AINDA SÔBRE AS "FÓRMULAS DIRETAS" DE ANSHELES*

EDUARDO A. SALGADO

E. S. A. "LUIZ DE QUEIROZ"

1. INTRODUÇÃO

Em trabalho anterior (Anais da Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", 1960) deduzimos as "fórmulas diretas" de Ansheles, valendo-nos da projeção estereográfica.

Fazemos, agora, outra dedução das mesmas fórmulas, utilizando principalmente a projeção gnomônica e dando às fórmulas deduzidas os números com que são designadas na Cristalografia de BOLDYREV (1934).

2. DEDUÇÃO

SISTEMA RÔMBICO

Na figura 1, $OB = m_1$, $OC = m$, $OA = y_1$, $CX = y$

Tem-se, para símbolo da face X:

$$h:k:1 = \frac{m}{m_1} : \frac{y}{y_1} : 1 \qquad (1)$$

Sabe-se que

$OX = tg\,\rho\,X$ e $OU = tg\,\rho\,U$.

No triângulo OCX:

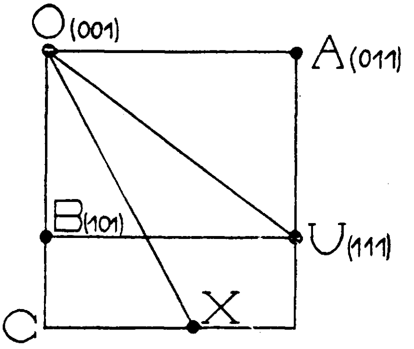


FIGURA 1

$$m = OX.\,sen\,\varphi\,X = tg\,\rho\,X.\,sen\,\varphi\,X;\quad y = OX.\,cos\,\varphi\,X = tg\,\rho\,X.\,cos\,\varphi\,X.$$

* *Recebido para publicação em 17/7/62.*

Do triângulo AOU tira-se, identicamente :

$m_1 = tg\ \rho U \cdot sen\ \varphi U;\ y_1 = tg\ \rho U \cdot cos\ \varphi U$

Levando os valôres assim obtidos em (1), vem :

$$h : k : 1 = \frac{tg\ \rho X \ .\ sen\ \varphi X}{tg\ \rho\ U\ .\ sen\ \varphi U} : \frac{tg\ \rho X\ .\ cos\ \varphi X}{tg\ \rho U\ .\ cos\ \varphi U} : 1.$$

Multiplicando por $\frac{cotg\ \rho X}{cotg\ \rho U}$ obtem-se $[14]$.

Tem-se : $cotg\ \varphi X = \frac{y}{m}$ e $cotg\ \varphi U = \frac{y_1}{m_1}$.

De (1) tira-se :

$$\frac{y}{m} = \frac{k}{h} \cdot \frac{y_1}{m_1} \quad \therefore \quad cotg\ \varphi X = \frac{k}{h} \cdot cotg\ \varphi U \qquad [15]$$

SISTEMA HEXAGONAL

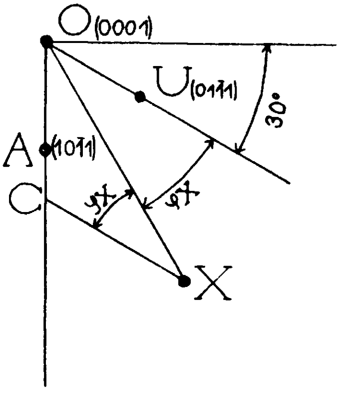


FIGURA 2

Símbolo da face X (suprimindo o índice relativo ao eixo W) :

$$h : k : 1 = \frac{OC}{OA} : \frac{CX}{OU} : 1 \qquad (1)$$

No triângulo OCX obtem-se (figura 2) :

$$\frac{OC}{\text{sen}\ \varphi x} = \frac{CX}{\text{sen}\left\{90-(\varphi X + 30)\right\}} = \frac{OX}{\text{sen}\ 120} \ \therefore$$

$$\therefore \frac{OC}{\text{sen}\ \varphi X} = \frac{CX}{\text{sen}\ (60 - \varphi X)} = \frac{\text{tg}\ \rho X}{\text{sen}\ 60} \qquad (2)$$

Levando em (1) os valôres de OC e CX, tirados de (2) e. ainda, $OA = OU = \text{tg}\ \rho U$, tem-se :

$$h : k : 1 = \frac{\text{tg}\ \rho X \ .\ \text{sen}\ \varphi X}{\text{tg}\ \rho U\ .\ \text{sen}\ 60} : \frac{\text{tg}\ \rho X\ .\ \text{sen}\ (60 - \varphi X)}{\text{tg}\ \rho U\ .\ \text{sen}\ 60} :$$

Multiplicando por $\frac{\text{cotg}\ \rho X}{\text{cotg}\ \rho U}$ chegа-se à [26]

De (1) tira-se: $OC = h\ .\ \text{tg}\ \rho U$ e $CX = k\ .\ \text{tg}\ \rho U$. Levando êstes valôres em (2) :

$$\frac{h}{\text{sen}\ \varphi X} = \frac{2k}{\sqrt{3}\cos \varphi X - \text{sen}\ \varphi X} \ \therefore\ \text{cotg}\ \varphi X = \frac{h + 2k}{\sqrt{3}h} \qquad [27]$$

SISTEMA MONOCLÍNICO

Primeiro caso-orientação segundo [001]

Tem-se (figura 3): $OR = \text{tg}\ \rho R$, $RC = m$, $RB = m_1$, $BU = y_1$, $CX = y$, $OX = \text{tg}\ \rho X$, $OU = \text{tg}\ \rho U$. Símbolo de X:

$$h:k:1 = \frac{m}{m_1} : \frac{y}{y_1} : 1 \qquad (1)$$

Da figura 3 obtem-se:

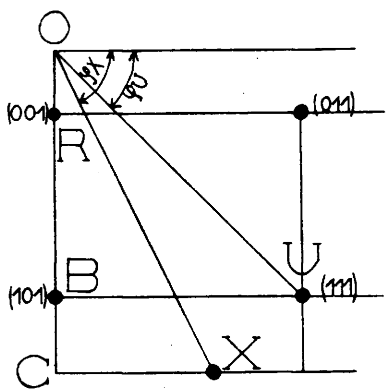


FIGURA 3

$m = OC - OR = tg\,\rho X \,.\, sen\,\varphi X - tg\,\rho R$; $m_1 = OB - OR = tg\,\rho U \,.$

$.\, sen\,\varphi U - tg\,\rho R$; $y = tg\,\rho X \,.\, cos\,\varphi X$; $y_1 = tg\,\rho U \,.$

$.\, cos\,\varphi U$ (2).

Levando-se êstes valôres em (1) chega-se a [8].

Tem-se, ainda: $tg\,\varphi X = \dfrac{OR + m}{y} = \dfrac{tg\,\rho R + m}{y}$.

Substituindo aqui m e y, respectivamente, por hm_1 e ky_1, valôres tirados de (1), e substituindo m_1, y_1 pelos seus valôres (2), obtem-se :

$$tg\,\varphi X = \frac{h}{k}\, tg\,\varphi U + \frac{tg\,\rho R\,(1 - h)}{k \,.\, tg\,\rho U \,.\, cos\,\varphi U} \qquad [9]$$

Segundo caso-orientação segundo (001)

A face X, de símbolo (hkl), determina nos eixos cristalográficos X , Y , Z , respectivamente, as intersecções

$OA = \dfrac{a}{h}$, $OB = \dfrac{b}{k}$, $OC = \dfrac{c}{l}$.

Da figura 4, contendo os eixos X , Y e na qual OD é normal a AB , tira-se :

$$OD = \frac{a}{h}\, sen\,\varphi X = \frac{b}{k}\, cos\,\varphi X \quad (1)$$

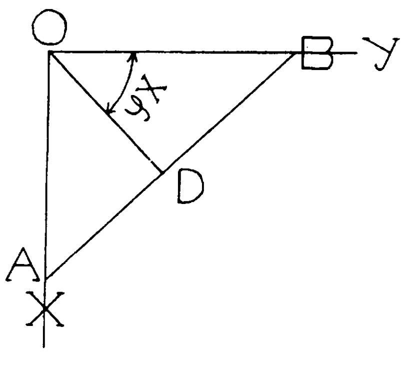


FIGURA 4

Tome-se um eixo auxiliar OZ', no plano XOZ, que seja normal ao plano XY e no qual a face X determina a intersecção OE (figura 5) . Sendo semelhantes os triângulos AOE e AFC, tem-se :

$$\frac{OE}{CF} = \frac{OA}{OA + OF} \qquad (2)$$

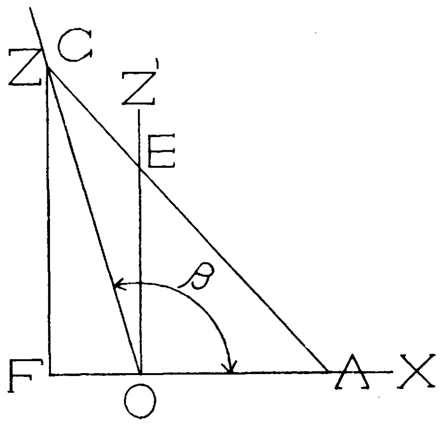


FIGURA 5

Tem-se, ainda :

$$CF = \frac{c}{1} \cdot \cos(\beta - 90), \quad OF = \frac{c}{1} \cdot \operatorname{sen}(\beta - 90).$$

Levando êstes valôres de CF e OF e, ainda, de $OA = \frac{a}{h}$ em (2), obtem-se: $OE = \frac{ac \cdot \operatorname{sen}\beta}{al - ch \cdot \cos\beta}$ (3).

Sabe-se que

$\rho P = 180 - \beta \therefore \operatorname{sen}(180 - \beta) =$
$= \operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen}\rho P$ e $\cos(180 - \beta) =$
$= -\cos\beta = \cos\rho P$.

Substituindo em (3) , tem-se :

$$OE = \frac{ac \cdot \operatorname{sen}\rho P}{al + ch \cdot \cos\rho P} \quad (4).$$

Da figura 6 obtem-se:

$OD = OE . \operatorname{cotg}\rho X$.

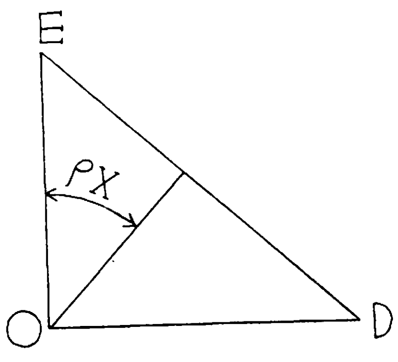


FIGURA 6

Substituindo aqui OE pelo seu valor (4), tem-se :

$$OD = \frac{ac \,.\, sen\, \rho P \,.\, cotg\, \rho X}{al + ch \,.\, cos\, \rho P} \quad (5).$$ De (5) obtem-se:

$$1 = \frac{ac \,.\, sen\, \rho P \,.\, cotg\, \rho X}{a \,.\, OD} - \frac{ch \,.\, OD \,.\, cos \rho P}{a \,.\, OD} \quad (6)$$

Substituindo em (6) h por $\frac{asen\, \varphi X}{OD}$, valor tirado de (1), e multiplicando o segundo membro por OD, vem :

$1 = c \left\{ sen\, \rho P \,.\, cotg\, \rho X - sen\, \varphi X \,.\, cos\, \rho P \right\}$. Temos, então:

$h = asen\, \varphi X;\ k = bcos\, \varphi X;\ 1 = c \left\{ sen\, \rho P . cotg\, \rho X - sen\, \varphi X \,. \right.$ $\left. .\, cos\, \rho P \right\}$.

Dividindo os três índices por sen ρ P, tem-se :

$$h = \frac{asen\, \varphi X}{sen\, \rho P},\ k = \frac{bcos\, \varphi X}{sen\, \rho P}\ \ 1 = c \left\{ cotg\, \rho X - cotg\, \rho P . sen \varphi X \right\} \quad (7)$$

Ter-se-á, para a face parametral :

$$1 = \frac{asen\, \varphi U}{sen\, \rho P},\ 1 = \frac{bcos\, \varphi U}{sen\, \rho P},\ 1 = c \left\{ cotg\, \rho U - cotg\, \rho P . sen \varphi U \right\} \quad (8)$$

Tirando de (8) os valôres de sen ρ P e <u>c</u> e levando--os em (7) obtem-se, finalmente :

$$h:k:1 = \frac{sen\, \varphi X}{sen\, \varphi U} : \frac{cos\, \varphi X}{cos\, \varphi U} : \frac{cotg\, \rho P . sen\, \varphi X - cotg\, \rho X}{cotg\, \rho P . sen\, \varphi U - cotg\, \rho U} \quad [11]$$

SISTEMA TRICLÍNICO

Primeiro caso-orientação segundo [001]

$$\text{Símbolo de X: } h:k:1 = \frac{MA_1}{MB} : \frac{CX}{DU} : 1 \quad (1)$$

Tem-se (figura 7):

$$MA_1 = OA_1 - OM \qquad (2)$$

Tem-se : no triân gulo OEX,

$OE = tg\,\rho X \;.\; sen\,\varphi X$; ;

no triângulo OEA_1 ,

$$OA_1 = \frac{OE}{sen\,\varphi P} = \frac{tg\,\rho X \,.sen\,\varphi X}{sen\,\varphi P};$$

no triângulo OFR ,

$OF = tg\,\rho R \;.\; sen\,\varphi R$

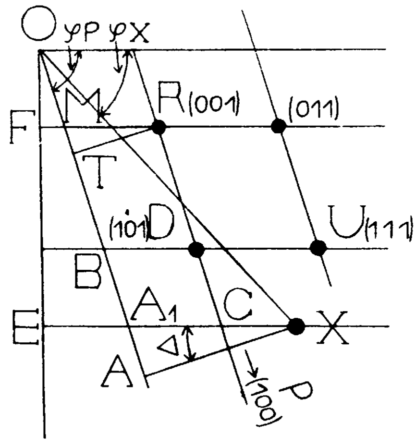


FIGURA 7

e no triângulo OFM , $OM = \dfrac{OF}{sen\,\varphi P} = \dfrac{tg\,\rho R \;.\; sen\,\varphi R}{sen\,\varphi P}$.

Levando os valôres de OA_1 e OM em (2), vem :

$$MA_1 = \frac{tg\,\rho X \;.\; sen\,\varphi X - tg\,\rho R \;.\; sen\,\varphi R}{sen\,\varphi P} \qquad (3)$$

Ter-se-á, identicamente :

$$MB = \frac{tg\,\rho U \;.\; sen\,\varphi U - tg\,\rho R \;.\; sen\,\varphi R}{sen\,\varphi P} \qquad (4)$$

Do triângulo OAX tira-se: $AX = tg\,\rho X . sen\,(\varphi P - \varphi X)$ e do triângulo AXA_1 : $AX = A_1X . \cos\Delta \therefore A_1X . \cos\Delta = tg\,\rho X \;.\; sen\,(\varphi P - \varphi X)$ (5)

Tem-se, no triângulo ORT: $RT = tg\,\rho R . sen\,(\varphi P - \varphi R)$ e no triângulo MRT: $RT = MR . \cos\Delta = A_1C . \cos\Delta \therefore A_1 C \cos\Delta = tg\,\rho R \;.\; sen\,(\varphi P - \varphi R)$ (6).

Tem-se: $CX = A_1X - A_1C$. Substituindo, nesta expressão, A_1X e A_1C pelos valôres obtidos em (5) e (6), obtem-se :

$$CX = \frac{tg\,\rho X \,.\, sen(\varphi P - \varphi X) - tg\,\rho R \,.\, sen(\varphi P - \varphi R)}{\cos \Delta} \qquad (7)$$

Obter-se-á, de maneira idêntica :

$$DU = \frac{tg\,\rho U \,.\, sen(\varphi P - \varphi U) - tg\,\rho R \,.\, sen(\varphi P - \varphi R)}{\cos \Delta} \qquad (8)$$

Levando os valôres obtidos em (3), (4), (7) e (8) na expressão (1) chega-se à fórmula [2] .

Segundo caso-orientação segundo (001)

Na figura 8 estão representados os eixos cristalográficos X_1, Y_1, Z_1 ; o eixo Y, a partir do qual são medidas as coordenadas φ ; o polo X da face que intercepta o plano do desenho segundo a linha AB_1 e cujo símbolo se quer determinar; o ângulo Δ , compreendido entre Y e Y_1. No triângulo ODB obtem-se :

$$OD = \frac{b}{k} . \cos(\varphi X - \Delta). \text{ Como } \Delta = \varphi P - 90 :$$

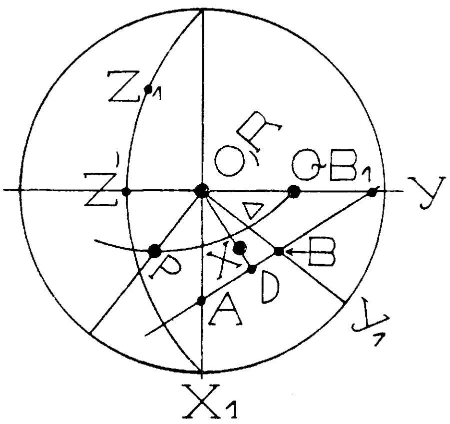


FIGURA 8

$$OD = \frac{b}{k} \cos\left\{(\varphi X - \varphi P) + 90\right\} =$$

$$= \frac{b}{k} . \ sen\ (\varphi P - \varphi X) \quad .$$

Do triângulo ODB_1 tira-se :

$$OB_1 = \frac{b \ . \ sen\ (\varphi P - \varphi X)}{k \ . \ \cos \varphi X} .$$

Coloque-se no plano do desenho o plano do círculo máximo X_1 Z' Z_1, que contem o eixo auxiliar Z'. Tem-se como anteriormente para o sistema monoclínico (figura 5):

$$\frac{OE}{CF} = \frac{OA}{OA + OF} \therefore \frac{OE}{OC \cdot \text{sen}\, \rho} = \frac{OA}{OA - OC \cdot \cos \rho} \qquad (1).$$

Ponha-se no plano do papel o plano do círculo máximo $Z'OB_1$. A face do polo X determina, na reta de polo O, o segmento OE_1 (figura 9) e tem-se:

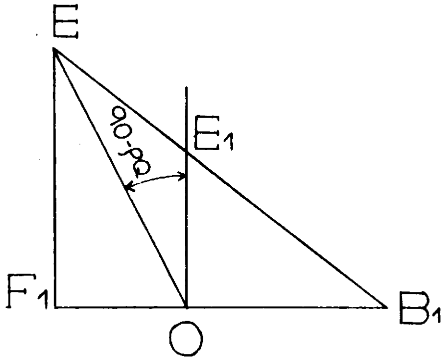


FIGURA 9

$$\frac{OE_1}{EF_1} = \frac{OB_1}{OB_1 + OF_1} \therefore \frac{OE_1}{OE \cdot \text{sen}\, \rho Q} = \frac{OB_1}{OB_1 + OE \cdot \cos \rho Q} \qquad (2).$$

No triângulo esférico PQO (figura 8) o ângulo formado pelos círculos máximos PQ e Z'Q é iqual a $180 - \rho$. Dêste triângulo obtem-se:

$$\text{cotg}\, \rho P \cdot \text{sen}\, \rho Q = \cos \rho Q \cdot \cos \varphi P + \text{sen}\, \varphi P \cdot \text{cotg}\, (180 - \rho) =$$

$$= \cos \rho Q \cdot \cos \varphi P - \text{sen}\, \varphi P \cdot \frac{\cos \rho}{\text{sen}\, \rho}$$

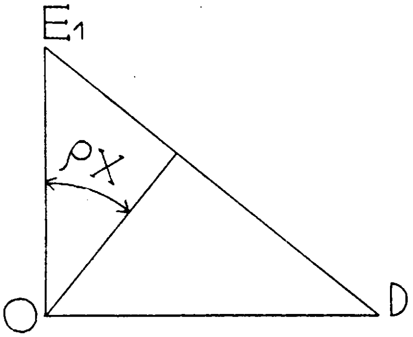
Fazendo $\text{cotg}\, \rho P \cdot \text{sen}\, \rho Q = m$ e $\cos \rho Q \cdot \cos \varphi P = n$, transforma-se a expressão anterior em:

$$\text{sen}\, \rho\, (m - n) = -\, \text{sen}\, \varphi P \cdot \cos \rho \therefore \frac{\text{sen}\, \rho}{\cos \rho} = \frac{-\text{sen}\, \varphi P}{m - n},$$

de onde se tira: $\text{sen}\, \rho = -\, T \cdot \text{sen}\, \varphi P$ e $\cos \rho = T\,(m-n)$, sendo T um coeficiente de proporcionalidade. Substituindo êstes valôres de $\text{sen}\, \rho$ e $\cos \rho$ na expressão (1), vem:

$$OE = \frac{-OA \cdot OC \cdot \text{sen}\, \varphi P \cdot T}{OA - OC \cdot T\,(m - n)} \qquad (3).$$

Levando êste valor de OE na expressão (2), obtem-se :



F I G U R A 10

$$OE_1 = \frac{- L_1 \cdot OB_1 \cdot \text{sen}\, \rho\, Q}{L \cdot OB_1 - L_1 \cdot \cos \rho\, Q},$$

onde $L_1 = OA.OC.\text{sen}\, \varphi\, P.T$ e

$L = OA - OC\,(m-n).\,T$

Temos, ainda (figura 10), no triângulo retângulo DOE_1 : $OD = OE_1 \cdot \text{cotg}\, \rho\, X$ (4) .

Substituindo em (4) OE_1 pelo seu valor anteriormente achado, obtem-se :

$$OD = \frac{-L_1 \cdot \text{sen}\, \varphi\, Q \cdot OB_1 \cdot \text{cotg}\, \rho\, X}{L \cdot OB_1 - L_1 \cdot \cos \rho\, Q} \qquad (5)\,.$$

Substituindo em (5) OB_1 pelo seu valor $\frac{OD}{\cos \varphi X}$, tirado do triângulo retângulo DOB_1 (figura 8), obtem-se :

$$OD\left(L \cdot \frac{OD}{\cos \varphi X} - L_1 \cdot \cos \rho\, Q\right) = - L_1 \cdot \text{sen}\, \rho\, Q \cdot \frac{OD}{\cos \varphi X} \cdot \text{cotg}\, \rho\, X.$$

Multiplicando ambos os membros da expressão anterior por $\frac{\cos \varphi X}{OD}$,

obtem-se : $L.OD = L_1\,(\cos \rho\, Q . \cos \varphi\, C - \text{sen}\, \rho\, Q . \text{cotg}\, \rho\, X)$ (6).

Substituindo na expressão (6) L e L_1 pelos seus valôres, dividindo ambos os membros por OA e substituindo $\frac{OD}{OA}$ por sen φX, obtem-se :

$$T.OC \left\{ \text{sen}\, \varphi X(m-n) + \text{sen}\, \varphi\, P . \cos \rho\, Q . \cos \varphi X - \text{sen}\, \varphi\, P . \text{sen}\, \rho\, Q . \text{cotg}\, \rho\, X \right\} = OD \qquad (7)$$

Substituindo em (7) m e n por seus valôres e dividindo a expressão por sen ρ Q, obtem-se :

$$T.OC \left\{ \text{cotg}\ \rho P \,.\, \text{sen}\ \varphi X - \text{cotg}\ \rho X . \text{sen}\ \varphi P + \text{cotg}\ \rho Q . \right.$$

$$\left. .\ \text{sen}\ (\varphi P - \varphi X) \right\} = \frac{OD}{\text{sen}\ \rho Q} \qquad (8)$$

Substituindo, na expressão (8), OC por $\frac{c}{1}$ e designando por M a expressão delimitada pelas chaves, tira-se :

$$1 = \frac{c T M \,.\, \text{sen}\ \rho Q}{OD} \quad ,$$

Chegou-se, assim, a obter :

$$h = \frac{a . \text{sen}\ \varphi X}{OD} \ ; \ k = \frac{b . \text{sen}\ (\varphi P - \varphi X)}{OD} \ ; \ 1 = \frac{cTM . \text{sen}\ \rho Q}{OD} \qquad (9)$$

De (9) tira-se, para a face parametral :

$$a = \frac{OD}{\text{sen}\ \varphi U} \ ; \ b = \frac{OD}{\text{sen}\ (\varphi P - \varphi U)} \ ; \ c = \frac{OD}{TM' . \text{sen}\ \rho Q} \qquad (10).$$

Levando em (9) os valôres de a, b, c que ocorrem em (10), chega-se à fórmula [5] .

3. RESUMO

As "fórmulas diretas" de Ansheles, deduzidas pelo autor, anteriormente, através da projeção estereográfica, são agora deduzidas por via diferente, principalmente com o auxílio da projeção gnomônica.

4. SUMMARY

The "direct formulas" by Ansheles, previously deduced by the author through the stereographic projection , are now

deduced by means of a different way, especially with the help of the gnomonic projection.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. BOEKE, H.E. - Die gnomonische Projektion in ihrer Anwendung auf kristallographische Aufgaben. Berlin, Verlag Gebrüder Borntraeger, 1913 .

2. BOLDYREV, A.K. - Cristalografia. Versão do russo para o hespanho por Rafael Candel Vila. Barcelona, Editorial Labor S.A., 1934.