ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230084

ARTÍCULO

El Método General de Resolución de Ecuaciones en la *Arithmetica Universal* de José Zaragoza (1669)

General Method for Solving Equations in the book *Arithmetica Universal* (1669) by José Zaragoza

Jacinto **Ruiz-Catalán**[*]
ORCID iD 0009-0009-3071-1819
María José **Madrid**[**]
ORCID iD 0000-0002-3582-9738
Alexander **Maz-Machado**[***]
ORCID iD 0000-0002-4112-4363

Resumen

En el presente trabajo se estudia el método general de resolución de ecuaciones polinómicas que expuso el matemático valenciano José Zaragoza en su libro *Arithmetica Universal*, publicado por primera vez en 1669. Este método está basado en el desarrollado por Viète y publicado en su libro *De numerosa potestatum*, de 1600, y es una evolución del antigüo método babilonio de cálculo de raices. En concreto, este método de resolución se basa en la expansión binomial de las potencias implicadas en la ecuación, detectando dos puntos clave: uno es la selección del número de dígitos de la solución y otro es la selección del divisor adecuado para la estimación de los sucesivos dígitos. El uso de tablas y la explicación detallada de las diferentes ramificaciones del proceso hacen que la configuración empleada por Zaragoza sea muy didáctica, incluso más que la de algunos de los diferentes matemáticos europeos que emplearon este método durante el siglo XVII.

Palabras clave: Historia de las matemáticas y educación matemática. Álgebra. Ecuaciones. Siglo XVII. José Zaragoza.

Abstract

Our study analyses the general method for solving polynomial equations that the Valencian mathematician José Zaragoza exposed in his book *Arithmetica Universal*, published for the first time in 1669. This method is based on

[*] Doctor en Didáctica de las Matemáticas por la Universidad de Córdoba (UCO). Profesor de Matemáticas de Educación Secundaria en el IES Luis Carrillo de Sotomayor, Baena, Córdoba, España. E-mail: jacinruiz@hotmail.com.
[**] Doctora en Didáctica de las Matemáticas por la Universidad de Salamanca (USAL). Profesora en la Facultad de Educación de la Universidad Pontificia de Salamanca (UPSA), Salamanca, España. E-mail: mjmadridma@upsa.es.
[***] Doctor en Didáctica de las Matemáticas por la Universidad de Granada (UGR). Catedrático de Universidad en la Facultad de Ciencias de Educación de la Universidad de Córdoba (UCO), Córdoba, España. E-mail: ma1mamaa@uco.es.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230084

the one developed by Vieta, which was published in his book *De numerosa potestatum* (1600), and it is an evolution of the ancient Babylonian method for calculating roots. Specifically, this resolution method is based on the binomial expansion of the powers involved in the equation, and it has two key points: the selection of the number of digits in the solution and the selection of the appropriate divisor for estimating the successive digits. The configuration used by Zaragoza includes tables and detailed explanations of the different ramifications of the process and these didactic aspects allow us to highlight Zaragoza's work, when we compare it with other European mathematicians who used this method during the 17th century.

Keywords: History of Mathematics and mathematics education. Algebra. Equations. 17th century. José Zaragoza.

1 Introducción

A finales del siglo XX, se produjo un auge de las investigaciones y publicaciones acerca de la historia de la educación matemática. La interconexión entre las matemáticas, su currículo y su historia constituye una base que sirve para profundizar en el conocimiento de la enseñanza y el aprendizaje de los conceptos y estructuras matemáticas a lo largo de la historia. La historia nos sirve como nexo de unión entre matemáticas y educación, permitiendo conocer mejor las características formales y estructurales del conocimiento matemático y los contenidos y problemas relacionados con su enseñanza y aprendizaje (Picado; Rico; Gómez, 2015).

La línea de investigación que ha suscitado más interés, en las últimas décadas, en esta área, es la del análisis de los libros de texto (León-Mantero; Casas-Rosal; Argudo-Osado, 2020). El estudio de los libros de texto nos permite tener conocimiento acerca del nivel de desarrollo de los conceptos y métodos matemáticos, su evolución, el nivel alcanzado, su incorporación a la educación y varios aspectos más que nos permiten mejorar tanto en el conocimiento como en su aplicación en los procesos de enseñanza y aprendizaje (León-Mantero; Casas-Rosal; Argudo-Osado, 2020).

Un libro de texto se suele caracterizar por contener una presentación sistemática de principios sobre un determinado objeto de conocimiento (Maz-Machado; Rico, 2015).

El interés del estudio de libros de texto se puede sustentar en dos argumentos: por una parte, para una sociedad es importante saber cómo se ha producido la transmisión de su cultura, siendo los libros, tradicionalmente, el vehículo principal de transmisión. Por otra parte, para la construcción de nuevos conceptos, el lenguaje es el mediador (principalmente el lenguaje escrito) y por tanto el análisis de libros de texto tiene una gran importancia epistemológica (Maz-Machado; Rico, 2015).

Si nos circunscribimos a España, hay bastantes trabajos de investigación en el área del análisis de libros de texto de matemáticas con fines relacionados con la didáctica de las matemáticas. Por ejemplo, Picado, Rico y Gómez (2015) analizan la implantación del Sistema

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230084

Métrico Decimal en España, en la segunda mitad del siglo XIX. Y, para ello, analizan trece libros de texto de distintos niveles educativos.

En otro trabajo, en este caso de Maz-Machado y Rico (2015), los autores analizan un total de catorce libros de texto de los siglos XVIII y XIX para determinar ciertos criterios didácticos presentes en la organización de los contenidos.

También, hay trabajos centrados en partes específicas de libros de texto de matemáticas. Un ejemplo es el análisis del prefacio del *Compendio Mathematico* de Tomás Vicente Tosca, trabajo realizado por Oller-Marcén y Muñoz-Escolano (2019) en el que se permite tener una visión de la concepción de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas a primeros del siglo XVIII en España.

En Maz-Machado, León-Mantero y Madrid (2020) se analizan las motivaciones de autores de libros de texto de matemáticas en España, en el siglo XVIII, para abordar la difícil tarea de escribir este tipo de textos con las dificultades que esta labor tenía en la época.

León-Mantero, Casas-Rosal y Argudo-Osado (2020) analizan en una investigación algunos libros de texto utilizados en el siglo XVIII para la formación de agrimensores en España, centrándose en los diferentes tipos de problemas tratados en el contexto de la agrimensura, en los sistemas de representación empleados y en las estrategias didácticas seguidas para el proceso de enseñanza-aprendizaje.

León-Mantero, Santiago y Gutiérrez-Arena (2020) también analizan, en un estudio, cómo se produjo la introducción del cálculo infinitesimal en la educación matemática durante el siglo XVIII en España, centrándose especialmente en el enfoque utilizado, los contenidos, la secuenciación, la notación y la manera de enseñar el cálculo de máximos y mínimos.

En el área del álgebra, área de este trabajo, hay algunos trabajos de investigación, como el de Madrid, León-Mantero y López-Esteban (2020) en el que las autoras analizan diecinueve textos de álgebra españoles del siglo XVIII, fijándose en la relevancia que los diferentes autores daban al álgebra y en las diferencias de las definiciones dadas por los mismos a esta disciplina.

Otro trabajo de Madrid *et al.* (2019) se centra en comparar la definición de ecuación que dan diferentes autores de libros del álgebra españoles del siglo XVIII utilizando un análisis de contenido de dichos textos.

Ya hemos visto la importancia del estudio de la historia de la educación matemática, y en concreto de los libros de texto. Con este trabajo, pretendemos presentar el método general de resolución de ecuaciones (polinómicas) empleado por el matemático español del siglo XVII José Zaragoza, analizando las diferentes ramificaciones y la configuración del mismo y los aspectos didácticos que este autor incluyó. En concreto, nuestro objetivo es: conocer la

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230084

estructura y el funcionamiento del método general de resolución de ecuaciones con la configuración empleada por José Zaragoza y valorar los aspectos didácticos incluidos por este autor en la presentación del método.

2 El álgebra en España hasta el final del siglo XVII

Rey Pastor (1913) indica que los primeros cincuenta años del siglo XVI, en España, son *propiedad* de los aritméticos y no es hasta 1552 cuando aparece el primer libro impreso de álgebra publicado en España. Se trata del *Libro primero de Arithmetica Algebraica* (Aurel, 1552) del alemán Marco Aurel.

Pero, el mismo Rey Pastor considera que es un compendio (a veces mejorando y otras empeorando) de la *Summa* de Pacioli, de 1494. Lo que sí considera de valor es la notación *cosística* empleada por Aurel, en contraposición a la notación italiana. Dicha notación proviene del algebrista alemán Rudolf, aunque teniendo en cuenta que tanto la notación alemana como la italiana son sincopadas (aunque la alemana tiene apariencia de simbólica), tampoco puede considerarse en exceso como una mejora (Puig; Fernández, 2013).

Se añaden a la lista de matemáticos que publicaron contenidos sobre álgebra en España, durante el siglo XVI, a Gonzalo de Busto y, sobre todo, al bachiller Pérez de Moya (1562), que publicó un texto muy popular en su época, hecho que corrobora las muchas ediciones existentes. Se trata de la *Arithmetica practica y speculativa*, cuya primera edición es de 1562. En la parte algebraica sigue a Marco Aurel (Rey Pastor, 1913). Aunque Pérez de Moya no utilice la sincopación alemana sino la italiana, pero según parece, simplemente porque en la imprenta no tenían los tipos de los caracteres cósicos alemanes. Según Rey Pastor, la obra de Pérez de Moya copia hasta los errores cometidos por Marco Aurel, salvo que en el capítulo XVI condensa en una sola ecuación general cuatro ecuaciones simples (Rey Pastor, 1913). En un libro posterior, Pérez de Moya incluye ya las demostraciones de los algoritmos de resolución de las ecuaciones canónicas (Puig; Fernández, 2013). Se trata del *Tratado de Mathematicas en que se contienen cosas de Arithmetica, Geometria, Cosmographia y Philosophia natural* de 1573.

Citamos sólo a Antich Rocha, que en su libro de aritmética hace una recopilación de las aritméticas de algunos de sus predecesores, de los que cita al comienzo a 49 de ellos, entre filósofos de la antigüedad y matemáticos notables de diferentes épocas (Rey Pastor, 1913).

Para Rey Pastor, el punto culminante está en Pedro Núñez (o Nunes, ya que era portugués), que, citando a su biógrafo Ribeiro dos Santos, es “el matemático de más nombre que tuvo Portugal y toda España, en el siglo XVI” (Rey Pastor, 1913, p. 114). Sin embargo, Rey

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230084

Pastor considera que no consiguió grandes éxitos en matemáticas porque el objeto principal de sus investigaciones fue la Cosmografía y la Navegación.

El *Libro de algebra en arithmetica y geometría*, de 1567, es la única obra de Núñez publicada en español. Rey Pastor se hace eco de que el libro se publicó treinta años después de ser escrito, por lo que es lógico que el lenguaje algebraico utilizado esté acorde no a la época de su publicación sino a treinta años antes. Aun así, Rey Pastor considera el libro de Núñez como el primer tratado completo, impreso en España, que contiene ideas fecundas que posteriormente fueron desarrolladas con éxito, estando a la altura de los libros de álgebra de la época en que fue escrito. Núñez considera las obras de Lucas del Burgo como desordenadas, y señala algunas imperfecciones de las obras de Tartaglia y Cardano, por lo que podemos considerar a Núñez como uno de los pocos matemáticos de la época (e incluso posteriores) que está al tanto de los trabajos exteriores más importantes en su época (Rey Pastor, 1913; Dou, 1990).

El siglo XVII español sufre un deterioro y casi abandono de las ciencias matemáticas, sobre todo en los dos primeros tercios del siglo (Dou, 1990), surgiendo un cierto renacimiento en el último tercio, principalmente con el matemático valenciano José Zaragoza (sobre todo en álgebra) y en menor medida con el matemático catalán Andrés Puig (Recasens, 2003).

Junto a ellos, a primeros de siglo el matemático Juan Bautista Tolrà publicó una obra en la que tradujo un texto del catalán Ventallol, al que le añadió una parte de álgebra (Ruiz-Catalán, 2020).

De Andrés Puig sabemos poco. Según figura en la portada de su único libro conocido, *Arithmetica Especulativa, y Practica y Arte del Algebra* cuya primera edición es de 1672, nació en Vic, provincia de Barcelona. Utiliza un lenguaje algebraico más del siglo XVI que del XVII, aunque en su álgebra hay dos métodos generales de resolución de ecuaciones que podemos considerar avanzados (Ruiz-Catalán, 2020).

El otro matemático destacado en álgebra, durante este siglo XVII en España, es José Zaragoza, del que trata este trabajo, y que estaba a un alto nivel matemático e, incluso, hizo alguna contribución en astronomía como *La teoría del centro mínimo* (Labarga, 2018).

Y así, mientras que Andrés Puig (1672) utilizó un lenguaje algebraico un tanto anticuado, José Zaragoza estaba en sintonía con los matemáticos más avanzados de la época (como por ejemplo Descartes).

3 Metodología

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230084

Este trabajo consiste en una investigación descriptiva de tipo histórico en el área de la historia de las matemáticas y la educación matemática. La técnica utilizada ha sido el análisis de contenido de textos matemáticos, técnica ampliamente utilizada en estudios de estas características, como por ejemplo los trabajos de Docampo (2006, 2008) o de Vallhonesta (2012).

Para conseguir nuestros objetivos, hemos seguido el método histórico descrito por Ruiz Berrio (1976). Se definen cuatro etapas para la investigación: heurística, crítica, hermenéutica y exposición. En cada etapa se definen unas tareas que hemos seguido en tanto se adaptaban a nuestros objetivos de investigación. La primera etapa ha consistido en la localización y verificación de autenticidad de las fuentes escritas (principalmente textos digitalizados por Google). La fuente primaria que hemos utilizado es la *Arithmetica Universal* de 1669 de José Zaragoza (Zaragozà, 1669).

Tras esto, hemos analizado (crítica interna) el libro de Zaragoza, centrándonos en los capítulos o páginas objetivo de nuestra investigación (el método general de resolución de ecuaciones). En la siguiente fase, la hermenéutica, hemos analizado, relacionado, interpretado y organizado la información que hemos adquirido con la intención de conseguir nuestros objetivos de investigación. Finalmente, mediante este trabajo exponemos una síntesis de los resultados obtenidos en nuestro estudio.

4 Resultados

4.1 José Zaragoza (1627-1679)

El padre José Zaragoza, *Zaragozà, Çaragoçà, Çaragozá, Saragossa o Ziracusano* (Sobrino, 2018, p. 1) nació en 1627 en Alcalá de Xivert (Castellón) y murió en 1679, en el Colegio Imperial de Madrid.

José Zaragoza nació en el seno de una familia modesta (Labarga, 2018), estudiando en un seminario y, finalmente, en la Universidad de Valencia, obteniendo el grado de Doctor en Filosofía. Hizo el noviciado en Huesca y en 1651 ingresó en la Compañía de Jesús (López Piñero *et al*., 1983). Enseñó retórica en Calatayud y artes y teología en Mallorca, donde tomó contacto con los astrónomos Vicente Mut y Miguel Fuster, posiblemente este sea el origen de su orientación científica, y más concretamente, en el área de la Astronomía.

De Mallorca se trasladó a Barcelona y luego impartió clases de teología en el Colegio de San Pablo, en Valencia, ciudad donde residió desde 1660 y durante más de un decenio. Pero

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230084

durante ese tiempo, de manera privada estudia y enseña matemáticas y astronomía. Fue en Valencia donde contactó con varios científicos y editó sus primeras obras, siendo, a su vez, maestro de algunos científicos y técnicos como José Chafrión y José Vicente del Olmo. Su labor científica y didáctiva provocó la introducción en tertulias y academias de temas científicos y promovió la creación de un grupo de *novatores* a finales del siglo XVII en Valencia (Sobrino, 2018).

En 1670 se trasladó a Madrid como titular de la cátedra de matemáticas del Colegio Imperial de Madrid, puesto que ocupó hasta el final de su vida (1679), donde fue también maestro de matemáticas del rey Carlos II (Labarga, 2018).

La primera obra que imprimió fue su *Arithmetica Universal* (Zaragozà, 1669) con un marcado carácter didáctico (López Piñero *et al*., 1983), aunque escribió más obras, de más profundidad científica, tanto de matemáticas como de astronomía.

4.2 La *Arthmetica Universal*

Publicado en 1669, la *Arithmetica* de José Zaragoza es una obra con marcado carácter didáctico, "que contribuyó a elevar el nivel de estas materias en España" (Navarro, 2005).

Se trata de un libro de 448 páginas numeradas, aparte de las no numeradas (portada, dedicatoria, licencia, censura, calificador, imprimatur, introducción, fe de erratas, tabla de capítulos, explicación de los caracteres e índice alfabético).

Uno de los detalles que nos hace ver el carácter didáctico del texto es analizar la introducción, que consta de seis páginas no numeradas y previas al libro I. En estas páginas, Zaragoza explica qué es la aritmética y cómo se divide en *Mayor y Menor*, también habla de su utilidad. Después, habla sobre la sutileza del álgebra y su aplicación a la geometría y de los logaritmos.

En la introducción habla, también, del estilo y el método de la obra, indicando claramente sus intenciones didácticas.

> Los Authores, que en nuestra lengua han salido, son por la maior parte en la mesma prolixidad diminutos, y confusos en la enseñança. Para obviar estos daños, he procurado ceñir el estilo de suerte, que la brevedad no fuesse a costa de la materia, ni de la claridad: Iuntar estas tres cosas, es bien dificil, pero no imposible (Zaragozà, 1669, s. n.).

Y aún más, en la misma introducción aconseja al lector principiante el itinerario que debe seguir a lo largo de las diferentes partes del texto. Primero, el principiante debe conocer las cuatro reglas (de la aritmética), y continúa diciendo que con ellas solas el estudiante puede

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230084

llegar "a lo sumo de la Arithmetica" (Zaragozà, 1669, s. n.). Después, indica al lector que puede entrar en el segundo libro (el de las raíces) sin haber estudiado las *aligaciones*, *falsas posiciones* ni *combinaciones*. Para el tercer libro (del álgebra), según Zaragoza, son necesarios los cinco primeros capítulos del segundo libro (todo lo relativo al cálculo de raíces y el método general de resolución de ecuaciones) y para estudiar el cuarto libro son necesarios los tres anteriores.

Por último, Zaragoza aconseja al estudiante hacer primero los ejemplos del libro y luego "formar otros a su imitación" (Zaragozà, 1669, s. n.).

El texto matemático consta de cuatro libros divididos en capítulos, que a su vez se dividen en secciones. Tanto los capítulos como las secciones se numeran independientemente en cada libro. El libro I, *de la Arithmetica menor*, páginas 1 a 152, y con un encabezado de página *del Arte menor*, trata sobre aritmética, incluyendo la proporcionalidad, regla de tres, falsa posición, aligaciones, progresiones y combinaciones.

El libro II, *de las Raizes*, páginas 153 a 264, y con un encabezado de página *del Arte maior*, trata sobre cálculo de raíces con diferentes índices, una aproximación general a todas las raíces y uso del cálculo de raíces a la resolución de ecuaciones polinómicas (tratándolas con un algoritmo derivado del usado para el cálculo de raíces).

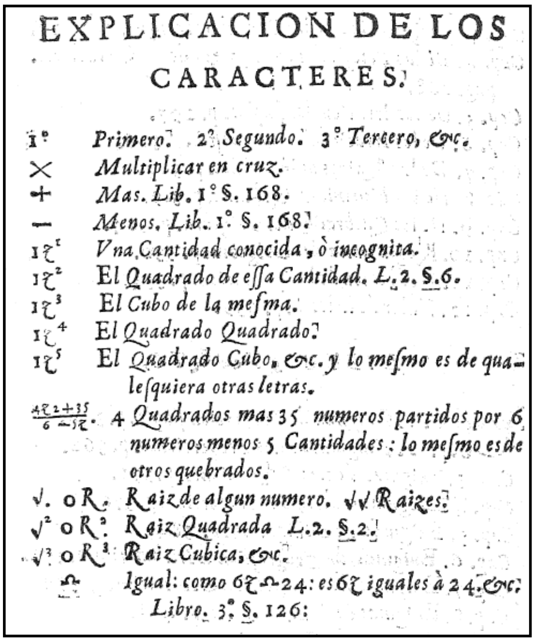
El libro III, *de la Algebra*, páginas 265 a 344, y con encabezado de página *del Algebra*, trata sobre operaciones con polinomios, operaciones con irracionales y reducción de problemas aritméticos a expresiones algebraicas resolubles o bien con su semejanza con las ecuaciones canónicas o con el método general expuesto en el libro II.

El libro, IV, *de los Enigmas*, páginas 345 a 448, y con encabezado de página *de los Enigmas*, trata sobre problemas resueltos con procedimientos algebraicos anteriormente expuestos.

4.3 El álgebra de José Zaragoza

Podríamos decir que el lenguaje algebraico de José Zaragoza es casi simbólico, mucho más avanzado que el de su contemporáneo Andrés Puig (Ruiz-Catalán, 2020), y al nivel de matemáticos ilustres europeos de la época. Al final de su libro, tras la tabla de contenidos y antes que el índice, aparece un resumen de la simbología que utiliza, donde se incluyen los símbolos algebraicos. Podemos verlo en la Figura 1.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230084



EXPLICACION DE LOS CARACTERES.

1º Primero. 2º Segundo. 3º Tercero, &c.
× Multiplicar en cruz.
+ Mas. Lib. 1º §. 168.
− Menos. Lib. 1º §. 168.
1ʒ¹ Vna Cantidad conocida, ò incognita.
1ʒ² El Quadrado de essa Cantidad. L. 2. §. 6.
1ʒ³ El Cubo de la mesma.
1ʒ⁴ El Quadrado Quadrado.
1ʒ⁵ El Quadrado Cubo, &c. y lo mesmo es de qualesquiera otras letras.
(4ʒ2+35)/(6−5ʒ). 4 Quadrados mas 35 numeros partidos por 6 numeros menos 5 Cantidades: lo mesmo es de otros quebrados.
√. o R. Raiz de algun numero. √√ Raizes.
√² o R². Raiz Quadrada L. 2. §. 2.
√³ o R³. Raiz Cubica, &c.
Igual: como 6ʒ 24: es 6ʒ iguales à 24. &c. Libro. 3º §. 126.

Figura 1 - Simbología utilizada por Zaragoza
Fuente: ZARAGOZÀ (1669, s. n.).

El álgebra de Zaragoza es una de las primeras que contiene alguna de las ideas innovadoras de Viète (Puig, 2018). Como ejemplo, introduce el concepto de *álgebra especiosa*. Pero más interesante, si cabe, es el uso de símbolos para referirse a las incógnitas, algo que es más avanzado incluso que en Vieta y al nivel de los algebristas más destacados en su tiempo en Europa.

Zaragoza es el primer matemático que utiliza la palabra *exponente* en España, pero no con el significado de "número de veces que una cantidad aparece cuando se multiplica por sí misma reiteradamente" sino "como el lugar que una potencia tiene en la progresión geométrica que la genera" (Ruiz-Catalán, 2020). Para formar los *caracteres* (nombres de las *potestades* o potencias de las incógnitas), Zaragoza utiliza el sistema aditivo. Es decir, que para nombrar cada *potestad* se sirve de la suma de los anteriores, no como con el sistema multiplicativo, en el que se utiliza el producto de los anteriores (con el inconveniente de que si la potencia es prima, no puede ser el producto de dos anteriores que no sean la unidad y ella misma, por lo que hay que introducir un nuevo nombre de carácter para las sucesivas potencias primas, como *relato* o *sursólido*).

Zaragoza utiliza una letra para representar los *caracteres*. En concreto, utiliza la letra Z. Para el signo de igualdad utiliza, de manera general, el símbolo , aunque también se refiere al símbolo , decidiéndose por el primero al resultarle más fácil de escribir. La elección de una letra en vez de la sincopación (tal y como se solía hacer en siglos anteriores e incluso en su misma ápoca por otros matemáticos) es por sencillez, claridad y facilidad, tal y como dice él

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230084

mismo: “otra forma de Caracteres mas senzillos, claros, y faciles: tomase por Raiz la letra Z, (y se pudo tomar qualquiera otra del abecedario) […]” (Zaragozà, 1669, p. 155). En la siguiente figura (Figura 2), aparece una tabla en la que relaciona las progresiones geométricas, exponentes, nombres, caracteres sincopados y caracteres simbólicos (Zaragozà, 1669, p. 154).

2 *Exemplo de la Raiz, y sus Potestades.*

1. Prog. Geom.	2. Prog. Geom.	3. Prog. Geom.	Exponentes.	Nonbres.	1. Caracteres.	2. Caracteres.
1	1.	1.	0			
2	4.	8.	1	Raiz.	R.	Z^1.
4	16.	64.	2	Quad.	Q.	Z^2.
8	64.	512.	3	Cubo.	C.	Z3.
16	256.	4096.	4	Quad.Quad.	QQ.	Z4.
32	1024.	32768.	5	Quad.Cubo.	QC.	Z5.
64	4096.	262144.	6	CuboCubo.	CC.	Z6.
128	16384.	2097152.	7	Q.Q.Cubo.	QQC.	Z7.
&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.

Figura 2 - Caracteres en Zaragoza
Fuente: Zaragozà (1669, p. 154).

4.4 El método general de resolución de ecuaciones

La resolución de ecuaciones en Zaragoza no está en el libro de álgebra, tal y como ocurría en el siglo XVI e incluso en algunos contemporáneos del XVII (Eroles; Massa Esteve; Blanco Abellán, 2019) sino en uno de los dos que le dedica a la aritmética (al del arte mayor). Para Zaragoza, la resolución de ecuaciones es una ampliación del cálculo de raíces, por lo que no la considera álgebra sino aritmética.

Eso sí, la regla del álgebra usa este arte mayor para resolver los problemas algebraicos. Por lo que nos centramos en el libro II, que se divide en catorce capítulos.

En el capítulo I de este libro II (*de las raizes*), dice que va a explicar el asunto más difícil de la aritmética, y que el aritmético debe estar bien ejercitado en el arte menor.

En el segundo capítulo, Zaragoza expone los principios universales para todas las raíces. Indica que el número del que se quiere obtener la raíz se separa en grupos de tantos dígitos como indica el exponente de la raíz, comenzando por la derecha.

Para el proceso de obtención de la raíz, comienza por el primer grupo (el más a la izquierda) de dígitos y busca su raíz en una tabla de potencias que previamente ha calculado (en el libro figuran las potencias de 1 a 9 de los números del 1 al 19). Si no es una raíz exacta, selecciona el siguiente menor. Según Zaragoza, toda la dificultad está en hallar los divisores y los restadores, y para ello pone una tabla que no es más que el desarrollo de los coeficientes de los sucesivos binomios.

> La *Raiz*, que se busca, necessariamente ha de tener tantas letras, como puntos el numero de quien se saca; si la *Raiz* huviere de tener tres, ò mas letras, se añadirà un zero a las dos primeras, y se llamarà A^1, y la tercera que se hallarà por división, se

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230084

> llamarà B^1 otra vez: sus Potestades se hallan de la mesma suerte, y asi se continua infinitamente, hasta sacar tantas letras, como el numero tiene puntos. Toda la dificultad està en hallar los *Divisores*, por quien se ha de partir, y los *Restadores*, que se han de restar: para esto sirve la Tabla triangular […] (Zaragozà, 1669, pp. 160-161).

La tabla triangular la explica y desarrolla a partir de la página 139 del libro I, utilizando la combinatoria. En este capítulo, Zaragoza explica solamente los primeros pasos del proceso de cálculo, y deja para más adelante los detalles de cómo se obtienen los sucesivos dígitos usando los conceptos de *Divisor* y *Restador*.

En el capítulo III del libro II (*de la raiz quadrada*) desarrolla ya el proceso completo para el cálculo de raíces cuadradas. Hace una taxonomía de las *potestades* (Cuadro 1).

Potestades	**Simples**		$Z^2, Z^3, ...$
	Compuestas	Muchas potestades de una especie	$30Z^2, 50Z^3, ...$
		Muchas potestades de diferentes especies	$30Z^2 + 50Z^3, ...$

Cuadro 1 - Taxonomía de las *potestades*
Fuente: elaboración propia.

Como podemos apreciar, Zaragoza usa el término *potestad* para referirse a lo que, actualmente, denominamos polinomio. Las *potestades simples* son los monomios con coeficiente unitario, y las *potestades compuestas* las divide en lo que nosotros llamaríamos monomios con coeficientes no unitarios y polinomios.

Comienza explicando el proceso de cálculo para sacar una raíz cuadrada, que es el de la *potestad simple* más sencilla. El primer ejemplo está en la página 164 y consiste en calcular la raíz cuadrada de 5480281. Como ya explicó en el capítulo anterior, divide los dígitos del número en grupos de dos en dos, comenzando por la derecha. Luego toma el primer grupo a la izquierda, que es 5 y busca en una tabla de cuadrados creada en el capítulo anterior su raíz por defecto, que es 2.

De manera que, a este primer grupo, que es el 5, le resta el cuadrado de la primera raíz, que es 4, quedando lo que llama primer residuo, que es 1, seguido del resto de cifras del número.

Destacar que Zaragoza confecciona una tabla para organizar mejor los números con los que va a operar. La tabla contiene una columna para el coeficiente que va a utilizar, otra para el valor del primer dígito, otra para el *divisor*, otra más para la estimación del segundo dígito y una última para el *restador*.

Hay que hacer notar que usa una configuración posicional de las cantidades para evitar tener que completar con ceros a la derecha. Nosotros, para mayor claridad, vamos a utilizar notación actual (con ceros incluidos) para poder seguir los pasos que sigue Zaragoza en el ejemplo.

A continuación, explicamos el método de resolución, utilizando la ayuda de simbología

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230084

actual. Zaragoza no utiliza tantos símbolos, aunque las operaciones necesarias las explica de palabra y con la ayuda de las tablas.

Al separar el número 5480281 en grupos de dos en dos dígitos, obtenemos que la solución consta de 4 dígitos. El primero ya sabemos que es 2. Llamemos A a este primer dígito y estimemos el siguiente, al que llamamos B. Si la solución tiene 4 dígitos, entonces aproximadamente $(10^3A + 10^2B)^2 = 10^6A^2 + 2 \cdot 10^5AB + 10^4B^2 = 5480281$. Como estima que $A = 2$, entonces $10^6A^2 = 4 \cdot 10^6$, por lo que el primer residuo es $R_1 = 5480281 - 4000000 = 1480281$. El residuo contiene el valor de $2 \cdot 10^5AB + 10^4B^2$. Precisamente esto es lo que pone en la tabla, desestimando para el divisor el término en B^2 y usando una configuración posicional (Figura 3).

			Diviſor.			Reſtadores.
2	A^1	20	40	B^1	3	120
				B^2	9	9
						ſuma. 129

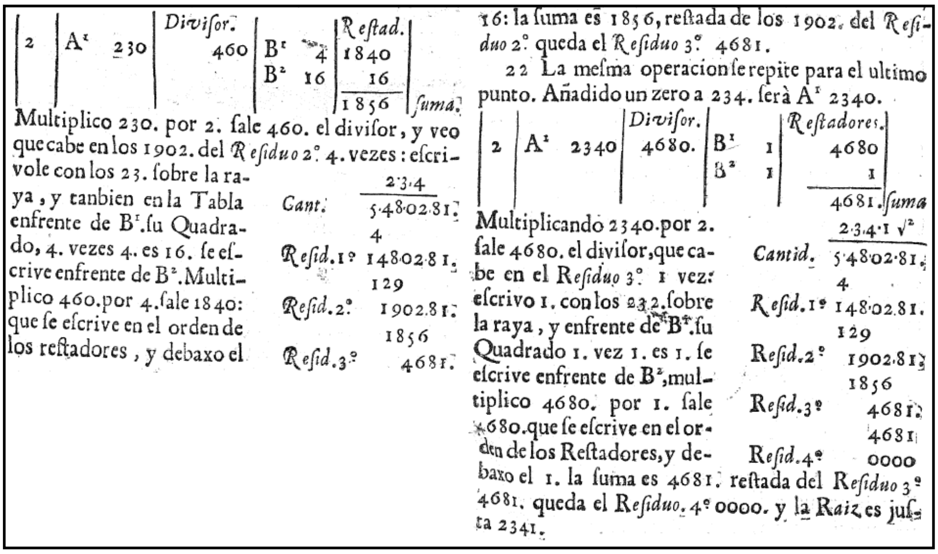
Figura 3 - Tabla con el desarrollo binomial y sus valores
Fuente: Zaragozà (1669, p. 165).

Si nos damos cuenta, la tabla no se puede completar de una vez. Hasta ahora sólo conocemos hasta la tercera columna. Esta tercera columna es muy importante, ya que es la que nos va a servir para estimar el valor del siguiente dígito, el B. Entonces, como el primer residuo es $R_1 = 2 \cdot 10^5AB + 10^4B^2$, si despejamos B, tenemos $B = \frac{R_1 - 10^4B^2}{2 \cdot 10^5A}$. Si despreciamos B^2, quitamos ceros a la derecha y llamamos *divisor* a $20A = 40$, tenemos que $B \approx \frac{R_1}{40} = \frac{148}{40} = 3{,}7$ que trunca a las unidades como 3. Es decir, que hace una estimación por defecto del segundo dígito al valor $B = 3$. Por lo tanto, si ahora al residuo le resta $2 \cdot 10^5AB + 10^4B^2$, con la estimación por defecto de B, obtendrá un segundo residuo. A esta cantidad $2 \cdot 10^5AB + 10^4B^2$, con la estimación por defecto de B es a lo que le llama *restador*. En este caso, el restador sería $2 \cdot 10^5AB + 10^4B^2 = 1290000$. En la Figura 5 lo vemos en la quinta columna (utilizando la configuración posicional que no contiene algunos ceros a la derecha).

$$R_2 = 1480281 - 1290000 = 190281$$

Para cada dígito confecciona una tabla nueva y paralelamente va calculando los sucesivos residuos (ver Figura 4).

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230084



2	A^1 230	*Divisor.* 460	B^1 4 / B^2 16	*Restad.* 1840 / 16 / 1856 *suma.*

Multiplico 230. por 2. sale 460. el divisor, y veo que cabe en los 1902. del *Residuo* 2º 4. vezes: escrivole con los 23. sobre la raya, y tanbien en la Tabla enfrente de B^1.su Quadrado, 4. vezes 4. es 16. se escrive enfrente de B^2.Multiplico 460.por 4.sale 1840: que se escrive en el orden de los restadores, y debaxo el

2·3·4
Cant. 5·4802·81.
4
*Resid.*1º 14802·81.
129
*Resid.*2º 1902·81.
1856
*Resid.*3º 4681.

16: la suma es 1856, restada de los 1902. del *Residuo* 2º queda el *Residuo* 3º 4681.

22 La mesma operacion se repite para el ultimo punto. Añadido un zero a 234. serà A^1 2340.

2	A^1 2340	*Divisor.* 4680.	B^1 1 / B^2 1	*Restadores.* 4680 / 1 / 4681. *suma*

Multiplicando 2340.por 2. sale 4680. el divisor, que cabe en el *Residuo* 3º 1 vez: escrivo 1. con los 232. sobre la raya, y enfrente de B^1.su Quadrado 1. vez 1. es 1. se escrive enfrente de B^2,multiplico 4680. por 1. sale 4680.que se escrive en el orden de los Restadores, y debaxo el 1. la suma es 4681. restada del *Residuo* 3º 4681. queda el *Residuo*.4º 0000. y la *Raiz* es justa 2341.

2·3·4·1 $\sqrt{}^2$
Cantid. 5·48·02·81.
4
*Resid.*1º 148·02.81.
129
*Resid.*2º 1902·81.
1856
*Resid.*3º 4681.
4681
*Resid.*4º 0000

Figura 4 - Continuación del ejemplo de la página 164
Fuente: Zaragozà (1669, p. 164).

Continuemos con los cálculos. Ahora llama A a $10A + B$, con lo que $A = 10 \cdot 2 + 3 = 23$. Por lo que como $(10^2A + B)^2 = 10^4A^2 + 2 \cdot 10^3AB + 10^2B^2$, el segundo residuo es $R_2 = 2 \cdot 10^3AB + 10^2B^2$. Si despreciamos B^2 y despejamos, podemos estimar $B \approx \frac{R_2}{2 \cdot 10^3 A} \approx \frac{1902}{460} \approx 4$ si eliminamos ceros.

El restador sería $2 \cdot 10^3AB + 10^2B^2 = 2 \cdot 10^3 \cdot 23 \cdot 4 + 10^2 \cdot 4^2 = 185600$

Entonces $R_3 = R_2 - 185600 = 190281 - 185600 = 4681$

Ahora A es $10A + B$, y por tanto $A = 230 + 4 = 234$. Por lo que como $(10A + B)^2 = 10^2A^2 + 2 \cdot 10AB + B^2$, el siguiente residuo es $R_3 = 2 \cdot 10AB + B^2$. Si despreciamos B^2 y despejamos, estimamos $B \approx \frac{R_3}{2 \cdot 10A} \approx \frac{4681}{4680} \approx 1$. Ahora calcularíamos el último residuo, que saldrá 0 si la raíz es exacta. Y en efecto, el restador es $2 \cdot 10AB + B^2 = 2 \cdot 10 \cdot 234 \cdot 1 + 1 = 4681$. Obteniendo $R_4 = R_3 - 4681 = 0$. Por lo que el resultado es que $\sqrt{5480281} = 2341$.

Uno de los puntos más importantes del proceso es la estimación de los sucesivos dígitos a partir del primero. Al despreciar el valor de B^2, se produce una sobreestimación de B, que se contrarresta al truncar, pero que puede llegar a producir una estimación por encima del valor real del dígito, que provocaría un proceso de recálculo con una estimación menor del valor de B. Esto es más probable cuanto mayor sea el valor real de B y cuanto mayor sea el índice de la raíz (ya que, como explicamos más adelante, si el índice de la raíz es mayor, el desarrollo binomial tiene más términos y si se desestiman más términos, la posibilidad de sobreestimar el valor de B aumenta). Lo de la sobreestimación de B ya lo indica Zaragoza al final del capítulo.

> Advierta el Arithmetico, que no siempre ha de tomar por letra de la *Raiz* todo lo que el divisor cabe en el residuo, porque quando la letra es grande, suelen crecer los *Restadores* de suerte, que la suma sale maior, que el residuo; y en este caso es señal, que la letra se tomò maior de lo justo, y se ha de repetir la operacion, aunque en nuestro

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230084

metodo es facil la correccion (Zaragozà, 1669, p. 170).

En el capítulo V, Zaragoza expone la extensión del método para poder obtener soluciones por aproximación cuando la solución no es un entero. El proceso es simple, se añade al último residuo obtenido tantos ceros como índice de la raíz a calcular y se continúa con el proceso de obtención de dígitos. Los dígitos así obtenidos serán los correspondientes a las décimas, centésimas, milésimas, etc.

Entre el capítulo VIII y el XIII, Zaragoza detalla las diferentes maneras de resolver ecuaciones como una extensión del método de cálculo de raíces en función de si los coeficientes son positivos o negativos, si las potencias mayores son las que tienen más peso o no en la ecuación, y en general todos los posibles casos que se pueden dar.

En el capítulo XIV, el último dedicado a la resolución de ecuaciones y que concluye el Libro II, el autor hace un resumen del proceso explicado en los capítulos anteriores. Zaragoza indica que las operaciones aumentan conforme suben las potestades y entran más especies diferentes en la composición. Además, afirma que el artificio es una extensión infinita del álgebra y que, si se entiende bien, no habrá ecuación que no se pueda resolver.

En el libro III (capítulo X), sobre el álgebra, describe el método de resolución de ecuaciones, al que llama *Regla Única del Álgebra*, y que descompone en tres pasos:

- Igualación
- Reducción de la igualación
- Valor de la letra

En el tercer paso, el de *Valor de la letra*, es donde emplea el método general de resolución de ecuaciones que hemos descrito previamente y que él expuso en el libro II. Los otros dos pasos anteriores son para preparar la ecuación (estableciendo la igualdad de dos expresiones y manipulando los términos para dejar una ecuación normalizada). La *Regla Única del Álgebra* la descompone en una *Regla General* y una *Regla Particular* (para ecuaciones bicuadradas).

A continuación, exponemos una síntesis del método general empleado por Zaragoza. Sea la ecuación a resolver: $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x = R_0$.

Sea la solución de la ecuación: $10^{m-1}x_1 + 10^{m-2}x_2 + \cdots + 10^0x_m$.

Estimación del número de dígitos de la solución y del primer dígito:

- Para ecuaciones del tipo $a_i = 1, \forall i \in \{0 \dots n-1\}$, simplemente se separa R_0 en grupos de n dígitos comenzando por la derecha (por ejemplo en notacion actual Zaragoza resuelve $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x = 105025640$). Y la solución tendrá tantos dígitos

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230084

como grupos se obtengan. El primer dígito de la solución se estimará como la raiz entera de $\sqrt[n]{g_1}$ donde g_1 es el grupo de más peso de la solución (el primero por la izquierda).

- Para ecuaciones en las que existe algún $a_i > 1$ y $a_0 > 0$ donde R_0 tiene los suficientes dígitos como para poder separarlos (no hay *disminución*), debe estimar cuál es la potencia de mayor peso. Para ello, compara la potencia de mayor grado con la que considere que por tener un coeficiente muy grande, puede tener más peso que ella. Sea la potencia $a_k x^{n-k}$ la que compite con $a_0 x^n$.

- Separamos R_0 en grupos de n dígitos, obteniendo r grupos, $g_1, g_2, \dots, g_r$
- Separamos R_0 en r grupos de $n-k$ dígitos, $h_1, h_2, \dots, h_r$
- Si $a_0 > g_1$, la potencia $a_0 x^n$es candidata a ser la de mayor peso
- Si $a_k > h_1$, la potencia $a_k x^{n-k}$ es candidata a ser la de mayor peso
- De las dos potencias, si $\frac{a_0}{g_1} > \frac{a_k}{h_1}$ entonces la potencia de mayor peso es $a_0 x^n$ y si no, es $a_k x^{n-k}$
- El número de dígitos de la solución es $m = r - 1$, fundiéndose en un solo grupo el primero y el segundo grupos de la potencia seleccionada
- Para estimar el primer dígito, se calcula la raiz con índice de la potencia dominante y radicando los dos grupos anteriormente fundidos

Por ejemplo, Zaragoza resuelve (en notación actual) $20x^3 + 1000x^2 + 10000x = 5157160000$.

Zaragoza dice:

> Quando el Numero de alguna *Potestad*, sea o no maior, es mas que su punto 1º se le partiràn el 1º, y 2º punto por el tal numero, como se dixo §.59, y se buscarà en las Tablas del §.11. la *raiz* de aquella *Potestad* (Zaragozà, 1669, p. 206).

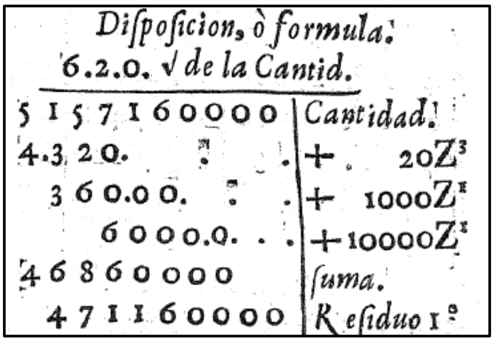
Es decir, separamos en grupos el término independiente, 5.157.160.000, y vemos que el grupo más a la izquierda es 5, que es menor que el coeficiente de x^3, divide los dos primeros grupos entre el coeficiente de la potencia mayor, es decir $\frac{5157}{20} \approx 257$. Ahora calcula la aproximación entera de la raíz cúbica de este número, por lo tanto, el primer dígito es $A = \sqrt[3]{257} \approx 6$ y la solución consta de 3 dígitos. Después el primer residuo (Figura 5).

$$20 \cdot (10^2 A + 10B)^3 = 20 \cdot 10^6 A^3 + 20 \cdot 3 \cdot 10^5 A^2 B + 20 \cdot 3 \cdot 10^4 A B^2 + 20 \cdot 10^3 B^3$$

$$1000 \cdot (10^2 A + 10B)^2 = 1000 \cdot 10^4 A^2 + 1000 \cdot 2 \cdot 10^3 AB + 1000 \cdot 10^2 B^2$$
$$10000 \cdot (10^2 A + 10B) = 10000 \cdot 10^2 A + 10000 \cdot 10B$$

$$R_1 = 5157160000 - 20 \cdot 10^6 A^3 - 1000 \cdot 10^4 A^2 - 10000 \cdot 10^2 A = 4686000000 = 471160000$$

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230084


Disposicion, ò formula.
6.2.0. √ de la Cantid.

5157160000	Cantidad.
4.3.20.	+ 20Z³
360.00.	+ 1000Z²
6000.0.	+ 10000Z¹
46860000	suma.
471160000	Residuo 1º

Figura 5 – Cálculo del primer residuo del ejemplo 3º
Fuente: Zaragozà (1669, p. 206).

$$Primer\ divisor\ D_1 = 20 \cdot 3 \cdot 10^5 A^2 B + 20 \cdot 3 \cdot 10^4 A B^2 + 20 \cdot 10^3 B^3$$
$$\{se\ utilizan\ todos\ los\ términos\ de\ los\ desarrollos\ binomiales$$
$$de\ la\ potencia\ de\ mayor\ peso, pero\ \text{sin}\ tener\ en\ cuenta\ el\ valor\ de\ B\}$$
$$D_1 = (216000000 + 3600000 + 20000) = 219620000$$

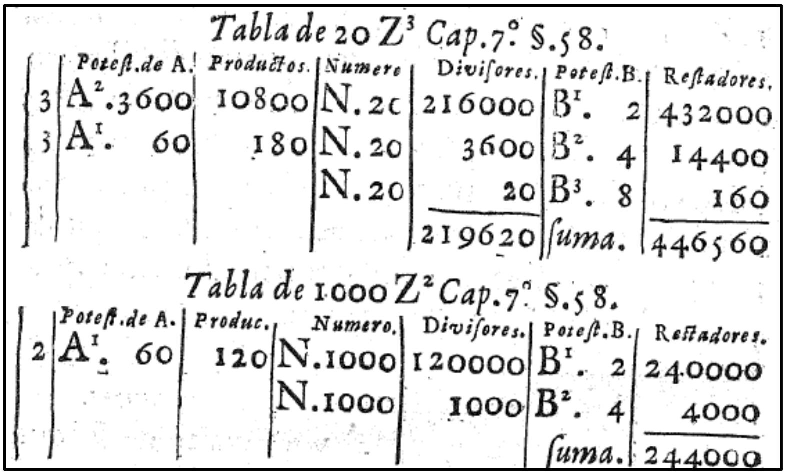


Tabla de 20 Z³ Cap.7º §.58.

	Potest.de A.	Productos.	Numero	Divisores.	Potest.B.	Restadores.
3	A².3600	10800	N.20	216000	B¹. 2	432000
3	A¹. 60	180	N.20	3600	B². 4	14400
			N.20	20	B³. 8	160
				219620	suma.	446560

Tabla de 1000 Z² Cap.7º §.58.

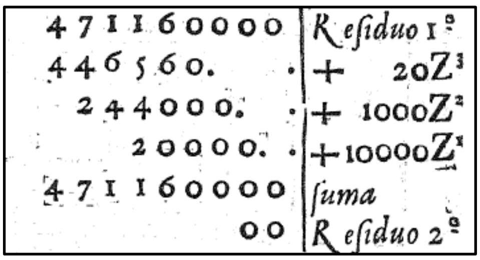
	Potest.de A.	Produc.	Numero.	Divisores.	Potest.B.	Restadores.
2	A¹. 60	120	N.1000	120000	B¹. 2	240000
			N.1000	1000	B². 4	4000
					suma.	244000

Figura 6 – Tablas para obtener el primer divisor del ejemplo 3º y los dos restadores
Fuente: Zaragozà (1669, p. 207).

Ahora, para la estimación del siguiente dígito se tendrían en cuenta sólo las cifras más significativas. Nosotros, por claridad las usamos todas.

$$B = \frac{R_1}{D_1} = \frac{471160000}{219620000} \approx 2$$

$$R_2 = R_1 - (20 \cdot 3 \cdot 10^5 A^2 B + 20 \cdot 3 \cdot 10^4 A B^2 + 20 \cdot 10^3 B^3 + 1000 \cdot 2 \cdot 10^3 AB + 1000 \cdot 10^2 B^2 + 10000 \cdot 10B)$$
$$= 471160000 - (446560000 + 24400000 + 200000) = 0$$



471160000	Residuo 1º
446560.	+ 20Z³
244000.	+ 1000Z²
20000.	+ 10000Z¹
471160000	suma
00	Residuo 2º

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230084

Figura 7 – Cálculo del segundo residuo del ejemplo 3º
Fuente: Zaragozà (1669, p. 207).

Ahora A vale $10A + B$, es decir $A = 60 + 2 = 62$. Y hacemos otro ciclo de cálculos, pero como el residuo es 0, entonces el siguiente dígito es 0. Por lo que la solución de la ecuación es $x = 620$.

- En el caso de ecuaciones donde R_0 no tiene los suficientes dígitos como para poder hacer una separación en grupos o cuando la potencia mayor es la que se resta, el procedimiento es el siguiente:
  - Se selecciona la potencia mayor y la de mayor peso aparente del resto, $a_k x^{n-k}$
  - Sea a el cociente entero entre el coeficiente mayor y el menor
  - Sea k es la diferencia entre el grado mayor y el menor. Separamos a en grupos de k dígitos cada uno. El número de grupos es el número de dígitos de la solución, $g_1, g_2, \dots, g_m$
  - El primer dígito es $x_1 \approx \sqrt[k]{g_1}$

  Como ejemplo, Zaragoza incluye $-x^4 + 3469375x = 136215000$.

  Estimación de los sucesivos divisores:

Para ecuaciones del tipo $a_i = 1, \forall i \in \{0 \dots n-1\}$, utiliza como divisor todos los términos que quedan de la potencia mayor, excepto el de menor peso.

Para el resto de ecuaciones, si $a_0 = 1$, utiliza todos los términos que quean de los desarrollos de todas las potencias, excepto el de menor peso de la potencia $a_0 x^n$. Y si $a_0 \neq 1$, utiliza todos los términos que quedan de los desarrollos de todas las potencias, sin excepción.

Con el desarrollo de una ecuación genérica de tercer grado lo podemos ver mejor y extrapolar a una ecuación de cualquier grado.

$$a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x = R_0$$

$$a_0(A+B)^3 + a_1(A+B)^2 + a_2(A+B) = R_0$$

$$a_0(A+B)^3 = a_0 A^3 + 3a_0 A^2 B + 3a_0 A B^2 + a_0 B^3$$

$$a_1(A+B)^2 = a_1 A^2 + 2a_1 AB + a_1 B^2$$

$$a_2(A+B) = a_2 A + a_2 B$$

$$S_0 = a_0 A^3 + a_1 A^2 + a_2 A$$

$$R_1 = R_0 - S_0 = 3a_0 A^2 B + 3a_0 A B^2 + a_0 B^3 + 2a_1 AB + a_1 B^2 + a_2 B$$

$$Si\ a_i = 1\ \forall i \in \{0 \dots n-1\} \Rightarrow D_k = 3a_0 A^2 + 3a_0 A$$

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230084

$$Si\ \exists a_i \neq 1 \Rightarrow \begin{cases} Si\ a_0 = 1 \Rightarrow D_k = 3a_0A^2 + 3a_0A + 2a_1A + a_1 + a_2 \\ Si\ a_0 \neq 1 \Rightarrow D_k = 3a_0A^2 + 3a_0A + a_0 + 2a_1A + a_1 + a_2 \end{cases}$$

En la Figura 8 está representado el algoritmo de resolución de ecuaciones generales polinómicas, indicando los dos puntos clave, que son la estimación del número de dígitos de la solución y la selección de los términos adecuados para utilizarlos como divisor para estimar los sucesivos dígitos.

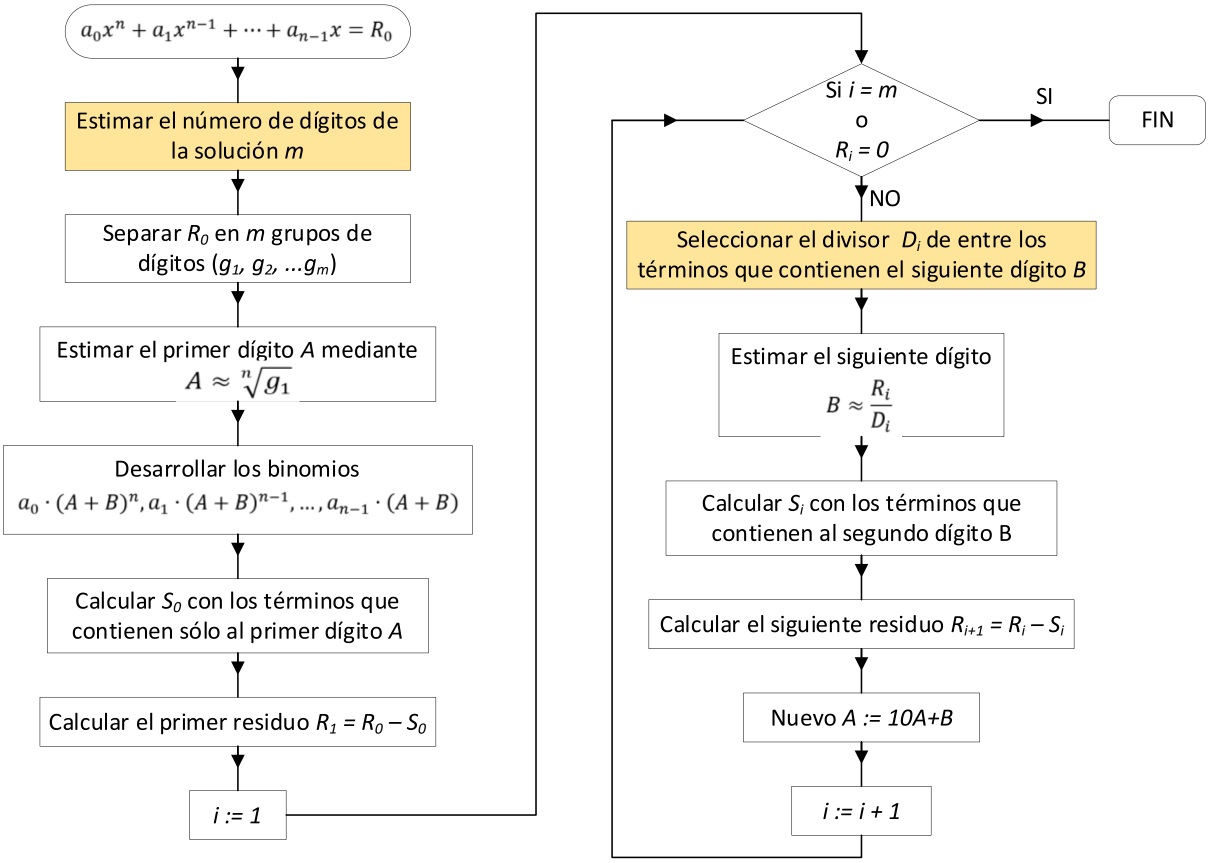


Figura 8 - Resumen del algoritmo de resolución que plantea Zaragoza
Fuente: elaboración propia.

Como hemos visto anteriormente, el hecho de incluir tablas para desglosar los cálculos y la profusión de las explicaciones de cómo se van realizando las operaciones dotan al texto de un marcado carácter didáctico. Si a eso le añadimos la gran cantidad de ejemplos resueltos y la organización por capítulos de las diferentes combinaciones posibles en las ecuaciones a resolver nos puede hacer pensar que es un texto muy útil para la enseñanza.

5 Conclusiones

El método general de resolución de ecuaciones polinómicas desarrollado por José

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230084

Zaragoza está basado en el método de Viète (1600), bien por medio de él o por medio de alguno de sus difusores en Europa. Zaragoza incluye su método de resolución en uno de los dos libros de aritmética, en el denominado *Arte Mayor*. Esta configuración no es la normal en los libros del siglo XVI ni en los contemporáneos al suyo (Eroles; Massa Esteve; Blanco Abellán, 2019). Esto nos indica que considera el método de resolución de ecuaciones como un método numérico que es una extensión del método de cálculo de raíces.

El método general utiliza el desarrollo binomial para ir obteniendo los sucesivos dígitos de la solución de la ecuación, y tiene como puntos clave la identificación del término de mayor peso (que nos permitirá obtener el número de dígitos de la solución y el primer dígito) y la selección del divisor adecuado en cada caso para poder estimar los sucesivos dígitos. La mayor dificultad del proceso de resolución aparece cuando hay términos sumados y restados y cuando los coeficientes son grandes. Zaragoza pormenoriza cada una de las posibilidades, lo que hace que el método sea un tanto tedioso ya que implica gran cantidad de decisiones intermedias y cálculos. Y esto ocurre en los primeros pasos del proceso de resolución, cuando hay que decidir cuál es la potencia dominante en la ecuación, establecer el número de dígitos de la solución y estimar el primero de ellos.

El siguiente punto clave es el de la selección del divisor adecuado para estimar los siguientes dígitos. En este punto, Zaragoza toma, de manera general, el mismo divisor de Viète (1600), que consta de todos los términos de los desarrollos binomiales. Pero, de manera particular, cuando el coeficiente de la potencia mayor es 1, desestima el factor de menos peso del desarrollo de dicha potencia. Además, si todos los coeficientes de las potencias de la ecuación son unitarios, como divisor toma solamente los términos del desarrollo de la potencia mayor, y esto es una mejora respecto a la versión de Viète ya que reduce el número de operaciones a realizar en estos casos concretos. En resumen, para la selección del divisor:

- Si el coeficiente de la potencia mayor es unitario, desestima el último término (el de menor peso) del desarrollo de esta potencia mayor.
- Si todos los coeficientes son unitarios, utiliza como divisor sólo el desarrollo de la potencia mayor.
- Para el resto de casos, utiliza los desarrollos de todas las potencias, tal y como hace Viète.

En cuanto al lenguaje utilizado y la configuración de las operaciones y resultados, Zaragoza usa un lenguaje más simbólico que Viète, lo que lo hace más entendible y generalizable. Además, el uso de tablas por parte de Zaragoza es de gran ayuda para organizar los datos y entender el proceso de cálculo.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230084

La configuración empleada por Zaragoza es muy exhaustiva y adecuada para la enseñanza, ya que incluye en tablas casi todos los elementos, junto a su simbología, necesarios para realizar los cálculos. Echamos de menos, quizás, un desarrollo simbólico previo al proceso de configuración y creación de las tablas.

El método general de resolución de ecuaciones expuesto por Zaragoza tuvo, en el siglo XVII, gran difusión por Europa, pero finalmente fue sustituido por la adaptación o modificación ideada por Newton (Plaza; Gutiérrez, 2013), con cálculos más sencillos. Además, José Zaragoza utilizó un lenguaje algebraico más moderno y una capacidad didáctica mayor que muchos de sus contemporáneos europeos, principalmente por el uso de símbolos, por el lenguaje sencillo de entender y por el uso ordenado de tablas.

Referencias

AUREL, M. **Libro primero, de Arithmetica Algebratica, en el qual se contiene el arte Mercantivol, con otras muchas Reglas del arte menor, y la Regla del Algebra, vulgarmente llamada Arte mayor, o Regla de la cosa; sin la qual no se podra entender el decimo de Euclid.** Valencia: En casa de Joan de Mey, 1552.

DOCAMPO, J. Reading Luca Pacioli's Summa in Catalonia: An early 16th-century Catalan manuscript on algebra and arithmetic. **Historia mathematica**, Barcelona, v. 33, n. 1, p. 43-46, 2006.

DOCAMPO, J. Vernacular algebra in the Iberian Peninsula before Marco Aurel: Notations and terminology. *In*: HUNGER, H.; SEEBACHER, F.; HOLZER, G. (eds.), **Proceedings**… Vienna: Austrian Academy of Science, 2008. p. 85-92.

DOU, A. Las Matemáticas en la España de los Austrias. *En*: ESPAÑOL, L. (ed.), **Estudios sobre Julio Rey Pastor (1888-1962).** Logroño: Instituto de Estudios Riojanos, 1990. p. 151-172.

EROLES, A.; MASSA ESTEVE, M.; BLANCO ABELLÁN, M. Fonts vietianes a l'arithmetica universal (1669) de Josep Saragossà. **Quaderns d'història de l'enginyeria***,* Barcelona, v. 17, [s.n.], p. 1-38, 2019.

LABARGA, E. La teoría del centro mínimo de José Zaragoza y el teorema de Ceva. **La Gaceta de la RSME**, Madrid, v. 21, n. 1, p. 69-92, 2018.

LEÓN-MANTERO, C.; CASAS-ROSAL, J. C.; ARGUDO-OSADO, C. Análisis de los libros de texto para la formación de agrimensores en España durante el siglo XVIII. *En*: LÓPEZ-ESTEBAN, C.; MAZ-MACHADO, A. (eds.), **Las matemáticas en España durante el siglo XVIII a través de los libros y sus autores**. Salamanca: Universidad de Salamanca, 2020. p. 161-179.

LEÓN-MANTERO, C.; SANTIAGO, A.; GUTIÉRREZ-ARENAS, M. El método de máximos y mínimos en los libros de texto españoles del siglo XVIII: influencias europeas. *En*: LÓPEZ-ESTEBAN, C.; MAZ-MACHADO, A. (eds.), **Las matemáticas en España durante el siglo XVIII a través de los libros y sus autores**. Salamanca: Universidad de Salamanca, 2020. p. 115-133.

LÓPEZ PIÑERO, J. M.; GLICK, T. F.; NAVARRO, V.; PORTELA, E. **Diccionario histórico de la ciencia moderna en España.** Barcelona: Península, 1983. (Vol. II, M-Z).
MADRID, M.; LEÓN-MANTERO, C.; MAZ-MACHADO, A.; LÓPEZ-ESTEBAN, C. El desarrollo

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230084

del concepto de ecuación en libros españoles de matemáticas del siglo XVIII. *En*: MARBÁN, J.; ARCE, M.; MAROTO, A.; MUÑOZ-ESCOLANO, J.; ALSINA, Á. (eds.), **Investigación en Educación matemática XXIII.** Valladolid: SEIEM, 2019, p. 403-412.

MADRID, M.; LEÓN-MANTERO, C.; LÓPEZ-ESTEBAN, C. El tratamiento del álgebra en los libros de matemáticas en castellano en el siglo XVIII. *En*: LÓPEZ-ESTEBAN, C.; MAZ-MACHADO, A. (eds.), **Las matemáticas en España durante el siglo XVIII a través de los libros y sus autores**. Salamanca: Universidad de Salamanca, 2020, p. 199-221.

MAZ-MACHADO, A.; LEÓN-MANTERO, C.; MADRID, M. Una mirada a la ciencia española del siglo XVIII: los autores españoles de libros de matemáticas. *En*: LÓPEZ-ESTEBAN, C.; MAZ-MACHADO, A. (eds.), **Las matemáticas en España durante el siglo XVIII a través de los libros y sus autores**. Salamanca: Universidad de Salamanca, 2020, p. 45-61.

MAZ-MACHADO, A.; RICO, L. Principios didácticos en textos españoles de matemáticas en los siglos XVIII y XIX. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, v. 18, n. 1, p. 49-76, 2015.

NAVARRO, V. La renovación de la actividad científica en la España del siglo XVII y las disciplinas físico-matemáticas. *En*: SILVA, M. (ed.). **El Siglo de las Luces. De la ingeniería a la nueva navegación**. Madrid: Real Academia de Ingeniería, 2005. p. 33-73.

OLLER-MARCÉN, A. M.; MUÑOZ-ESCOLANO, J. M. Conceptions about mathematics, its teaching and learning in Compendio Mathematico (1707) written by the Spanish Thomas Vicente Tosca (1651-1723). **Bolema**, Rio Claro, v. 33, n. 64, p. 635-648, 2019.

PÉREZ DE MOYA, J. **Arithmetica practica y especulativa**. Salamanca: Matías Gast, 1562.

PICADO, M.; RICO, L.; GÓMEZ, B. Enseñanza de las unidades métricas en España en la segunda mitad del siglo XIX. **Enseñanza de las Ciencias**, Barcelona, v. 33, n. 3, p. 175-196, 2015.

PLAZA, S.; GUTIÉRREZ, J. **Dinámica del método de Newton**. Logroño: Universidad de la Rioja, 2013.

PUIG, L. **Cambios en el álgebra que se enseña en el siglo XVII en España a partir de la Arithmetica Universalis de Joseph Zaragoza**. Córdoba, febrero de 2018. Disponible en: https://www.researchgate.net/publication/327732172_Cambios_en_el_algebra_que_se_ensena_en_el_siglo_XVII_en_Espana_a_partir_de_la_Arithmetica_Universalis_de_Joseph_Zaragoza. Acceso en: 29 mayo. 2023.

PUIG, L.; FERNÁNDEZ, A. La Arithmetica Algebratica de Marco Aurel, primer álgebra impresa escrita en español. Preliminares para su estudio. *En*: RICO, L.; CAÑADAS, M.; GUITÉRREZ, J.; MOLINA, M.; SEGOVIA, I. (eds.), **Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro**. Granada: Editorial Comares, 2013. p. 143-150.

RECASENS, E. Càlcul d'arrels d'equacions polinòmiques a l'Arithmetica Universal de J. Saragossà. *En:* TROBADA D'HISTÒRIA DE LA CIÈNCIA I DE LA TÈCNICA, 7., 2003, Barcelona. **Actes…** Barcelona: Shat, 2003. p. 167-172. https://publicacions.iec.cat/PopulaFitxa.do?moduleName=cataleg&subModuleName=&idCatalogacio=311

REY PASTOR, J. **Los matemáticos españoles del siglo XVI. Discurso inaugural del curso 1913-14**. Oviedo: Universidad de Oviedo, 1913.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230084

RUIZ BERRIO, J. El método histórico en la investigación histórica de la educación. **Revista española de pedagogía**, Logroño, v. 34, n. 134, p. 449-475, 1976.

RUIZ-CATALÁN, J. **El álgebra y su enseñanza en la Arithmetica Especulativa, y Practica y arte de Algebra de Andrés Puig (1672)**. Disertación (Trabajo Fin de Máster). Granada: Universidad de Granada, 2020. https://digibug.ugr.es/handle/10481/72105

SOBRINO, M. **Una aritmética española del siglo XVII**: La Arithmetica Universal del P. José Zaragoza. Disertación (Trabajo Fin de Máster). Valencia: Universitat de València, 2018.

VALLHONESTA, F. R. Algebraic symbolism in the first algebraic works in the Iberian Peninsula. **Philosophica**, Gante, v. 87, n. 4, p. 117-152, 2012.

VIÈTE, F. **De numerosa potestatum ad exegesim resolutione. Ex opere restitutae mathematicae analyseos, seu, Algebra novâ Francisci Vietae**. Parisiis: Excudebat David Le Clerc, 1600.

ZARAGOZÀ, J. **Arithmetica Universal, que comprehende el arte menor, y maior, algebra vulgar, y especiosa**. Valencia: Geronimo Vilagrasa, 1669.

Submetido em 19 de Abril de 2023.
Aprovado em 21 de Julho de 2023.