ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a240137

ARTIGO

Simbologia matemática para o conceito de limite dos séculos XVIII ao XX

Mathematical symbology for the concept of limit from the eighteenth to the twentieth centuries

Circe Mary **Silva da Silva**[*]
ORCID iD 0000-0002-4828-8029

Resumo

O objetivo deste estudo é identificar e comparar os símbolos propostos para o conceito de limite, a partir da análise de livros e artigos científicos de matemáticos e autores de livros de matemática do século XVIII ao século XX. O ano de 1786 é o marco inicial com a identificação do primeiro símbolo de limite e depois o de 1905, marco final, quando este se estabilizou. A metodologia seguiu os seguintes passos: revisão da literatura com destaque aos trabalhos de Cajori; seleção dos textos originais dos autores citados por Cajori; ampliação das fontes com outros autores selecionados; e análise comparativa dos símbolos de limite. Concluiu-se que, durante esse período, houve interesse por parte de alguns matemáticos em justificar o uso de um símbolo para este conceito, que os símbolos sofreram modificações, alguns foram abandonados e, após o início do século XX, não surgiu nenhum símbolo adicional para este conceito.

Palavras-chave: Notações matemáticas. História da Matemática. Cálculo Diferencial e Integral.

Abstract

The aim of this study is to identify and compare the symbols proposed for the concept of limit from the analysis of books and scientific articles by mathematicians and authors of mathematics books from the eighteenth to the twentieth century. The year 1786 is the initial milestone with the identification of the first limit symbol, and then the year 1905, the final mark, when it stabilized. The methodology followed the following steps: literature review with emphasis on Cajori's works; selection of original texts by authors cited by Cajori; enlargement of the sources with other selected authors; and comparative analysis of the limit symbols. It was concluded that during this period, there was interest on the part of some mathematicians in justifying the use of a symbol for this concept, that the symbols underwent modifications, some were abandoned, and after the beginning of the twentieth century, no additional symbols for this concept appeared.

Keywords: Mathematical Notations. History of Mathematics. Differential and Integral Calculus.

1 Contexto

[*]Doutora em Pedagogia pela Universidade de Bielefeld, Alemanha e pós-doutorado na Universidade Nova de Lisboa (Portugal). Docente do Programa de Mestrado em Educação Matemática da Universidade Federal de Pelotas, Rio Grande do Sul, Brasil. E-mail: cmdynnikov@gmail.com.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a240137

> Há símbolos matemáticos felizes ou poderosos que parecem ter algum tipo de poder hermético, que levam neles as sementes da inovação e do desenvolvimento criativo (Davis; Hersh, 1985, p. 156).

A poética metáfora dos autores da epígrafe - tratando símbolos como *seres* felizes - mesmo que possa parecer exagerada, traz um pouco de humanidade àquela parte árida da matemática com a qual tomamos contato, nos livros e na escola, por uma imposição necessária. Davis e Hersh (1985) consideraram a existência de uma certa *lei de sobrevivência* para esses *seres* simbólicos. Só não jazem no cemitério aqueles símbolos que se mostraram mais aptos.

Antes mesmo da escrita, o homem utilizou representações[1] para expressar suas ideias, entre as quais estão aquelas conhecidas como arte rupestre ou registro rupestre, que existem em diferentes regiões do mundo. No Brasil, tais registros foram descobertos em grutas e cavernas datando de 12 mil a 13mil anos aproximadamente. A Figura 1 mostra pinturas rupestres da Toca do Salitre, na Serra da Capivara, no Piauí. O que esse grafismo de tamanho maior na Figura 1 significa? As linhas retas, quase retas e curvas são indícios de algum processo de contagem? Estaria inserida numa tradição geométrica? Seria um animal de quatro pernas? Representaria algo místico? Ainda não temos respostas satisfatórias a essas perguntas – as explicações ainda são hipotéticas.

Figura 1- Pinturas rupestres brasileiras
Fonte: Arte Brasileira UTFPR (2012)

A arte é uma expressão humana, uma maneira de nos comunicarmos com os outros. A representação é uma tentativa de descrever algo pela semelhança. Pinturas feitas em pedras, chamadas epígrafes, caracterizam uma forma de linguagem que indivíduos, no passado, deixaram para a posteridade.

[1] A etimologia da palavra representação é do latim *representatio*, de origem medieval, usada pelo "conhecimento como semelhança do objeto". Segundo Santo Tomás de Aquino, "representar algo significa conter a semelhança da coisa" (Abbagnano, 2007, p. 853).

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a240137

Semelhante ao que ocorre na arte rupestre e na música, os símbolos usados em matemática são partes de uma linguagem, que se tornou muito sofisticada com o decorrer dos séculos. Na Antiguidade, usavam-se símbolos pictóricos, como aqueles da matemática da Mesopotânia (Figura 2). Posteriormente, os sistemas numéricos substituíram as epígrafes. Vale destacar que utilizaremos a definição de símbolo conforme Almeida (2024, p. 36): "símbolo é algo que, por uma convenção arbitrária, representa uma realidade complexa".

Figura 2 - Terna pitagórica no Tablete Plimpton 322 – matemática cuneiforme
Fonte: CDLI contributors (2024)

Foram encontrados quase meio milhão desses objetos de barro cozido, conhecidos como tabletes, mas apenas um em cada mil trazem conhecimentos matemáticos (Wolfram, 2000). Na matemática egípcia, símbolos como pássaros, flores e dedo foram utilizados para representar números inteiros e fracionários. Com o desenvolvimento da própria humanidade, essas epígrafes foram substituídas por outros sistemas numéricos. Damerow (1996), historiador da ciência e *expert* na decifração dos tabletes mesopotâmicos, defendeu a tese de que a história do pensamento humano é um processo estritamente histórico incorporado na história das sociedades e em toda a sua cultura material e, portanto, preso nas contingências dessa história. Ao abordar a questão de representação, escreveu:

> Os símbolos de argila, os bastões de contagem e os sistemas construtivo-aditivos dos sinais numéricos representavam objetos e produtos dos processos de trabalho e a distribuição dos produtos sob a forma de um modelo material. Como tal, eles incorporaram como representantes materiais estruturas de ação mais gerais como fixação, ordenação, composição e decomposição de conjuntos de objetos (Damerow, 1996, p. 167).

Segundo Damerow, a linguagem é a mais importante ferramenta para a representação de entidades abstratas. Por isso, as representações de tais entidades tornaram-se o objeto da atividade científica. Kant, conforme Abbagnano (2007), numa visão bem geral, considerou a

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a240137

representação como o gênero de todos os atos ou manifestações cognitivas, independentemente de sua natureza de quadro ou semelhança. “Por intermédio do sentido externo (de uma propriedade do nosso espírito) temos a representação de objetos exteriores a nós e situados no espaço” (Kant, 1989, p. 63). Para ele, o espaço é uma representação necessária pois é a condição de possibilidade dos fenômenos. Kant considera espaço e tempo duas intuições puras *a priori*.

Não se pretende, neste estudo, entrar nos meandros da teoria da representação. Entretanto, torna-se necessário elucidar pelo menos o entendimento a respeito do termo *símbolo*, em especial o símbolo matemático ou notação matemática, que tratarei em todo o texto. Simbolismo matemático e notações matemáticas serão usadas indistintamente neste estudo.

Os símbolos matemáticos são um tipo especial de simbolização uma vez que os objetos que representam são ideias abstratas. Concordo com os autores Grande e Silva (2021), quando afirmam que, embora a notação seja arbitrária, o mais relevante é o seu caráter de indispensabilidade. Estes autores refutam a tese de que a notação é artificial e tem apenas um papel auxiliar. Para justificar, inicialmente, apelam para Frege (*apud* Grande; Silva, 2021, p. 30), quando este diz que “sem sinais, também, dificilmente nos elevaríamos ao pensamento conceitual”. Grande e Silva elegeram algumas características fundamentais para as notações que serão apresentadas, neste texto, no item *a crítica às notações*.

Kant (1989, p. 593) chamou a atenção para o papel dos sinais: “[...] só a matemática, portanto, contém demonstrações” porque ela constrói seus conceitos a partir da intuição dada *a priori*, e a álgebra, com a ajuda dos sinais, representa os conceitos na intuição. Outro filósofo que destacou o papel dos sinais foi Wittengstein (2012), aprofundando-o no *Tractatus Logico-Philosophicus*, publicado pela primeira vez em 1921. Ele estabeleceu uma distinção entre signo e símbolo: os “signos (Zeichen), sons ou inscrições gráficas perceptíveis, e símbolos, signos que foram projetados sobre a realidade” (Glock, 1998, p. 333). No *Tractatus*, o autor chamou de signo aquilo que é sensivelmente perceptível no símbolo. Para Almeida (2024, p. 64), a diferença entre signo e símbolo reside em que o sinal “é sempre menos do que o conceito que ele representa, enquanto que o símbolo sempre representa mais do que seu significado imediato e óbvio”.

Tall (2013) explica que há diferentes concepções para o termo *símbolo*. Na teoria da semiótica de Peirce, por exemplo, um símbolo é um dos três tipos de sinal usados pelos seres humanos: 1) ele é um ícone, que serve para transmitir ideias das coisas que representamos pela simples imitação; 2) ele é um índice que indica uma conexão, como uma placa de sinalização ou uma exclamação como *Olá* que alerta a atenção; 3) ele é símbolo ou sinal geral que se associa

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a240137

aos seus significados pelo uso, como palavras, frases, discursos, livros e bibliotecas. Parece que não há discordância em encararmos os símbolos matemáticos como uma ferramenta essencial para a matemática e as ciências em geral. Entretanto, como representação simbólica, como uma linguagem, nem todos os símbolos propostos são apropriados.

Estima-se, conforme Wolfram (2000), que a maioria das notações matemáticas que usamos atualmente tenham entre um a quinhentos anos de idade. Os símbolos utilizados por matemáticos na Antiguidade, atualmente, são difíceis de serem compreendidos, porque já estamos com o olhar treinado para aqueles mais recentes. O meu interesse sobre a história dos símbolos matemáticos não é recente. Em 1997, publiquei um texto com o objetivo de identificar os autores que começaram a divulgar a lógica e teoria dos conjuntos no Brasil. Destaquei, ainda, contribuições de alguns matemáticos como Leibniz e Euler, entre outros, cujas propostas de notações obtiveram adesão da comunidade e permanecem até nossos dias (Silva, 1997).

A fascinante história das notações chamou a atenção de pesquisadores e Florian Cajori, por sugestão de seu professor E. H. Moore, publicou o livro "História das notações matemáticas", em 1929. Foi o primeiro trabalho de fôlego em dois volumes, com quase 900 páginas, em que seu autor reuniu tanto as notações da matemática elementar (1º volume) quanto as da matemática superior (2º volume).

A história das notações, como nos revelou Cajori (1993), não trata só da natureza e origem dos símbolos matemáticos; ela indica, além disso, uma história de disputas – os próprios matemáticos de diferentes países ao proporem uma nova simbologia concorreram entre si. A adesão da comunidade científica aos símbolos foi marcada por vários fatores, dentre os quais o prestígio do matemático que a introduziu, a facilidade e praticidade do símbolo, a disseminação nos livros didáticos, entre outros. Dois exemplos marcantes no século XVIII foram Leibniz e Euler. A maioria das notações por eles propostas, como símbolos para diferencial, integral, número pi (π), número e, permaneceu.

O objetivo deste trabalho é identificar e comparar notações propostas para o conceito de limite, a partir da análise de livros e artigos científicos de matemáticos e autores de livros de matemática do século XVIII ao século XX. Conforme Bloch (2001, p. 82) chamou atenção, "[...] reunir os documentos que estima necessários é uma das tarefas mais difíceis do historiador"; assim, escolhi como ponto de partida o livro de Cajori (1993), publicado pela primeira vez em 1929. Entre os autores referidos por Cajori, escolhi aqueles, a cujos textos tive acesso, em que tais símbolos matemáticos foram inseridos e, inclui outros, que não foram referidos por esse autor. Os autores escolhidos foram aqueles citados por Cajori, Bromwich, T. J.; Cauchy, A.; Carnot, L.; Dirksen, H.; Hardy, G. H.; L'Huilier, S.; Lacroix, S.; Leathem, J.;

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a240137

Murray, D. A; Peano, G; Smith, P; Stockler, F. G; Weierstrass, K. ; além desses, foram acrescentados outros não referidos por Cajori: Comte, A. e Lobachewsky, N. A última etapa foi a análise comparativa das notações. A fim de facilitar a apresentação das notações, propus três períodos: 1) notações de limite no século XVIII; 2) notações de limite no século XIX; 3) notações de limite no início do século XX. O primeiro período é o do surgimento da notação de limite, mantida quase sem alterações, como uma abreviação da palavra limite. O segundo período, mais extenso, caracteriza-se com a inovação de acrescentar a essa abreviação a referência da variável que tende a um determinado valor. O terceiro período é o da estabilização, quando a notação se aprimora e são incluídos a seta e os símbolos para limites laterais.

2 Notações de limite no século XVIII

> As operações mentais são semelhantes às cargas de cavalaria numa batalha – são estritamente limitadas em número e exigem sempre novos cavalos, devendo por isso apenas ser dados em momentos decisivos (Whitehead, 1948, p. 56).

Aproveitando a metáfora de Whitehead, o momento decisivo de usar um novo cavalo na batalha da simbologia matemática do conceito de limite surgiu quando este conceito precisou ser definido e, como acabou se tornando um conceito fundamental no Cálculo Infinitesimal, a decisão sobre um símbolo adequado foi pelo menos delicada.

O matemático suíço Simon-Antoine Jean L'Huilier (1750-1840) despontou ao introduzir, na Europa, pela primeira vez, uma simbologia para o conceito de limite: "a abreviatura " lim." para a palavra " limite " parece não ter sido usada antes de Simon Lhuilier" (Cajori, 1993, p. 244). A pista por ele deixada permitiu chegar ao ensaio de L'Huilier *Exposition Elémentaire des príncipes des calculs supérieurs*[2], que revela ter sido deste autor a primeira notação para o conceito de limite, em 1786.

L'Huilier aceitou o desafio lançado pela Academia de Berlin de apresentar uma teoria clara e precisa sobre a natureza do infinito. Com esse trabalho, o autor ganhou, em 1784, o prêmio daquela Academia. Na página 24, ele usa a notação abreviada para limite – Lim. Constata-se que ele usou as três primeiras letras da palavra latina para limite, sendo a primeira maiúscula e após a última letra usou um ponto.

[2] Disponível na BNF: https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k62055z/f12.item

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a240137

$$\begin{array}{llll} \text{En effet; Lim.}(& A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots\ldots & : A) & = 1 : 1 \\ & A & : A' & = A : A'. \\ \text{Lim.}\ (& A' & : A' + B'y + C'y^2 + D'y^3 + \ldots) & = 1 : 1 \\ \text{Donc } (\S.\ \text{VI.}); (\text{Lim.} & A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots\ldots & : A' + B'y + C'y^2 + D'y^3 + \ldots) & = A : A'. \end{array}$$

$$\text{Ou Lim.} \frac{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots\ldots}{A' + B'y + C'y^2 + D'y^3 + \ldots\ldots} = \frac{A}{A'}.$$

Figura 3 - Extrato da notação de limite por L'Huillier
Fonte: L'Huillier (1786, p. 24)

Nesse ensaio, L'Huilier explicou porque fez uso dessa notação: "Para facilitar o cálculo por uma notação mais cômoda, é conveniente designar por $lim.\frac{\Delta P}{\Delta x}$ o limite da relação das mudanças simultâneas de P e x, por $\frac{dP}{dx}$ de maneira que $lim.\frac{\Delta P}{\Delta x}$ ou $\frac{dP}{dx}$ designe a mesma coisa". (L'huillier, 1786, p. 31).

Poucos anos depois dessa publicação, encontra-se em língua portuguesa uma referência ao autor suíço e à adoção de sua notação para o conceito de limite. Em Portugal, Francisco de Borja Garção Stockler (1759-1829), no prefácio de seu *Compêndio da theorica dos limites, ou introdução ao methodo das fluxões* (1794), citou alguns dos matemáticos em que se apoiou, e entre eles aparece L'Huillier. A fim de mostrar o ineditismo de sua obra, ressaltou que esta versão já havia sido apresentada à Academia Real de Ciências de Lisboa, em 1791, e, também, aos seus alunos na disciplina de Cálculo na Academia da Marinha (Stockler, 1794). Este compêndio tem sido objeto de análise de pesquisadores como Cajori (1993), Saraiva (2000), e Pacheco e Schubring (2020).

Pacheco e Schubring (2020) destacaram a importância do trabalho de Stockler pela abordagem algébrica dada aos limites, entretanto este matemático é pouco conhecido da comunidade de historiadores da matemática. Por outro lado, a divulgação da notação de L'Huillier em língua portuguesa é outra contribuição deste autor que merece ser destacada. Ao introduzir a notação para o conceito de limite, Stockler esclarece:

> Quando no cálculo quisermos exprimir o limite de qualquer variável, e não tivermos para isso determinada letra do alfabeto, escreveremos as três letras Lim. Da palavra limite antes do caracter, ou expressão, que representar a variável. Assim, para exprimir limite de x, escreveremos Lim. x, para exprimir limite de xy, escreveremos Lim. (xy), para exprimir limite de y^x, escreveremos Lim. (y^x), e assim semelhantemente (Stockler, 1794, p. 29).

No decorrer do texto, Stockler manteve-se coerente, usando sempre a mesma notação de limite e, nas últimas páginas, trouxe o importante exemplo de limite – Lim. $(\frac{sen\ y}{y}) = 1$ (Stockler, 1794, p. 98).

Na França, em 1797, portanto após Stockler, Lazare Carnot (1797) usou duas notações diferentes para limite em seu livro "Metafísica do Cálculo" (1797). A primeira é uma

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a240137

abreviação da primeira letra da palavra limite – L., que aparece, na página 43, quando explica o método dos limites, apoiado na Figura 4. Ele diz:

> É evidente que $\frac{MZ}{RZ}$ não é igual a $\frac{TP}{MP}$ [ver figura 1]. No entanto, a primeira dessas quantidades difere ainda menos da segunda RS mais próxima de MP, isto quer dizer que $\frac{MZ}{RZ} = \frac{TP}{MP}$ é uma equação imperfeita. Mas, quando (denotarmos L. – expressão limite ou do último valor) L. $\frac{MZ}{RZ} = \frac{TP}{MP}$. É uma equação perfeita ou rigorosamente exata (Carnot, 1797, p. 43).

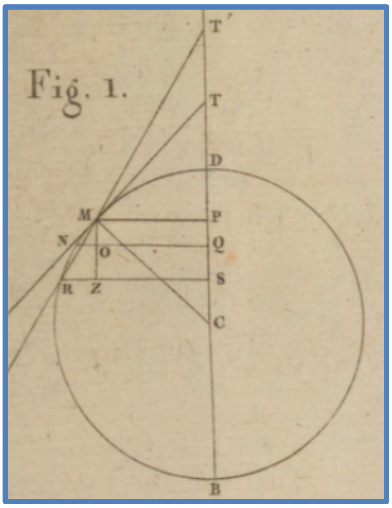


Figura 4 - Primeira figura da Metafísica do Cálculo de Carnot
Fonte: Carnot (1797, p. 43)

Em nota de rodapé da página 66, Carnot introduziu o símbolo – lim. – o qual efetivamente começa a usar na página 72. No problema II, ele propõe achar um máximo para a função y= $\sqrt{2ax - xx}$. Apoiado numa figura, ele chega a $\frac{dy}{dx} = \frac{a-x}{y}$, que ele considera uma equação imperfeita. Para torná-la rigorosa, segundo ele, é preciso introduzir o símbolo lim., chegando a lim. $\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{a-x}{y}$. Há uma diferença mínima entre o símbolo usado por L'Huillier e Carnot: o primeiro usa a letra L maiúscula enquanto Carnot usa todas as letras minúsculas.

Entendemos que símbolos podem ter significados distintos para seus autores, como nesse caso no qual se pensarmos que $\frac{dy}{dx}$ é, o que atualmente se considera como a derivada da função y em relação a x, a fórmula está perfeita. Entretanto, para Carnot, as diferenciais dy e dx são quantidades infinitamente pequenas relativamente a y e x. Dessa maneira, nós podemos concluir que $\frac{dy}{dx}$ é a razão entre duas quantidades infinitamente pequenas, o que é uma aproximação para a derivada, mas não é a derivada. Talvez, por isso, é que ele a considerasse uma equação imperfeita. Então, ele introduziu o símbolo lim., pois o limite dessa razão é a derivada.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a240137

3 Notações de limite no século XIX

> A linguagem sem ambiguidades e o simbolismo de Weierstrass e Heine expulsaram do Cálculo a noção de variabilidade e tornaram desnecessário o persistente apelo a infinitesimais fixos (Boyer, 1974, p. 411).

Foi no século XIX, com as contribuições de Weierstrass (1815-1897), entre outros matemáticos, que o simbolismo ganhou força na análise matemática. Augustin-Louis Cauchy (1821), no seu livro de “Curso de Análise”, seguindo seus antecessores, usou o símbolo: – lim. – e justificou com clareza o seu uso: “Quando uma quantidade variável converge para um limite fixo, muitas vezes é útil indicar esse limite por uma notação particular; isto é o que nós faremos, colocando a abreviatura lim.” (Cauchy, 1821, p. 13). Entretanto, no livro de Cálculo Diferencial (Cauchy, 1829), omitiu o ponto e, no decorrer do livro, não mais o utilizou.

puis, en passant aux limites,

$$(1) \qquad \lim (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e^{\lim (1+\beta)} = e.$$

Figura 5 - Extrato do livro de Cálculo Diferencial de Cauchy
Fonte: Cauchy (1829, p. 4)

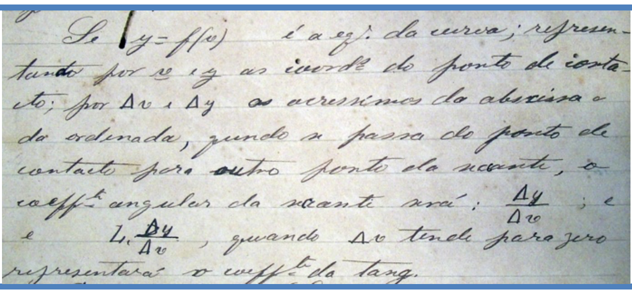
Contemporâneo de Cauchy, o filósofo Auguste Comte (1798-1857) usou o símbolo L para limite, conforme a primeira proposta de Carnot (1796). Aliás, Comte incluiu Carnot entre os autores de leitura obrigatória (Silva, 2023). No “Curso de Filosofia Positiva”, vol. 1, Comte usou o símbolo L para limite.

$$t = L\,\frac{\Delta y}{\Delta x}\,;\ (1)$$

Figura 6 - Símbolo para limite conforme Comte
Fonte: Comte (1830, p. 250)

Justifico a referência a Comte devido à influência que exerceu no ensino da matemática superior no Brasil. Há referência a essa simbologia em caderno de aluno da Academia Militar do Rio de Janeiro em 1884. No mesmo caderno, encontra-se também a notação lim., para o conceito de limite, embora predomine a abreviação da letra maiúscula L.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a240137


Se $y=f(x)$ é a eq.ª da curva; representando por x e y as coord.as do ponto de contacto; por Δx e Δy os acrescimos da abcissa e da ordenada, quando se passa do ponto de contacto para outro ponto da secante, o coeff.e angular da secante será: $\frac{\Delta y}{\Delta x}$; e $L.\frac{\Delta y}{\Delta x}$, quando Δx tende para zero representará o coeff.e da tang.

Transcrição: Se y=f(x) é a equação da curva, representando por x e y as coord[as] do ponto de contato para outro ponto da secante, o coeff[te] angular da secante será: $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ e L$\frac{\Delta y}{\Delta x}$, quando Δx tende para zero representará o coeff[te] da tang.

Figura 7 - Símbolo L de limite
Fonte: Cunha (1884, p. 295)

Na Rússia, Nikolai Lobatchevsky (1793-1856), conhecido por suas contribuições na geometria não-euclidiana ou *Geometria Imaginária* como ele denominava, publicou em 1855, em Kazan, o texto *Pangeometria.* Nele, usou a notação de limite seguida de chaves – lim {...} – na seguinte passagem de um exemplo de retificação de curvas, $\lim\left\{n\sin\frac{2\pi}{n}\right\}=2\pi$, onde n é um inteiro, conforme Figura 8.

$$\lim\left\{n\sin\frac{2\pi}{n}\right\}=2\pi$$

Figura 8 - Notação de limite na Pangeometria
Fonte: Lobatchevsky (1886, p. 642)

Uma mudança significativa na notação ocorreu na década de 1840, quando Karl Weierstrass acrescentou nesse símbolo referência à aproximação dessa variável a um determinado valor. Nas obras completas de Weierstrass, foi possível identificar o primeiro uso do simbolismo para limite que o autor escolheu. O trabalho faz parte das “Obras Completas de Weierstrass” (1894). O mais antigo uso por Weierstrass, por nós encontrado, foi em 1841, no artigo *Darstellung einer analytischen Function einer complexen veränderlichen, derem absoluter Betrag zwischen zwei gegebenen Grenzen liegt*. Na Figura 9, vê-se que a variável ε tende para 1. Para designar tal aproximação, ele usou o símbolo =. Em escritos posteriores, conforme Figuras 10 e 11, ver-se-á que ele usou o mesmo símbolo para valores que tendem ao infinito.

$$\lim_{\varepsilon=1}\int_{-\infty}^{+\infty}F(xw)\left\{\frac{1}{w-\varepsilon}+\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon w}\right\}\frac{dw}{d\lambda}\,d\lambda = 2\pi i F(x)$$

Figura 9 - Extrato do uso de nova notação por Weierstrass
Fonte: Weierstrass (1894, p. 62)

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a240137

Em 1842, no artigo: *Definition analytischer functionen einer veränderlichen vermittelst algebraischer Differentialgleichungen,* usou o símbolo de limite com a primeira letra maiúscula.

$$\operatorname*{Lim}_{\nu=\infty} \frac{c_{\nu+1}}{c_\nu} = ng(m-1)(1+\alpha)^{m-1}.$$

Figura 10 - Notação com limite em 1842
Fonte: Weierstrass (1894, p. 80)

Manteve a letra inicial maiúscula, no artigo *Über die theorie der analytischen Facultäten,* publicado no Crelle Journal, em 1856.

$$\operatorname*{Lim}_{u=+\infty} \frac{u^{y|x}}{u^{y}} = 1$$

Figura 11 - Notação de limite em 1856
Fonte: Weierstrass (1894, v. 51, p. 154)

A variável que tende ao limite está claramente apresentada, ela aparece abaixo do símbolo lim, usa o símbolo = e não ainda o moderno →. Eu concluí que Weierstrass, ao adotar e manter a notação de limite, especificando a variável em aproximação, deu um passo decisivo para a atual notação. Certamente, o prestígio de Weierstrass e o papel de seus discípulos que divulgaram as suas aulas, contribuíram para que essa notação fosse adotada por um número significativo de matemáticos. Nesse período, foi fundamental a contribuição de Weierstrass explicitando a variável e o valor para o qual ela tende, que esteve ausente no século XVIII.

4 Notações de limite no século XX

> A linguagem é um traje que disfarça o pensamento (Wittengstein, 2012, p. 165).

Como *traje* a linguagem é exterior. Assim, a notação é também algo que exterioriza. Wittgenstein (2012) explica que, para reconhecermos o símbolo no sinal, é preciso que se atente para o seu significado. Já chegamos ao século XX na trajetória histórica do símbolo de limite, e com ele constata-se o crescimento da lógica e formalização.

Segundo Almeida (2024), o signo ou símbolo →, da notação de limite, associa na mente a noção de *movimento*, ou, na terminologia moderna, substitui a expressão *tende*. Quando esse signo assume um significado semântico completo, como na noção de limite: *tende para*, ele se

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a240137

torna um símbolo matemático verdadeiro. A passagem decisiva para a atual notação – $\lim\limits_{x \to 0}$ ... – segundo Cajori (1993), é devida ao matemático inglês John Gaston Leathem.

Farei um breve parêntese para destacar a contribuição de Leathem que, ao introduzir a seta no símbolo de limite, o transformou. Apareceu no seu livro “Volume e superfícies integrais usadas na física”, publicado pela primeira vez em 1905, com segunda edição em 1913 e reimpressão em 1922. O livro era dedicado aos estudantes de física. Ele considerou o caso de uma função *f* que tende ao infinito num ponto P no volume T. O objetivo era *cercar* o ponto P por uma superfície fechada t, e tomar o volume integral através da totalidade do volume T, exceto na parte incluída por t. Ao excluir P do domínio de integração, chega-se a uma integral finita. Ele prossegue explicando que, se tornarmos a superfície t cada vez menor em torno de P, a integral de volume tenderá a um limite: “A definição pode ser expressa simbolicamente assim : $\int^{T} f d\tau = \operatorname*{Lim}\limits_{t \to 0} \int_{t}^{T} f\, d\tau$, onde o símbolo → é usado para denotar frases como ' tendendo para ' ou 'tende para,' de modo que t → 0 lê-se' como t tende para zero” (Leathem, 1922, p. 13).

Na visão de Cajori (1993), o uso generalizado da notação de seta, provavelmente, pode ser atribuído à sua aparição em dois livros em 1908: “Uma Introdução à Teoria das séries infinitas” (1ª ed.), por Thomas John l'Anson Bromwich (1875-1929), e “Um Curso de Matemática Pura”, por Godfrey Harold Hardy (1877-1947).

Bromwich introduziu, no capítulo 1, os conceitos de sequências e limites. Formalmente, ele define limite de uma sequência: “O limite da sequência (a_n) é dito ser l, se um índice m pode ser encontrado para corresponder a cada número positivo ε, portanto pequeno, tal que, $l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon$, somente se n>m” (Bromwich, 1908, p. 2). Prossegue chamando a atenção para a conveniência de abreviar isso, usando a notação $l = \lim\limits_{n \to \infty} a_n$, ou $l = \lim\ a_n$ ou $a_n \to l$, entre as três simbolizações, as duas últimas podem ser usadas, desde que não haja dúvidas de que a variável tenda ao infinito.

Este matemático inglês dedicou um parágrafo para discutir as notações de limites e afirmou que o “símbolo da flecha → tem sido adotado em muitos livros recentes e em artigos como uma abreviação conveniente para tender ou aproximar (alguns valores limites); ele foi introduzido com esse objetivo por Dr. J. G. Leathem” (Bromwich, 1908, p. 3).

Além de Bromwich, o prestígio de Hardy na comunidade científica pode ter sido um fator decisivo para o êxito do livro “Um Curso de Matemática Pura”, com primeira edição em 1908, décima em 1952, reimpressões de 1955 a 2008, quando foi acrescido um prefácio de Körner, e nova reimpressão em 2011. Embora na primeira edição Hardy tenha insistido que o livro era dedicado para o primeiro ano das universidades e que era “realmente elementar”

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a240137

(Hardy, 2011, p. xiii), ele dedicou ao tema dos limites aproximadamente 70 páginas. A explicação do uso de uma notação curta para exprimir o crescimento de n, ou quando n tende ao infinito, $n \to \infty$, foi a seguinte:

> A expressão 'tende a' assim como a palavra 'sucessivamente' sugere naturalmente a ideia de mudança no tempo, e às vezes é conveniente pensar na variação de **n** como realizada no tempo. Trata-se, no entanto, de uma mera questão de conveniência, a variação de **n** geralmente não tem nada a ver com o tempo (Hardy, 2011, p. 116).

Antes de definir formalmente o conceito de limite, o autor traz longas reflexões sobre o significado do limite e inclusive apresenta a notação da Figura 12.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Figura 12 - Primeira aparição da notação de limite em Hardy
Fonte: Hardy (2011, p. 219)

Diferentes formulações para a definição de limite ao infinito são dadas até chegar a uma mais sucinta: "Se, dado qualquer número positivo δ, por menor que seja, nós podemos encontrar $n_0(\delta)$ tal que $|\phi(n) - l| < \delta$ quando n≥ $n_0(\delta)$, então nós podemos dizer que $\phi(n)$ tende para o limite l quando n tende a ∞, e escrevemos $\lim_{n \to \infty} \phi(n) = l$" (Hardy, 2011, p. 121). Por mais de trinta páginas, o autor explora os limites quando n tende ao infinito, inclusive trata de séries. Introduz também os limites superiores e inferiores de uma função limitada $\phi(n)$ (Figura 13).

$$\Lambda = \overline{\lim}\, \phi(n), \quad \lambda = \underline{\lim}\, \phi(n)$$

Figura 13 - Limites superior e inferior
Fonte: Hardy (2011, p. 157)

Ao passar para o estudo das funções de variável real, Hardy considera o limite de uma função $\phi(x)$ quando x tende ao valor **a**, dizendo: "Se dado δ, pode-se sempre determinar $\varepsilon\ (\delta)$ tal que $|\phi(x) - l| < \delta$ quando $0 < |x - a| \leq\ \varepsilon\ (\delta)$ então $\lim_{x \to a} \phi(x) = l$" (Hardy, 2011, p. 177). Finalmente, o autor introduziu notações para os limites laterais. Afirmando que se os dois limites coincidirem, aquele será o valor do limite no ponto (Figura 14).

Thus $\lim_{x \to a} \phi(x) = l$ is equivalent to the two assertions

$$\lim_{x \to a+0} \phi(x) = l, \quad \lim_{x \to a-0} \phi(x) = l.$$

Figura 14 - Limites laterais
Fonte: Hardy (2011, p. 177)

No início do século XX, a mudança do sinal de igualdade na notação foi substituída pela flecha. O sinal de igualdade não representava adequadamente a ideia de *tender a* ou *aproximar-se de*, entretanto a seta, que dá a ideia de deslocamento, pareceu mais apropriada para tanto.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a240137

5 Notações esquecidas

> Ao longo da história da matemática, surgiram miríadas de novas notações, mas a maioria delas desapareceu; no entanto, a escolha de uma notação em detrimento de outra não é uma questão simples. Algumas notações foram abandonadas simplesmente por razões históricas ou culturais. Algumas ficaram fora de uso porque surgiram alternativas mais concisas. Alguns mudaram à medida que a própria ciência evoluiu, e novas notações demonstraram novas ideias (Biletch; Kathleen; Yu, 2015, p. 3).

Além dos matemáticos já citados, que propuseram notações para limites, outros usaram notações que não foram adotadas. A fim de exemplificação, apresentaremos apenas algumas conforme os indícios apontados por Cajori.

Dirksen (1834) publicou nos Anais da Academia de Ciências de Berlin o artigo *Condições de convergência e divergência das séries infinitas*. Nele, introduziu uma notação para limite como uma espécie de abreviação da palavra alemã Grenze (que significa limite). Partindo de uma série infinita a_n, simbolizou o limite da série por $\overset{n=\infty}{Gr.}\ a_n$ (Figura 15).

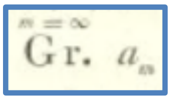


Figura 15 - Notação de limite de Dirksen
Fonte: Dirksen (1832, p. 82)

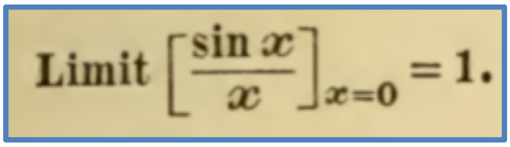
O fato de Dirksen preferir o uso de vocábulo alemão, além de mudar a posição da variável n do inferior para superior da abreviação, parece não ter dado bons resultados, pois pareceu desdenhar da tradição. Além disso, este matemático não tinha o mesmo capital científico que Weierstrass, o que pode ter feito sua notação cair no esquecimento.

Nos Estados Unidos da América, alguns autores usaram amplamente em livros de Cálculo a notação $\doteq$ (Cajori, 1993). Murray (1898, p. 4) utilizou, no livro "An Elementary Course in the Integral Calculus", a notação $\Delta x \doteq 0$, para significar que Δx se aproxima de zero como limite. Em nota de rodapé, ele atribuiu ao professor Oliver, da Universidade de Cornell, a autoria do símbolo. Chamou a atenção de que a notação $n \doteq \infty$ poderia ser usada em lugar de $\Delta x \doteq 0$, desde que $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Em 1905, James Pierpont usou $a_n \doteq l$ para lim $a_n = l$ (Cajori, 1993, v. 2, p. 257).

Giuseppe Peano (1903, p. 148), lógico italiano, escreveu um amplo formulário matemático e nele propôs a notação Lm para a classe limite e "limx (limite de x) indica o número finito ou infinito que constitui a classe Lmx". Toda a notação extremamente carregada de Peano também não teve muita repercussão nos livros didáticos.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a240137

Percei Smith (1903), autor do livro “Cálculo Elementar”, introduziu no primeiro capítulo os conceitos de funções e limites. Considerou absolutamente essencial para o estudo do Cálculo que o estudante compreenda perfeitamente a noção fundamental de limite. Ele não abreviou a palavra limite, mas a escreveu por extenso, seguida da variável ou função entre parênteses, como na Figura 16.



$$\text{Limit}\left[\frac{\sin x}{x}\right]_{x=0} = 1.$$

Figura 16 - Notação de limite de Smith
Fonte: Smith (1903, p. 17)

Estes são alguns exemplos de notações que, como diziam Halmos *et al.* (1973), jazem no cemitério.

6 Críticas às notações

> Uma boa atitude em relação à preparação da escrita matemática é fingir que ela é falada. Finja que você está explicando o assunto a um amigo em uma longa caminhada na floresta, sem papel disponível; volte-se para o simbolismo apenas quando for realmente necessário (Halmos *et al.,* 1973, p. 16).

Nesta epígrafe, Halmos *et al.* manifestam que, para uma boa escrita matemática, é preciso resistir aos símbolos. Ele considera que os símbolos matemáticos são as menores unidades da escrita matemática e, de maneira drástica, que a melhor notação é a ausência de notação. Entretanto, suaviza suas críticas afirmando que, desde que se evite um aparato alfabético complicado, ela pode ser usada.

Alguns matemáticos e autores de livros didáticos chamaram a atenção para notações inapropriadas e para o seu excesso na escrita da matemática. A discussão de Lacroix (*apud* Cajori 1993, p. 214) a esse respeito merece ser destacada:

> É um princípio declarado por todos que as notações atuais não devem ser alteradas, exceto quando em conflito manifesto com os conceitos que pretendem representar, ou quando se pode encurtá-las grandemente, ou finalmente quando, ao modificá-las, as tornamos aptas a desenvolver novas relações que não podem ser exibidas sem elas.

Lacroix (1797) não usou nenhuma simbologia para o conceito de limite, preferindo escrever por extenso a palavra.

Em suas críticas, Cajori (1993) apresentou alguns princípios para criar boas notações matemáticas. Elas devem ser: 1) concisas; 2) extensíveis para novas ideias; 3) tipograficamente fáceis de produzir.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a240137

Halmos *et al.* (1973), por outro lado, sugeriram que, numa boa escrita matemática, deve-se evitar notações que levem a conflitos. Por exemplo: escrever x_p^i para um objeto e x_i^p para outro objeto diferente é uma notação ruim, porque gera conflito quanto aos índices. Resumidamente: é preciso ter consistência na notação, evitar conflitos explícitos ou implícitos e evitar símbolos supérfluos.

Biletch, Kathleen e Yu (2015) propuseram critérios próprios para uma boa notação: o critério fundamental é consistência na notação, cria-se uma nova notação para abreviar algo, pois sem ela se consumiria muito tempo na representação; uma não-ambiguidade, de não usar a mesma representação para propósitos diferentes, ou seja, num sistema de notação, só se deve usar um símbolo para representar um objeto ou uma classe de objetos; a facilidade de reproduzir tipograficamente; e a compatibilidade com convenções existente. Leibniz, embora tenha sido um dos matemáticos que introduziu notações que continuam a ser usadas vários séculos após sua primeira formulação, não passaria nos critérios de ambiguidade, porque usou o mesmo símbolo para objetos diferentes. Por exemplo, segundo Cajori (1993), ele usou o símbolo $\int$ tanto para integral quanto para soma de série.

Em 2021, no livro "O símbolo e a realidade", os autores Grande e Silva (2021, p. 31) elegeram quatro aspectos fundamentais da notação: "1) precisão e concisão na expressão do problema: eliminação da ambiguidade e economia de pensamento, respectivamente: 2) possibilidade de extensão de uma teoria; 3) heurística: solução de problemas; 4) explicitação de estruturas". Os autores citados compartilham ideias comuns quanto à necessidade de critérios para uma boa notação matemática.

Na visão do filósofo inglês Whitehead (1948), o fato de muitas pessoas considerarem a matemática difícil e misteriosa pode ser atribuída aos numerosos símbolos que esta utiliza. Quando se desconhece o significado dos símbolos matemáticos, a matemática fica incompreensível. Mesmo que se conheça parcialmente essa simbologia, se não estivermos habituados a ela, teremos muita dificuldade em segui-la. Entretanto, este mesmo simbolismo possui suas vantagens, pois, segundo ele, representa uma enorme simplificação. Estes símbolos são um alívio para o cérebro de um trabalho desnecessário: "uma boa notação permite-lhe que se concentre em problemas mais complicados, aumentando por isso a potência mental da raça humana" (Whitehead, 1948, p. 53-54). "Os limites da minha linguagem são os limites do meu mundo" (Wittgenstein, 2012, p. 114).

7 Reflexões finais

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a240137

No período de três séculos, matemáticos e autores de livros didáticos inovaram com suas notações. Se considerarmos as reflexões que fizeram a respeito do simbolismo, isso parece ser uma evidência da importância atribuída a uma notação para o conceito de limite. As primeiras notações são abreviações da palavra latina limite, como L, Lim., lim., lim, entretanto, no século XIX, essa notação foi implementada, acrescentando abaixo do símbolo usado até então a referência da variável que tende a um determinado valor. Dois símbolos foram usados para a expressão *tender a*: $=$ e $\doteq$. O primeiro deles se manteve por muito tempo, o segundo parece ter sido mais usado nos USA, mas, no início do século XXI, a seta ou flecha $\rightarrow$, ao ser usada, sugerindo um deslocamento (ela lembra a flecha dos caçadores primitivos que ao ser arremessada parece estar em movimento), constitui-se numa alternativa forte. Pode-se dizer, num viés wittgensteiniano, que a ideia de movimento é a ideia *do mundo* e, para representá-la bem, a linguagem tem que estar de acordo com ela – por isso os limites da linguagem refletem e representam os limites do mundo. Tudo indica ter atendido às expectativas de um símbolo conciso e que representasse a ideia de *tender a* ou *aproximar-se de*. Ainda foram incorporadas algumas modificações nessa notação, para incluir os limites laterais.

Um símbolo matemático é flexível, ele se constrói, como mostrei neste estudo, e esse caráter dinâmico permite ao matemático aperfeiçoá-lo ou mesmo descartá-lo. O feito coletivo de busca por uma notação apropriada para o conceito de limite demorou várias dezenas de anos, diferentemente de outras notações como o símbolo de integral, que desde a primeira formulação obteve adesão da comunidade matemática e, praticamente, não sofreu alterações. Ao leitor deixo a tarefa de avaliar se o símbolo para o conceito de limite é um símbolo *feliz* ou não. Quanto à minha percepção, este símbolo pode ser considerado, pelo menos, poderoso, pois já sobreviveu sem alterações por mais de cem anos.

Agradecimentos

Aos colegas Manoel Almeida por suas contribuições à primeira versão do trabalho e Rafael Montoito pela leitura prévia deste artigo e por suas preciosas sugestões filosóficas. Ao CNPq pelo apoio ao desenvolvimento da pesquisa.

Referências

ABBAGNANO, N. **Dicionário de Filosofia**. São Paulo: Martins Fontes, 2007.

ALMEIDA, M. **Arqueomatemática**: arqueologia da matemática. Curitiba: ed. do autor, 2024.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a240137

ARTE BRASILEIRA. Blog da UTFPR no portal Wordpress. **Arte Rupestre no Brasil**. Curitiba, 1 de junho de 2012. Disponível em: https://artebrasileirautfpr.wordpress.com/2012/06/01/arte-rupestre-no-brasil/#jp-carousel-416. Acesso em: 15 jun. 2024.

BILETCH, B.; KATHLEEN, R.; YU, H; **An analysis of Mathematical Notation**: for better or worse. Worcester: Worcester Polytechnic Institute, 2015.

BLOCH, M. **Apologia da História ou o ofício do historiador**. Rio de Janeiro: Zahar, 2001.

BOYER, C. B. **História da Matemática.** São Paulo: Edgar Blücher; EDUSP, 1974.

BROMWICH, T. J. **An introduction to the theory of infinite series**. 3. ed. Providence: AMS Chelsea Publishing, 2000.

CAJORI, F. **A history of mathematical notations**. New York: Dover, 1993.

CAUCHY, A. L. **Cours d'Analyse**. Paris: Imprensa Real, 1821.

CAUCHY, A. L. **Leçons sur le Calcul Différentiel**. Paris: Libraires du Roi et de la Bibliothéque du Roi, 1829.

CARNOT, L. **Réflexions sur la métaphysique du Calcul Infinitésimal**. Paris: Chez Duprat, 1797.

COMTE, A. **Cours de Philosophie Positive**. Paris: Rouen Frères, Libraires-Editeurs, 1830.

CUNEIFORM DIGITAL LIBRARY INITIATIVE – CDLI. **Tablet Plimpton 322**. Berlin: CDLI Contributors, 2024. Disponível em: https://cdli.mpiwg-berlin.mpg.de/postings/214. Acesso em: 15 jun. 2024.

CUNHA, T. R. **Caderno manuscrito de Geometria Analítica e Cálculo Diferencial e Integral**. Seção de manuscritos. Rio de Janeiro: Biblioteca Nacional, 1884.

DAMEROW, P. **Abstraction and representation**: essays on the cultural evolution of thinking. Dordrecht, Boston, London: Kluwer, 1996.

DAVIS, P.; HERSCH, R. **A experiência matemática**. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1985.

DIRKSEN, H. Über die Bedingungen der convergenz und der divergenz der unendlichen reihen. **Abhandlungen der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin**. Berlin: Druckerei der Königlichen Akademie der Wissenschaften, 1834. p. 77- 107.

GLOCK, H.-J. **Dicionário Wittgenstein**. Tradução de Helena Martins. Rio de Janeiro: Zahar, 1998.

GRANDE, R; SILVA, R. S. R. **O símbolo e a realidade**. Porto Alegre: Fi, 2021.

HALMOS, P.; STEENROD, N.; SCHIFFERM M.; DIEUDONONNÉ, J. **How to write Mathematics**. Providence: Americal Mathematics Society, 1973.

HARDY, G. H. **A course of pure mathematics**. Cambridge: University Press, 1908.

KANT, I. **Crítica da razão pura**. 2. ed. Lisboa: Fundação Calouste Gulbekian, 1989.

L'HUILIER, S. A. **Exposition Elémentaire des príncipes des calculs supérieurs**. Berlin: George Jacques Decker Imprimeur du Roi, 1786. Disponível em: https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k62055z/f12.item. Acesso em: 15 jun. 2024.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a240137

LACROIX, S. F. **Traité du calcul différentiel et du calcul integral**. Tome 1. Paris: Duprat, 1797.

LEATHEM, J. G. **Volume and surface integrals used in physics**. Reimpressão. Cambridge: University Press, 1922.

LOBACHEWSKY, N. Pangéometrie ou Précis de Géométrie. **Collection conplète des ouevres géométriques de N. Lobatcheffsky.** Kazan: Édition de l'université, 1886.

MURRAY, D. A. **An elementary course in the integral calculus**. New York, Cincinnati, Chicago: American Book Company, 1998.

PACHECO, M. ; SCHUBRING, G. As contribuições de Francisco de Borja Garção Stockler (1759-1829) aos fundamentos da Análise. **Boletim do GEPEM**, Rio de Janeiro, [s.v.], n. 77, 2020, p. 23-42. Disponível em: https://periodicos.ufrrj.br/index.php/gepem/article/view/445. Acesso em: 21 jan. 2024.

PEANO, G. **Formulaire Mathematique**. Turin: Bocca Freres, 1903.

SARAIVA, L. Um matemático no Brasil: Francisco de Borja Garção Stockler e o Methodo inverso dos limites ou desenvolvimento geral das funções algorítmicas (1818-1824). **Episteme,** Porto Alegre, v. 11, p. 119-135, jul./dez. 2000.

SILVA, C.M.S. No paraíso dos símbolos: surgimento da teoria dos conjuntos no Brasil. *In*: BOMBASSARO, L. C.; PAVIANI, J. (Org.). **Filosofia, Lógica e Existência**. Caxias do Sul: EDUCS, 1997. p. 141-168.

SILVA, C. M. S. **Matemática Positivista e sua difusão no Brasil.** Vitória: EDUFES, 2023. Disponível em: https://edufes.ufes.br/items/show/216. Acesso em: 21 jan. 2024.

SMITH, P. **Elementary calculus**: a text-book for the use of students in general science. New York, Cincinnati, Chicago: American Book Company, 1903.

STOCKLER, F. G. **Compêndio da theorica dos limites ou introdução ao methodo das fluxões.** Lisboa: Oficina da Academia Real das Ciências, 1794.

TALL, D. **How humans learn to think mathematically**. Cambridge: University Press, 2013.

WEIERSTRASS, K. Mathematische **Werke von Karl Weierstrass**. Herausgegeben unter Mitwirkung einer von der Königlich preussischen Akademie der Wissenschaften eingesetzten Commission. Berlin: Academia de Ciências, 1894. Disponível em: https://archive.org/details/mathematischewer01weieuoft/page/254/mode/2up. Acesso em 20 jan. 2024.

WHITEHEAD, A. N. **Introdução à matemática**. Coimbra: Armênio Amado, 1948.

WITTGENSTEIN, L. **Tractatus Logico-Philosophicus**. Tradução de Luiz Henrique Lopes dos Santos. São Paulo: EDUSP, 2012.

WOLFRAM, S. **Notação matemática – passado e futuro**. *In:* INTERNATIONAL MATHML CONFERENCE, 1., 2000, Champaign. **Proceedings...** Champaign: Wolfran Research, 2000. [s.p.]. Disponível em: https://www.stephenwolfram.com/publications/mathematical-notation-past-future/ Acesso em: 12 jan. 2023.

Submetido em 29 de Fevereiro de 2024.
Aprovado em 01 de Maio de 2024.