Sôbre as ordens infinitesimais

Frederico Pimentel Gomes

Assistente interino da 16.a cadeira

ÍNDICE

1. — INTRODUÇAO — Muitos dos que estudaram os infinitésimos, também chamados infinitamente pequenos, devem ter notado a curiosa analogia entre os teoremas sôbre as ordens infinitesimais dos produtos, quocientes, potências e raízes de infinitésimos e as propriedades dos logarítmos.

O autor dêste trabalho, preocupado com essa interessante analogia, chegou a demonstrar um teorema que relaciona as ordens infinitesimais aos logarítmos, deixando o assunto perfeitamente esclarecido.

2. — PRELIMINARES SÔBRE AS ORDENS INFINITESIMAIS — Sejam **y, z, u, t**, etc. funções reais de uma variável real **x**. Se tivermos :

$$\lim_{x \to r} y = 0 \quad , \quad \lim_{x \to r} z = 0 \quad , \quad \lim_{x \to r} u = 0 \quad , \quad \lim_{x \to r} t = 0,$$

e assim por diante, então **y, z, u, t**, etc. são, por definição, **funções infinitésimas** ou **infinitésimos** ou **infinitamente pequenos** no ponto **r**.

Daí se conclui que o conceito de infinitésimo está estreitamente ligado aos de função e limite.

Suponhamos que tomamos o infinitésimo **y** para têrmo de comparação; **y** é então o nosso **infinitésimo principal.**

(2,1) Ainda por definição, se tivermos :

$$(1) \qquad \lim_{x \to r} \frac{|z|}{|y|^p} = k \quad ,$$

sendo **k** um número finito e diferente de zero, diremos que **z** é de ordem **p** em relação ao infinitésimo principal **y**. Isto se pode indicar pela seguinte notação : ....

$$\text{ord}_y \ z = p \quad ,$$

sendo **p** um número real positivo.

De (1) se conclui que

$$\frac{|z|}{|y|^p} = k + t \quad ,$$

sendo **t** um infinitésimo no ponto **r**.

É fácil demonstrar que, sendo **z** de ordem **p** em relação a **y** e sendo $p > q$, temos :

$$\lim_{x \to r} \frac{|z|}{|y|^q} = 0 \;;$$

o que indica que **z** é de **ordem superior a q.**

Se, pelo contrário, $p < q$, temos :

$$\lim_{x \to r} \frac{|z|}{|y|^q} = +\infty \;,$$

o que indica que **z** é de **ordem inferior a q.**

Às vezes a relação $\frac{|z|}{|y|^p}$ não tende para nenhum limite quando **x** tende para **r**, embora se mantenha constantemente entre dois valores finitos e do mesmo sinal. É o que acontece, por exemplo, se tomarmos

$$z = (3 + \operatorname{sen} \frac{1}{x})\, x^2$$

e $y = x$, infinitésimos no ponto zero.

Fica :

$$\frac{|z|}{|y|^2} = 3 + \operatorname{sen} \frac{1}{x}$$

O segundo membro não tende para nenhum limite quando **x** tende para zero. Mas se mantém constantemente finito e não nulo, pois podemos escrever :

$$2 \leq \frac{|z|}{|y|^2} \leq 4$$

2,2) NIEWENGLOWSKI estende a êsse caso, acompanhando CAUCHY, o conceito de ordem infinitesimal como se segue. Sendo $h > 0$, podemos escrever :

$$\lim_{x \to r} \frac{|z|}{|y|^{2+h}} = +\infty \qquad \lim_{x \to r} \frac{|z|}{|y|^{2-h}} = 0 \,.$$

Portanto a ordem infinitesimal **p** do infinitésimo **z** em relação a **y** é tal que

$$2 - h < p < 2 + h \quad .$$

Como **h** pode ser tão pequeno quanto se queira, pode-se tomar $p = 2$ como limite.

Poderíamos, sem muita dificuldade, estender a êsse caso a definição de ordem infinitesimal sem ser preciso recorrer a uma nova passagem ao limite. Basta, para isso, definir como se segue a ordem infinitesimal.

(2,3) Sendo **z** e **y** funções infinitésimas de **x** no ponto **r**, diz-se que **z** é de ordem **p** em relação a **y** quando podemos escrever :

$$\frac{|z|}{|y|^p} = F(x) + t \quad ,$$

sendo **t** um infinitésimo no ponto **r** e **F(x)** tal que permita que se escreva :

$$m < F(x) < n$$

nas vizinhanças do ponto r, sendo m e n números finitos e positivos, e sendo ainda considerada apenas a determinação real positiva de $|y|^p$.

Como caso particular podemos ter :

$$\mathbf{F(x) = k}$$

sendo **k** uma constante.

No caso das funções complexas de uma variável complexa ou funções vectoriais de um escalar ou vector, o conceito de ordem infinitesimal se reduz ao caso anterior pela consideração de seus módulos, e portanto nossa última definição continua de pé.

Por exemplo a variável complexa $z = x + yi$, com **x** e **y** reais, é infinitésima no ponto (0,0), pois temos

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} |z| = 0 \quad \text{e escreve-se} \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} z = 0 \quad \text{ou} \quad z \to 0$$

É evidente que, sendo $F(z) = f(z) + i.\ g(z)$ se $F(z)$ for infinitésima em z_0, então $f(z)$ e $g(z)$ serão infinitésimas em z_0, e reciprocamente.

Por exemplo a função complexa $y = F(z) = z^2 + z^3$ é de segunda ordem em relação a z, pois temos:

$$\frac{|z^2| - |z^3|}{|z|^2} \leq \frac{|z^2 + z^3|}{|z|^2} \leq \frac{|z^2| + |z^3|}{|z|^2}$$

$$1 - |z| \leq \frac{|z^2 + z^3|}{|z|^2} \leq 1 + |z|$$

$$\therefore \lim_{z \to 0} \frac{|z^2 + z^3|}{|z|^2} = 1 \text{ ou } \frac{|z^2 + z^3|}{|z|^2} = F(x) + t,$$

sendo $x = |z|$ e $1/2 < F(x) < 3/2$ para $x < 1/2$.

Sendo x uma variável real, a função vectorial

$\mathbf{v} = x^3\mathbf{i} + x\mathbf{j} + \sqrt{x}\,\mathbf{k}$ é de ordem $1/2$ em relação a x, pois temos

$$\frac{|x|^{1/2} - |x^3| - |x|}{|x|^{1/2}} \leq \frac{|\mathbf{V}|}{|x|^{1/2}} \leq \frac{|x|^3 + |x| + |x|^{1/2}}{|x|^{1/2}}$$

$$1 - \frac{|x|^3 + |x|}{|x|^{1/2}} \leq \frac{|\mathbf{V}|}{|x|^{1/2}} \leq 1 + \frac{|x|^3 + |x|}{|x|^{1/2}}$$

$$\therefore \lim_{x \to 0} \frac{|\mathbf{v}|}{|x|^{1/2}} = 1 \text{ ou } \frac{|\mathbf{v}|}{|x|^{1/2}} = F(x) + t,$$

$$\text{sendo } \frac{1}{5} < F(x) < \frac{7}{4} \text{ para } |x| < \frac{1}{4}.$$

3. — AS ANALOGIAS A EXPLICAR — São as que se seguem, nas quais além da anotação já exposta para a ordem infinitesimal, utilizaremos a notação comum ($\log_a b$) para o logarítmo real de b na base $a > 0$.

a) Produto de infinitésimos **z**, **u**, **t**, etc.

$$\text{ord}_y\ (z.u.t\ldots) = \text{ord}_y\ u + \text{ord}_y\ z + \text{ord}_y\ t + \ldots$$

a') Produto de números positivos quaisquer **b**, **c**, **d**, etc.

$$\log_a (b.\ c.\ d\ldots) = \log_a b + \log_a c + \log_a d + \ldots$$

b) Quociente de dois infinitésimos **z** e **u**.

$$\text{ord}_y\ \frac{z}{u} = \text{ord}_y\ z - \text{ord}_y\ u$$

b') Quociente de dois númros positivos quaisquer **b** e **c**.

$$\log_a\ \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

c) Potência de expoente **m** de um infinitésimo **z**.

$$\text{ord}_y\ z^m = m\ \text{ord}_y\ z$$

c') Potência de expoente **m** de um número positivo qualquer **b**,

$$\log_a b^m = m \log_a b$$

d) Raiz de índice **n** de um infinitésimo **z**.

$$\text{ord}_y\ \sqrt[n]{z} = \frac{1}{n}\ \text{ord}_y\ z$$

d') Raiz de índice **n** de um número positivo qualquer **b**.

$$\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b$$

A analogia é perfeita, como se vê. Qual a sua razão ? O teorema seguinte esclarece bem o motivo.

4. TEOREMA — Se **z** é um infinitésimo de ordem **q** em relação a y, **z** e y sendo funções de **x** infinitésimas no ponto **r**, então existe o limite do logaritmo de $|z|$ na base $|y|$ e êsse limite é igual a **q**.

Tese: Se $\text{ord}_y\ z = q$, então $\lim\limits_{x \to r} \log_{|y|} |z| = q$

Demonstração — Seja, por hipótese, e de acôrdo com as convenções estabelecidas :

$$\frac{|z|}{|y|^q} = F(x) + t$$

Vamos demonstrar que existe

$$\lim_{x \to r} \log_{|y|} |z| = q$$

Podemos escrever :

$\log_a |z| = q \log_a |y| + \log_a [F(x) + t]$, com $a \neq 1$ positivo.

$$\therefore \quad \frac{\log_a |z|}{\log |y|} = q + \frac{\log_a [F(x) + t]}{\log_a |y|}$$

Mas $m < F(x) < n$. Portanto, se representarmos por **u** o valor absoluto do segundo têrmo do segundo membro da última igualdade, poderemos escrever, sendo **A** o maior dos logarítmos de **m** e **n**, em valor absoluto :

$$0 < u < \left| \frac{A}{\log_a |y|} \right|$$

Mas

$$\lim_{x \to r} \frac{A}{\log_a |y|} = 0$$

Portanto

$$\lim_{x \to r} u_1 = 0$$

É fácil concluir que

$$\lim_{x \to r} \frac{\log_a |z|}{\log_a |y|} = q$$

Mas $q = \text{ord}_y\, z$ e $\dfrac{\log_a |z|}{\log_a |y|} = \log_{|y|} |z|$

Portanto :

$$\text{ord}_y\ z = \lim_{x \to r} \frac{\log |z|}{|y|} \qquad \text{C. Q. D.}$$

A recíproca dêsse teorema, porém, não é verdadeira, isto é, a existência de $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\log |z|}{|y|} = p$ não implica necessàriamente que a ordem de z em lelação a y tal como foi definida em (2,3), seja p. Mas é verdadeira se tomarmos por base a definição (2,2).

Por exemplo, seja $z = x^2 \log x$, $y = x$.

Temos :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log |z|}{|y|} = \frac{2 \log |x| + \log \log |x|}{\log |x|} = 2$$

No entanto

$$\lim_{x \to 0} \frac{|z|}{|y|^2} = \lim_{x \to 0} |\log x| = +\infty,$$

e portanto z não é de segundo ordem em relação a **x** segundo (2,3), mas o é segundo (2,2), conforme o leitor poderá verificar.

Demonstrado êste teorema, os teoremas comuns sôbre produtos, quocientes, potências e raízes de infinitésimos podem ser expressos por um corolário dêle.

COROLÁRIO — As ordens infinitesimais dos produtos, quocientes, potências e raízes de infinitésimos obedecem às mesmas propriedade correspondentes dos logarítmos.

5. — **ORDENS DE INFINITUDE** — Sendo Y uma função de **x** tal que

$$\lim_{x \to r} Y = \pm \infty,$$

diz-se que Y é uma **função infinita** ou um **infinito.** no ponto **r.**

Pode-se definir a **ordem de infinitude** de um infinito Z em relação a um infinito principal Y. O infinito Z será de ordem p em relação a Y se pudermos escrever:

$$\lim_{x \to r} \frac{|Z|}{|Y|^p} = k,$$

sendo k um número finito e diferente de zero.

De uma maneira mais geral, pode-se dizer que Z é de ordem p em relação a Y se, sendo h > 0, tivermos:

$$\lim_{x \to r} \frac{|Z|}{|Y|^{p-h}} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to r} \frac{|Z|}{|Y|^{p+h}} = 0$$

De um modo um pouco menos geral poderíamos dizer que Z é de ordem p em relação a Y no ponto r se pudermos escrevr:

$$\frac{|Z|}{|Y|^p} = F(x) + t$$

sendo t um infinitésimo no ponto r e F(x) tal que se possa escrever:

$$m < F(x) < n,$$

sendo m e n números finitos e positivos.

Como caso particular temos aquele em que F(x) é igual a uma constante k.

Mas essas novas definições são desnecessárias, pois a ordem de infinitude dos infinitos pode sêr reduzida fàcilmente à ordem infinitesimal dos infinitésimos. Pois se Z e Y são infinitos, $\frac{1}{Z}$ e $\frac{1}{Y}$ são infinitésimos. E a ordem de infinitude de Z em relação a Y corresponde exatamente à ordem infinitesimal de $\frac{1}{Z}$ em relação a $\frac{1}{Y}$

Seja $\frac{1}{Y} = y$ e podemos escrever:

$$\begin{aligned} \text{ord}_y \frac{1}{Z} &= \lim_{x \to r} \log_{|y|} \left| \frac{1}{Z} \right| \\ &= -\lim_{x \to r} \log_{|y|} |Z| \\ &= -\text{ord}_y\ Z \end{aligned}$$

Anàlogamente, sendo z um infinitésimo temos:

$$\text{ord}_y \frac{1}{z} = - \text{ord}_y \; z \; .$$

Daí se conclui que a ordem de infinitude não é mais do que uma ordem infinitesimal negativa.

Portanto a ordem infinitesimal, considerada de um modo bem geral, pode ter qualquer valor real, positivo ou negativo.

A ordem infinitesimal nula corresponde às funções finitas e não nulas.

Sim; pois sendo s uma função de x não infinitésima e não infinita no ponto r, podemos escrecer:

$$\frac{|s|}{y^0} = F(x) + t,$$

pois daí tiramos:

$$|s| = F(x) + t \; ,$$

e como estão excluidos os casos de

$$\lim_{x \to r} s = 0 \qquad \text{e} \quad \lim_{x \to r} s = \pm \infty \; ,$$

evidentemente teremos nas vizinhanças de r:

$$m < |s| < n$$

se s for uma função finita e não nula.

E como t é infinitésimo no ponto r, podemos escolher um entôrno de r tal que

$$|t| < \frac{m}{2} \quad \text{e} \quad |t| < \frac{n}{2}$$

de onde se conclui que

$$\frac{m}{2} < F(x) < n$$

no caso de $t > 0$ e

$$m < F(x) < \frac{3n}{2}$$

no caso de $t < 0$

Em ambos os casos s será de ordem zero em relação ao infinitésimo y, como queríamos demonstrar.

6 — BIBLIOGRAFIA

a) CARNEIRO, Orlando — Apontamento de aula.

b) COMBEROUSSE, Charles de — Cours de Mathématiques. 1929.

c) FRANKLIN, Philip — A Treatise on Advanced Calculus. 1940.

d) NIEWENGLOWSKI, B. — Cours d'Algèbre. 1931.

e) TOSELLO, André — Apostilas.

f) WOODS, Frederick S. — Advanced Calculus. S/ data.

g) BOREL, Émile — Leçons sur la Théorie de la Croissance. 1910.

h) SEVERI, Francesco — Lezioni di Analisi. 1938.