ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a11

Modelagem Matemática e o Desenvolvimento do Pensamento Integral

Mathematical Modelling and the Development of Integral Thinking

Jussara de Loiola **Araújo**[*]

ORCID iD 0000-0002-9156-2417

Petrina Rúbria Nogueira **Avelar**[**]

ORCID iD 0000-0002-3230-0759

Resumo

Inspiradas por um projeto de modelagem matemática e pelas discussões teóricas que subsidiam os conceitos de pensamento numérico, pensamento geométrico e pensamento algébrico, nosso objetivo, neste artigo, é propor e caracterizar uma primeira versão de um constructo teórico denominado *pensamento integral*. O projeto de modelagem foi realizado por estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental e um de seus propósitos era calcular a área superficial da lama que cobriu uma região do município de Brumadinho, em Minas Gerais, Brasil, após o rompimento da barragem de rejeitos de minério de ferro. Trata-se, portanto, de um ensaio empírico-teórico, por fundamentar-se em uma prática escolar de modelagem na educação matemática colocada em diálogo com referenciais teóricos. Mobilizamos problematizações sobre o ensino de integral, em especial a ideia de aproximação, e conceitos próprios da educação matemática na Educação Básica para, a partir da experiência no projeto de modelagem, descrever o conhecimento envolvido no cálculo de áreas de regiões com quaisquer formatos e que pode ser desenvolvido por estudantes do Ensino Fundamental.

Palavras-chave: Ensino Fundamental. Modelagem na Educação Matemática. Aproximação. Pensamentos Numérico, Geométrico e Algébrico. Cálculo Diferencial e Integral.

Abstract

Inspired by a mathematical modelling project and by the theoretical discussions that support the concepts of numerical thinking, geometrical thinking, and algebraic thinking, our objective, in this paper, is to propose and to characterize a first version of a theoretical construct called *integral thinking*. The modelling project was carried out by 6th grade students, from elementary school, and one of its purposes was to calculate the surface area of the mud that covered a region of the County of Brumadinho, in Minas Gerais, Brazil, after the rupture of an iron ore-tailing dam. It is, therefore, an empirical-theoretical essay, because it is based on a school practice of modelling in mathematics education in dialogue with theoretical references. We mobilized discussions about the teaching of integral, in particular the idea of approximation, and specific concepts from mathematics education in basic education to describe, from the experience in the modelling project, the knowledge involved in the calculation of areas of regions of any format and that can be developed by elementary school students.

Keywords: Elementary School. Modelling in Mathematics Education. Approximation. Numerical, Geometrical and Algebraic Thinking. Calculus Differential and Integral.

---

[*] Doutora em Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista (Unesp). Professora do Departamento de Matemática e do Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), Belo Horizonte, Minas Gerais, Brasil. E-mail: jussara@mat.ufmg.br.

[**] Doutoranda em Educação, Universidade Federal de São Carlos (UFSCar). Mestre em Educação e Docência, Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG). Professora da Universidade do Estado de Minas Gerais (UEMG), Divinópolis, Minas Gerais, Brasil. E-mail: petrina.avelar@uemg.br.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a11

1 Uma experiência, alguns conceitos, uma ideia: delineando o objetivo deste artigo

A modelagem matemática é uma tendência da educação matemática (MEYER; CALDEIRA; MALHEIROS, 2011) em cujas atividades se busca a compreensão de alguma situação real ou cotidiana e a resolução de problemas relativos a essa situação, usando técnicas ou conceitos matemáticos no apoio a essa busca. Como atividades de modelagem acontecem, normalmente, em contextos escolares, via de regra inseridas na programação de aulas de matemática, todo o seu desenvolvimento acontece de acordo com as condições viabilizadas pela escola e com o nível de escolaridade dos estudantes que delas participam (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012).

Esse foi o caso do projeto Mar de Lama — uma atividade de modelagem realizada com estudantes do 6º ano de uma escola pública municipal de Belo Horizonte, Minas Gerais, e o ponto de partida para a discussão das ideias que pretendemos apresentar neste artigo. Nessa atividade, coordenada pela Profa. Petrina Avelar (segunda autora deste artigo), os estudantes calcularam a área superficial da lama que cobriu uma região de Brumadinho, município da região metropolitana de Belo Horizonte, após o rompimento da barragem de rejeitos da mina de minério do Córrego do Feijão[1]. Calcular a área da superfície da camada de lama era o problema da realidade que os estudantes se dispuseram a resolver e que, por sua vez, estava inserido em uma situação mais ampla (a situação real): o rompimento da barragem em Brumadinho. O problema foi colocado pela professora em meio a vários assuntos mobilizados durante a discussão da situação como, por exemplo, meio ambiente, atividade mineradora, condições de trabalho, condições psicológicas de familiares e amigos das vítimas do desastre, geografia, artes e matemática. Neste artigo, nosso foco será o conteúdo matemático que foi mobilizado durante o projeto[2].

A professora teve o cuidado de registrar a produção dos estudantes, filmando-os e fotografando-os em ação, com a devida autorização dos pais ou responsáveis. Ela também organizou um arquivo contendo os relatórios escritos, produzidos pelos estudantes. É nesse material — vídeos, fotos e relatórios — que estamos nos apoiando para a produção do relato da experiência.

O problema da realidade resolvido pelos estudantes no projeto Mar de Lama envolvia o

[1] O rompimento da barragem em Brumadinho, ocorrido em 25 de janeiro de 2019, foi um dos maiores desastres ocorridos no Brasil e no mundo, com grandes perdas ambientais e humanas. Mais informações podem ser obtidas em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Rompimento_de_barragem_em_Brumadinho.

[2] Os demais assuntos mobilizados ao longo do projeto Mar de Lama serão abordados em outro artigo.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a11

cálculo da área de uma região irregular, limitada por linhas curvas. Entretanto, de acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2017), até o 6º ano do Ensino Fundamental, os estudantes terão contato, no máximo, com o cálculo de áreas de figuras poligonais, ou seja, figuras limitadas por uma sequência de segmentos de retas. No campo da Matemática, o cálculo de áreas de regiões limitadas por linhas curvas quaisquer costuma ser feito por meio do conceito de *integral* que, normalmente, é abordado no Ensino Superior ou no 3º ano do Ensino Médio. Nesses níveis de ensino, o procedimento mais usual é usar limites de soma de Riemann para construir esse conceito, como descrito por Stewart (2017), o que não é acessível a estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental. Portanto, há, no mínimo, um intervalo de tempo de seis anos entre o conteúdo matemático que os estudantes do 6º ano conheciam e o conteúdo que eles poderiam precisar para resolver esse problema da realidade. Foi necessário criar estratégias para resolvê-lo, adaptando o conteúdo matemático que os estudantes conheciam naquele momento, como será descrito mais à frente. De certa forma, os estudantes fizeram cálculos que se assemelham ao cálculo de uma integral, mas sem conhecer nem usar as técnicas relativas a esse conceito e que são normalmente utilizadas no campo da Matemática. Foi daí que tivemos a ideia de propor um constructo teórico denominado *pensamento integral*.

Essa ideia surgiu também da experiência da Profa. Jussara Araújo (primeira autora do artigo) com as disciplinas Números na Educação Básica, Geometria na Educação Básica e Álgebra na Educação Básica, do curso de Licenciatura em Matemática em que ela atua. Faz parte do programa dessas disciplinas discussões de natureza qualitativa sobre números, geometria e álgebra, por meio dos conceitos ou ideias de, respectivamente, *pensamento*[3] *numérico* (LINS; GIMENEZ, 1997), *pensamento geométrico* (NACARATO; PASSOS, 2003) e *pensamento algébrico* (RIBEIRO; CURY, 2015).

Partimos do entendimento inicial de *pensamento integral* como o conhecimento envolvido no cálculo de áreas de regiões quaisquer, o que inclui aquelas limitadas por linhas curvas. Essa compreensão ainda é muito genérica e pretendemos elaborá-la neste artigo. Assim, nosso objetivo é construir uma primeira versão do conceito ou ideia de *pensamento integral*, inspiradas pela experiência proveniente do projeto de modelagem Mar de Lama e pelas discussões teóricas sobre pensamentos numérico, geométrico e algébrico.

O estabelecimento de uma relação entre o projeto Mar de Lama e o conceito de integral, culminando com a proposição do constructo teórico *pensamento integral*, ocorreu após a

[3] Alguns autores utilizam a palavra *raciocínio* ao invés de *pensamento*, como é o caso de Lins e Gimenez (1997). Parece-nos, entretanto, que as duas palavras são utilizadas com sentidos bem próximos. Assim, por uma questão de praticidade, vamos utilizar apenas a palavra *pensamento*.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a11

finalização do projeto, a partir de reflexões realizadas de modo conjunto pelas duas autoras deste artigo sobre o material empírico produzido durante a experiência. O artigo se configura, então, como um ensaio empírico-teórico, pois parte do relato de uma prática escolar de modelagem e a coloca em diálogo, *a posteriori*, com referenciais teóricos da educação matemática.

Buscamos justificar a relevância de propor e discutir o conceito de *pensamento integral* na próxima seção. Em seguida, na seção 3, relatamos a experiência do projeto Mar de Lama. Na seção 4, apresentamos uma discussão teórica sobre os "Pensamentos numérico, geométrico e algébrico". Por fim, na seção 5, concluímos, "Afinal de contas, o que estamos chamando de pensamento integral".

2 Porque é relevante falar sobre pensamento integral no Ensino Fundamental

O que deu origem à ideia do que estamos denominando *pensamento integral* foi um projeto de modelagem matemática realizado com estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental. "Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas do conhecimento, validando estratégias e resultados" (BRASIL, 2017, p. 267) é uma das competências específicas de matemática previstas pela BNCC para o Ensino Fundamental. Nessa descrição, destacamos não só o incentivo a modelar e resolver problemas cotidianos, mas também a validação das estratégias utilizadas para tal.

A BNCC afirma também que umas das habilidades previstas para o 6º ano é a resolução de problemas que envolvam cálculo de áreas, "sem uso de fórmulas, inseridos, sempre que possível, em contextos oriundos de situações reais" (BRASIL, 2017, p. 303). Entretanto, em situações reais ou problemas cotidianos, quando é necessário calcular a área de alguma região, é possível que ela tenha formato irregular. Assim, no 6º ano, seria preciso criar estratégias para calcular essa área e as únicas ferramentas matemáticas disponíveis para esse cálculo seriam os conteúdos conhecidos até aquele nível de ensino. O pensamento integral pode ser, então, uma das estratégias que atendam às orientações da BNCC para modelar e resolver problemas cotidianos, já que, no Brasil, o conceito de integral está previsto para, pelo menos, seis anos mais tarde no processo de escolarização.

Por outro lado, os problemas e discussões sobre o ensino de cálculo diferencial e integral, no Ensino Superior, são antigos e recorrentes no campo da Educação Matemática. A

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a11

título de exemplo, a *Educational Studies in Mathematics*[4] e o *Bolema – Boletim de Educação Matemática*[5], duas importantes revistas, publicam artigos que tratam desse assunto desde suas primeiras edições até as atuais.

Rezende (2003) afirma que uma das causas do fracasso do ensino de cálculo diferencial e integral, no Ensino Superior, é a ausência de ideias relativas a essa disciplina na Educação Básica. Na mesma linha, Orfão, Costa e Frant (2011) frisam a importância de construir uma visão do cálculo desde os Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Assim, o desenvolvimento do pensamento integral, no Ensino Fundamental, poderia ser uma resposta ao que esses autores reivindicam.

Parece-nos, portanto, que a elaboração conceitual de pensamento integral pode ser uma alternativa que vai ao encontro dessas duas demandas — as da BNCC e as de pesquisadores do ensino de cálculo diferencial e integral. Realizamos buscas pelas expressões *pensamento integral* ou *raciocínio integral* (também *integral thinking* ou *integral reasoning*, em inglês, e também *pensamiento integral* ou *razionamiento integral*, em espanhol) em duas revistas brasileiras (*Bolema*, *Zetetiké*) e duas revistas internacionais (*Educational Studies in Mathematics*, *The International Journal on Mathematics Education* (*ZDM*)) específicas do campo da Educação Matemática. Também fizemos essa busca em plataformas de divulgação científica, como o *Google Scholar*, o *Research Gate* e a *Scielo*. Nessas buscas, não encontramos nenhuma menção a essas expressões, relacionadas com cálculo diferencial e integral. Embora tenhamos realizado a busca em poucas revistas e plataformas, elas são alguns dos mais tradicionais meios de divulgação científica brasileiros e internacionais e o insucesso nos leva a acreditar que ainda não exista uma elaboração conceitual assim denominada.

Não tendo encontrado a expressão *pensamento integral* na revisão da literatura empreendida, ampliamos nossas buscas para conceitos próximos a ele. Dessa busca, fizemos a seleção dos trabalhos apresentados a seguir que, em nossa avaliação, trazem uma contribuição mais efetiva para este ensaio.[6]

Na matemática, o conceito mais próximo ao de *pensamento integral* é o de *integral*, que comumente é abordado no Ensino Superior. Nesse nível de ensino, o constructo teórico que tem alguns pontos de contato com o que queremos discutir aqui é o de *pensamento matemático*

---

[4] O primeiro número da revista foi publicado em maio de 1968 e todos os números estão disponíveis em: https://www.springer.com/journal/10649.
[5] Os primeiros números da revista, publicados de 1985 até dezembro de 2016, estão disponíveis em: https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/issue/archive. Os números publicados a partir do ano de 2012 estão disponíveis em: https://www.scielo.br/j/bolema/.
[6] Optamos por não apresentar todos os trabalhos que examinamos na revisão da literatura, visando não exceder o número máximo de páginas permitido para os artigos publicados na revista.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a11

avançado, proposto primeiramente pelo educador matemático David Tall. O propósito do autor é construir uma compreensão, fundamentada na psicologia cognitiva, do pensamento mobilizado durante a produção de conhecimentos próprios da matemática acadêmica formal. Segundo Tall (2002), o foco está no processo completo de se debruçar sobre um problema no campo da Matemática, de forma criativa, levando à formulação de conjecturas, testes e estabelecimento de resultados, por meio de demonstrações formais. O pensamento matemático avançado relaciona-se a uma abordagem da matemática, em nível superior, que considere a distinção entre matemática como atividade mental e matemática como sistema formal (TALL; VINNER, 1981) e respeite o desenvolvimento cognitivo de cada estudante. Embora o *pensamento matemático avançado*, no que se refere à integral, tenha pontos em comum com o *pensamento integral*, nossos propósitos e contexto de discussões não têm relações fortes com os fundamentos relativos a esse outro constructo, já que estamos propondo um construto teórico voltado para o Ensino Fundamental e que mobilize conhecimentos matemáticos daquele nível de ensino, buscando, dentre outros objetivos, resolver problemas da realidade. Podemos levantar a hipótese de que atividades que promovam o desenvolvimento do pensamento integral possam gerar contribuições, no futuro, para o pensamento matemático avançado. Neste artigo, entretanto, nos limitaremos ao levantamento dessa hipótese, que é também um convite para futuras investigações.

Especificamente sobre o ensino e a aprendizagem de integral, Kouropatov e Dreyfus (2014) concluem, com base em uma revisão da literatura, que, de maneira geral, o cálculo de integrais é visto pelos estudantes como um conjunto de técnicas e procedimentos, já que o ensino desse conteúdo costuma se centrar nessas técnicas. Os estudantes, continuam os autores, utilizam integrais para calcular áreas, mas não sabem por que isso funciona. Ao mesmo tempo, como pode ser constatado em vários livros de cálculo (e.g. STEWART, 2017), as técnicas de integração dependem de manipulações algébricas que ainda não estão acessíveis a estudantes no 6º ano do Ensino Fundamental. Portanto, nos cálculos feitos pelos estudantes no projeto Mar de Lama, assim como naqueles que possivelmente estarão envolvidos no conceito de pensamento integral, esse problema apontado por Kouropatov e Dreyfus (2014) não ocorrerá.

Os autores discutem o potencial de uma proposta para o ensino do conceito de integral, tendo por base a ideia de acumulação, para alunos do final do Ensino Médio. Para eles, a aprendizagem do conceito de integral é importante devido à sua aplicabilidade a várias situações e à ideia subjacente a ele de entender que “a contemplação do todo como a soma de suas pequenas partes permite conclusões sobre o todo em sua inteireza, assim como sobre sua

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a11

estrutura interna e propriedades”[7] (KOUROPATOV; DREYFUS, 2014, p. 533). Os autores descrevem a ideia de acumulação por meio de duas facetas: “(a) acumulamos uma quantidade obtendo mais dela; (b) em casos em que não temos informações sobre alguma coisa inteira, procuramos e acumulamos informações sobre pequenas partes do todo”[8] (KOUROPATOV; DREYFUS, 2014, p. 534).

O processo de acumulação, entretanto, segundo os autores, é um processo infinito, porque acumulamos mais e mais partes que, por sua vez, são cada vez menores. Ou seja, ao mesmo tempo em que continuamos acumulando as partes, indefinidamente, essas partes têm seu tamanho diminuído, também indefinidamente. É preciso começar de um ponto e saber como proceder para dar o passo seguinte a fim de chegar mais perto da coisa inteira. “Assim, a própria natureza da noção de acumulação implica em aproximação: aproximar o valor de acumulação para algum limite superior fixo”[9] (KOUROPATOV; DREYFUS, 2014, p. 536).

Kouropatov e Dreyfus (2014) propõem, então, quatro marcos conceituais para uma estrutura hierárquica que se encaminha para o conceito de integração: 1) conhecimento do conceito de aproximação em um contexto de objetos geométricos, de forma concreta e intuitiva; 2) conhecimento do conceito de valor de acumulação em um contexto de objetos analíticos, o que já demandaria algum conhecimento do simbolismo algébrico; 3) conhecimento do conceito de função acumulação, que seria uma dinamização do estágio anterior; 4) conhecimento da taxa de variação da função acumulação, que envolveria a interação entre integração e derivação.

No projeto Mar de Lama, o propósito era calcular a área da superfície da camada de lama que cobriu a região de Brumadinho após o rompimento da barragem, ou melhor, calcular uma aproximação para o valor dessa área. Como descreveremos na próxima seção, a estratégia usada por estudantes e professora foi somar partes cada vez menores da área, já que eles não sabiam como calcular diretamente a área total. Entretanto, certamente eles não chegaram a tratar o processo por meio de uma função nem, muito menos, por meio de uma integral. Vamos, então, nos apoiar nas ideias de Kouropatov e Dreyfus (2014) para elaborar o conceito de pensamento integral, pois a estrutura hierárquica por eles proposta pode ajudar a estabelecer uma conexão entre o que os estudantes do 6º ano conheciam e o conceito de integral.

---

[7] Tradução nossa para o original em língua inglesa de: “contemplation of the whole as the totality of its small parts enables conclusions regarding the whole in its entirety, as well as its internal structure and properties” (KOUROPATOV; DREYFUS, 2014, p. 533).
[8] Tradução nossa para o orginal em língua inglesa de: “(a) we accumulate a quantity by getting more of it; (b) in cases where we don’t have information about some whole thing, we look for and accumulate information about small parts of the whole” (KOUROPATOV; DREYFUS, 2014, p. 534).
[9] Tradução nossa para o original em língua inglesa de: “Thus the very nature of the notion of accumulation entails approximation: approximating the accumulation value for some fixed upper boundary” (KOUROPATOV; DREYFUS, 2014, p. 536).

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a11

Uma iniciativa, que também se aproxima da sugestão de abordar ideias do cálculo na Educação Básica, foi o projeto *Calculus for Kids*, desenvolvido na Austrália, no período de 2010 a 2016, em 19 escolas, envolvendo mais de 430 estudantes com idades variando de 11 a 12 anos. As noções de cálculo diferencial e integral foram abordadas com o apoio do *software* MAPLE[10]. Foi um trabalho que, dentre outros propósitos, visava analisar como o uso de tecnologias digitais computacionais, na implementação de conteúdos matemáticos mais abstratos, poderia contribuir para a aprendizagem de crianças no Ensino Fundamental. O projeto *Calculus for Kids* mostrou

> que conceitos de matemática avançada podem ser ensinados e entendidos por estudantes da educação básica, que podem então usar essas novas habilidades para resolver problemas do mundo real, usualmente só experimentados por estudantes do ensino médio ou universitários[11] (FLUCK *et al.*, 2020, p. 4).

O projeto *Calculus for Kids* apresenta similaridades com o projeto Mar de Lama, pois ambos trabalham ideias do cálculo com crianças de 11 a 12 anos de idade, ainda que tenham se apoiado em materiais e recursos diferentes. A principal diferença entre os dois talvez seja o fato de o projeto Mar de Lama não ter tido a intenção, em princípio, de abordar o conceito de integral ou outra ideia relativa ao cálculo, como era o objetivo do projeto *Calculus for Kids*.

Com base nos argumentos aqui apresentados, avaliamos que a elaboração do conceito de pensamento integral no Ensino Fundamental seja relevante para a formação matemática dos estudantes desse nível de ensino e poderá ser um importante apoio no futuro, no caso de esses estudantes virem a estudar cálculo diferencial e integral no Ensino Médio ou Superior. Esclarecemos, entretanto, que não é nosso objetivo discutir os problemas e possíveis soluções para o ensino de integral. Deixamos registrada a existência de um problema que perdura há décadas e pretendemos apresentar uma contribuição para o campo, seguindo caminhos sugeridos pela própria literatura que trata do ensino de cálculo diferencial e integral.

Para dar continuidade a nossas reflexões, é necessário conhecer mais detalhes do projeto Mar de Lama, apresentados na próxima seção.

---

[10] MAPLE é "um *software* pertencente a uma classe chamada de computação simbólica ou algébrica, dirigido para a resolução de diversos problemas em matemática e outras Ciências afins. Uma das principais características do Maple é permitir manipulações numéricas e simbólicas, além de gerar gráficos em dimensões 2 e 3" (CRUZ, 2017, p. 2).

[11] Tradução nossa para o original em língua inglesa de: "that advanced mathematical concepts can be taught to, and understood by, primary school students, who can then use these new skills to solve real-world problems usually only attempted by senior secondary or university students" (FLUCK *et al.*, 2020, p. 4).

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a11

3 Mar de Lama: um projeto de modelagem matemática com estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental[12]

No dia 25 de janeiro de 2019, ocorreu a tragédia da ruptura da barragem de rejeitos de minério de ferro em Brumadinho. Poucos dias depois, em fevereiro, começou o ano letivo nas escolas brasileiras. Naquele ano, a Profa. Petrina lecionava matemática para duas turmas do 6º ano do Ensino Fundamental, em uma escola pública municipal de Belo Horizonte. Ela atuava, também, como supervisora do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (Pibid)[13]. Após uma sugestão da coordenadora da área de Matemática do Pibid, professora e pibidianos decidiram que seria desenvolvido um projeto de modelagem matemática nas duas turmas de 6º ano e o tema seria a tragédia de Brumadinho.

A escolha do tema costuma ser a primeira etapa de atividades de modelagem. A partir dele, todas as demais escolhas e discussões são realizadas. Alguns autores (ARAÚJO, 2012; BASSANEZI, 2002; BORBA; VILLARREAL, 2005, dentre outros) enfatizam a importância de que os temas tenham estreita relação com a realidade ou o cotidiano dos estudantes, buscando promover uma leitura do mundo (FREIRE, 2002) em que estão inseridos. Era esse o caso no projeto Mar de Lama. O rompimento da barragem de Brumadinho fazia parte do cotidiano daqueles estudantes e se constituiu como o ponto de partida para a realização do "ambiente de aprendizagem no qual [eles foram] convidados a indagar e/ou investigar, por meio da matemática, situações oriundas de outras áreas da realidade" (BARBOSA, 2001, p. 6).

Escolhido o tema, professora, pibidianos e estudantes deram início à realização do projeto. Cada uma das duas turmas do 6º ano possuía, em média, 25 estudantes, que foram organizados em grupos compostos por 5 estudantes em cada. Foi explicado a eles o que significa fazer modelagem matemática e que o projeto seria realizado em etapas. Burak (2004) propõe que uma atividade de modelagem na educação matemática seja realizada por meio das seguintes etapas: 1) escolha do tema; 2) pesquisa exploratória; 3) levantamento do(s) problema(s); 4) resolução do(s) problema(s) e desenvolvimento do conteúdo matemático relacionado ao tema; e, por fim, 5) análise crítica da(s) solução(ões).

Seguindo essas etapas, os estudantes passaram a fazer pesquisas exploratórias (etapa 2)

---

[12] O relato da experiência apresentado nesta seção se apoia nos vídeos e fotografias, produzidos pela professora, segunda autora do artigo, e nos relatórios escritos, produzidos pelos estudantes.
[13] O Pibid é um programa do Ministério da Educação brasileiro que tem por objetivo aproximar os estudantes dos cursos de licenciatura do cotidiano de escolas públicas da Educação Básica. Mais informações podem ser obtidas em: https://www.gov.br/capes/pt-br/acesso-a-informacao/acoes-e-programas/educacao-basica/pibid. No ano de 2019, a coordenadora da área de Matemática do Pibid na UFMG era a Profa. Teresinha Fumi Kawasaki, da Faculdade de Educação.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a11

sobre o tema “rompimento da barragem de Brumadinho”. Eles ficaram livres para pesquisar o que julgassem pertinente com relação ao tema, pois seria preciso levantar dúvidas, explorar suas curiosidades e inquietações, a fim de construir uma questão norteadora para o projeto. As pesquisas realizadas pelos estudantes e levadas para a sala de aula apresentavam várias situações de rompimento de barragens em todo o mundo. Eles eram bastante participativos, em ambas as turmas, falando sobre sua pesquisa e emitindo opiniões sobre as pesquisas dos colegas.

A terceira etapa (levantamento do(s) problema(s)) também foi marcada pelo engajamento dos estudantes, percebido em suas falas, e por intervenções questionadoras da professora, visando promover reflexões sobre cada pergunta elaborada por eles. Os estudantes apresentavam suas curiosidades, levantavam questões, completavam alguma ideia e, assim, foram surgindo problematizações importantes. Durante essa etapa do trabalho, a professora percebeu que os conceitos de área e de volume não estavam consolidados no entendimento dos estudantes. Eles afirmavam querer determinar o “tanto de lama” (volume) que estava na região ou a “área ocupada pela lama”, como se fossem as mesmas grandezas. Por fim, com a intervenção da professora, foi decidido que o problema a ser abordado seria calcular a área superficial da camada de lama que cobriu a região no município de Brumadinho, após o rompimento da barragem.

O projeto chegou, assim, à etapa 4: resolução do(s) problema(s) e desenvolvimento do conteúdo matemático relacionado ao tema, que é o nosso foco neste artigo. Entretanto, como afirma Borromeo Ferri (2007), as etapas que normalmente são utilizadas para descrever processos de modelagem não são seguidas rigidamente durante a realização da atividade e podem se intercruzar, retroceder, avançar passos etc. Nesse sentido, ainda na etapa de pesquisa exploratória, algumas decisões sobre a resolução do problema já começaram a ser delineadas. Por exemplo, um estudante perguntou se eles iriam desprezar o relevo da região para desenvolver os cálculos matemáticos. A professora, embora não soubesse o que fazer diante da pergunta, respondeu que não iriam desprezar, mas que precisava de algum tempo para pensar sobre como considerá-lo.

Após analisar as possibilidades, a professora decidiu construir uma maquete para modelar a região em estudo. De acordo com Simielli, Girardi e Morone (2007, p. 132), o “objetivo primeiro em se construir maquetes de relevo é o de possibilitar uma visão tridimensional das informações que no papel aparecem de forma bidimensional”. Os autores

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a11

orientam que, ao construir uma maquete, “a base cartográfica deve ter curvas[14] equidistantes, pois o material a ser trabalhado pelos alunos (isopor, EVA, papelão) terá espessura constante. Garante-se, assim, a proporcionalidade entre as altitudes reais e as representadas” (SIMIELLI; GIRARDI; MORONE, 2007, p. 137).

Para construir a maquete no projeto Mar de Lama, as curvas de nível foram geradas, pela professora, por meio de um *software*[15] de geoprocessamento. Cópias das imagens das regiões limitadas pelas curvas de nível (Figura 1) foram impressas em papel e utilizadas como moldes para os estudantes recortarem as placas de isopor que comporiam a maquete. Enquanto a maquete estava ganhando forma (Figura 2), os estudantes estavam construindo uma visualização do relevo e assim, possivelmente, uma melhor compreensão do problema.

Figura 1 – Curvas de nível impressas em papel
Fonte: Arquivo pessoal da segunda autora (2019).

Figura 2 – Construção da maquete
Fonte: Arquivo pessoal da segunda autora (2019).

Por meio de um programa *online* de imagem de satélite, o *Google Earth*, verificou-se que a altitude máxima atingida pela lama, na região estudada, foi de 790 m. A partir dessa informação, os estudantes conseguiram visualizar, na maquete (Figura 3), essa altitude máxima. Assim, decidiram que calculariam a área da região que poderia ser representada por uma superfície plana cujo contorno seria a curva de nível de cota 790 m. Para facilitar para as crianças o desenho dessa superfície, a professora sugeriu que fizessem, primeiramente, um molde em isopor para, em seguida, transferi-lo para o papel cartolina (Figura 4).

[14] Simielli, Girardi e Morone (2007) se referem às curvas de nível, entendidas como “linhas que unem pontos com a mesma cota ou altitude [em relação ao nível do mar]. Representam em projeção ortogonal a interseção da superfície do terreno com planos horizontais” (VEIGA; ZANETTI; FAGGION, 2012, p. 253).
[15] O software utilizado foi o *Global Mapper*, que é um *software* de Sistema de Informação Geográfica (SIG) desenvolvido pela *Blue Marble Geographics*. Por meio de leitura de imagem de satélite, o programa gera as curvas de nível da região delimitada. Neste trabalho, foi utilizada uma versão gratuita para teste, disponível na internet. Mais informações podem ser obtidas em: https://www.bluemarblegeo.com/.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a11

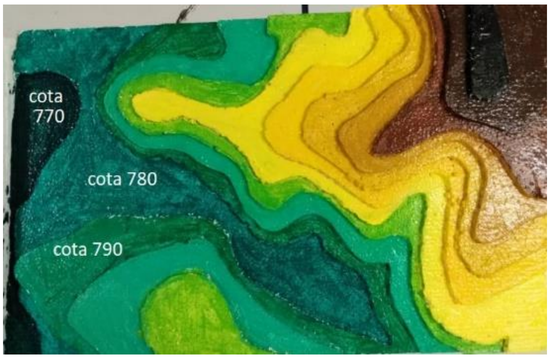

Figura 3 – Maquete com representação das cotas
Fonte: Arquivo pessoal da segunda autora (2019).

Figura 4 – Desenho da superfície cuja área seria calculada
Fonte: Arquivo pessoal da segunda autora (2019).

Ao observar o desenho da superfície (região colorida na Figura 4), um dos estudantes indagou sobre como poderiam calcular aquela área "esquisita", uma vez que sabiam calcular apenas áreas de quadrados. A professora, então, propôs que a área fosse calculada preenchendo-se o desenho com quadrados, mas que o processo de preenchimento não seria aleatório. Ela disse que cada grupo poderia escolher a medida do lado do quadrado e os instruiu a inserir, no desenho, a maior quantidade possível de quadrados com a medida escolhida, sem ultrapassar o limite da curva. Feito isso, deveriam colorir os quadrados com uma única cor e, então, contar o número de quadrados daquela cor que conseguiram desenhar.

Ao finalizar essa primeira parte, o desenho ainda apresentava espaços sem preenchimento, devido ao seu formato irregular. Então, a professora orientou os estudantes a repetirem o procedimento anterior, para preencher esses espaços, mas, dessa vez, os quadrados deveriam ter o lado medindo metade da medida do lado do quadrado anterior (Figura 5). Esses quadrados deveriam ser coloridos com outra cor. Os estudantes deveriam repetir esse procedimento sucessivamente, sempre inserindo quadrados com lado medindo metade da medida do lado do quadrado anterior, até (quase) preencher totalmente o desenho (Figura 6). Para calcular a área superficial da camada de lama, eles deveriam calcular as áreas de cada quadrado e somá-las. Cada grupo realizava o preenchimento do desenho, com os quadrados escolhidos, e os inúmeros cálculos envolvidos. Nessa etapa, a participação dos bolsistas do Pibid foi primordial para a orientação dos grupos, pois alguns estudantes apresentavam dificuldades com os procedimentos e os cálculos. Os pibidianos atuaram também na organização dos estudantes, já que era fácil dispersar em uma aula que utilizava tantos materiais e procedimentos diferentes do cotidiano das aulas.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a11

Figura 5 – Os estudantes preenchendo o desenho ...
Fonte: Arquivo pessoal da segunda autora (2019).

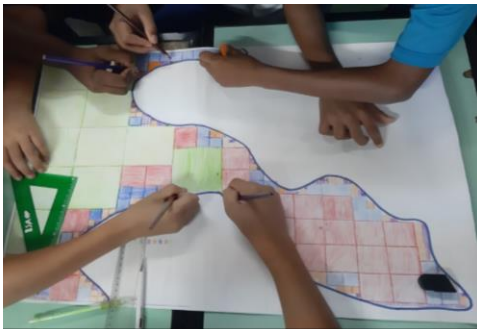

Figura 6 – ... com quadrados cada vez menores
Fonte: Arquivo pessoal da segunda autora (2019).

Para auxiliar na organização dos dados, para posteriores cálculos, os estudantes deveriam preencher a Tabela 1. Eles mediam os lados dos quadrados, em centímetros, e utilizavam a escala de 1:2000 para obter a medida real do lado de cada quadrado, em metros, já que a espessura da placa de isopor era 0,5 cm. Na escala 1:2000 cada 1 cm no desenho correspondia a 2.000 cm ou 20 m na região estudada. Em seguida, calculavam a área desse quadrado para, então, multiplicar o valor da área de um quadrado pela quantidade de quadrados daquela cor, utilizados para cobrir parte da superfície. Obtinham, assim, o valor real da área coberta pelos quadrados daquela cor. Esse procedimento foi repetido tantas vezes quantas eram as cores utilizadas no trabalho de cada grupo. Ao final, os estudantes deveriam somar as áreas correspondentes a cada cor. A título de exemplo, preenchemos a Tabela 1 com os dados obtidos por um dos grupos.

Tabela 1 – Tabela utilizada pelos estudantes para organizar os dados

Cor do quadrado	**Medida do lado do quadrado (cm)**	**Medida real do lado do quadrado na escala (m)**	**Área real de um quadrado (m^2)**	**Quantidade de quadrados por cor**	**Área total por cor (m^2)**
Azul	4,00	80	6.400	59	377.600
Vermelho	2,00	40	1.600	69	110.400
Verde	1,00	20	400	143	57.200
Laranja	0,50	10	100	170	17.000
Rosa	0,25	5	25	159	3.975
				Área total →	566.175

Fonte: Elaborada pelas autoras (2020).

Após a realização de todos os cálculos, com erros de contas, brincadeiras, conversas sérias, dificuldades com os procedimentos e o importante apoio dos bolsistas do Pibid, orientando e cuidando de cada grupo, todos socializaram seus resultados em suas respectivas turmas. O projeto Mar de Lama chegava, então, à etapa 5 (BURAK, 2004) de uma atividade de modelagem: a análise crítica das soluções. Com as orientações de professora e pibidianos, os grupos das duas turmas chegaram a resultados parecidos, concluindo que a superfície da lama,

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a11

na região estudada, cobria uma área de, aproximadamente, 570.000 m^2. Vários outros assuntos foram discutidos com relação ao rompimento da barragem e os estudantes expressaram seus sentimentos e opiniões em relação a eles.[16] Ao final do projeto, eles contavam também com o apoio da matemática para mensurar a tragédia.

Como nosso objetivo é construir o conceito ou ideia de *pensamento integral*, inspiradas pela experiência proveniente do projeto de modelagem Mar de Lama e pelas discussões teóricas sobre pensamentos numérico, geométrico e algébrico, nos dedicaremos, na próxima seção, a essa discussão de cunho mais teórico.

4 Pensamentos numérico, geométrico e algébrico

Pensamentos numérico, geométrico e algébrico, em linhas gerais, podem ser considerados como descrições qualitativas relativas aos conceitos e ideias relacionados, respectivamente, a números, geometria e álgebra, no ensino de matemática. Eles descrevem características da aprendizagem de cada um desses conteúdos matemáticos, que transcendem as simples habilidades de manipulações técnicas e mecânicas. A seguir, trataremos de cada um desses três pensamentos.

Como já afirmamos, há diferentes denominações para *pensamento numérico*. Alguns exemplos dessas denominações são o sentido de número (CARVALHO; PONTE, 2019), o senso numérico (CORSO; DORNELES, 2010) e o sentido numérico (LINS; GIMENEZ, 1997). Esses autores informam que também há várias interpretações na literatura para esse conceito, embora existam pontos em comum entre elas.

Carvalho e Ponte (2019), por exemplo, com o apoio de uma revisão da literatura, utilizam três categorias principais para analisar o sentido de número manifestado por estudantes do 6º ano quando realizam cálculo mental. Cada uma dessas categorias é decomposta, pelos autores, em subcategorias. São elas: 1) “conhecimento e destreza com números”: comparar números, usar múltiplas representações, ter sentido de grandeza absoluta e relativa, usar números de referência, relacionar números; 2) “conhecimento e destreza com operações”: usar as propriedades das operações, relacionar operações; e 3) “conhecimento e destreza com números e operações em situação de cálculo”: compreender o contexto e operação a realizar

[16] A etapa 5, de análise crítica das soluções, incluiu a discussão de vários assuntos, como as condições psicológicas de amigos e familiares das vítimas do desastre, o meio ambiente, a atividade mineradora, as condições de trabalho etc. Entretanto, como nosso foco está nos aspectos matemáticos do projeto, esses outros assuntos da análise crítica não serão aprofundados no artigo.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a11

num dado problema, selecionar uma estratégia eficiente, avaliar a razoabilidade do resultado. (CARVALHO; PONTE, 2019, p. 62).

Corso e Dorneles (2010) também descrevem características do senso numérico como as apontadas anteriormente, ilustrando com alguns exemplos. As autoras compreendem que o senso numérico vai sendo adquirido gradativamente pelas crianças a partir das interações sociais, o que inclui as experiências escolares. O senso numérico permite "ao indivíduo lidar com as situações diárias que incluem quantificações e o desenvolvimento de estratégias eficientes (incluindo cálculo mental e estimativa) para lidar com problemas numéricos" (CORSO; DORNELES, 2010, p. 300).

A importância do meio social na construção do sentido numérico também é enfatizada por Lins e Gimenez (1997, p. 30), que o entendem como o "conjunto de percepções e intuições a respeito do que os números são ou como são (como funcionam, que propriedades têm)". Eles afirmam que o sentido numérico é construído a partir das experiências cotidianas com números, na *matemática da rua*.

A respeito do *pensamento geométrico*, Nacarato e Passos (2003) descrevem três aspectos fundamentais para seu desenvolvimento: o intuitivo, o experimental e o teórico. Segundo as autoras, a experiência espacial e visual dos estudantes, vivenciada de forma concreta e intuitiva, e as atividades experimentais, com objetos concretos, assim como com desenhos, são passos importantes em direção à abstração dos conceitos geométricos, que têm caráter teórico. Elas apontam também a visualização e a capacidade de realizar representações geométricas — incluindo representações bidimensionais, tridimensionais e o estabelecimento de relações entre elas — como processos que apoiam o desenvolvimento do pensamento geométrico.

Por sua vez, Santos e Nacarato (2014) afirmam que, para o desenvolvimento do pensamento geométrico, é importante que os estudantes vivenciem experiências de problematização e indagação com objetos geométricos, mediadas por artefatos como linguagem e materiais didáticos, elementos fundamentais na teoria de Vygotsky, na qual as autoras se apoiam. Para elas, portanto, o desenvolvimento do pensamento — incluindo o geométrico — promove a aprendizagem — inclusive a de geometria —, assim como, dialeticamente, a aprendizagem promove o desenvolvimento do pensamento, sempre mediados por artefatos.

Finalmente, o *pensamento algébrico* é caracterizado por Fiorentini, Miorim e Miguel (1993, p. 87) por meio dos seguintes elementos: "percepção de regularidades, percepção de aspectos invariantes em contraste com outros que variam, tentativas de expressar ou explicitar a estrutura de uma situação-problema e a presença do processo de generalização". Ribeiro e

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a11

Cury (2015) incluem também a busca de padrões como característica do pensamento algébrico. De acordo com Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), o pensamento algébrico pode se manifestar em outras áreas da matemática assim como em outros campos do conhecimento.

É importante ressaltar a questão da abstração nessas compreensões sobre o pensamento algébrico. O uso de representações simbólicas, por meio de letras, por exemplo, possui um maior nível de abstração do que a busca de regularidades e padrões, mas parece haver uma gradação entre elas. De todo modo, Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) e Ribeiro e Cury (2015), dentre outros autores que se dedicam ao estudo desse tema, criticam a ênfase no simbolismo abstrato, nos Anos Finais do Ensino Fundamental, sem que tenha havido um trabalho voltado para o desenvolvimento do pensamento algébrico nos Anos Iniciais. Vamos discutir esse ponto com mais detalhes, retomando os três pensamentos.

Pensamento numérico e pensamento geométrico são trabalhados na Educação Básica concomitantemente com o ensino de números e geometria. Em outras palavras, números e geometria estão previstos nos currículos desde os Anos Iniciais do Ensino Fundamental, como pode ser constatado na BNCC, assim como os pensamentos numérico e geométrico.

A situação é diferente com a álgebra. Embora ela seja uma das unidades temáticas presentes desde os Anos Iniciais do Ensino Fundamental (BRASIL, 2017), a álgebra, como é formalmente reconhecida — com representações simbólicas e expressões envolvendo letras, números e outros símbolos — só é abordada nos Anos Finais do Ensino Fundamental. Nos Anos Iniciais, o que prevalece é o pensamento algébrico.

Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) fundamentam-se na relação entre pensamento e linguagem para defender a presença do pensamento algébrico nos Anos Iniciais de escolarização. Os autores questionam concepções do ensino de álgebra que entendem que o pensamento algébrico seja subordinado à manipulação sintática da linguagem específica da álgebra. Diferentemente, eles sugerem que existe uma dialética entre pensamento algébrico e linguagem algébrica e defendem, então, que como o “pensamento [algébrico] não prescinde de uma linguagem estritamente simbólico-formal para sua manifestação, não há razão para sustentar uma iniciação relativamente tardia ao ensino-aprendizagem da Álgebra” (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993, p. 88).

Pesquisadores alinhados com essas ideias inauguraram um movimento denominado *early algebra* (LINS; KAPUT, 2004), que se refere à introdução do pensamento algébrico, nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, a crianças com idade em torno dos 7 anos ou menos. “Isso não significa ensinar a mesma álgebra tradicional da mesma maneira usual para crianças

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a11

mais novas, mas sim apresentá-las a novas formas algébricas de pensar e imergi-las na cultura da álgebra"[17] (LINS; KAPUT, 2004, p. 47).

Esses argumentos se fortaleceram ao longo do tempo e são, atualmente, defendidos por diversos educadores matemáticos (RADFORD, 2014; RIBEIRO; CURY, 2015; NACARATO; CUSTÓDIO, 2018). Em particular, Nacarato e Custódio (2018, p. 9) afirmam que as discussões curriculares nacionais, a partir de 2012, passaram a considerar "a presença da álgebra nos anos iniciais, com o propósito de desenvolver o pensamento algébrico".

Após delinear essas ideias sobre os pensamentos numérico, geométrico e algébrico, vamos retomar, então, o nosso propósito, pois já temos condições de responder à pergunta que dá título à seção seguinte e, portanto, cumprir o objetivo a que nos propusemos neste artigo.

5 Afinal de contas, o que estamos chamando de pensamento integral?

Nosso objetivo de propor e construir uma primeira versão do conceito ou ideia de *pensamento integral* está sendo concretizado ao longo do artigo. Ainda na primeira seção, como um ponto de partida para nossas discussões, o descrevemos como o conhecimento envolvido no cálculo de áreas de regiões quaisquer, o que inclui aquelas limitadas por linhas curvas. Já na seção 2, sinalizamos a possibilidade de a estrutura hierárquica proposta por Kouropatov e Dreyfus (2014) nos apoiar na conexão entre o conteúdo matemático conhecido por estudantes no Ensino Fundamental e o conceito de integral. O relato da experiência no projeto de modelagem e as discussões teóricas sobre os pensamentos numérico, geométrico e algébrico serão utilizados, a partir deste ponto, para detalharmos e aprofundarmos a caracterização desse constructo teórico.

No projeto Mar de Lama, o preenchimento do desenho da superfície irregular com quadrados pode ter proporcionado aos estudantes uma compreensão do conceito de área, em detrimento de privilegiar o cálculo de áreas. De forma concreta, eles puderam perceber a superfície sendo coberta por quadrados e calcularam áreas, com o apoio mínimo de fórmulas. Houve também um forte componente experimental (NACARATO; PASSOS, 2003), mediado por artefatos (SANTOS; NACARATO, 2014), como a maquete, os instrumentos de medida, a tabela, os lápis de cor etc., assim como a linguagem, nas discussões em grupos com colegas, professora e pibidianos. O uso da maquete também se configurou como um apoio à visualização

[17] Tradução nossa para o original em língua inglesa de: "That does not mean teaching the same old school algebra in the same usual way to younger children, but rather to introduce them to new algebraic ways of thinking and immersing them in the culture of algebra" (LINS; KAPUT, 2004, p. 47).

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a11

geométrica e às relações entre elementos tridimensionais e bidimensionais (NACARATO; PASSOS, 2003) envolvidos na resolução do problema da realidade. Todas essas estratégias podem viabilizar o desenvolvimento do pensamento geométrico que assumiremos, então, como constituinte do pensamento integral.

Em decorrência dos cálculos propriamente ditos, envolvidos na determinação da área da superfície da lama, os estudantes realizaram muitas medidas e operações, ao longo de todo o projeto. Ao utilizarem a escala, tiveram que operar razões e proporções. Foram trabalhadas operações — adição, multiplicação e potenciação — com números naturais e racionais, com frações em especial; e problemas envolvendo razões e estruturas multiplicativas. Eles puderam, assim, desenvolver conhecimento e destreza com números e operações em situação de cálculo (CARVALHO; PONTE, 2019). Além disso, esses cálculos e medidas foram realizados como passos intermediários para resolver o problema da realidade e, portanto, estavam sendo construídos imersos em suas experiências cotidianas (LINS; GIMENEZ, 1997). Todas essas estratégias podem viabilizar o desenvolvimento do pensamento numérico, que assumiremos, também, como constituinte do pensamento integral.

Ao preencherem o desenho da região total por meio de quadrados cada vez menores, o procedimento dos estudantes apresentava regularidade e repetição de padrão (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993; RIBEIRO; CURY, 2015): eles deveriam repetir o procedimento sucessivamente, sempre inserindo quadrados com lado medindo metade da medida do lado do quadrado anterior. Se eles tivessem preenchido a região aleatoriamente, com polígonos quaisquer, com lados medindo quaisquer valores, eles ainda poderiam ter sucesso na tarefa de encontrar valores aproximados para a área da região. Mas ao fazer como a professora os orientou, eles tinham um maior controle e, talvez, mais consciência do caminho em direção ao objetivo, que era cobrir todo o desenho, e poderiam visualizar melhor a possibilidade de colorir toda a região.

Em outras palavras, os estudantes poderiam vislumbrar a possibilidade de calcular a área total, mesmo sem efetivamente calcular seu valor exato, em um processo de generalização (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993). Essa hipótese é reforçada pelo depoimento de um estudante que afirmou que, se a atividade fosse realizada por um computador, os quadrados acabariam se transformando em *pixels*. Parece que ele percebeu a convergência dos valores das áreas dos quadrados para zero e, talvez, o processo infinito, no qual somavam mais e mais partes que, por sua vez, eram cada vez menores. As estratégias que envolvem regularidade, repetição de padrões e a possibilidade de generalização podem viabilizar o desenvolvimento do pensamento algébrico, que assumiremos, também, como constituinte do pensamento integral.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a11

Da forma como discutimos até aqui, as ideias relacionadas aos pensamentos geométrico, numérico e algébrico são próprias da Educação Básica. A possibilidade de generalização — parte do pensamento algébrico — e a estrutura hierárquica proposta por Kouropatov e Dreyfus (2014), entretanto, nos dão meios de potencializar os procedimentos dos estudantes no cálculo da área da superfície atingida pela lama para além daqueles previstos na Educação Básica: por não terem informações sobre a área total, os estudantes foram somando pequenas partes dessa área, visando uma aproximação gradual da área total. Parece-nos, portanto, que eles avançaram na construção do conceito de aproximação em um contexto de objetos geométricos — área de uma região plana —, de forma concreta e intuitiva — na resolução de um problema da realidade em uma atividade de modelagem. Sendo assim, os estudantes galgaram o primeiro degrau na estrutura hierárquica proposta por Kouropatov e Dreyfus (2014) para construir o conceito de integração. Nesse primeiro degrau, eles não apenas realizaram uma aproximação geral do valor da área, como também realizaram uma aproximação refinada, já que tal aproximação "foi feita mais precisa ao diminuir o tamanho dos objetos de substituição [os quadrados, no caso do projeto Mar de Lama] e aumentar a quantidade deles"[18] (KOUROPATOV; DREYFUS, 2014, p. 537). O primeiro marco teórico é a base para a construção do marco teórico seguinte — conhecimento do conceito de valor de acumulação — e assim sucessivamente, até a construção do conceito de integração.

Assim, avançando um pouco mais na elaboração desse constructo teórico, entendemos que o desenvolvimento do pensamento integral se dá por meio de — e mobiliza — simultaneamente, os pensamentos geométrico, numérico e algébrico, mas de forma potencializada pela ideia de aproximação, geral e refinada, como descrita por Kouropatov e Dreyfus (2014). Além disso, os pensamentos geométrico, numérico e algébrico, intrinsecamente conectados pela ideia de aproximação, estão também mergulhados no contexto — ou na lama — do problema da realidade que foi abordado no projeto de modelagem matemática. Nesse sentido, o desenvolvimento do pensamento integral se deu de forma incrustada em uma situação real, vivida pelos estudantes, o que pode ter conferido um sentido especial para cada cálculo realizado, para cada ideia desenvolvida.

A inserção da atividade de modelagem em uma experiência cotidiana dos estudantes (LINS; GIMENEZ, 1997), a ênfase no uso de artefatos mediadores, sejam eles ferramentas concretas ou a linguagem (SANTOS; NACARATO, 2014), e a fundamentação da discussão

[18] Tradução nossa para o original em língua inglesa de: "[The approximation can] be made more precise by decreasing the size of the replacing objects and increasing their number" (KOUROPATOV; DREYFUS, 2014, p. 537).

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a11

teórica na dialética entre pensamento e linguagem (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993) e entre desenvolvimento do pensamento e aprendizagem (SANTOS; NACARATO, 2014) nos permitem sugerir que a base teórica que sustenta o pensamento integral é a teoria histórico-cultural de Vygotsky[19] Tal teoria nos permite "estudar os modos como os seres humanos tanto moldam quanto são moldados pelos artefatos que medeiam seu engajamento com o mundo" (DANIELS, 2011, p. 13).

O desenvolvimento do pensamento integral no Ensino Fundamental é comparável à incorporação do pensamento algébrico nos currículos, desde os Anos Iniciais de escolarização. Assim como a inserção abrupta e abstrata da álgebra nos Anos Finais do Ensino Fundamental, os primeiros contatos com o cálculo diferencial e integral costumam esbarrar em obstáculos de difícil transposição. Parafraseando Lins e Kaput (2004), propor a incorporação do pensamento integral no Ensino Fundamental não significa ensinar o conceito formal de integral para crianças, mas sim, apresentar a elas novas formas de pensar a ideia de área, mergulhá-las na cultura do conceito de integral e, talvez, em direção a pensamentos típicos do cálculo diferencial e integral. Nossa proposta estabelece, assim, uma conexão de conteúdos tratados no Ensino Fundamental com o conceito de aproximação, geral e refinada, apresentado por Kouropatov e Dreyfus (2014) para o fim do Ensino Médio. Tal conexão pode suavizar as transições e obstáculos envolvidos no processo do ensino de cálculo.

Na proposta que fazemos, é importante ressaltar, entretanto, o fato de a ideia do pensamento integral ter surgido de um problema da realidade que demandou conteúdos, procedimentos e pensamentos matemáticos que não só contemplam o que está previsto nas orientações curriculares, mas vão além delas, e de forma completamente acessível aos estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental. Esses conteúdos, procedimentos e pensamentos foram mobilizados para dar conta de um projeto de modelagem que, como apontam Meyer, Caldeira e Malheiros (2011, p. 55), ressignificam a concepção de currículo, como algo "ligado à vida das comunidades e das pessoas, e não a alguma coisa que está pronta para ser seguida".

Concluímos, assim, uma primeira elaboração disso que estamos chamando *pensamento integral*. As ideias e discussões, aqui apresentadas, muito mais que constituírem um ensaio empírico-teórico, são um convite para que professores e pesquisadores investiguem com maior profundidade as hipóteses que levantamos ao longo do artigo e se juntem a nós no desenvolvimento desse constructo teórico.

[19] Optamos por não aprofundar na discussão dessa fundamentação teórica, visando não exceder o número máximo de páginas permitido para os artigos publicados na revista. Deixamos essa hipótese como um convite para pesquisas futuras.

Agradecimentos

Embora não sejam responsáveis pelas discussões e propostas que estamos fazendo neste artigo, agradecemos a Bárbara Mirson, Fernando Lima, Gabriel Mancera, Leandro Souza, Paloma Lima, Renata Oliveira, Thais Pinto e Thais Ribeiro (membros do Coletivo Crítico) e aos revisores do Bolema, por críticas feitas a versões prévias do texto e por sugestões cruciais para a elaboração de nossas reflexões. Agradecemos, em especial, aos pibidianos pelo importante apoio durante a realização do projeto Mar de Lama e à Profa. Teresinha Kawasaki, pela ideia que deu origem a tudo isso.

Referências

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem matemática na educação básica**. São Paulo: Editora Contexto, 2012.

ARAÚJO, J. L. Ser crítico em projetos de modelagem em uma perspectiva crítica de educação matemática. **Bolema**, Rio Claro, v. 26, n. 43, p. 839-860, 2012. DOI: http://dx.doi.org/10.1590/S0103-636X2012000300005.

BARBOSA, J. C. Modelagem na educação matemática: contribuições para o debate teórico. *In:* REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 24., 2001, Caxambu. **Anais [...]** Rio Janeiro: ANPED, 2001. p. 01-15. 1 CD-ROM.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**. São Paulo: Editora Contexto, 2002.

BORBA, M. C.; VILLARREAL, M. E. **Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking**: information and communication technologies, modeling, visualization and experimentation. New York: Springer, 2005.

BORROMEO FERRI, R. Modelling problems from a cognitive perspective. *In:* HAINES, C.; GALBRAITH, P.; BLUM, W.; KHAN, S. (ed.). **Mathematical modelling**: education, engineering and economics. Chichester: Horwood Publishing Limited, 2007. p. 260-270.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/abase/. Acesso em: 27 jun. 2020.

BURAK, D. Modelagem matemática e a sala de aula. *In:* ENCONTRO PARANAENSE DE MODELAGEM EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1., 2004, Londrina. **Anais [...]** Londrina: UEL, 2004. p. 01-10.

CARVALHO, R.; PONTE, J. P. Cálculo mental com números racionais e desenvolvimento do sentido de número. **Quadrante**, Lisboa, v. 28, n. 2, p. 53-71, dez. 2019. Disponível em: https://doi.org/10.48489/quadrante.23017. Acesso em: 05 set. 2020.

CORSO, L. V.; DORNELES, B. V. Senso numérico e dificuldades de aprendizagem na matemática. **Revista Psicopedagogia**, São Paulo, v. 27, n. 83, p. 298-309, mai./ago. 2010. Disponível em: http://www.revistapsicopedagogia.com.br/detalhes/212/senso-numerico-e-dificuldades-de-aprendizagem-na-matematica. Acesso em: 05 set. 2020.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a11

CRUZ, M. M. C. Estudo e modelagem de problemas usando softwares: modelo de EDO com Maple. **Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**, São Carlos, v. 5, n. 1, p. 1-7, 2017. DOI: https://doi.org/10.5540/03.2017.005.01.0572.

DANIELS, H. **Vygotsky e a pesquisa**. Tradução: Edson Bini. São Paulo: Edições Loyola, 2011.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A.; MIGUEL, A. Contribuições para um repensar... a educação algébrica elementar. **Pro-Posições**, Campinas, v. 4, n. 1, p. 78-90, mar. 1993. Disponível em: https://www.fe.unicamp.br/pf-fe/publicacao/1761/10-artigos-fiorentinid_etal.pdf. Acesso em: 05 set. 2020.

FLUCK, A. *et al*. Transforming learning with computers: Calculus for kids. **Education and Information Technologies**, v. 25, p. n. 2, p. 1-18, fev. 2020. DOI: https://doi.org/10.1007/s10639-020-10136-0.

FREIRE, P. **Pedagogia do oprimido**. 34. ed. Rio de Janeiro: Editora Paz e Terra, 2002.

KOUROPATOV, A.; DREYFUS, T. Learning the integral concept by constructing knowledge about accumulation. **ZDM – The International Journal on Mathematics Education**, v. 46, n. 4, p. 533-548, ago. 2014. DOI: https://doi.org/10.1007/s11858-014-0571-5.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. Campinas: Papirus Editora, 1997.

LINS, R. C.; KAPUT, J. The early development of algebraic reasoning: the current state of the field. *In:* STACEY, K.; CHICK, H.; KENDAL, M. (ed.). **The future of the teaching and learning of algebra**: the 12th ICMI Study. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2004. p. 47-70.

MEYER, J. F. C. A.; CALDEIRA, A. D.; MALHEIROS, A. P. S. **Modelagem em educação matemática.** Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2011.

NACARATO, A. M.; CUSTÓDIO, I. A. (org.). **O desenvolvimento do pensamento algébrico na educação básica**: compartilhando propostas de sala de aula com o professor que ensina (ensinará) matemática. Brasília: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2018. *E-book*. Disponível em: http://www.sbembrasil.org.br/files/ebook_desenv.pdf. Acesso em: 12 set. 2020.

NACARATO, A. M.; PASSOS, C. L. B. **A geometria nas séries iniciais**: uma análise sob a perspectiva da prática pedagógica e da formação de professores. São Carlos: EdUFSCar, 2003.

ORFÃO, R. B.; COSTA, N. M. L.; FRANT, J. B. Ensino de cálculo infinitesimal na educação básica: reflexões com base prática. *In:* CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13., 2011, Recife. **Anais [...]** Recife: CIEM, 2011. p. 1-12. Disponível em: https://xiii.ciaem-redumate.org/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/viewFile/2385/1125. Acesso em: 27 jun. 2020.

RADFORD, L. The progressive development of early embodied algebraic thinking. **Mathematics Education Research Journal**, v. 26, n. 2, p. 257-277, mai. 2014. DOI: 10.1007/s13394-013-0087-2.

REZENDE, W. M. **O ensino de cálculo:** dificuldades de natureza epistemológica. 2003. 450f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.

RIBEIRO, A. J.; CURY, H. N. **Álgebra para a formação do professor**: explorando os conceitos de equação e de função. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2015.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a11

SANTOS, C. A.; NACARATO, A. M. **Aprendizagem em geometria na educação básica**: a fotografia e a escrita na sala de aula. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2014.

SIMIELLI, M. E. R.; GIRARDI, G.; MORONE, R. Maquete de relevo: um recurso didático tridimensional. **Boletim Paulista de Geografia,** São Paulo, n. 87, p. 131-148, dez. 2007. Disponível em: https://publicacoes.agb.org.br/index.php/boletim-paulista/article/view/699. Acesso em: 04 mar. 2022.

STEWART, J. **Cálculo**: Volume 1. 8. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2017.

TALL, D. The psychology of advanced mathematical thinking. *In:* TALL, D. (ed.). **Advanced mathematical thinking**. New York: Kluwer Academic Publishers, 2002. p. 3-21.

TALL, D.; VINNER, S. Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. **Educational Studies in Mathematics**, v. 12, n. 2, p. 151-169, 1981. Disponível em: https://link.springer.com/article/10.1007/BF00305619. Acesso em: 13 abr. 2021.

VEIGA, L. A. K.; ZANETTI, M. A. Z.; FAGGION, P. L. **Fundamentos de topografia**. Curitiba: Universidade Federal do Paraná, 2012. Disponível em: http://www.cartografica.ufpr.br/docs/topo2/apos_topo.pdf. Acesso em: 12 set. 2020.

Submetido em 11 de Outubro de 2020.
Aprovado em 02 de Novembro de 2021.