, 1ª ed., Asia Publishing House, London, 120pp.

COCHRAN, W.G.; COX, G.M., 1976. **Diseños experimentales**, 3ª ed., Trillas, Mexico, 661pp.

GEISSER, S., 1963. Multivariate analysis of variance for a special case. Jour. Am. Stat. Assoc. **58**: 660-669.

GRAYBILL, F.A., 1976. **Theory and application of the linear models**, 2ª ed., Duxbury Press, Massachusetts, 703pp.

IEMMA, A.F., 1981. **Análise de experimentos em parcelas subdivididas com tratamentos principais dispostos em blocos incompletos balanceados**, Piracicaba, ESALQ/USP, 145pp. (Tese de Doutoramento).

PIMENTEL GOMES, F., 1967. The solution of normal equations of experiments in incomplete blocks. Cência e Cultura **20**: 733-746.

PIMENTEL GOMES, F., 1976. **Curso de Estatística Experimental**. 6ª ed., Nobel, Piracicaba, 430pp.

RAO, C.R., 1952. **Advanced statistical methods in biometric research**, 1ª ed., Macmillan Publishing Co, New York, 390pp.