ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a07

Relaciones entre la argumentación y la modelación en el aula de matemáticas

Relationships between argumentation and modeling in the mathematics classroom

Horacio **Solar**[*]

ORCID iD 0000-0002-1958-8153

Andrés **Ortiz**[**]

ORCID iD 0000-0003-1370-8051

María **Aravena**[***]

ORCID iD 0000-0002-6796-6366

Manuel **Goizueta**[****]

ORCID iD 0000-0002-7936-1102

Resumo

Para desarrollar una visión competencial del aprendizaje, varias investigaciones han puesto el acento en las competencias de modelación y argumentación. Si bien existe una nutrida literatura en ambas competencias matemáticas, es muy escasa en la literatura el abordaje conjunto de la argumentación y modelación. Este estudio tiene como propósito caracterizar las relaciones entre la argumentación y la modelación en el aula de matemáticas. A partir de una experiencia de desarrollo profesional docente, se presentan el análisis de dos casos de profesoras quienes diseñaron una actividad de modelación y argumentación. Los resultados de este estudio indican que se plantean tres relaciones importantes entre la argumentación y la modelación: 1) Las tareas matemáticas diseñadas favorecieron el desarrollo de la modelación y argumentación en los estudiantes; 2) los modelos actúan de manera implícita como respaldo de las garantías y refutaciones dados por los estudiantes; 3) la argumentación en el aula favorece que los estudiantes transiten por las distintas fases del ciclo de modelación.

Palabras clave: Mathematical literacy. Competencias matemáticas. Modelación. Argumentació. Estudio de casos.

Abstract

Several studies have emphasized mathematical modeling and argumentation as part of the development of a competency view of learning. Although there is abundant literature on both mathematical competences, joint

[*] Doctor en Didáctica de las Matemáticas por la Universidad Autónoma de Barcelona (UAB). Profesor asistente, Pontificia Universidad Católica de Chile, Santiago, Chile. E-mail: hsolar@uc.cl.

[**] Magíster en Enseñanza de las Ciencias: mención matemática. Universidad de Concepción. Profesor asociado, Universidad Católica de la Santísima Concepción, Concepción, Chile. E-mail: aortiz@ucsc.cl.

[***] Doctora en Didáctica de las Matemáticas por la Universidad de Barcelona (UB). Profesora Titular, Universidad Católica del Maule, Chile. E-mail: maravena@ucm.cl

[****] Doctor en Didáctica de las Matemáticas por la Universidad Autónoma de Barcelona (UAB). Profesor asociado, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Valparaíso, Chile. E-mail: manuel.goizueta@pucv.cl

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a07

approaches to argumentation and modeling are scarce in the literature. The purpose of this study is to characterize the relationships between argumentation and modeling in the mathematics classroom. We analyzed cases of two teachers who took part in a professional development experience and designed and implemented modeling tasks. The results of the study indicate that three important relationships between argumentation and modeling to be proposed: 1) The mathematical tasks designed favored the development of modeling and argumentation in students; 2) Mathematical models are implicitly used as backing for warrants and refutations in students' arguments; 3) the argumentation in the classroom favors that the students go through the different phases of the modeling cycle.

Keywords: Mathematical literacy. Mathematical competences. Modeling. Argumentation. Case studies

1 Introducción

Cada vez hay más países que han realizado reformas profundas en el currículum de matemáticas para que los estudiantes puedan desarrollar competencias matemáticas (ESPAÑA, 2022; MINEDUC, 2013). Estos cambios en los propósitos curriculares han requerido que los profesores de matemáticas pongan un mayor acento en el desarrollo de competencias matemáticas en los estudiantes (NISS; HØJGAARD, 2019). Sin embargo, estos cambios no han sido suficientes para una modificación profunda de las prácticas en el aula de matemáticas. La realidad, en muchos países, es que la enseñanza se sigue direccionando principalmente al logro de objetivos de aprendizaje centrados en los *contenidos*, con patrones de interacción cerrados en los que las intervenciones del docente son para realizar preguntas de bajo nivel cognitivo y evaluar las intervenciones de los estudiantes (SOLAR *et al*., 2022).

De todas las competencias matemáticas (NISS; HØJGAARD, 2019) que permiten promover estos cambios, varias investigaciones y propuestas han puesto el foco en las competencias de modelación y argumentación, las que se relacionan con aspectos esenciales de la actividad matemática de los estudiantes.

En nuestra investigación, hemos considerado lo propuesto por Blum y Niss (1991) sobre modelo matemático, quienes hacen referencia que para modelar una situación debe existir una correspondencia que permita generar una interacción entre un problema real y la matemática, considerando que los problemas de la realidad son complejos, y que los modelos matemáticos son sólo representaciones simplificadas de la realidad observada. Por tanto, la modelación matemática es un proceso que relaciona el contexto extra matemático y la matemática a través de un modelo que se construye para dar una solución a un problema, transitando, para ello, por un proceso cíclico (BLUM, 1996; BLUM; LEIß, 2007; BLUM; BORROMEO-FERRI, 2009; MAAß, 2006).

En el marco teórico de PISA 2018 (OECD, 2019) se describe cada una de las siete competencias matemáticas según el ciclo de modelación. Entre ellas se encuentra la

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a07

argumentación, la cual contribuye a una comprensión compartida de las ideas matemáticas a través del análisis y comparación de enfoques y perspectivas. Hay varias aproximaciones a la argumentación en la literatura. En esta investigación, seguimos el acercamiento propuesto por Krummheuer (1995, p. 247), comúnmente aceptado por la investigación educativa, según el cual la argumentación "tiene como propósito principal convencerse a sí mismo así como a otros de la validez del razonamiento" (AYALON; HERSHKOWITZ, 2018; VAN EEMEREN *et al*., 2013).

Argumentar en el aula promueve que las ideas de los estudiantes sean objeto de discusión y evaluación, posibilitando el desarrollo de culturas matemáticas orientadas al diálogo (GOIZUETA, 2019) en las que la construcción de conocimientos se entiende como una actividad situada, reflexiva y crítica (CONNER *et al*., 2014).

Podemos encontrar varias relaciones entre argumentación y modelación en contextos de trabajo colaborativo y discusión de modelos. En el proceso de modelación se requieren habilidades de trabajo en equipo, de comunicación y negociación (MAAß *et al*., 2019) en que es habitual que emerjan discusiones productivas (MANOUCHEHRI; BEKDEMIR; YAO, 2020). Las discusiones en pequeño grupo son parte del proceso de modelación de los estudiantes, en que al momento de explorar posibles caminos de solución suelen haber conflictos entre los miembros del grupo para llegar a la solución más adecuada (TEKIN-DEDE, 2019).

En las discusiones en gran grupo, cuando el profesor selecciona y secuencia las respuestas de los estudiantes, se genera una oportunidad para contraponer los distintos modelos propuestos y para estudiar su validez o pertinencia (SMITH; STEIN, 2011). Los pocos estudios encontrados que relacionan, de manera explícita, la argumentación con la modelación, dan cuenta de cómo se construyen los argumentos en el ciclo de modelación por el que transitan futuros profesores de primaria (TEKIN-DEDE, 2019) y que la calidad de la argumentación se relaciona positivamente con el tránsito por las fases modelación de estudiantes de 6º grado de primaria (GÜÇ; KULEYIN, 2021).

No obstante, no hemos encontrado estudios que relacionen de manera bidireccional estas dos competencias matemáticas, preguntándose, por ejemplo, de qué manera los estudiantes transitan las fases del ciclo de modelación en momentos de argumentación, o bien indagar de qué manera se desarrollan los momentos de argumentación cuando los estudiantes transitan en las fases del ciclo de modelación. Resulta, entonces, relevante investigar las relaciones bidireccionales entre estas competencias matemáticas. A través del estudio de dos

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a07

profesoras de matemáticas, el propósito de esta investigación es caracterizar relaciones entre la argumentación y la modelación que emerjan en estas aulas de matemáticas.

2 Marco teórico

2.1 Modelación

Existe consenso que la modelación y uso de modelos es un factor clave para reconocer el valor de la utilidad de la matemática y su uso en la resolución de problemas en contextos de aplicación (BLUM; NISS, 1991). Su incorporación en el ámbito educativo destaca la conexión de las matemáticas escolares con la vida diaria, la modelación como un medio de aprendizaje de la matemática, la cognición y metacognición en procesos de modelación para identificar habilidades (BLUM, 2011; SCHOENFELD, 1987; VORHÖLTER *et al.*, 2019), y como una competencia (MAAß, 2006).

Las prácticas de modelación en el aula requieren la implementación de tareas donde los profesores promuevan la resolución de problemas en contextos del mundo real (NISS; HØJGAARD, 2011), para que los estudiantes exploren, construyan y amplíen su comprensión conceptual (GASTÓN; LAWRENCE, 2015), identifiquen la importancia que tiene la construcción de modelos, para que los estudiantes comprendan la dinámica de los procesos científicos, sociales y culturales (BLUM; NISS, 1991).

Maaß (2010) desarrolló una clasificación integral y sistemática de los tipos de tareas para incorporar la modelación matemática en el aula con problemas: auténticos, abiertos, complejos, realistas, tareas que impliquen transitar por todo el proceso de modelación matemática (BORROMEO-FERRI, 2018).

En los procesos de modelación matemática, se han propuesto ciclos para usar y crear un modelo matemático (BLUM; BORROMEO-FERRI, 2009; MAAß, 2006). Blum y Leiß (2007) plantean que para elegir el tipo de ciclo a utilizar en las tareas de modelación, se debe tener en cuenta los propósitos del estudio o el desarrollo de la actividad matemática de los estudiantes, donde algunos ciclos están más orientados a la resolución de problemas de manera individual. En nuestro estudio se utilizó el ciclo de modelación propuesto por Maaß (2006), que es una adaptación del ciclo descrito por Blum (1996).

El ciclo muestra claramente la interacción entre la realidad y las matemáticas durante el proceso de modelación, estableciendo una relación entre ellas. De acuerdo con Maaß (2006), para modelar un problema real hay que movilizarse entre la realidad y la matemática,

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a07

capturando la actividad que desarrollan los estudiantes en cada una de las fases de transición del ciclo de modelación, porque este proceso no es lineal debido a que los estudiantes pueden ir hacia adelante o hacia atrás (BLUM; BORROMEO-FERRI, 2009; BLUM; LEIß, 2007).

El proceso de modelación comienza en el mundo real; *simplificando*, estructurando e idealizando el problema para obtener un modelo real que contenga un enfoque matemático preliminar, orientador del proceso de *matematización*. Esta segunda fase traduce al lenguaje matemático los datos, relaciones y suposiciones, que conducen a un modelo matemático de la versión idealizada. Cuando los estudiantes están *trabajando con las matemáticas* se utilizan definiciones, propiedades y procesos matemáticos, donde se obtienen soluciones matemáticas las cuales deben ser *interpretadas*, en un rango aceptable y compatible con las condiciones iniciales, y luego *validadas*, mediante aproximaciones numéricas en términos del problema real (BLUM; LEIß, 2007; BLUM; NISS, 1991; MAAß, 2006). Si la solución o el proceso elegido no resulta ser adecuado a la realidad, los pasos o quizás incluso la totalidad del proceso de modelización necesita ser revisado (BLUM; BORROMEO-FERRI, 2009; BLUM; LEIß, 2007; BLUM; NISS, 1991).

En la Figura 1 se ilustra el proceso de modelación propuesto por Maaß (2006), en la cual se identifican las fases de transición del ciclo que corresponden a: Simplificar, Matematizar, Trabajar con las matemáticas, Interpretar y Validar.

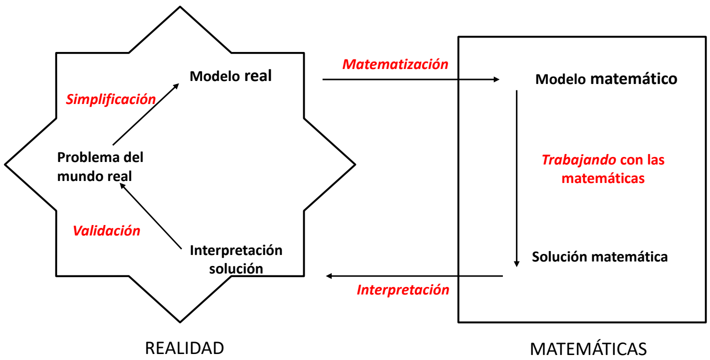

Figura 1 - Procesos de modelación matemática
Fuente: MAAß (2006) adaptado de BLUM (1996)

Aunque la modelación ha sido trabajada, preferentemente, con estudiantes de secundaria (VILLA-OCHOA; CASTRILLON-YEPES; SÁNCHEZ-CARDONA, 2017) y de nivel universitario (CARDELLA, 2008; ARAVENA *et al.*, 2022) su uso en los niveles de primaria y educación infantil es cada vez más frecuente (ALBARRACÍN; GORGORIÓ, 2019; ALSINA; SALGADO, 2021; SALCEDO; ALVARADO; AVIÑA, 2021; TOALONGO-GUAMBA *et al.*, 2021) por las innumerables ventajas que ofrece la modelación al conectar los conocimientos con el medio externo (BLUM; NISS, 1991). Fomentar el valor de la utilidad de la matemática,

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a07

desde edades tempranas, con problemas abiertos, complejos y desafiantes es clave para que los estudiantes vayan desarrollando el pensamiento analítico y produzcan soluciones creativas (ALSINA; SALGADO, 2021; BLUM; NISS, 1991).

Las tareas de modelación en situaciones contextualizadas y auténticas ayudan a los estudiantes de preescolar y primaria a dotar de significados los conceptos y procesos matemáticos, expresar procesos de pensamiento (ENGLISH, 2006); mejorar y refinar el lenguaje matemático; utilizar sistemas de representación; identificar ideas centrales de un problema, descubrir relaciones entre variables; realizar cálculos matemáticos cuantificando datos cualitativos (SALCEDO; ALVARADO; AVIÑA, 2021).

También se han considerado las recomendaciones de diversos autores respecto a las dificultades y obstáculos para transformar una situación desde la realidad a la matemática (ARAVENA, 2016), donde la formulación es el proceso más difícil (MAAß, 2006), interpretar y transformar los datos en diferentes formatos de representación (ENGLISH, 2006), establecer un modelo real (MAAß, 2006), interpretar soluciones y validar el modelo con datos numéricos o en el contexto del problema real (ALSINA; SALGADO, 2021; BLUM; BORROMEO-FERRI, 2009).

2.2 Argumentación

En el aula de matemáticas, la argumentación promueve una cultura en la que la construcción del conocimiento se considera una actividad situada, crítica y reflexiva que involucra la participación grupal. Cuando participan varias personas en la construcción de un argumento, se hace referencia a una argumentación colectiva (CONNER *et al*., 2014; KRUMMHEUER, 1995).

Idealmente, una argumentación contiene varios enunciados relacionados entre sí que asumen ciertas funciones para su eficacia interaccional (KRUMMHEUER, 1995). En general, los análisis de los enunciados que contienen un argumento en el aula se sustentan en el modelo de Toulmin (2003), el que consiste de seis elementos: Los *datos* (D), que corresponden a la evidencia que se presenta para iniciar la argumentación; la *conclusión* o aserción (C) es la posición de la que se quiere convencer a los interlocutores; la *garantía* (G) permite la inferencia de la conclusión a partir de los datos; el *refutador* (Ref) establece las condiciones en las que la garantía no permite inferir la conclusión; el *calificador modal* (CM) califica la conclusión en términos de la certeza que el argumento provee; y, finalmente, el *respaldo* (R) aporta legitimidad a la garantía.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a07

La estructura de Toulmin ha sido utilizada por diversos investigadores para analizar la argumentación en el aula de matemáticas (CONNER *et al*, 2014; KRUMMHEUER, 1995; YACKEL, 2002). Algunas de estas investigaciones han reducido la estructura de Toulmin, omitiendo el calificador modal y el refutador (KRUMMHEUER, 1995; YACKEL, 2002). Sin embargo, algunos autores han señalado el papel relevante que tienen estos elementos en los procesos de argumentación en la actividad matemática, en particular el poder persuasivo que tiene la refutación en la argumentación (CERVANTES-BARRAZA; CABAÑAS-SÁNCHEZ; ORDOÑEZ-CUASTUMAL, 2017; INGLIS; MEJÍA-RAMOS, 2005; KNIPPING; REID, 2015).

Hemos adaptado la estructura original de Toulmin para analizar las discusiones con distintos puntos de vista que se pueden dar en un proceso argumentativo en el aula de matemáticas (Figura 2). En el contexto del aula, es frecuente que los *datos* (D) sean identificados, de manera implícita, por los estudiantes a partir del planteamiento del problema y de las preguntas formuladas por el profesor. Estas últimas suelen ser clave para la identificación de los *datos* (D), pues orientan la atención de los estudiantes hacia aquellos aspectos del problema que deben considerar. La *conclusión* (C) puede corresponder a la respuesta a la pregunta, o bien a una solución de la tarea matemática, la cual puede ser correcta o no. Respecto a la *garantía* (G), en el aula de matemáticas es usual que los estudiantes expliquen los procedimientos realizados sin explicitar por qué estos son adecuados y dan validez a la solución obtenida. Es decir, presentando implícitamente estos procedimientos como adecuados.

En tales casos, siguiendo a Krummheuer (1995), la presentación misma del procedimiento es una forma de dar cuenta de la validez de la conclusión obtenida exponiendo el proceso seguido a la consideración de los interlocutores. Esta manera de proceder se sostiene en la norma escolar que requiere a los estudiantes utilizar conocimientos y procedimientos apropiados de la matemática – generalmente aquellos que se aprenden en la clase – para dar respuesta a las tareas que se les plantean. Es por ello que se han agregado a la garantía (G) las explicaciones de una respuesta o los procedimientos de una resolución en una tarea matemática, características que también se han agregado para el elemento *refutador* (Ref). Durante una discusión en el aula, tanto la garantía como el refutador pueden tener el mismo grado de certeza para los estudiantes, por lo que el *respaldo* (R) puede apoyar – u objetar – tanto a la garantía como al refutador (SOLAR; DEULOFEU, 2016; SOLAR *et al*., 2022).

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a07

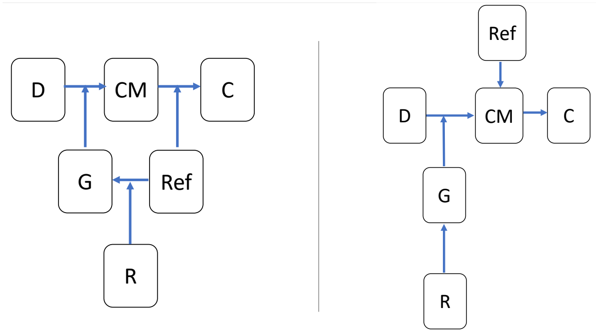

Figura 2 - Izquierda, modelo de Toulmin; derecha, adaptación de Solar y Deulofeu (2016)
Fuente: TOULMIN (2003)

La argumentación colectiva le otorga una nueva perspectiva a la modelación en el aula, ya que permite analizar las discusiones en grupo y los conflictos que emergen entre los estudiantes para encontrar la solución más adecuada (TEKIN-DEDE, 2019). En la investigación citada, se examinaron los subargumentos dentro del ciclo de modelación en el contexto de la formación inicial de cuatro profesores de matemáticas de primaria al trabajar en una tarea de modelación. Los hallazgos revelaron que los datos y conclusiones de la mayoría de los subargumentos correspondían a los puntos inicial y final de la transición de modelación. Es decir, de modelo real a modelo matemático, y de este último al resultado.

Por otro lado, la argumentación colectiva requiere del apoyo docente, puesto que con determinadas acciones se pueden potenciar diferentes pasos del proceso argumentativo que desarrollan los estudiantes (CONNER *et al*., 2014). Por tanto, el docente desempeña un papel esencial en el establecimiento de normas y estándares para la argumentación matemática en el aula (AYALON; HERSHKOWITZ, 2018; SOLAR *et al*., 2021).

El desarrollo de la argumentación no depende únicamente del apoyo docente, sino también de las características de las tareas matemáticas. Tareas abiertas en que no necesariamente hay un único resultado correcto, o que su desarrollo invita a un acercamiento con distintas estrategias informales o formales de resolución, o que en el proceso de resolución los estudiantes tomen posturas, son tareas que promueven distintos puntos de vista y, con ello, el debate en los estudiantes para que se desarrolle argumentación (SOLAR; DEULOFEU, 2016).

3 Metodología

Se ha diseñado una investigación cualitativa, con un enfoque de estudio de casos múltiples exploratorio (YIN, 2014), con casos seleccionados de manera intencionada (CRESWELL, 2011). Cada caso corresponde a las aulas de matemáticas de las profesoras,

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a07

quienes implementan una secuencia de aprendizaje diseñada para promover las competencias de modelación y argumentación. Se ha utilizado un enfoque metodológico de estudio de casos para tratar de entender las relaciones entre la argumentación y la modelación que emerjan en las aulas de matemáticas de estos casos de estudio.

3.1 Contexto y participantes

A pesar de los logros en la formación del profesorado, promover la modelación en el aula de matemáticas (VORHÖLTER *et al.*, 2019) sigue siendo una cuestión pendiente, pues aún se requiere investigación acerca de su implementación (MANOUCHEHRI, 2015). Por tanto, se llevó a cabo un programa de desarrollo profesional de profesores para promover las competencias de argumentación y modelación en el aula de matemáticas, el cual se implementó en dos ciudades de Chile.

En el programa de desarrollo profesional participaron veintidós profesoras, trece en la Región Metropolitana y nueve de la Región del Biobío, que imparten clases de matemáticas en educación primaria (6-11 años) o en los dos primeros años de la educación secundaria (12-13 años). La propuesta formativa consideró el desarrollo de la argumentación como una de las estrategias para promover la modelación en el aula de matemáticas, por tanto, una de las condiciones para participar en el programa era que las docentes tuvieran experiencia previa en argumentación en el aula. En consecuencia, las profesoras fueron seleccionadas de manera intencionada.

El programa formativo consistió en quince sesiones de 3 horas, y se implementó entre agosto y diciembre de 2018. El diseño del programa consideró dos dimensiones: el propósito de formación y el modelo de desarrollo profesional docente. En cuanto al primero, la formación tuvo como foco la modelación y gestión de la argumentación en el aula, lo que implicó un estudio bibliográfico previo de los componentes teóricos y didácticos que, según la investigación, permiten promover las competencias de modelación y argumentación. Considerando este estudio, se decidió incorporar en la propuesta el ciclo de modelación (MAAß, 2006) y la argumentación colectiva (KRUMMHEUER, 1995). Respecto al desarrollo profesional, la propuesta incorporó el modelo de Mejoramiento de la Experiencia Docente (MED) (SOLAR *et al.*, 2016), cuya base es mostrar experiencias de otros docentes por medio de videos, para que luego sean los propios docentes quienes implementen una propuesta didáctica.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a07

Una vez terminado el proceso formativo, se seleccionaron diez profesoras de ambas regiones para hacer un seguimiento de sus clases durante el 2019, en que debieron diseñar una tarea de tres o cuatro clases para promover la modelación y la argumentación en los estudiantes. Se seleccionaron a las profesoras con una asistencia constante durante la formación y que realizaban clases en distintos niveles en el siguiente ciclo escolar, de modo de poder observar el desarrollo de la argumentación y la modelación en distintas edades.

Cada una de las secuencias implementadas que incluyen una tarea para promover la modelación y la argumentación, fueron trabajadas en grupos pequeños de manera colaborativa. Cada una de las diez docentes implementó tres o cuatro clases de 45-70 minutos, las que fueron filmadas con tres cámaras. Una cámara registró todos los movimientos de la docente y las otras dos cámaras registraron a dos grupos pequeños fijos, seleccionados por la profesora (grupo 1 y grupo 2), registrando sus conversaciones (incluyendo gestualidad) y recopilando sus producciones escritas que sirvieron como antecedentes.

Para este estudio de casos múltiples, se seleccionaron, de manera intencionada, a cinco de las diez docentes, quienes lograron implementar una secuencia de clases en la que se observó el ciclo de modelación completo y promoción de la argumentación, el escenario que pretendíamos estudiar.

En este artículo se muestran los resultados de dos de los cinco casos, las clases de Matilde y de Carola, las cuales se han seleccionado dado que se observan momentos de argumentación en las distintas fases de transición del ciclo de modelación (MAAß, 2006). Se analizan episodios de clases en que aparecen momentos de contraposición de ideas en el tránsito de los estudiantes por el ciclo de modelación.

3.2 Estrategia de análisis de datos

El análisis de los datos se organizó en dos etapas: tránsito por las fases del ciclo de modelación y momentos de la argumentación en las fases de modelación. En la primera etapa, se analizaron las fases que transitaron los estudiantes en el ciclo de modelación. Para ello, se utilizaron cinco categorías de análisis que corresponden a las fases del ciclo de modelación de Maaß (2006): simplificación, matematización, trabajando con la matemática, interpretación y validación. Cada una de las cinco categorías se ha caracterizado por códigos, ingresados en el *software* ATLAS.ti para el análisis de los videos de los casos (Cuadro 1). Se utilizaron, principalmente, los videos de los dos pequeños grupos de trabajo para codificar las fases del

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a07

ciclo de modelación y en las clases en las cuales se trabajó con todo el grupo/curso, se codificó el video de la cámara docente.

Fases ciclo de modelación	Código
Simplificación:	• Discute el problema: condiciones iniciales, reconocimiento de datos, variables y sus relaciones considera acciones y caminos hacia una solución • Utiliza sistemas de representación
Matematización	• Representa la realidad mediante nociones matemáticas • Propone una expresión matemática • Formula el modelo matemático
Trabajando con las matemáticas	• Discute sobre las matemáticas • Realiza cálculos y procedimientos • Usa un modelo para encontrar la solución • Explicita estrategias
Interpretación	• Interpreta soluciones • Comunica el resultado o modelo
Validación	• Evalúa el resultado o modelo • Discute resultados y modelos • Identifica fortalezas y limitaciones

Cuadro 1 - Códigos para el análisis de la modelación
Fuente: elaboración propia adaptado de MAAß (2006)

En la segunda etapa, se analizaron los momentos de argumentación en las fases de modelación. Para ello, se identificaron episodios en que convergieron códigos de modelación en las distintas fases del ciclo y momentos de argumentación colectiva (KRUMMHEUER, 1995) con la presencia de refutaciones. En el caso de Matilde, se identificaron tres episodios: uno en la fase de simplificación, uno en matematización y uno en trabajando con la matemática. En el caso de Carola se identificaron dos episodios correspondientes a la fase de validación. Estos cinco episodios se transcribieron y analizaron mediante la estructura de Toulmin adaptada (SOLAR; DEULOFEU, 2016) y se relacionaron con los códigos de modelación. En los episodios en los que intervino el docente, se identificaron las acciones de la profesora que promovieron directamente los momentos argumentativos (CONNER *et al*., 2014).

4 Resultados

4.1 Caso de Matilde: la argumentación en la construcción del modelo matemático

En la clase de 7º grado (12-13 años), Matilde diseñó la tarea de modelación Gira de estudio (Figura 3), para ser trabajada en grupos de 5-6 personas. La tarea se implementó en

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a07

cuatro clases para que los estudiantes tuviesen un tiempo adecuado para transitar por todo el ciclo de modelación (BORROMEO-FERRI, 2018; MAAß, 2010). La tarea no tiene una solución inmediata ni es estructurada, sino que se requiere transitar desde el problema real al problema matemático. Además, la tarea favorece la argumentación, ya que solicita a los estudiantes que tomen una postura, promoviendo el debate entre los estudiantes (SOLAR; DEULOFEU, 2016), ello se evidencia en que se solicita a los estudiantes que presenten una solución, sobre la empresa que es más conveniente desde el punto de vista económico para seleccionarla.

Tarea: *Gira de estudio*. El 7ºA de una escuela quiere ir a una gira de estudio a la montaña. Por el arriendo de un bus la empresa A les cobra una base fija por día de $81.000 y $120 por cada kilómetro recorrido; mientras que la empresa B tiene una base fija de $90.000 por día y cobra $80 por cada kilómetro recorrido. Si se piensa recorrer muchos kilómetros, ¿en qué empresa el arriendo es más conveniente?

Figura 3 - *Secuencia de clases de Matilde*
Fuente: elaboración propia

4.1.1 Tránsito por las fases del ciclo de modelación

En la implementación de la tarea matemática, en las cuatro clases, los estudiantes efectivamente transitaron por todas las fases del ciclo de modelación. En la primera clase, los estudiantes trabajaron con su grupo explorando el problema, iniciando la fase de simplificación. En la segunda clase, los estudiantes transitaron por la fase de matematización, probando con diversos valores para la cantidad de kilómetros y apareciendo posturas sobre qué empresa es más conveniente. En la tercera clase, los estudiantes transitaron a la fase de trabajando con las matemáticas, en que Matilde guía una discusión con todo el curso para construir un modelo pertinente que represente el cobro de cada una de las empresas. Finalmente, en la cuarta clase, los estudiantes transitaron por las fases de interpretación y validación, incorporando la variable días en el caso hipotético de realizar un viaje muy largo.

4.1.2 Momentos de argumentación en las fases de modelación

El análisis se focaliza en episodios de las tres primeras clases que corresponden a las fases de simplificación, matematización y trabajando con las matemáticas del ciclo de modelación. En la primera clase, los estudiantes se encuentran en la fase de simplificación, que

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a07

se evidencia en el *reconocimiento de algunas variables* que determinan el costo de un viaje arrendando un bus, identificando la variable cantidad de kilómetros que se recorrerán, pero sin considerar como variable la cantidad de días que está arrendado el bus, lo cual genera dificultades para determinar la distancia, ya que el enunciado dice *muchos kilómetros*. La discusión para comprender el problema estuvo centrada en dos focos: por una parte, en como operar con los datos $90.000 y $81.000, y, por otra parte, la cantidad de kilómetros a considerar dado que no se cuenta con ese dato en el enunciado.

En el grupo 1, Andrés y Mario comienzan a reconocer que la cantidad de kilómetros es una de las variables del problema, y Andrés señala que ya tiene una solución. En el episodio 1 se aprecia cómo, a partir de la intervención de Andrés, los estudiantes del grupo 1 *discuten el problema* en el proceso de identificar las condiciones y restricciones del problema y en reconocer las variables en juego para determinar qué empresa es más conveniente.

> *Episodio 1*
> *1 Andrés: es más barato la de 90.000. [Empresa B] [Dante mira el cuaderno de Andrés]*
> *2 Mario: ¿pero qué hizo? [dirigiéndose a Dante]*
> *3 Daniel: Primero multiplicó 90.000 por 80 y después multiplicó 81.000 por 120*
> *4 Lucas: ¿por qué multiplicaste 90.000 por 80?*
> *5 Andrés: porque esas son las dos cosas que son variables*
> *6 Lucas: Sí pero son distintos. Uno se va cobrando por día y el otro se va cobrando por kilómetro. Por eso te digo, uno es lo que pasa por día y otro es lo que pasa por kilómetro. Entonces ¿qué tienen que ver los dos juntos?* (Episodio 1 - Discusión del grupo 1, 2019).

En el episodio 1 emerge un momento de argumentación asociado a las *posibles acciones hacia una solución* cuando Andrés afirma que la empresa B es más barata y se justifica al relacionar los datos de cada empresa de manera multiplicativa, en la empresa B multiplica 90.000 por 80 y en la empresa A multiplica 81.000 por 120. En términos de la estructura de Toulmin, la conclusión corresponde a la afirmación de Andrés – *es más barato la de 90.000* – [Empresa B]. El dato corresponde a los costos de arriendo de un bus de las empresas A y B, Respecto a la garantía, en el episodio 1 los estudiantes no explicitan las razones de la elección de la empresa B, pero la explicación del procedimiento utilizado por Daniel y complementado por Andrés, actúa en calidad de garantía ya que sostienen la conclusión. Por otra parte, la intervención de Lucas – *sí pero son distintos. Uno se va cobrando por día y el otro se va cobrando por kilómetro* – corresponde a una refutación, al sugerir que el procedimiento no es válido.

En la Figura 4, se establece la relación entre la modelación y argumentación mediante los procesos de las fases de modelación, *discuten del problema* y las *posibles acciones hacia una solución*, y la estructura de Toulmin. Si bien en esta interacción entre los integrantes del grupo se ha encontrado un momento de argumentación colectiva, con la presencia de

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a07

refutaciones, el razonamiento de Lucas se limita a responder a Daniel y Andrés, sin desarrollar más extensamente el razonamiento de su posición que actúa como refutador. Cabe señalar que la pregunta de la tarea matemática: *¿en qué empresa el arriendo es más conveniente*? es un desencadenante de la argumentación entre los estudiantes y, por tanto, se señala en la Figura 4.

Desde el punto de vista de la modelación, el procedimiento de Daniel corresponde a una multiplicación de los datos en cada empresa, en que se puede reconocer un *modelo* de relaciones multiplicativas entre la base fija y el costo por cada kilómetro que se puede expresar como Base Fija [$] x Costo [$/km]. Este modelo se puede interpretar como un respaldo a la garantía dada por Daniel y Andrés, y se ha identificado, de manera tácita, en la estructura de Toulmin con líneas entrecortadas. Cabe señalar que no se propone otro modelo para respaldar la refutación de Lucas.

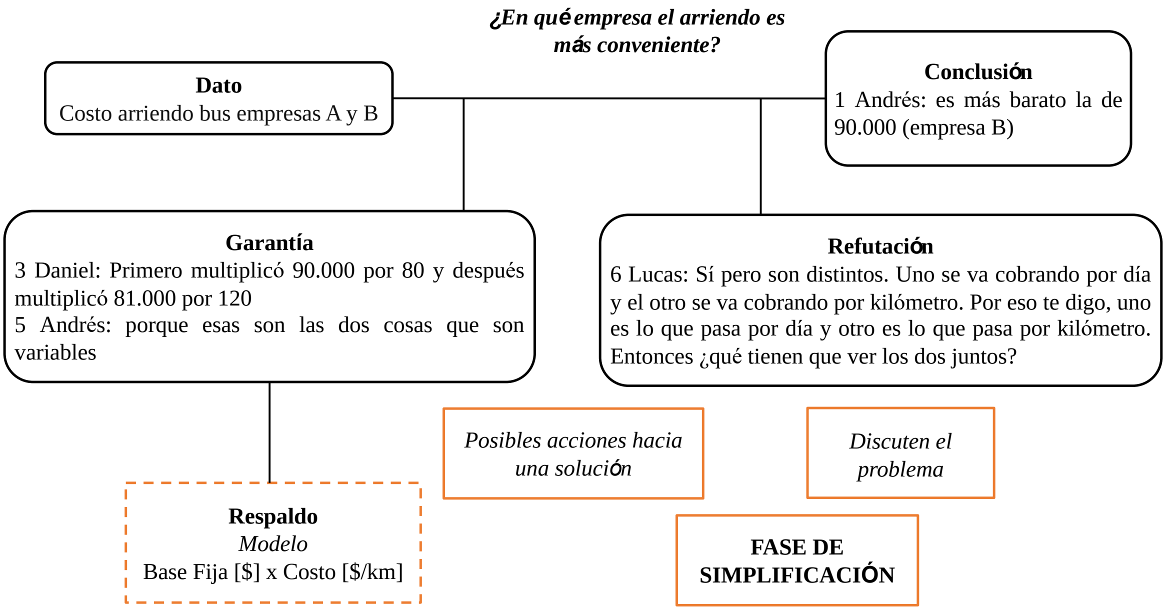

Figura 4 - Estructura argumentativa y procesos de modelación del episodio 1 caso Matilde
Fuente: elaboración propia

En lo que sigue de la clase, Lucas y Mario no logran convencer a Andrés de que su procedimiento no resuelve el problema de manera satisfactoria, quien mantiene su postura de usar la relación de multiplicar la base por el costo por kilómetro para concluir que la empresa B es la más conveniente. Esta discusión continúa en la siguiente clase, en que los estudiantes siguen trabajando en grupos. Una posible explicación de que Lucas y Mario no hayan podido convencer a Andrés, es que aún están comprendiendo el problema por medio del reconocimiento de variables y, por ello, no identifican un modelo para respaldar su refutación.

En la segunda clase, los estudiantes se encuentran en la fase de matematización, en que proponen *expresiones matemáticas* mediante la aplicación de relaciones aritméticas. En el

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a07

episodio 2 se puede ver cómo en el grupo 1 se presentan dos posturas al identificar cuál empresa es la más conveniente.

> *Episodio 2*
> *1 Lucas: Ya, cada uno de su opinión, yo digo que la empresa más barata sale la primera [empresa A]*
> *2 Mario: La B es más barata ...*
> *3 Lucas: Sale más barato. Yo hice esta multiplicación mira*
> *4 Andrés: ¿Qué?*
> *5 Lucas: Lo hice por ocho los dos y me salió más barato*
> *6 Andrés: ¿Por qué por ocho?*
> *7 Lucas A ver, porque es por kilómetro, son hartos kilómetros, así que yo puse ocho y…cualquiera*
> *8 Andrés: Si, un número cualquiera*
> *9 Lucas: No, no hice cualquiera*
> *10 Andrés: Un número no más*
> *11 Lucas: Puse ocho*
> *12 Mario: Es más barata la B*
> *13 Lucas: ¿Por qué?*
> *14 Mario: Es más barata la B*
> *15 Daniel: ¿Cuánto te dio en la A? Yo saque que iban a pagar siete millones setecientos veinte*
> *16 Mario: ¿Pero por cuanto lo multiplicaste?*
> *17 Andrés: Es lo que te dije yo. Mira, eso es lo que hice yo ayer y nadie me pescó*
> *18 Daniel: Con los kilómetros*
> *19 Mario: ¿Con que?*
> *20 Daniel: Con los kilómetros,*
> *21 Andrés: ¿Cuántos millones?*
> *22 Mario: Son ciento veinte*
> *23 Andrés:(Señala su cuaderno) Eso es lo que hice yo ayer*
> *24 Daniel: … opino que hay que multiplicarlo, hay que multiplicarlo*
> *25 Andrés:(Señalando su cuaderno) Eso se divide por… por cien*
> *26 Luis: Oye pero que cada uno tenga su opinión, el Mario dijo la B y yo digo la A, el igual dice la A*
> *27 Daniel: Yo digo la B* (Episodio 2 - Discusión del grupo 1, 2019).

A partir de la pregunta de la tarea matemática ¿en qué empresa el arriendo es más conveniente?, se desencadenan dos conclusiones respecto a seleccionar la empresa más conveniente. Lucas sostiene que la empresa A es la más conveniente (conclusión 1), mientras que en contraposición Mario y Daniel señalan que la empresa B es la más conveniente (conclusión 2). El dato corresponde a las tarifas de la empresa A y B (Figura 5).

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a07

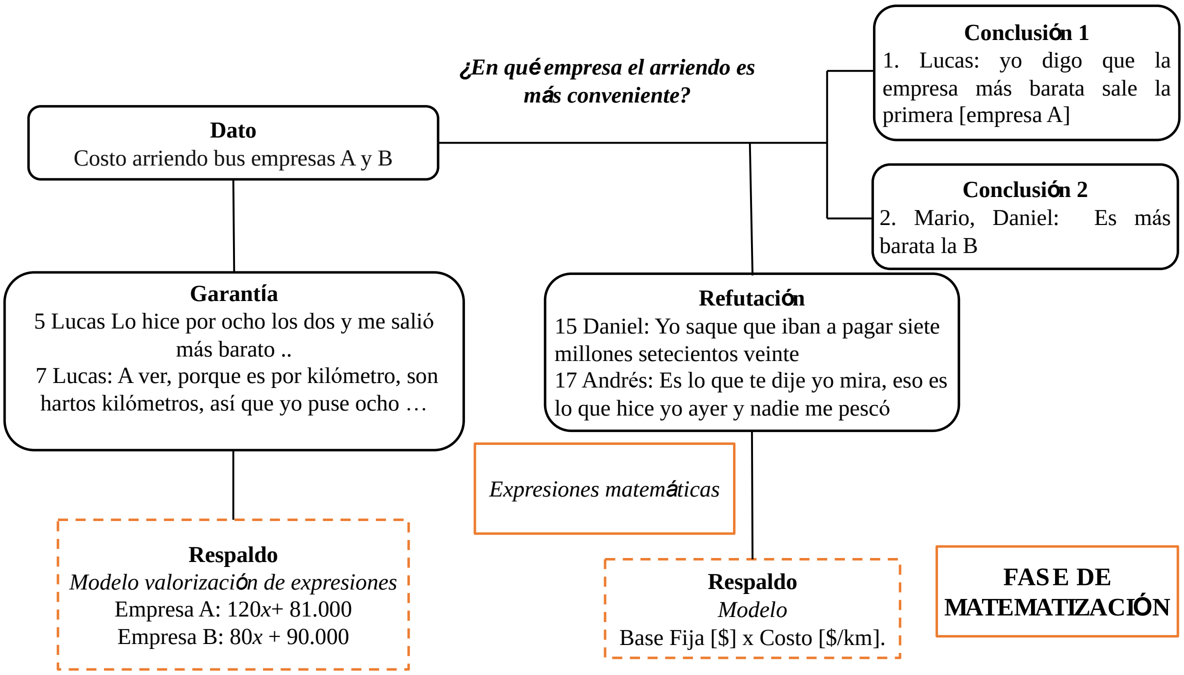

Figura 5 - Estructura argumentativa y procesos de modelación del episodio 2 caso Matilde
Fuente: elaboración propia

Lucas explica que al elegir el valor de la variable 8 km. para multiplicar por el costo de kilómetros recorridos y sumar el costo fijo en ambas empresas, se obtiene que la empresa A es más conveniente. Estas sentencias 5 y 7 del episodio 2, actúan como garantía ya que sostienen la conclusión 1. En cambio, Daniel, para justificar la conclusión 2, no describe como garantía su procedimiento y se limita a señalar el resultado, el cual es avalado por Andrés, que da a entender que con el procedimiento que aplicó en la clase anterior obtuvo el mismo resultado de Daniel. Lucas si bien no representa el modelo con notación matemática, podemos inferir que el *modelo* que respalda su procedimiento es una valorización de las expresiones $120x + 81.000$ (Empresa A) y $80x + 90.000$ (Empresa B). Este procedimiento de valorización de expresiones actúa como un respaldo al procedimiento de Lucas. Por otra parte, la refutación presentada por Andrés se respalda con el modelo de relaciones multiplicativas de base por costo de los kilómetros descrito en el episodio 1. En esta nueva discusión, el grupo 1 no logra llegar a acuerdo para seleccionar la empresa más conveniente. De manera similar que en el episodio 1, si bien se aprecian refutaciones en el episodio 2, los razonamientos de Daniel, Andrés se limitan a responder a Lucas, sin desarrollar el razonamiento detrás de esta respuesta.

Por otra parte, la formulación de los modelos matemáticos ha favorecido que estudiantes de distintos grupos de trabajo contrapongan sus puntos de vista, tal como se observa en el episodio 3, cuando se genera una discusión entre dos estudiantes de distintos grupos mediada por Matilde. El episodio 3 ocurre en la tercera clase, y está situado en la fase de trabajando con

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a07

las matemáticas, en que los estudiantes están *realizando cálculos y procedimientos para encontrar una solución matemática* por medio de distintos modelos matemáticos. Matilde se acerca a Fernando, quien le explica sus procedimientos en que considero como $x = 160$, ante lo cual Matilde le pregunta: ¿cuál empresa es más conveniente?

> *Episodio 3*
> *1 Matilde: ¿y cuál es más conveniente?*
> *2 Fernando: La A*
> *[Interrumpe Gabriel, que es de otro grupo]*
> *3 Gabriel: No mentira, hacerlo por dos… a mi por 2000 me dio diferente resultado [referencia a cual empresa es más conveniente]*
> *4 Fernando: depende de la base*
> *5 Matilde. Depende de algo… ¿de qué depende?*
> *6 Gabriel: de los kilómetros*
> *7 Matilde: de la cantidad de kilómetros*
> *8 Gabriel: sí, porque mire.,si ud. va a recorrer pocos kilómetros, es más conveniente el A. pero si ud. va a recorrer hartos kilómetros, es más conveniente la B.*
> *9 Matilde. Por cuanto lo hiciste*
> *10 Gabriel: por 5, por 500 y por 2000*
> *11 Matilde: recomiéndale un kilometraje para que lo pueda comprobar, si es que es lo que tu dices.*
> *12 Gabriel: pon 2000*
> *13 Matilde. ¿Tu lo hiciste por 2000? (Gabriel afirma con la cabeza), ¿lo vamos a hacer por 2000 también?*
> *14 Gabriel: sí.. para que vea.*
> *15 Matilde: ¿Lo hacemos Fernando?*
> *16 Fernando: sí.*
> *17 Matilde: probemos con 2000, que pasaría…. usando la misma estrategia que tu dices. ¿Cuál es tu estrategia?*
> *18 Fernando: sumando cuanto vale el km. con los kms. que va a recorrer.. o sea multiplicando*
> (Episodio 3 – Discusión de la tercera clase, 2019).

En la Figura 6, a partir de la pregunta de Matilde – *¿y cuál es más conveniente?* –, se desencadena un nuevo momento argumentativo, en que Fernando elige la empresa A, lo que corresponde a la conclusión. Los datos siguen siendo las tarifas de ambas empresas. Gabriel, que es miembro del otro grupo, interrumpe la conversación de Matilde y Fernando para refutar la respuesta de Gabriel señalando que con 2.000 km se elige a otra empresa. Fernando, ante la intervención de Gabriel, señala que – *depende de la base* – que actúa en calidad de garantía. Además, se han identificado las intervenciones de Matilde que contribuyen a suscitar los razonamientos de Fernando y Gabriel. Con la pregunta de Matilde – *¿de qué depende?* – Gabriel desarrolla la refutación, señalando que – *si Ud. va a recorrer pocos kilómetros, es más conveniente el A. pero si Ud. va a recorrer hartos kilómetros, es más conveniente la B.*

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a07

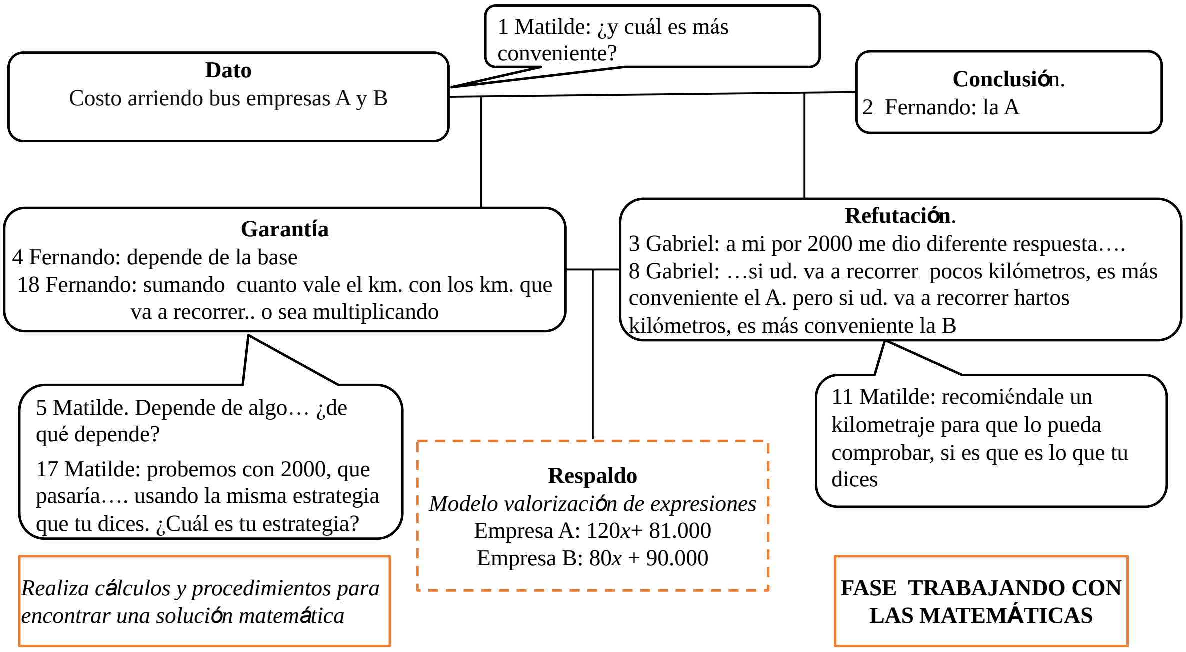

Figura 6 - Estructura argumentativa y procesos de modelación del episodio 3 caso Matilde
Fuente: elaboración propia

Matilde sigue con intervenciones para que Fernando evalúe con el valor sugerido por Gabriel, con la condición que lo haga con su propia estrategia. Ambas estrategias de Fernando y Gabriel se respaldan en el modelo de valorización de expresiones, lo que favorece que ellos puedan ponerse de acuerdo, pues Fernando obtendría el mismo resultado que Gabriel al utilizar la misma valorización. Matilde aprovecha esta discusión para promover que lleguen a acuerdo sin validar las respuestas ni procedimientos presentados. Respecto al contenido de la refutación, a diferencia de los episodios 1 y 2, en el episodio 3 se aprecia que Gabriel desarrolla su idea para justificar las razones de la conveniencia de la empresa B, mostrando un desarrollo de su razonamiento en la respuesta.

En síntesis, el modelo matemático actúa como respaldo de la estructura argumentativa que emerge en las interacciones del grupo, aunque este modelo no es reconocido por los estudiantes en los tres momentos argumentativos analizados.

4.2 Caso de Carola: la argumentación en la validación del modelo matemático

En la clase de 1° grado (6-7 años), Carola diseñó la tarea *construyendo un garaje* (Figura 7), diseñada como una tarea de modelación que corresponde a una situación auténtica y abierta (BORROMEO-FERRI, 2018; MAAß, 2010). La tarea se planificó para ser implementada en tres clases de 45 minutos con grupos de 3-4 estudiantes, estas condiciones son propicias para que los estudiantes puedan transitar por las distintas fases de modelación desde simplificación

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a07

hasta validación. Además, la tarea promueve la argumentación ya que es una tarea abierta con más de una solución que da respuesta al problema, ya que puede haber maquetas del garaje con tamaños distintos, además la tarea promueve utilizar distintas estrategias en su resolución (SOLAR; DEULOFEU, 2016).

Tarea: *Construyendo un garaje***.** En la casa del papá de Catalina se quiere construir un garaje para guardar un auto. Catalina quiere ayudar a su papá confeccionando una maqueta de la entrada del garaje con cubos conectados.
Con tu grupo ayuda a Catalina a construir la maqueta considerando el tamaño del auto que está en la mesa de la profesora. ¿Cuántos cubos utilizaste para construir la maqueta? Explica tu procedimiento.

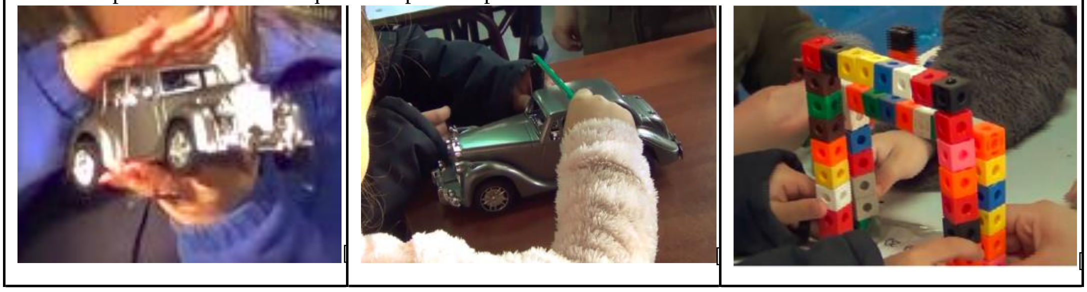

Figura 7 - *Secuencia de clases de Carola*
Fuente: elaboración propia

4.2.1 Tránsito por las fases del ciclo de modelación

En la implementación de la tarea matemática, los estudiantes de 1º grado efectivamente transitaron por todas las fases del ciclo de modelación, en las cuatro clases. En la primera clase, los estudiantes construyen la maqueta del contorno de la entrada del garaje, utilizando cubos conectados, en el cual debía entrar un auto que la profesora dejó encima de su mesa y que cada grupo debía ir a ésta sólo una vez, utilizando alguna estrategia que permitiera dimensionar el tamaño del auto para edificar su construcción. En esta clase los estudiantes transitaron por las fases de simplificación y matematización.

En la segunda clase, la docente entregó a cada grupo las maquetas construidas en la clase anterior para que determinaran la cantidad de cubos que habían utilizado e hicieran el dibujo esquemático con las longitudes de trazo del pórtico, aunque aún no saben si el auto pasará por el portal construido. En esta clase los estudiantes transitaron de matematización a la fase trabajando con las matemáticas. En la tercera clase, se realizó una discusión con todo el grupo/curso en relación con la cantidad de cubos utilizados para que el auto pase entre el garaje. En esta clase los estudiantes transitaron por las fases trabajando con las matemáticas, interpretación de soluciones y validación.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a07

4.2.2 Momentos de argumentación en las fases de modelación

El análisis se focaliza en la fase de validación de la tercera clase, pues esta etapa del ciclo adquiere relevancia una vez que los grupos de estudiantes han construido distintas maquetas de garaje con los cubos conectados. En el episodio 4 se aprecia una discusión a partir de la pregunta de Carola – *Pero miren este garaje ¿estará súper bien para este auto?*. En la discusión los estudiantes *evalúan el modelo* al afirmar que la maqueta con cubos conectados requiere ser más ancha, e indicando distintas *limitaciones al modelo*.

> *Episodio 4*
> *1 Carola: Todos entraron ¿cierto? Pero miren este garaje ¿estará súper bien para este auto?*
> *2 Curso: (Al mismo tiempo gritan algunos que sí y otros que no)*
> *3 Carola: ¿Por qué no? ¿Augusto?*
> *4 Augusto: Porque no es demasiado ancho*
> *5 Carola: Porque no es demasiado ancho. ¿Dónde tendría que…*
> *6 Fernando: Muy largo tía*
> *7 Carola: Muy largo, a ver Agustín ven a mostrar que es lo que le falta a lo mejor a este porque no sé, Augusto tú dices muy ancho*
> *8 Augusto: Anchura*
> *9 Carola: Anchura, y ¿cuál sería la anchura?*
> *10 Augusto: (Con las manos) Más así*
> *11 Carola: Más para el lado ¿cierto? Felipe, Esteban. ¿Y por qué tú dices que necesita ser más ancho?, ¿para qué?*
> *12 Dominga: No chocan las ruedas*
> *13 Carola: No chocan las ruedas, la Dominica dice que no* (Episodio 4 - Discusión de la tercera clase, 1019).

En la figura 8, la intervención de Carola – *Pero miren este garaje ¿estará súper bien para este auto?* – desencadena las distintas posiciones entre los estudiantes. Algunos concluyen que sí, es adecuado (conclusión 1) y otros que no (conclusión 2). El dato corresponde a las dimensiones del auto el cual está disponible para todos los estudiantes para que lo puedan manipular en las maquetas de garaje. La maqueta mostrada por Carola actúa como una garantía implícita en la estructura argumentativa, ya que esta acción sirve de apoyo para inferir la pertinencia de la maqueta como garaje para guardar el auto.

Luego, Carola selecciona a Augusto para que presente las razones que le llevaron a decidir que el garaje no sería adecuado, quien refuta la conclusión 1 al afirmar *porque no es demasiado ancho*. Carola suscita la idea de Augusto de que el garaje no es adecuado porque es demasiado ancho, refutación que es apoyada por otros compañeros, quienes aportan con más ideas para refutar la conclusión de que este modelo no es adecuado (muy alto, que no choquen las ruedas). Respecto al contenido de las refutaciones del episodio 4, Augusto, Fernando y Dominga se limitan a responder a la profesora, sin desarrollar el razonamiento detrás de estas respuestas.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a07

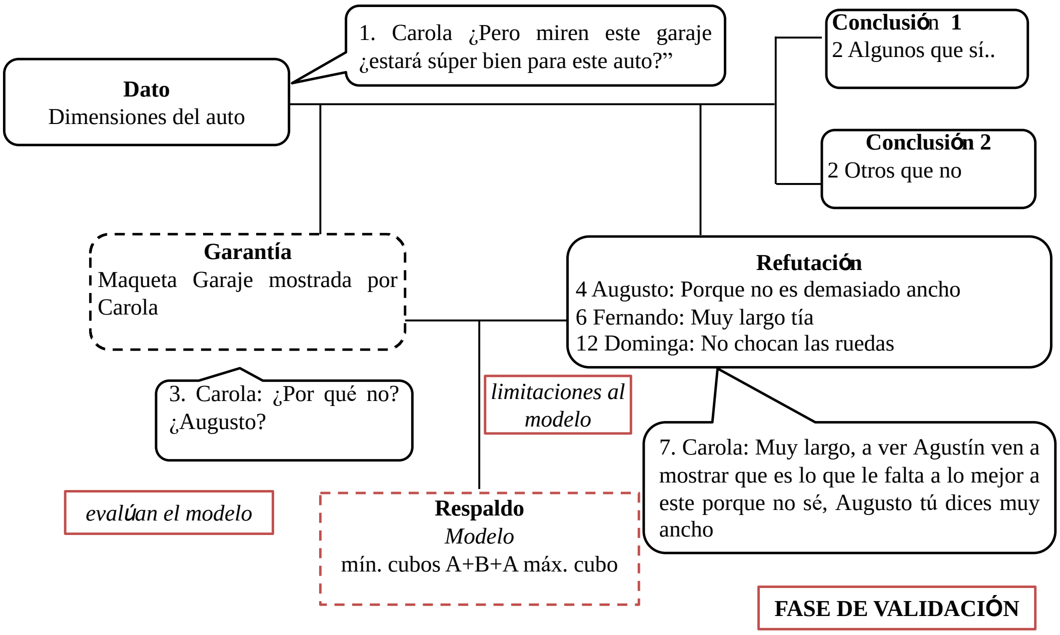

Figura 8 - Estructura argumentativa y procesos de modelación del episodio 4 caso Carla
Fuente: elaboración propia

Desde el punto de vista de la modelación, el *modelo* que respalda a la garantía y refutación se puede formular en términos de una expresión que relacione el número mínimo y máximo de cubos conectados con los lados del garaje. Si *A* representa el lado horizontal y *B* el vertical, una expresión del modelo sería: mínimo de cubos $\leq A+B+A \leq$ máximo de cubos, con intervalos de mínimo y máximo de cubos conectados para que el garaje no sea muy angosto y que las puertas del auto abran cómodamente, ni muy ancho y con la altura adecuada, para usar de manera eficiente los cubos conectados. Cabe señalar que en la fase de validación la profesora promueve que los estudiantes comuniquen su solución y las contrasten con las de otros compañeros.

A continuación, en el episodio 5, los estudiantes *discuten sobre el modelo y* realizan una evaluación de éste, para analizar la pertinencia de la anchura del garaje ya que, si bien el auto pasa, es muy angosto para que pueda abrir sus puertas. Luego, Carola compara con otro modelo construido, que es un poco más ancho y más bajo que el anterior, promoviendo que discutan sobre la validez de ambos modelos construidos.

Los estudiantes, en un inicio, señalan que ambos son iguales, lo que da pie a que Carola plantee una serie de preguntas tales como: *¿en cuál garaje las puertas se abren más?* o *¿en cuál garaje las puertas tienen más espacio?*, que permiten que los estudiantes decidan quedarse con la maqueta que es un poco más ancha y más baja.

Episodio 5
1 Carola:. Ya, Fernando en estos dos... ¿En cuál se abrirían mejor las puertas? (profesora superpone ambos diseños de garajes)

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a07

2 Fernando: En el más ancho
3 Carola: En el que es más…
4 Curso: Ancho
5 Carola: Ancho y ¿Cuál de estos dos es más ancho?
6 Fernando: El más pequeño
7 Carola: El que es más pequeño además. Si aquí, el papá de Catalina, Fernado, se comprara un bus ¿podría entrar el bus? (profesora sitúa al auto debajo de diseño de garaje más ancho y pequeño escogido por Fernando)
8 Curso: ¡No!
9 Carola: ¿Por qué?
10 Fernando: Porque son muy altos
11 Carola: Porque el bus…
12 Curso: Es muy alto
13 Carola: Ya a ver tu Isidro ¿Por qué?
14 Isidro: Porque es muy grande…
15 Carola: El bus es más grande ¿cierto?(Episodio 5, Discusión de la tercera clase, 2019)

En el episodio 5 Carola superpone ambos garajes para mostrar sus diferencias y similitudes, y suscita a Fernando mediante una pregunta que tiene como propósito que elija de uno de los dos garajes (Figura 9).

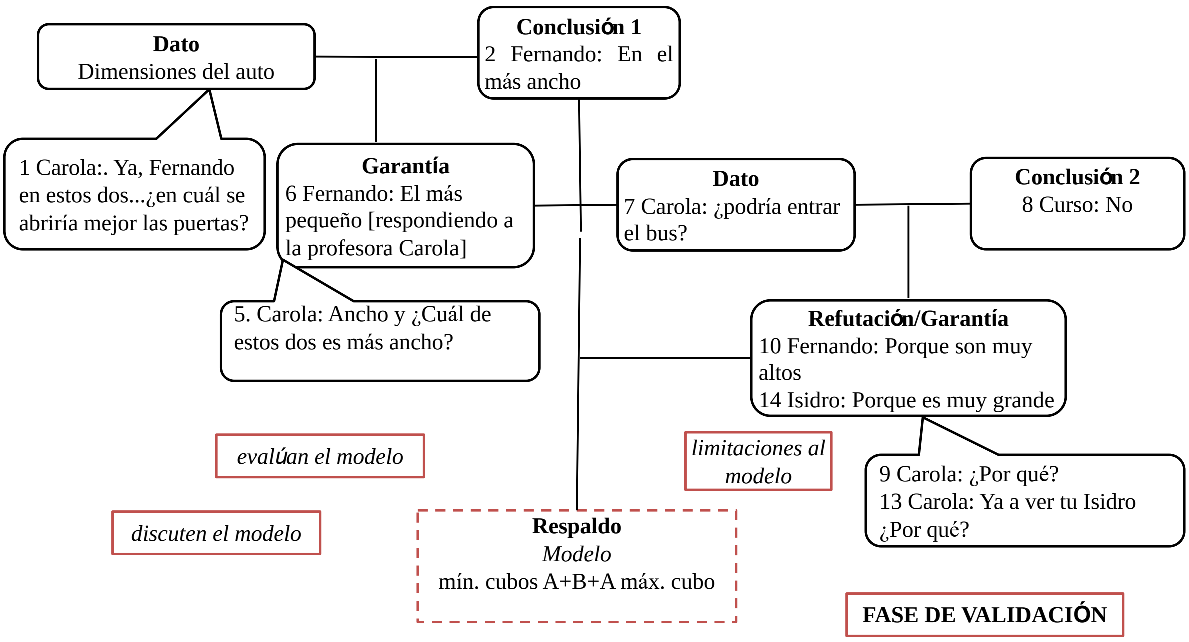

Figura 9 - Estructura argumentativa y procesos de modelación del episodio 5 caso Carola
Fuente: elaboración propia

En la Figura 9, la intervención de Carola – *Ya, Fernando, en estos dos ¿en cuál se abriría mejor las puertas?* – desencadena el momento argumentativo en que Fernando elige el garaje que es más ancho y pequeño, intervención que actúa como conclusión 1. Desde el punto de vista de la modelación, Fernando *evalúa el modelo* positivamente con su afirmación. Luego, Carola con la pregunta *¿podría entrar el bus?*, promueve que los estudiantes *identifiquen las*

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a07

limitaciones del modelo, y *discutiendo* en qué situaciones no es aplicable el modelo, lo que denota una oportunidad para proyectar el modelo a situaciones similares con otras condiciones.

Desde el punto de vista de la argumentación, los estudiantes refutan la conclusión 1 de escoger el diseño de garaje más ancho y pequeño dando las razones de que no entre un bus (*Fernando: porque son muy altos; Isidro; porque es muy grande*). Las respuestas de Fernando e Isidro, a su vez, actúan como garantía a la conclusión 2 de que no cabe un bus, produciéndose así una nueva estructura argumentativa. Ambas estructuras argumentativas se respaldan en un modelo de mín. de cubos ≤ A+B+A ≤ máx. de cubos, que no es expresado de manera explícita. Cabe resaltar que, si bien se discuten las limitaciones de garaje, no se genera una oportunidad para discutir sobre el diseño del garaje más eficiente con los cubos conectados, lo que hubiera permitido explicitar el modelo asociado. De manera similar que el episodio 4, en el episodio 5 el contenido de las refutaciones Fernando e Isidro se limitan a responder a la profesora, sin desarrollar el razonamiento detrás de estas respuestas.

En síntesis, se aprecia que los estudiantes por un parte refutaron maquetas que tenían limitaciones, y por otra, lograron justificar aquellas maquetas que eran más eficientes como diseño de un garaje. Por tanto, un resultado importante es que estudiantes de 1º año de primaria son capaces de lograr estructuras de argumentación con refutación en la fase de validación. En este caso, el modelo matemático corresponde a la suma de los lados A+B+A con intervalos de mínimos y máximos con el material concreto de cubos conectados, el cual actúa como respaldo para las distintas maquetas de garaje que diseñaron los estudiantes. Con la promoción de la validación de los garajes, Carola favorece que los estudiantes de 1º año estudien las características del modelo, como son anchura y largo, sin llegar a conectar, de manera explícita, con el modelo descrito.

5 Discusión: ¿cómo se relacionan la argumentación y la modelación?

A partir de los resultados mostrados en los dos casos estudiados, podemos dar cuenta de relaciones entre la argumentación y la modelación en el aula de matemáticas. Un primer aspecto a discutir es el desarrollo de la modelación y argumentación y las características de las tareas matemáticas. Tanto en la clase de 7º grado de Matilde, como la clase de 1º grado de Carola, en la implementación de la tarea matemática los estudiantes transitaron por todas las fases del ciclo de modelación. Además, en el caso de Matilde se encontraron tres momentos argumentativos con refutación en distintas etapas del ciclo de modelación – simplificación, matematización y

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a07

trabajando con la matemática –, y, en el caso de Carola, dos momentos de argumentación con refutación en la fase de validación.

Si bien el apoyo de las docentes es relevante para desarrollar la modelación y la argumentación en los estudiantes, hemos visto que las tareas matemáticas diseñadas favorecieron el desarrollo de estas competencias matemáticas, ya que tienen características de ser abiertas, auténticas, y su resolución involucró que los estudiantes transitaran por todo el ciclo de las fases de modelación (BORROMEO-FERRI 2018; MAAß, 2010). A su vez, estas tareas matemáticas promovieron argumentación. La tarea *Gira de estudios* generó oportunidades para que aparezcan distintas posturas entre los estudiantes, mientras que la tarea *Construyendo un garaje* generó oportunidades para obtener distintas soluciones (SOLAR; DEULOFEU, 2016). Por tanto, podemos señalar que las características de las tareas matemáticas favorecieron, en su conjunto, el desarrollo de la modelación y argumentación en los estudiantes.

Un segundo aspecto a discutir sobre las relaciones entre modelación y argumentación, es de qué manera la argumentación promueve que los estudiantes transiten por el ciclo de modelación. En los cinco momentos argumentativos de los dos casos presentados, al momento de reconstruir la estructura argumentativa, los procedimientos matemáticos descritos por los estudiantes actúan ya sea como garantía o refutación. Si bien los estudiantes no llegan a explicitar el modelo matemático en ninguno de los momentos argumentativos analizados, es posible inferir los modelos matemáticos que han puesto en juego, que actúan como respaldo implícito de los procedimientos descritos.

En el caso hipotético de que los modelos matemáticos sean formulados por los estudiantes, sería interesante analizar cuál es el rol que éstos cumplen en la estructura de Toulmin, como refutador, garantía o, incluso, conclusión según la fase del ciclo de modelación que estén transitando los estudiantes. Respecto al desarrollo del razonamiento matemático de los momentos argumentativos, en el caso de Matilde, solo en el tercer momento argumentativo se observa que la refutación de un estudiante da cuenta de un desarrollo del razonamiento en su respuesta, mientras que, en los dos momentos argumentativos anteriores, las refutaciones se limitan a responder de manera inmediata a sus compañeros sin desarrollar el razonamiento detrás de esas respuestas. En el caso de Carola, en los dos momentos argumentativos, las refutaciones dan cuenta de un razonamiento limitado, ya que los estudiantes solo responden a la profesora. Por tanto, se puede señalar que por el solo hecho que emerjan momentos argumentativos en tareas de modelación no necesariamente se favorece un desarrollo de razonamientos en los estudiantes.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a07

Un tercer aspecto a discutir sobre las relaciones entre modelación y argumentación es cómo se presentan los momentos argumentativos dentro del ciclo de modelación. En el caso de Matilde, se han caracterizado tres momentos argumentativos relevantes en las fases de simplificación, matematización y trabajando con la matemática. En el caso de Carola, se han caracterizado dos momentos de argumentación en la fase de validación. A partir de estos dos casos, podemos establecer relaciones entre ambas competencias matemáticas (Figura 10). A partir del ciclo de Maaß (2006), hemos identificado con un triángulo los momentos de argumentación en las transiciones de las fases de modelación. En el caso de Matilde se han representado con tres triángulos los momentos ya descritos por cada fase, mientras que en el caso de Carola se han representado con un triángulo de mayor tamaño para dar cuenta de su frecuencia. Si bien este esquema se ha construido a partir de dos casos, permite identificar en qué momentos del ciclo de modelación aparecen momentos argumentativos y con qué frecuencia.

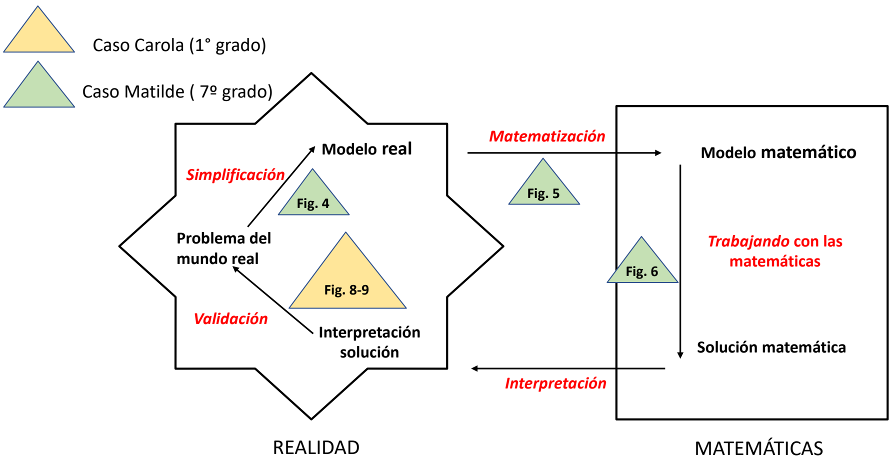

Figura 10 - Relaciones entre la argumentación y la modelación en el ciclo de Maaß (2006)
Fuente: elaboración propia

El esquema de la Figura 10 representa una primera aproximación a establecer una articulación entre la modelación y la argumentación colectiva, tal como lo sugiere Tekin-Dede (2019). A partir de los momentos argumentativos que pueden existir en una secuencia de clases, se puede identificar en qué parte del ciclo se sitúan dichos momentos y, además, se puede usar la representación con flexibilidad en su tamaño para indicar la presencia y la frecuencia con que aparece el momento argumentativo en cada fase de modelación.

6 Conclusiones

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a07

El propósito de este estudio ha sido caracterizar relaciones entre la argumentación y la modelación en el aula de matemáticas, cuyo abordaje conjunto es escaso en la literatura, a pesar de que en ambas competencias se abordan aspectos esenciales de la actividad matemática de los estudiantes (TEKIN-DEDE, 2019).

Se plantean tres relaciones importantes entre la argumentación y la modelación: (1) las características de ambas tareas matemáticas favorecieron en su conjunto el desarrollo de la modelación y argumentación en los estudiantes. (2) En los momentos argumentativos, los modelos actúan de manera implícita como respaldo de las garantías y refutaciones dados por los estudiantes, pero el hecho que emerjan momentos argumentativos no necesariamente favorece un desarrollo de razonamientos en los estudiantes. (3) Finalmente, respecto a cómo se presentan los momentos argumentativos dentro del ciclo de modelación, se presenta un esquema que representa los momentos argumentativos cuando los estudiantes transitan por el ciclo de modelación (ver Figura 10). Estos tres resultados, en su conjunto, son un aporte a las relaciones entre la argumentación y modelación que se han descrito en otros estudios (GÜÇ; KULEYIN, 2021; TEKIN-DEDE, 2019), dado que profundiza en cómo interactúan estas competencias matemáticas en el diseño de las tareas, en la interacción entre estudiantes en su resolución y en la discusión de los procedimientos y soluciones.

Una de las limitaciones que tiene el estudio es que, para observar prácticas de docentes que desarrollen la argumentación y la modelación, ha sido necesario realizar un programa de desarrollo profesional de larga extensión, dado que no es habitual que el docente desarrolle estas competencias matemáticas de manera articulada. Esta limitación se ve reflejada en nuestro estudio ya que, de los veintidós profesores que iniciaron el proceso, finalmente fueron cinco docentes quienes mostraron secuencias de aprendizaje que completaron el ciclo de modelación con promoción de la argumentación. En ese manuscrito los hallazgos descritos se circunscriben a dos de los cinco casos de la investigación. Por tanto, un próximo estudio implica analizar en más casos la función de los modelos matemáticos en las estructuras argumentativas. Por otra parte, se pueden proyectar otros estudios con foco en el papel del docente para promover la modelación y argumentación de manera conjunta.

El estudio descrito tiene varias implicaciones para el aula de matemáticas. Desde el punto de vista del currículum de matemáticas, se muestran dos casos de aula en que se generan oportunidades de aprendizaje para desarrollar, de manera articulada, la modelación y la argumentación, competencias matemáticas que están presentes en varios currículos de matemáticas (ESPAÑA, 2022; MINEDUC, 2013). Desde el punto de vista del trabajo matemático de los estudiantes, los casos muestran que el desarrollo de las tareas de modelación

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a07

no se limita a una clase, sino que se requiere que los estudiantes cuenten con un espacio temporal importante para poder desarrollar el ciclo de modelación. Desde el punto de vista del docente, se muestra la importancia que tiene la gestión para generar los momentos argumentativos por medio de acciones que invitan a contrastar los razonamientos matemáticos de los estudiantes. Además, nuestro estudio sugiere la necesidad de implementar programas de desarrollo profesional con foco en el desarrollo de competencias matemáticas.

Por tanto, es necesario considerar decisiones sobre el diseño de tareas matemáticas que involucran procesos de modelación, la promoción de la argumentación en su resolución, el papel del docente y su formación, para que se generen oportunidades auténticas para desarrollar competencias matemáticas.

Agradecimientos

Este artículo ha contado con el financiamiento del proyecto FONDECYT 1180880 de la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo de Chile.

Referencias

ALBARRACÍN, L.; GORGORIÓ, N. Using Large Number Estimation Problems in Primary Education Classrooms to Introduce Mathematical Modelling**. International Journal of Innovation in Science and Mathematics Education,** Sydnei, v. 27, n. 2, p. 45-57, 2019. Disponible en: https://openjournals.library.sydney.edu.au/CAL/article/view/13149/12005. Acceso en: 19 abr. 2023.

ALSINA, A.; SALGADO, M**.** Introduciendo la Modelización Matemática Temprana en Educación Infantil: un marco para resolver problemas reales. **Modelling in Science Education and Learning,** Valencia, v. 14, n. 1, p. 1-33, 2021. Disponible en: https://polipapers.upv.es/index.php/MSEL/article/view/14024/13528. Acceso en: 19 abr. 2023.

ARAVENA, M. Modelación Matemática en Chile. *In*: ARRIETA, J; DÍAZ, L. (ed.). **Investigaciones Latinoamericanas en Modelación Matemática Educativa** Gedisa, 2016. p 195–234.

ARAVENA, M.; DÍAZ D.; RODRIGUEZ F.; CÁRCAMO N. Estudio de Caso y Modelado Matemático en la Formación de Ingenieros. Caracterización de Habilidades STEM. **Ingeniare. Revista Chilena de Ingeniería**, Arica. v.30, n.1, p.37-46. 2022. Disponible en https://revistas.uta.cl/pdf/2869/0718-3305-ingeniare-30-01-37.pdf. Acceso en: 25 jun. 2023.

AYALON, M.; HERSHKOWITZ, R.. Mathematics teachers' attention to potential classroom situations of argumentation. **Journal of Mathematical Behavior**, New Jersey, v. 49, [s.n.], p. 163-173, dic. 2018. Disponible en https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0732312317301141?via%3Dihub. Acceso en: 25 jun. 2023.

BLUM; W. Anwendungsbeziige im Mathematikunterricht - Trends und Perspektiven. **Schriftenreihe Didaktik der Mathematik**, Viena [s.v.],, n. 23, p. 15-38, 1996.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a07

BLUM, W. Can Modelling Be Taught and Learnt? Some Answers from Empirical Research. *In:* KAISER, G.; BLUM, W.; BORROMEO, R.; STILLMAN, G. (ed.). **Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling.** International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling. Dordrecht: Springer, 2011. p. 15-30.

BLUM, W.; NISS, M. Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects — State, trends and issues in mathematics instruction. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 22, [s.n.], p. 37-68, feb. 1991. Disponible en https://link.springer.com/article/10.1007/BF00302716. Acceso en: 25 jun. 2023.

BLUM, W.; BORROMEO-FERRI, R. Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt? **Journal of Mathematical Modelling and Application,** Brasilia, v.1, n 2, p. 45-58, 2009.

BLUM, W.; LEIß, D. Investigating quality mathematics teaching: The DISUM project. *In*: BERGSTEN, C.; GREVHOLM, B. (ed). **Developing and researching quality in mathematics teaching and learning, proceedings of MADIF** 5. Linköping: SMDF, 2007. p. 3-16.

BORROMEO-FERRI, R. **Learning how to teach mathematical modeling in school and teacher education.** Cham, Switzerland: Springer, 2018.

CARDELLA, M. E. Which mathematics should we teach engineering students? An empirically grounded case for a broad notion of mathematical thinking. **Teaching Mathematics and its Applications**, Oxford,v. 27, n. 3, p. 150-159, 2008. Disponible en https://academic.oup.com/teamat/article-abstract/27/3/150/1661827?redirectedFrom=fulltext. Acceso en: 25 jun. 2023.

CERVANTES-BARRAZA, J.; CABAÑAS-SÁNCHEZ, G.; ORDOÑEZ-CUASTUMAL, S. El poder persuasivo de la refutación en argumentaciones colectivas. **Bolema**, Rio Claro (SP), v.31. n.59, 861-879. diciembre. 2017. Disponible en https://www.scielo.br/j/bolema/a/k77PKndWNSkSWGkxDpKRWGB/abstract/?lang=es. Acceso en: 25 jun. 2023.

CONNER, A. M.; SINGLETARY, L. M.; SMITH, R. C.; WAGNER, P. A.; FRANCISCO, R. T. Teacher support for collective argumentation: A framework for examining how teachers support students’ engagement in mathematical activities. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 86, n. 3, p. 401-429, feb.2014. Disponible en https://link.springer.com/article/10.1007/s10649-014-9532-8. Acceso en: 25 jun. 2023.

CRESWELL, J. W. **Educational research:** planning, conducting, and evaluating quantitative and qualitative research. Lincoln: Pearson, 2011.

ENGLISH, L. D. . Mathematical Modeling in the primary school. **Educational Studies in Mathematics,** Dordrecht, v. 63, n. 3, p. 303-323, 2006.

ESPAÑA. Real Decreto 157, de 1 de marzo de 2022. Por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la educación primaria. **Boletín oficial del estado**, Madrid, n. 52, p. 24386-24504, de 3 de marzo de 2022. Disponible en: https://www.boe.es/buscar/act.php?id=BOE-A-2022-3296. Acceso en: 19 abr. 2023.

GASTÓN, J.; LAWRENCE B. Supporting Teachers’ Learning about Mathematical Modeling. **Journal of Mathematics Research**, Ontario, v. 7, n. 4, p. 1916-9809. 2015. Disponible en https://ccsenet.org/journal/index.php/jmr/article/view/54132. Acceso en: 25 jun. 2023

GOIZUETA, M. (2019). Epistemic issues in classroom mathematical activity: There is more to students’ conversations than meets the teacher’s ear. **The Journal of Mathematical Behavior**, New

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a07

Jersey, *v. 55*. 100691, sep. 2019. Disponible en https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0732312318301172. Acceso en: 25 jun. 2023.

GÜÇ, F. A.; KULEYIN, H. Argümantasyon kalitesinin matematiksel modelleme sürecine yansimasi. **Uludağ Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi**, Bursa, v. 34, n.1, p. 222-262, 2021. Disponible en https://dergipark.org.tr/tr/pub/uefad/issue/58170/850230. Acceso en: 25 jun. 2023

INGLIS, M.; MEJÍA-RAMOS, J. P. La fuerza de la aserción y el poder persuasivo en la argumentación en matemáticas. **Revista EMA**, Ciudad de México, v. 3, n. 10, p. 327-352, feb. 2005.

KNIPPING, C.; REID, D. Reconstructing Argumentation Structures: A Perspective on Proving Processes in Secondary Mathematics Classroom Interactions. *In:* BIKNER-AHSBAHS, A.; KNIPPING, C.; PRESMEG, N. (ed.). **Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education**. Dordrecht: Springer, 2015. p. 75-101. Disponible en: https://link.springer.com/content/pdf/bfm:978-94-017-9181-6/2/1?pdf=chapter%20toc. Acceso en: 19 abr. 2023.

KRUMMHEUER, G. The ethnography of argumentation. *In:* COBB, P.; BAUERSFELD. H. (ed.). **The emergence of mathematical meaning:** Interaction in classroom cultures. Hillsdale: Lawrence Erlbaum, 1995. p. 229-269.

MAAß, K. What are modelling competencies? **ZDM**, Berlin, v. 38, n. 2, p. 113-142, 2006. Disponible en https://link.springer.com/article/10.1007/bf02655885. Acceso en: 25 jun. 2023.

MAAß, K. Classification scheme for modelling tasks. **Journal für Mathematik-Didaktik**, Berlin, v. 31, n, 2, p. 85-311, 2010. Disponible en https://link.springer.com/article/10.1007/s13138-010-0010-2. Acceso en: 25 jun. 2023.

MAAß, K.; GEIGER, V.; ARIZA, M.R; GOSS, M . The Role of Mathematics in interdisciplinary STEM education. **ZDM**, Berlin, v. 51, p. 869-884, oct. 2019. Disponible en https://link.springer.com/article/10.1007/s11858-019-01100-5#:~:text=The%20interdisciplinary%20nature%20of%20mathematical,%2C%20technology%2C%20engineering%20and%20mathematics. Acceso en: 25 jun. 2023.

MANOUCHEHRI, A. Implementing mathematical modelling: The challenge of teacher educating. *In:* STILLMAN, G.; BLUM, W.; KAISER, G. (ed.). **Mathematical modelling and applications:** Crossing and researching boundaries in mathematics education, International perspectives on the teaching and learning of mathematical modelling. Cham, Switzerland: Springer, 2017. p. 421-432. Disponible en https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-319-62968-1_35. Acceso en: 25 jun. 2023.

MANOUCHEHRI, A.; BEKDEMIR, M.; YAO. X. Facilitating Modelling Activities in a Grade 5 Classroom. *In:* STILLMAN, G, A.; KAISER, G.; LAMPEN, C. E. (ed.). **Mathematical Modelling Education and Sense-making**, International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling. Cham, Switzerland: Springer, 2020. p. 187- 197. Disponible en https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-030-37673-4_17. Acceso en: 25 jun. 2023.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN DE CHILE- MINEDUC. **Bases curriculares chilenas 7º básico a 2º medio.** Santiago: Mineduc, 2013.

NISS, M; HØJGAARD, T. Mathematical competencies revisited. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 102, [s.n.], p. 9-28, jun. 2019. Disponible en https://link.springer.com/article/10.1007/s10649-019-09903-9. Acceso en: 25 jun. 2023.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a07

ORGANIZATION FOR ECONOMIC COOPERATION AND DEVELOPMENT - OECD. **PISA 2018 Assessment and Analytical Framework (PISA).** Paris: OECD, 2019. Disponible en: https://www.oecd-ilibrary.org/education/pisa-2018-assessment-and-analytical-framework_b25efab8-en. Acceso en: 19 abr. 2023.

SALCEDO E.; ALVARADO A.; AVIÑA M.J. Modelización matemática en educación primaria: el brazo hidráulico. **Enseñanza de las Ciencias**, Barcelona, v. 39, n. 3 p. 255-273. 2021. Disponible en https://ensciencias.uab.cat/article/view/v39-n3-salcedo-alvarado-avina. Acceso en: 25 jun. 2023.

SCHOENFELD, A. What's all the fuss about metacognition. *In:* SCHOENFELD, A. H. (ed.). **Cognitive Science and Mathematics Education.** Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates,1987. p. 189–215.

SMITH, M. S.; STEIN, M. K. **5 Practices for Orchestrating Productive Mathematics Discussion***s*. EEUU: NCTM. 2011.

SOLAR, H.; DEULOFEU, J. Condiciones para promover el desarrollo de la competencia de argumentación en el aula de matemáticas. **Bolema - Mathematics Education Bulletin**, Rio Claro, v. 30, n. 56, 1092–1112. Disponible en https://www.scielo.br/j/bolema/a/LRQCNDLqMwwbtcHfhyf5LDs/?lang=es. Acceso en: 25 jun. 2023.

SOLAR, H.; ORTIZ, A.; DEULOFEU, J.; ULLOA, J. Teacher support for argumentation and the incorporation of contingencies in mathematics classrooms. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,** United Kingdom, v. 52 n7, p. 977-1005. 2021. Disponible en https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/0020739X.2020.1733686. Acceso en: 25 jun. 2023.

SOLAR, H; GOIZUETA M; MONTANER, S. H. Emergencia de patrones de interacción al promover la argumentación en el aula de matemáticas. **Revista Educación Matemática**, Ciudad de México, v. 34, n. 3, p. 132-162. 2022. Disponible en https://www.scielo.org.mx/scielo.php?pid=S2448-80892022000300132&script=sci_arttext. Acceso en: 25 jun. 2023.

SOLAR, H.; ORTIZ, A.; ULLOA, R. MED: Modelo de formación continua para profesores de matemática, basada en la experiencia. **Estudios Pedagógicos**, Valdivia, v. *42*, n.4, p.281-298. Disponible en https://www.scielo.cl/scielo.php?pid=S0718-07052016000500016&script=sci_arttext. Acceso en: 25 jun. 2023.

TEKIN-DEDE, A. Arguments constructed within the mathematical modelling cycle. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, United Kingdom, v. 50, n. 2, p. 292-314, 2019. Disponible en https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/0020739X.2018.1501825?journalCode=tmes20. Acceso en: 25 jun. 2023.

TOALONGO-GUAMBA, X.; ALSINA, A.; TRELLES-ZAMBRANO, C.; SALGADO, M. Creando los primeros modelos matemáticos: análisis de un ciclo de modelización a partir de un problema real en Educación Infantil. CADMO, **Giornale Italiano di Pedagogia Sperimentale**. 1, 81-98. 2021.

TOULMIN, S. **The uses of argument**. Reino Unido, Cambridge, MA: Cambridge University Press. 2003.

VAN EEMEREN, F. H.; GROOTENDORST, R.; JOHNSON, R. H.; PLANTIN, C.; WILLARD, C. A. **Fundamentals of argumentation theory: A handbook of historical backgrounds and contemporary developments**. Routledge, 2013.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a07

VILLA-OCHOA, J. A.; CASTRILLON-YEPES, A.; SÁNCHEZ-CARDONA, J. Tipos de tarea de modelación para la clase de matemática. **Espaço Plural**. Año XVIII, n. 36, p.219-251. 2017.

VORHÖLTER, K.; GREEFRATH, G.; BORROMEO FERRI, R.; LEIß D.; SCHUKAJLOW S. Mathematical Modelling. *In:* JAHNKE, H. N.; HEFENDEHL-HEBEKER, L. (ed.). **Traditions in German-Speaking Mathematics Education Research** (ICME-13 Monographs). Cham, Switzerland: Springer. 2019. p. 91-114. Disponible en https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-030-11069-7. Acceso en: 25 jun. 2023.

YACKEL, E. What we can learn from analyzing the teacher's role in collective argumentation. **Journal of Mathematical Behavior**, New Jersey, v. 4, n. 21, p. 423-440, Nov. 2002

YIN, R. **Case study research:** design and methods. Los Ángeles: Sage, 2014.

Submetido em 14 de Janeiro de 2022.
Aprovado em 18 de Janeiro de 2023.