

AS FÓRMULAS DE EULER EM PROJEÇÃO ESTEREOGRÁFICA E SEU SIGNIFICADO FÍSICO NO LEVANTAMENTO DE INDICATRIZES.ÓTICAS*

IBRAHIM OCTAVIO ABRAHÃO**
ARARY MARCONI**

RESUMO

As fórmulas de Euler são deduzidas a partir de triângulos esféricos obtidos da representação estereográfica das rotações φ , θ , Ψ . Um exemplo de aplicação a uma secção arbitrária de gipsita é incluído.

INTRODUÇÃO

As fórmulas de Euler, clássicas no capítulo de transformação de coordenadas, podem ser ligadas ao fenômeno ótico de extinção e aplicadas, então, no levantamento da indicatriz ótica de minerais, dados em secção delgada. Tal é, precisamente, a base do método analítico desenvolvido por CHOMARD (1934). A intenção principal deste trabalho é apresentar a dedução das fórmulas de Euler, a partir da representação estereográfica de triângulos esféricos.

MUDANÇA DE EIXOS EM PROJEÇÃO ESTEREOGRÁFICA

Sejam OXYZ e Oxyz dois sistemas coordenados coinciais. O problema de transformação de coordenadas consiste em exprimir as coordenadas (X', Y', Z') de um ponto no sistema OXYZ em função das coordenadas (x', y', z') do mesmo ponto no sistema Oxyz.

Sejam (a, b, c), (a', b', c') e (a'', b'', c'') os co-senos dos ângulos de Ox, Oy e Oz com OX, OY e OZ, respectivamente. Se os dois sistemas são retangulares, demonstra-se que (NIEWENGLOWSKI, 1914):

$$\begin{array}{lcl} X' = ax' + a'y' + a''z' & & x' = aX' + bY' + cZ' \\ Y' = bx' + b'y' + b''z' & e & y' = a'X' + b'Y' + c'Z' \\ Z' = cx' + c'y' + c''z' & & z' = a''X' + b''Y' + c''Z' \end{array}$$

equações de transformação a que se ligam as expressões:

$$\begin{array}{lcl} ab + a'b' + a''b'' = 0 & & a^2 + a'^2 + a''^2 = 1 \\ ac + a'c' + a''c'' = 0 & e & b^2 + b'^2 + b''^2 = 1 \\ bc + b'c' + b''c'' = 0 & & c^2 + c'^2 + c''^2 = 1 \end{array}$$

* Entregue para publicação em 19/12/1975.

** Departamento de Solos e Geologia, ESALQ – USP.

Representemos os dois sistemas em projeção estereográfica (fig. 1). Seja OJ perpendicular a zZ, o traço da intersecção do plano XY sobre xy. Os ângulos de Euler são definidos da seguinte maneira (CHOMARD, 1934):

- 1 – Ψ , rotação ao redor de OZ, que leva OX à coincidência com OJ;
- 2 – θ , rotação ao redor de OJ, que leva OZ à coincidência com Oz;
- 3 – φ , rotação ao redor de Oz, que leva OX à coincidência com Ox.

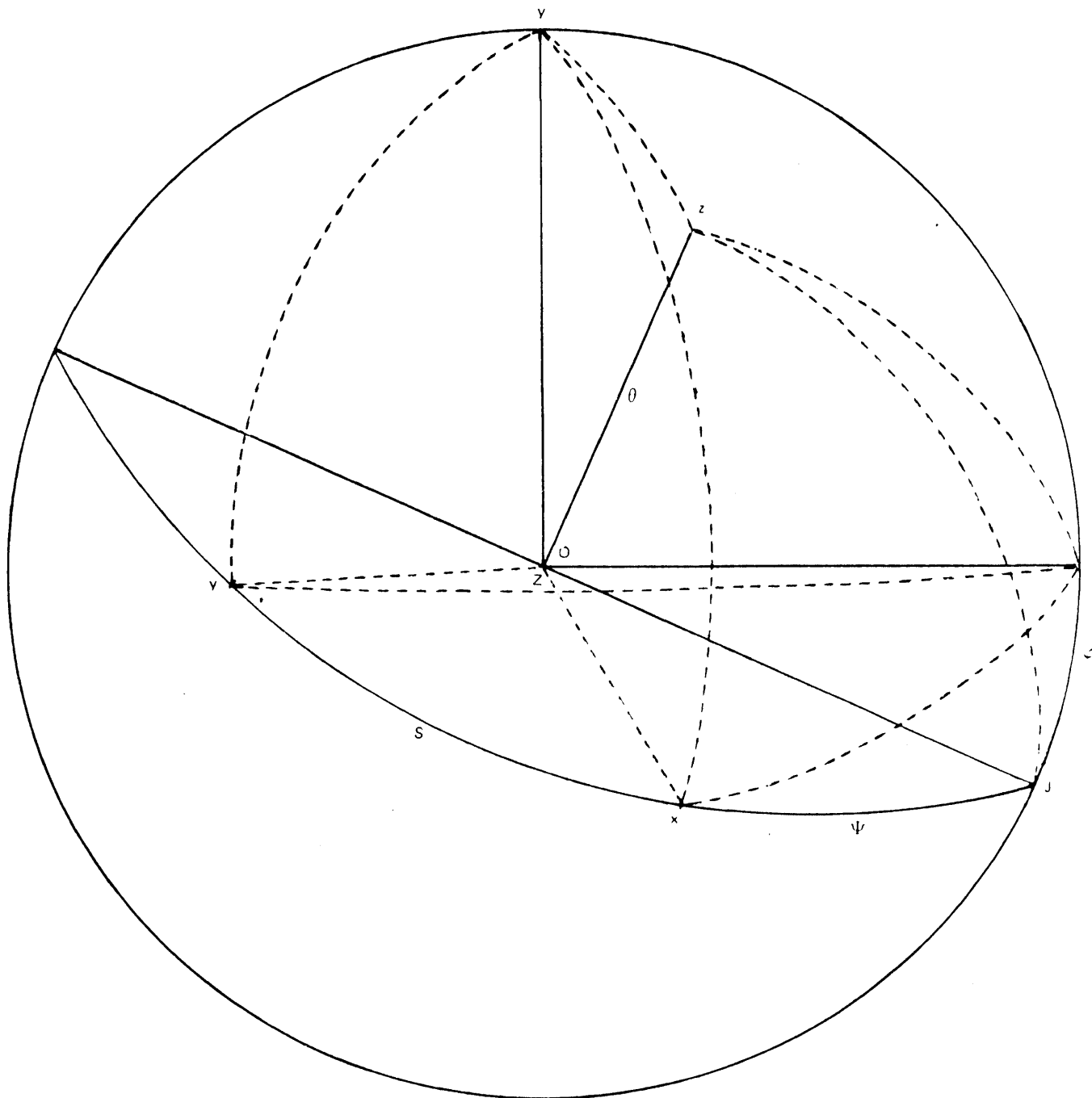


Figura 1 – Rotações de Euler para levar OXYZ a coincidência com Oxyz e respectivos triângulos esféricos, em projeção estereográfica.

As três rotações φ , θ , Ψ , são independentes e constituem os parâmetros de liberdade de um sistema com relação a outro. O sistema Oxyz pode ser levado à coincidência com OXYZ mediante rotações inversas, isto é, $-\varphi$, $-\theta$, $-\Psi$. Convencionalmente, o sentido positivo de Ψ é tomado de OX para OJ, o de φ de OJ para Ox e o de θ de OZ para Oz.

A platina universal permite executar, no microscópio, as rotações de Euler. CHOMARD (1934) adota as notações seguintes:

- Oxyz é um sistema retangular qualquer em um mineral, em secção delgada;
- OX e OY são as direções de vibração do polarizador e do analisador;
- OZ é o eixo do microscópio;
- S, plano XOY, de pólo Z, é a platina do microscópio.

OXYZ é, pois, um sistema fixo no microscópio e o sistema Oxyz do mineral movimentá-se segundo (φ, θ, Ψ) para ser levado à coincidência com OXYZ.

É precisamente este o contexto do método analítico: atribuído significado físico aos eixos é possível estabelecer uma relação imediata entre as rotações de Euler e o fenômeno de extinção, o que acaba por conduzir ao levantamento analítico da indicatriz ótica do mineral.

DEDUÇÃO DAS FÓRMULAS DE EULER

As expressões que estabelecem relação entre φ , θ e Ψ e as nove constantes de transformação de coordenadas (fórmulas de Euler) podem ser obtidas por meio da trigonometria esférica. Com efeito, apliquemos aos triângulos esféricos da fig. 1 a expressão fundamental da lei dos co-senos dos lados (WENTWORTH e SMITH, 1915):

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A$$

Obtém-se, então:

1 – No triângulo xXJ:

$$a = \cos(xX) = \cos \varphi \cdot \cos \Psi + \sin \varphi \cdot \sin \Psi \cdot (-\cos \theta)$$

$$\text{ou } a = \cos \varphi \cdot \cos \Psi - \sin \varphi \cdot \sin \Psi \cdot \cos \theta$$

2 – No triângulo xYJ:

$$b = \cos(xY) = \cos \varphi \cdot \cos(90^\circ + \Psi) + \sin \varphi \cdot \sin(90^\circ + \Psi) \cdot (-\cos \theta)$$

$$\text{ou } b = -\cos \varphi \cdot \sin \Psi - \sin \varphi \cdot \cos \Psi \cdot \cos \theta$$

ou tomando a parte aguda de xY:

$$b = \cos \varphi \cdot \sin \Psi + \sin \varphi \cdot \cos \Psi \cdot \cos \theta$$

3 – No triângulo xZJ:

$$c = \cos (xZ) = \cos \varphi \cdot \cos 90^{\circ} + \operatorname{sen} \varphi \cdot \operatorname{sen} 90^{\circ} \cdot \cos (xJZ)$$

$$\text{ou, como } \cos (xJZ) = \cos (90^{\circ} - \theta) = \operatorname{sen} \theta,$$

$$c = \operatorname{sen} \varphi \cdot \operatorname{sen} \theta$$

4 – No triângulo yXJ:

$$a' = \cos (yX) = \cos \Psi \cdot \cos (90^{\circ} + \varphi) + \operatorname{sen} \Psi \cdot \operatorname{sen} (90^{\circ} + \varphi) \cdot (-\cos \theta)$$

$$\text{ou } a' = -\cos \Psi \cdot \operatorname{sen} \varphi - \operatorname{sen} \Psi \cdot \cos \varphi \cdot \cos \theta$$

5 -- No triângulo yYJ:

$$b' = \cos (yY) = \cos (90^{\circ} + \varphi) \cdot \cos (90^{\circ} + \Psi) + \operatorname{sen} (90^{\circ} + \varphi) \cdot \operatorname{sen} (90^{\circ} + \Psi) \cdot (-\cos \theta)$$

ou, tomando a parte aguda de yX:

$$b' = -\operatorname{sen} \varphi \cdot \operatorname{sen} \Psi + \cos \varphi \cdot \cos \Psi \cdot \cos \theta$$

6 – No triângulo yZJ:

$$c' = \cos (yZ) = \cos 90^{\circ} \cdot \cos (90^{\circ} + \varphi) + \operatorname{sen} 90^{\circ} \cdot \operatorname{sen} (90^{\circ} + \varphi) \cdot \cos (90^{\circ} - \theta)$$

$$\text{ou } c' = \cos \varphi \cdot \operatorname{sen} \theta$$

7 – No triângulo zXJ:

$$a'' = \cos (zX) = \cos \Psi \cdot \cos 90^{\circ} + \operatorname{sen} \Psi \cdot \operatorname{sen} 90^{\circ} \cdot \cos (90^{\circ} - \theta)$$

$$\text{ou } a'' = \operatorname{sen} \Psi \cdot \operatorname{sen} \theta$$

8 – No triângulo zYJ:

$$b'' = \cos (zY) = \cos (90^{\circ} + \Psi) \cdot \cos 90^{\circ} + \operatorname{sen} (90^{\circ} + \Psi) \cdot \operatorname{sen} 90^{\circ} \cdot \cos (90^{\circ} - \theta)$$

$$\text{ou } b'' = -\cos \Psi \cdot \operatorname{sen} \theta$$

9 – No triângulo zZJ, ou diretamente:

$$c'' = \cos \theta$$

EXEMPLO

Cada conjunto (φ, θ, Ψ) efetuado no microscópio é uma operação de extinção. Na prática, isso significa levar uma secção à extinção e efetuar, nos eixos VE e EW da platina as rotações φ e θ , arbitrárias. A extinção será desfeita e a rotação efetuada ao redor de OZ para restituí-la é o ângulo de extinção Ψ . Em cada operação de extinção há, pois apenas a medição de Ψ .

Tomemos uma secção arbitrária de gipsita, $2V = 58^\circ (+)$ (fig. 2). Por meio da construção de Biot-Fresnel, levemos a secção a qualquer de suas posições de extinção. Tem-se, então, $\varphi = \theta = \Psi = 0$. Efetuemos $\theta = 30^\circ$, $\varphi = 60^\circ$, localizemos as novas posições dos planos bissetores e determinemos Ψ (fig. 2). Obtém-se:

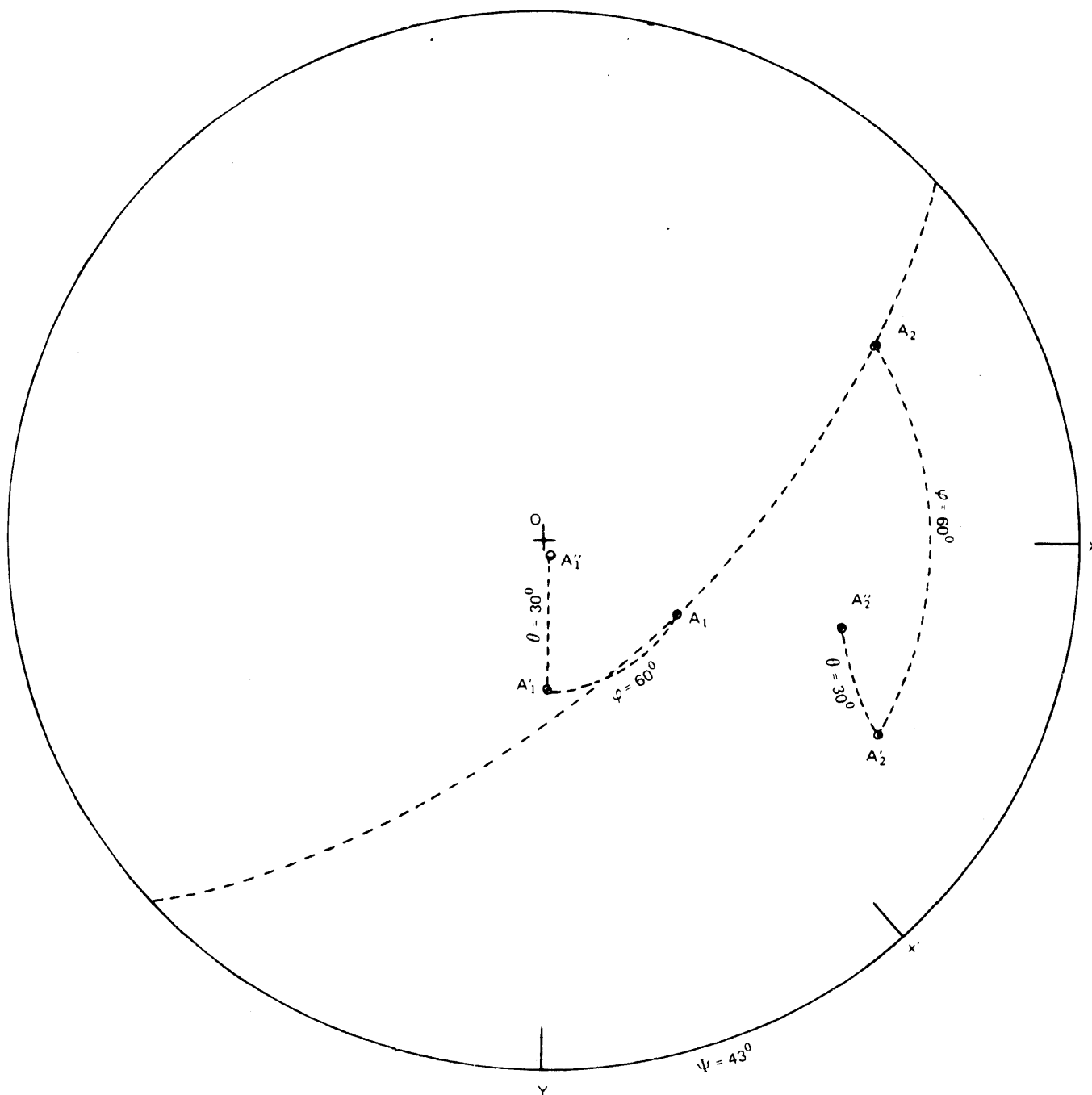


Figura 2 — Operação de extinção $\varphi = 60^\circ$, $\theta = 30^\circ$, $\Psi = 43^\circ$ em secção de gipsita ($2V = 58^\circ$).

$A_1 A_2$ = localização dos eixos óticos em posição inicial de extinção.

$A'_1 A'_2$ = localização dos eixos óticos após rotação $\varphi = 60^\circ$.

$A''_1 A''_2$ = localização dos eixos óticos após rotação $\varphi = 60^\circ$ $\theta = 30^\circ$.

Ox = traço do plano bissetor de $A_1 A_2$.

Ox' = traço do plano bissetor de $A'_1 A'_2$.

$\theta = 30^{\circ}$	$a = -0,1458$	$b = 0,8895$	$c = 0,4330$
$\varphi = 60^{\circ}$	$a' = -0,9287$	$b' = -0,2739$	$c' = 0,2500$
$\Psi = 43^{\circ}$	$a'' = 0,3410$	$b'' = 0,3657$	$c'' = 0,8660$

Esses são os valores necessários à aplicação do método analítico. Apenas três operações de extinção resolvem o problema de determinar a posição dos índices de refração principais e o valor do ângulo $2V$. É nesse contexto que o método vem sendo aplicado com êxito por ABRAHÃO (1968, 1971, 1974 a,b) e ABRAHÃO e MARCONI (1974, 1975a, b, c).

SUMMARY

The Euler's formulas are derived from spherical triangles which were obtained from the stereographic representation of the φ , θ and Ψ rotations. An example of its application is given for an arbitrary thin section of gypsum.

LITERATURA CITADA

- ABRAHÃO, I.O., 1968. Contribuição ao Estudo do Método Analítico de Chomard. Tese de Livre-Docência, ESALQ, USP, 132 p.
- ABRAHÃO, I.O., 1971. Determinação do Ângulo $2V$ de Plagioclásios pelo Método Analítico com Valores de φ Múltiplos de 90° . Anais da ESALQ, USP, 28: 69-81.
- ABRAHÃO, I.O., 1974a. Determinação de $2V$ em Plagioclásios pelo Método Analítico com Valores de φ Múltiplos de 45° . Anais da ESALQ, USP, 31: 19-33.
- ABRAHÃO, I.O., 1974b. Sobre a Determinação do Ângulo de Extinção para Aplicação do Método Analítico. Anais da ESALQ, USP, 31.
- ABRAHÃO, I.O. e MARCONI, A., 1974. Elipsóides Concíclicos. Anais da ESALQ, USP, 31: 225-231.
- ABRAHÃO, I.O. e MARCONI, A., 1975a. Determinação Analítica da Indictriz Ótica de Minerais. Anais da ESALQ, USP, 32.
- ABRAHÃO, I.O. e MARCONI, A., 1975b. Sobre a Determinação Analítica da Indictriz Ótica de Anidrita. Anais da ESALQ, USP, 32.
- ABRAHÃO, I.O. e MARCONI, A., 1975c. Aplicação do Método Analítico à Indictriz Uniaxial. Anais da ESALQ, USP, 32.
- CHOMARD, L., 1934. Théorie et Pratique de la Méthode Fédorow. Procédé Classique et Méthode Analytique Générale. Dunod, Paris. Annales des Mines, 5: 153-218.
- NIEWENGLOWSKI, B., 1914. Cours de Géométrie Analytique. Tomo III, Gauthier-Villars, Paris, 608 pp.
- WENTHWORTH, G. e SMITH, D.E., 1915. Plane and Spherical Trigonometry. Ginn and Co. Boston, USA, 334 pp.