ELIPSÓIDES CONCÍCLICOS *

IBRAHIM OCTAVIO ABRAHÃO **
ARARY MARCONI **

RESUMO

Estudam-se as equações que representam o conjunto de elipsóides de mesmo ângulo 2V entre suas secções cíclicas. Um processo teórico de determinação dos índices de refração principais é estabelecido e aplicado à indicatriz ótica de forsterita.

INTRODUÇÃO

A um elipsóide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}= 1$ corresponde um determinado ângulo 2V entre suas secções cíclicas. Entretanto, a um dado 2V corresponde um conjunto infinito de elipsóides que possuem esse ângulo entre suas secções cíclicas. A questão assume importância quando se atribuem aos semi-eixos principais valores de índices de refração. É princípio básico da Mineralogia Ótica: a cada espécie mineral pode ser atribuído um elipsóide de índices de refração (indicatriz ótica) $\frac{x^2}{Np^2} + \frac{y^2}{Nm^2} + \frac{z^2}{Ng^2} = 1$ $(Np < Nm < Ng)$ que explica a maior parte de suas propriedades em secção delgada, no microscópio de polarização.

O método analítico, desenvolvido por CHOMARD, estabelece uma marcha de cálculo, baseada em medições de ângulos de extinção e de birrefrigências, mediante a qual é possível determinar a grandeza e a orientação da indicatriz ótica de um mineral dado em secção delgada arbitrária. O princípio analítico do método consiste precisamente no estudo do conjunto

* Entregue para publicação em 30/08/1974.
** Departamento de Solos e Geologia -- ESALQ — USP.

de elipsóides de mesmo 2V, do qual se determina aquele cuja secção está no microscópio.

O presente trabalho trata do estudo analítico dos elipsóides que admitem o mesmo ângulo 2V e de um processo que permite, teoricamente, determinar os índices de refração principais de um mineral em secção delgada.

FAMÍLIAS DE ELIPSÓIDES DE MESMO ÂNGULO 2V

De um modo geral, os trabalhos de Geometria Analítica no espaço tratam das superfícies de segundo grau e do ângulo entre as suas secções cíclicas, mas não cogitam de determinar a família de superfícies que têm o mesmo ângulo entre essas secções.

CARNOY, 1877, estabelece para o que chama de **superfícies concíclicas** a equação $(a^2 + k)x^2 + (b^2 + k)y^2 + (c^2 + k)z^2 = 1$. Assim, dada uma indicatriz, basta somar ao quadrado do inverso dos índices de refração (velocidades principais) uma constante k para se obter um elipsóide de mesmo ângulo 2V.

CHOMARD, 1932, fundamenta toda a teoria de seu método na equação que representa a «dupla infinidade de elipsóides de mesmo 2V» e cuja expressão é $x^2 + y^2 + z^2 - Nm^2 - \lambda\ (jx + my + nz)\ (j'x + m'y + n'z) = 0$, em que Nm é o índice de refração médio do mineral, j, m, n e j', m', n' são os cosenos diretores das normais aos planos cíclicos (eixos óticos). Por tanto, $jx + my + nz = 0$ e $j'x + m'y + n'z = 0$ são os próprios planos cíclicos. O fator λ é arbitrário e para $\lambda = 0$ o elipsóide se reduz à esfera de raio Nm.

ABRAHÃO, 1968, aplica o método analítico a plagioclásios e estuda as famílias de elipsóides concíclicos. A dupla infinidade de elipsóides de mesmo 2V a que CHOMARD se refere pode ser deduzida com facilidade.

Com feito, tomemos o elipsóide de equação $\dfrac{x^2}{Np^2} + \dfrac{y^2}{Nm^2} + \dfrac{z^2}{Ng^2} = 1.$

Na fig. 1, OS e OS' são os traços dos planos cíclicos sobre xz e A_1 e A_2, normais a esses planos, são os eixos óticos.

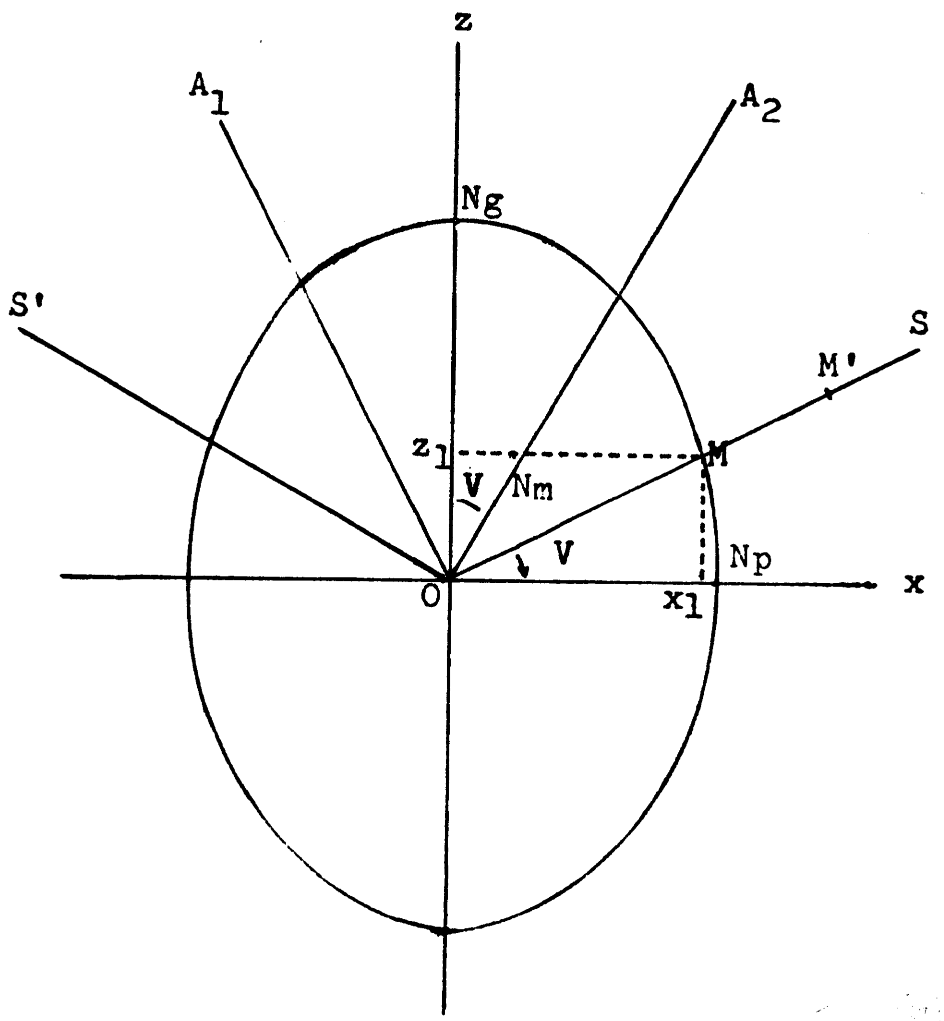

Fig. 1

A um mesmo Nm, corresponde uma infinidade de elipsóides de mesmo 2V, variando apenas Np e Ng. Há infinitos pares de Np e Ng, dentro da exigência Np<Nm<Ng. A cada um desses pares corresponde uma elipse de equação geral:

$$\frac{x^2}{Np^2} + \frac{z^2}{Ng^2} = 1$$

Para que o 2V de todos esses elipsóides seja o mesmo, é necessário e suficiente que todas essas elipses se cortem no ponto M, de um círculo de raio Nm, isto é, essas elipses devem satisfazer às coordenadas (x_1, z_1) de M, ou:

$$\frac{Nm^2 \cos^2 V}{Np^2} + \frac{Nm^2 \operatorname{sen}^2 V}{Ng^2} = 1, \text{ de onde obtem-se:}$$

$$Ng = \pm \frac{NpNm \operatorname{sen} V}{\sqrt{Np^2 - Nm^2 \cos^2 V}} \text{ e } Np = \pm \frac{NmNg \cos V}{\sqrt{Ng^2 - Nm^2 \operatorname{sen}^2 V}}$$

Para que Ng e Np sejam reais, é necessário que $Np > x_1$ e $Ng > z_1$. Tem-se, assim, que a variação possível de Ng é de z_1 a $\pm \infty$, o que corresponde a uma variação de Np de $\pm \infty$ a x_1.

É necessário que Np $\leqq$ Nm e Ng $\geqq$ Nm. No caso limite em que Np = Nm (ou Ng = Nm) tem-se Ng = Nm (ou Np = Nm). Neste caso, o elipsóide se reduz a esfera de raio Nm.

Há, pois, para um mesmo Nm, infinitos elipsóides de mesmo 2V, nos nos quais têm-se as variações possíveis:

$Np = x_1$	Nm	$Ng = \pm \infty$
Np_1	Nm	Ng_1
Np_2..	Nm	Ng_2
.	.	.
.	.	.
.	.	.
Np = Nm	Nm	Ng = Nm

A um dado Nm, portanto, corresponde $x^2 + y^2 + z^2 = Nm^2$, esfera de raio Nm e $\frac{x^2}{Np^2} + \frac{y^2}{Nm^2} + \frac{z^2}{Ng^2} = 1$, elipsóides de mesmo 2V e mesmo Nm.

Por outro lado,

$$tg^2V = \frac{Np^2}{Ng^2} \cdot \frac{Ng^2 - Nm^2}{Nm^2 - Np^2} = \frac{Np^2}{Ng^2} \cdot \frac{(Ng - Nm)\,(Ng + Nm)}{(Nm - Np)\,(Nm + Np)}$$

Multiplicando e dividindo por k^4, obtem-se $tg^2V = \frac{Np'^2}{Ng'^2} \cdot \frac{Ng'^2 - Nm'^2}{Nm'^2 - Np'^2}$

em que Np' = kNp, Nm' = kNm e Ng' = kNg. Portanto, se Np, Nm e Ng são multiplicados pelo mesmo valor, o ângulo 2V não se altera. Em conseqüência, multiplicando-se os índices principais de todos os elipsóides possíveis dentro de um mesmo Nm por k, obtem-se um novo conjunto de elipsóides de mesmo 2V, passando por M', ponto sobre OS.

Há, pois, infinitos elipsóides de mesmo 2V para cada Nm e o fator k permite gerar infinitos Nm. Eis porque se afirma que o conjunto de elipsóides de mesmo 2V é representado por uma dupla infinidade: os de mesmo Nm e os de Nm diferentes.

3. APLICAÇÃO E EXEMPLO

No desenvolvimento do método analítico, obtem-se, para os três índices de refração principais:

$$N_1^2 = \frac{Nm^2}{1 + 4\lambda\, sen^2V}$$

$$N_2^2 = Nm^2 \qquad (1)$$

$$N_3^2 = \frac{Nm^2}{1 - 4\lambda \cos^2V}$$

Se $N_1 < N_3$, $N_1 = N_p$ e $N_3 = Ng$ e vice-versa. O problema consiste na determinação de Nm e λ. Se λ é calculado previamente e Nm é medido com suficiente precisão por um método qualquer, determinam-se Np e Ng por (1) e toda a indicatriz é conhecida.

O método analítico permite calcular, usando-se exclusivamente ângulos de extinção, o valor de V, os ângulos diretores (j, m, n) e (j', m' e n') dos eixos óticos A_1 e A_2 e o valor de $C = \frac{1}{2(jj' - mm')} = \frac{\lambda\, Nm}{r}$, em que r é a birrefringência da secção na posição incial do método ($\varnothing = 0$, $\theta = 0$ e $\psi = 0$). Por outro lado, determina-se que, aproximadamente $2\lambda\, Nm = Ng - Np$.

Tomando valores arbitrários para Nm, determinam-se os respectivos Np e Ng. Para cada Nm obtem-se, assim, um elipsóide pertencente à família de elipsóides com o mesmo ângulo 2V entre as secções cíclicas. Como o objetivo é determinar a indicatriz de um mineral no microscópio, o elipsóide procurado, entre os infinitos possíveis, será o que tiver ângulo 2V e Nm tais que $Ng - Np = 2\lambda\, Nm = 2Cr$.

Tomemos a secção (100) de forsterita, perpendicular à bissetriz aguda (fig. 2). Os eixos x, y e z são os do método analítico.

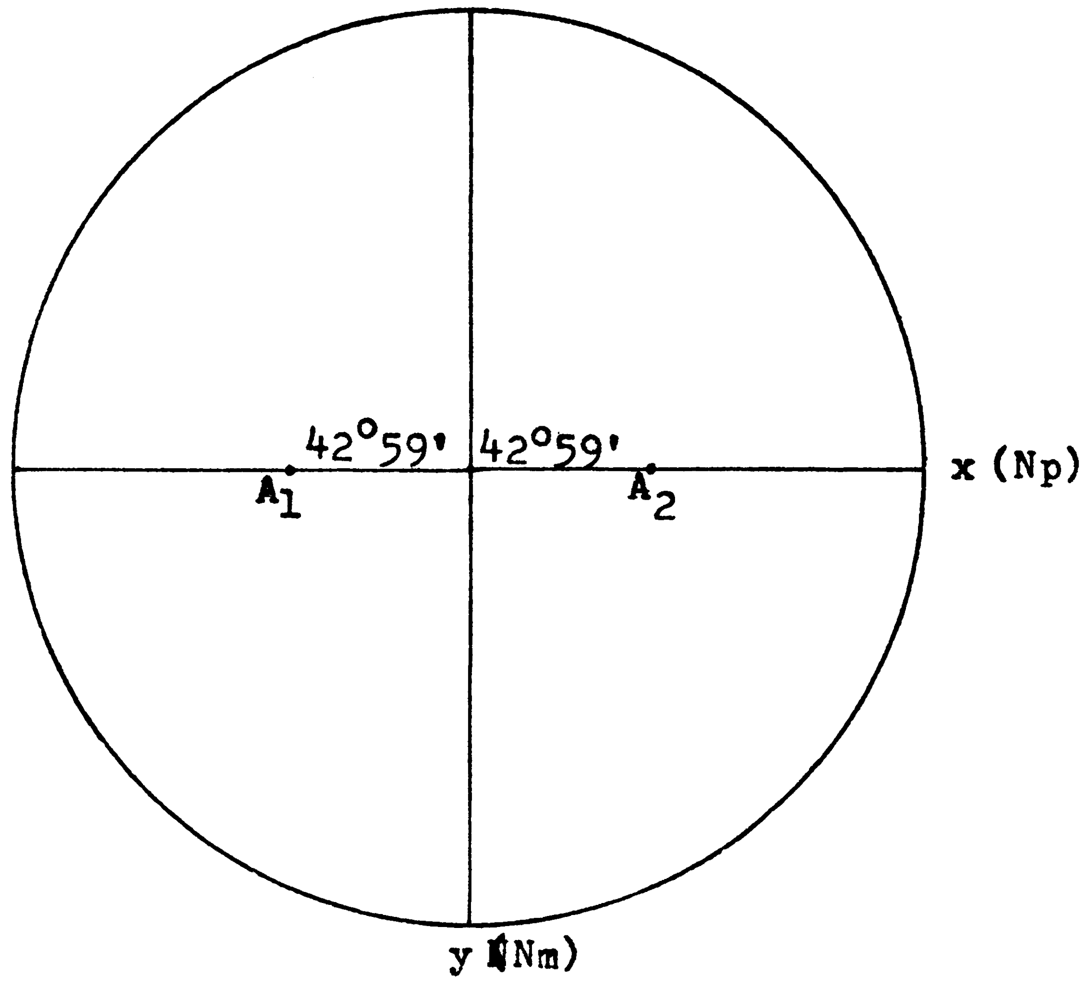

Fig. 2

Embora na prática se considere 2V = 85° a 90° (KERR, 1959), utilizaremos o valor obtido analiticamente a partir dos índices de refração principais: Np = 1,635, Nm = 1,651 e Ng = 1,670 (KERR, 1959, BLOSS, 1970, ABRAHÃO, 1972).

$$\text{tg } V = \pm \frac{Ng}{Np} \sqrt{\frac{Nm^2 - Np^2}{Ng^2 - Nm^2}} = \pm\ 1{,}02141 \text{ ou } V = 42°59'$$

O exame da figura 2 mostra que:

$$C = \frac{1}{2(jj' - mm')} = - \frac{1}{0{,}92968}$$

Como λ Nm tem o sinal do mineral (CHOMARD, 1932):

$$\lambda\ Nm = \frac{0{,}016}{0{,}92968} = 0{,}01721$$

Atribuindo-se valores arbitrários a Nm, determinam-se elipsóides de ângulo V = 42°59'. Cada elipsóide terá um valor próprio de Ng — Np. A indicatriz de forsterita será aquela em que Ng — Np = 2 x 0,01721. Com efeito, fazendo Nm = 1,651, obtem-se Np = 1,63524 e Ng = 1,66973 e Ng — Np = 0,01720.

CONCLUSÕES

4.1. Multiplicando-se os índices de refração principais de um elipsóde pelo mesmo número obtem-se um elipsóide de mesmo 2V. Geram-se, assim, infinitos elipsóides de mesmo Nm.

4.2. Para cada Nm gerado exstem infinitos elipsóides de mesmo 2V.

4.3. É possível, teoricamente, determinar os valores de Np, Nm e Ng de um mineral dado em secção delgada por via analítica.

4.4. Recomenda-se a pesquisa, nas condições da platina universal, da viabilidade prática do procedimento teórico.

SUMMARY

CONCYCLIC ELLIPSOIDS

Equations representing a set of ellipsoids of same 2V angle between their cyclic sections are studied. A theoretical process for the determination of the main refraction indexes is proposed. Its application is demonstrated by determining the optical indicatrix of forsterite.

LITERATURA CITADA

ABRAHÃO, I. O. Contribuição ao estudo do método analítico de Chomard. Tese de livre-docência apresentada à ESALQ, USP, 1968, 132 pp.

ABRAHÃO, I. O. — Princípios de Mineralogia Ótica. Apostila impressa no Departamento de Solos e Geologia, ESALQ, USP, 1972, 77 pp.

BLOSS, F. D. — Introdución a los Métodos de Cristalografia Optica. Ediciones Omega, S. A., Barcelona, 1970, 320 pp.

CARNOY, J. — Cours de Géometrie Analytique, 2.ª edição, Ganthier-Villars, Paris, 1887, 516 pp.

CHOMARD, L. — Theorie et Pratique de la Methode Fedorow. Procedé Classique et Méthode Analytique Générale, Dunod, Paris, Annales des Mines, Tomo V, 153-218.

KERR, P. F. — Optical Mineralogy. McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1959, 442 pp.