SÔBRE A FÓRMULA: $\cos a = \cos b \cdot \cos c + \operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} c \cdot \cos A$*

EDUARDO A. SALGADO

E. S. A. "LUIZ DE QUEIROZ"

1. INTRODUÇÃO

A fórmula acima, de largo uso em trigonometria esférica, pode ser obtida da projeção gnomônica, como se verá.

2. DEDUÇÃO

Um triângulo esférico, gnomonicamente representado, é um triângulo retilíneo que, após uma rotação e um rebatimento adequados, pode ser colocado na posição da figura 1, ficando o vértice A no centro do plano de projeção, coincidindo com o polo N da esfera, a qual tem centro em O e raio igual à unidade.

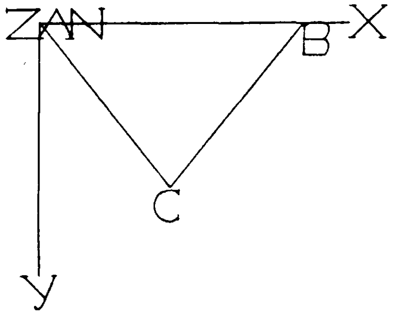

FIGURA 1

Tome-se um sistema retangular de eixos coordenados ZYX, cujo centro coincide com o polo N da esfera, ficando XY no plano a ela tangente no ponto N e coincidindo X com o lado AB do tiângulo.

Os quatro pontos A, B, C, O têm, respectivamente, para coordenadas:

$$0,\ 0,\ 0;\ x_2,\ 0,\ 0;\ x_3,\ y_3,\ 0;\ 0,\ 0,\ -1$$

* *Recebido para publicação em 17/7/62.*

Tem-se: $y = 0$, equação do plano OAB; $x_3 y - x y_3 = 0$, idem do plano OAC.

Designando por A o ângulo formado pelos planos OAB e OAC, obtem-se :

$$\cos A = \frac{x_3}{\sqrt{x^2_3 + y^2_3}} = \frac{x_3}{\sqrt{D}}, \quad \text{sendo } D = x^2_3 + y^2_3$$

As retas AB, AC, BC, OB, OC têm, respectivamente, os seguintes comprimentos:

$$x_2 \,;\; \sqrt{x^2_3 + y^2_3} \,;\; \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + y^2_3} \,;\; \sqrt{x^2_2 + 1} \,;\; \sqrt{1 + x^2_3 + y^2_3} \qquad (1)$$

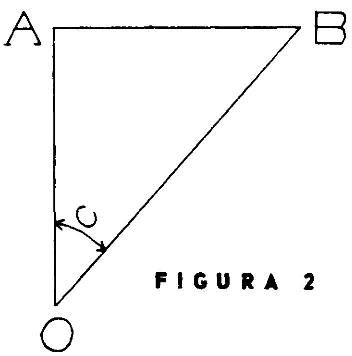

FIGURA 2

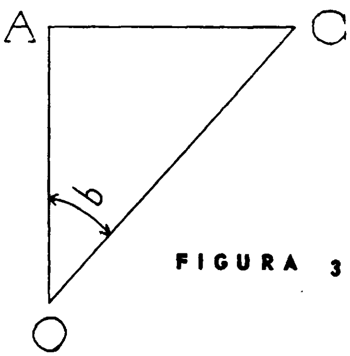

FIGURA 3

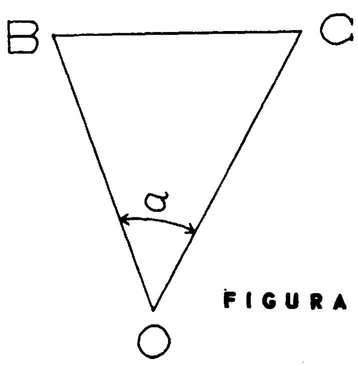

FIGURA 4

No triângulo retângulo OAB (figura 2), obtem-se :

$$\text{senc} = \frac{x_2}{\sqrt{E}} , \quad \text{cosc} = \frac{1}{\sqrt{E}} , \quad \text{sendo} \quad E = x_2^2 + 1$$

Do triângulo retângulo OAC (figura 3) tira-se :

$$\text{senb} = \frac{\sqrt{D}}{\sqrt{1+D}} , \quad \text{cosb} = \frac{1}{\sqrt{1+D}} , \quad \text{sendo} \quad D = x_3^2 + y_3^2$$

No triângulo OBC (figura 4), obtem-se :

$$\text{cosa} = \frac{\overline{OB}^2 + \overline{OC}^2 - \overline{BC}^2}{2 \cdot OB \cdot OC}$$

Substituindo, nesta expressão, OB, OC, BC pelos valô res assinalados em (1), tem-se:

$$\text{cosa} = \frac{1 + x_2 x_3}{\sqrt{E (1 + D)}}$$

Podemos escrever a seguinte igualdade :

$$\frac{1 + x_2 x_3}{\sqrt{E (1 + D)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + D}} \times \frac{1}{\sqrt{E}} + \frac{\sqrt{D}}{\sqrt{1 + D}} \times \frac{x_2}{\sqrt{E}} \times \frac{x_3}{\sqrt{D}}$$

Levando em conta o que foi determinado anterior mente, transforma-se esta expressão em :

$$\text{cosa} = \text{cosb} \ . \ \text{cos} + \text{senb} \ . \ \text{senc} \ . \ \text{cos A}$$

3. SUMÁRIO

Por meio da projeção gnomônica, o autor apresenta uma dedução da fórmula geral de resolução de triângulos esféricos.

4. SUMMARY

Using the gnomonic projection, the author presents a deduction of the general formula to solve spherical triangles .

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. BOEKE, H.E. - Die gnomonische Projektion in ihrer Anwendung auf kristallographische Aufgaben. Berlin, Verlag Gebrüder Borntraeger, 1913.

2. WENTWORTH, G. & SMITH, D. E. - Plane and spherical trigonometry. New York, Ginn and Company , s. d.