ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a05

Compreensão da Representação Bidimensional de Policubos por Alunos do 6º ano em Tarefas de Avaliação Externa*

Understanding the Two-Dimensional Representation of Polycubes by Sixth Grade Students in External Assessment Tasks

Paula Vieira da Silva**

ORCID iD 0000-0003-3135-1930

Leonor Santos ***

ORCID iD 0000-0003-1283-032X

Resumo

Na Matemática escolar, as tarefas são determinantes na aprendizagem. As tarefas das provas nacionais de avaliação externa, quando propostas aos alunos, contribuem também para influenciar o processo de ensino-aprendizagem. Este estudo, que apresenta dados parciais de uma investigação em curso, tem por objetivo analisar tarefas de geometria que envolvem representações bidimensionais de construções com policubos retiradas de provas de avaliação externa. Mais concretamente, analisa os processos mentais a que fazem apelo, os usados pelos alunos na sua resolução, bem como as dificuldades sentidas neste processo. Tomaremos como base de trabalho os resultados de algumas pesquisas que descrevem várias dificuldades observadas quando os alunos interpretam representações planas de construções com policubos. O estudo segue uma metodologia de natureza interpretativa, com recolha documental das próprias provas, das resoluções produzidas pelos alunos e dos depoimentos dos mesmos registrados em vídeo durante entrevistas. Com este trabalho, em termos gerais, revelamos falhas importantes no conhecimento envolvido na visualização de construções com policubos representados bidimensionalmente. Os resultados obtidos evidenciam a necessidade simultânea de capacidades de visualização, de estruturação espacial e de estratégias organizadas de contagem de cubos numa construção com policubos.

Palavras-chave: Tarefas de geometria. Pensamento geométrico. Capacidades de visualização. Provas de avaliação externa.

Abstract

In school mathematics, tasks are determinant in learning. The tasks of the national external assessment tests, when proposed to the students, also contribute to influence the teaching-learning process. This study, which presents partial data of an ongoing research, has the objective of analyzing geometry tasks involving bidimensional construction representations with polycubes taken from external evaluation tests. More specifically, they analyze the mental processes to which they appeal, those used by the students in their resolution, as well as the difficulties experienced in this process. We will take as a work base, the results of some researches that describe several difficulties observed when the students interpret flat construction representations with polycubes. The study

* Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e a Tecnologia, I.P., no âmbito de Bolsa de Doutoramento (SFRH/BD/115897/2016).

** Mestre em Educação pela Universidade do Minho (UMinho). Doutoranda do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa (ULisboa), Lisboa, Portugal. Endereço para correspondencia: Alameda da Universidade, Lisboa, Portugal, CEP: 1649-013. E-mail: paulasilva@campus.ul.pt.

*** Agregação em Educação, Didática da Matemática, docente no Instituto de Educação da Universidade de Lisboa (ULisboa), Lisboa, Portugal. Endereço para correspondência: Alameda da Universidade, Lisboa, Portugal, CEP: 1649-013. E-mail: mlsantos@ie.ulisboa.pt.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a05

follows an interpretative methodology, with a documental collection of the evidence of the resolutions produced by the students and of their testimonies recorded in video during interviews. With this work, in general terms, we reveal important flaws in the knowledge involved in the visualization of constructions with polycubes represented bidimensional. The results evidenced the simultaneous need for visualization capabilities, spatial structuring and organized strategies of counting cubes in a construction with polycubes.

Keywords: Geometry tasks. Geometric thinking. Visualization capabilities. External assessments.

1 Introdução

A Geometria, sendo uma das áreas do conhecimento matemático que os alunos devem estudar, é a que exige a atividade cognitiva mais completa, uma vez que solicita o gesto, a linguagem e o olhar (DUVAL, 2005). Todavia, como sublinha Gutiérrez (1998), o ensino da Geometria nos primeiros anos de escolaridade, até há alguns anos atrás, esteve reduzido, em alguns países, a alguns conhecimentos básicos sobre as figuras planas e espaciais, focando-se em fórmulas para o cálculo de áreas e volumes, e pouco mais[1]. Além disso, esses conteúdos tendiam a ser relegados para as últimas páginas dos livros didáticos, de modo que os professores muitas vezes apenas os ensinavam parcialmente. Mas, em 1989, o *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) publicou as diretrizes para o ensino da Matemática para os níveis não universitários dos EUA, as quais tiveram uma enorme repercussão internacional. Mais recentemente, esta organização retomou esse documento, ajustando-o em alguns aspectos menos atuais. No que diz respeito à Geometria, o NCTM (2007)[2] refere que, os alunos, ao longo da escolaridade, deverão desenvolver competências para: (i) "Analisar as caraterísticas e propriedades de formas geométricas bi e tridimensionais e desenvolver argumentos matemáticos acerca de relações geométricas"; (ii) "Especificar posições e descrever relações espaciais recorrendo à geometria de coordenadas e a outros sistemas de representação"; (iii) "Aplicar transformações geométricas e usar a simetria para analisar situações matemáticas"; (iv) "Usar a visualização, o raciocínio espacial e a modelação geométrica para resolver problemas" (idem, p. 45-47).

No processo de ensino-aprendizagem da Matemática, nomeadamente da Geometria, as tarefas são preponderantes no trabalho dos alunos. Parte-se do pressuposto que as tarefas das provas nacionais, quando propostas aos alunos nas aulas, contribuem também para influenciar

[1] No caso de Portugal, apesar de nos anos 60 do séc. XX terem sido "eliminadas ou drasticamente reduzidas matérias tradicionais como a Geometria de Euclides, a Geometria Analítica clássica, (…) e a Trigonometria" (PONTE, 2002, p. 5), a partir dos anos 80 do séc. XX, vai-se um pouco mais além. No 1.º ciclo, o Programa de Matemática de 1980 introduz o estudo dos ângulos e das figuras simétricas e o programa de 1990 introduz o estudo dos frisos e das rosáceas. Deste modo, em Portugal o processo de revalorização da geometria teve expressão com a implementação do programa de 1980 (PONTE, 2002).
[2] Tradução feita pela APM da versão original publicada pela NCTM em 2000.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a05

o processo de ensino-aprendizagem (BOESEN, LITHNER & PALM, 2010).

Este artigo apresenta dados parciais de um estudo mais alargado que se encontra em desenvolvimento. Os dados recolhidos tiveram por base tarefas de Geometria das provas de avaliação externa do 6.º ano de escolaridade. Neste artigo analisam-se as tarefas de Geometria que envolvem representações bidimensionais de construções com policubos[3]. Mais concretamente, estudam-se os processos mentais a que fazem apelo, as representações e processos mentais utilizados pelos alunos e as dificuldades reveladas. As tarefas que envolvem construções com policubos, ao evocarem os objetos e suas representações, ajudam a desenvolver a capacidade de visualização e expressões para o cálculo de volumes.

2 A Geometria e as construções tridimensionais com policubos

Desde o nosso nascimento todos estamos imersos num mundo tridimensional. Contudo, a maioria dos materiais visuais apresentados às crianças é bidimensional. Não podemos esquecer que na vida diária (em lojas, estações, aeroportos, jornais, ...) existem muitos símbolos que representam objetos ou ações que, por sua vez, se baseiam em representações mentais dos objetos tridimensionais integrados no espaço. As principais ferramentas utilizadas no ensino, como o livro didático, apresentam um mundo tridimensional através de imagens bidimensionais. Até mesmo imagens produzidas em computador e imagens em movimento apresentam representações bidimensionais de objetos físicos (BEN-CHAIM, LAPPAN & HOUANG, 1985; GUTIÉRREZ & JAIME, 1991; GUTIÉRREZ, 1991). Por estas razões, as transformações tridimensionais em bidimensionais, e vice-versa, são uma ferramenta muito necessária que deve estar presente na formação geométrica dos alunos, até o ensino secundário (GUTIÉRREZ, 1991; GUTIÉRREZ & JAIME, 1991). Nessa formação geométrica é necessário ter atenção à complexidade da geometria por ser "uma rede interligada de conceitos, formas de raciocínio e sistemas de representação, usada para conceptualizar e analisar ambientes espaciais físicos e imaginários" (BATTISTA, 2007, p. 843). No contexto português, foi dada atenção a essa complexidade, e o lugar da geometria no currículo de Matemática do Ensino Básico foi sendo revalorizado, veja-se para isso o PMEB[4] (ME, 2007), em comparação com o programa

[3] Policubos são sólidos formados por vários cubos iguais juntos, de forma que algumas das suas faces se sobrepõem.

[4] Este programa esteve em vigor entre 2007 a 2013 e foi substituído por outro que retrocede em relação ao precedente no que diz respeito à introdução de conteúdos inadequados ao nível de ensino e à introdução precoce do formalismo axiomático. Ponte (2013, p. 1) refere que "não é só na sua organização e no seu estilo que este programa agora homologado é inadequado. É também, e principalmente, no seu conteúdo".

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a05

anteriormente em vigor. Tanto os conteúdos a incluir, como as metodologias a utilizar, foram amplamente discutidos (cf., *e.g*., PONTE, 2013; PONTE & SERRAZINA, 2009).

O problema teórico central no reconhecimento de objetos diz respeito à forma como as representações internas, que incorporam a estrutura tridimensional de objetos visuais, podem surgir a partir do estímulo bidimensional (COOPER, 1990). Este é um dos muitos problemas estudados quando queremos estimular e exercitar o pensamento geométrico. Neste tipo de pensamento, a visualização espacial é um dos elementos-chave. Existem inúmeras publicações dedicadas ao estudo da visualização espacial, parte das quais é analisada a partir do ponto de vista da didática da Matemática. Arcavi (2003) sintetiza as ideias de vários dos autores anteriormente referidos e define visualização espacial dizendo que

> é a capacidade, o processo e o produto de criação, interpretação, uso e reflexão sobre figuras, imagens, diagramas, nas nossas mentes, no papel ou com ferramentas tecnológicas, com o objetivo de representar e comunicar informações, pensar e desenvolver ideias previamente desconhecidas e compreensões avançadas (ARCAVI, 2003, p. 217).

Com os seus estudos, alguns autores concluem que a capacidade funcional dos alunos na visualização espacial pode ser melhorada quando é proporcionado ensino apropriado (BEN-CHAIM, LAPPAN & HOUANG, 1985; BATTISTA & CLEMENTS, 1996; GÓMEZ & MARTINEZ, 2011; FINESILVER, 2015).

Na visualização usam-se capacidades para observar, interpretar e comunicar informação visual sobre objetos reais ou noções geométricas. A visualização implica ser capaz de gerar imagens mentais de formas e figuras, vendo-as a partir de diferentes perspectivas e predizendo possíveis resultados de transformações e movimentos. Estas imagens mentais são utilizadas nos processos de visualização, sendo dois deles: a *interpretação da informação figurativa* – processo que ocorre ao tentar ler, analisar, compreender e interpretar uma imagem para extrair informação sobre ela; e o *processamento visual da informação* – processo que ocorre ao converter informação não visual em imagens ou ao transformar uma imagem já formada em outra (BISHOP, 1989; GUTIÉRREZ, 2006). A visualização espacial exige a coordenação mental do plano e do espaço e, por isso, é importante o desenvolvimento da capacidade de representar, no plano, figuras espaciais e vice-versa (GOMÉZ & MARTÍNEZ, 2011).

Por outro lado, Del Grande (1990), na linha de vários autores, enuncia sete capacidades espaciais que têm absoluta relevância para o desenvolvimento da visualização espacial, para o estudo da Matemática, em geral, e da Geometria, em particular. Algumas destas capacidades desempenham, também, um papel fundamental na análise de figuras bidimensionais de construções tridimensionais com cubos. Tendo por base a tradução feita por Gutiérrez (1991) e

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a05

por Matos e Gordo (1993) temos: a) *Coordenação visual-motora* – capacidade de coordenar a visão com os movimentos do corpo; b) *Percepção figura-contexto* - capacidade de reconhecer uma figura isolando-a do seu contexto; c) *Conservação da percepção* – capacidade de reconhecer certas figuras geométricas em diversas posições, tamanhos, contextos e texturas e a sua distinção de outras figuras geométricas similares; d) *Percepção da posição no espaço* – capacidade que permite distinguir figuras iguais, mas colocadas com orientações diferentes; e) *Percepção de relações espaciais* – capacidade de ver e imaginar dois ou mais objetos em relação consigo próprio ou em relação conosco; f) *Discriminação visual* – capacidade para comparar vários objetos identificando as suas semelhanças ou diferenças visuais; g) *Memória visual* – capacidade de recordar com precisão as características visuais e de posição de objetos que já não estão visíveis e relacionar as suas características às de outros objetos quer estejam visíveis ou não.

Se realizarmos uma classificação conjunta de imagens, processos e capacidades visuais, perceberemos que, embora todos estejam relacionados à atividade dos alunos de Matemática, alguns têm uma relação mais próxima com o contexto de aprendizagem da Geometria Espacial.

Uma das primeiras áreas de Matemática em que as crianças são obrigadas a "ler" e visualizar informações sobre imagens de objetos físicos é no estudo da medida, mais particularmente, no estudo do volume (BEN-CHAIM, LAPPAN & HOUANG, 1985). Na Geometria Espacial, o processo de compreensão do conceito subjacente a uma representação plana de um objeto tridimensional é muito exigente para os alunos mais novos, pelo fato de que é necessário interpretar a figura plana para torná-la numa representação mental tridimensional e convertê-la no conceito geométrico em estudo. Portanto, sempre que estamos a lidar com objetos espaciais e é necessário representá-los por figuras planas, colocamos um problema que está relacionado com a capacidade de visualização espacial dos alunos e a sua capacidade de interpretar representações feitas por outras pessoas (GUTIÉRREZ, 1998). De acordo com J. Goméz e P. Martinez, as tarefas de decomposição e recomposição de figuras, tais como as que envolvem construções com policubos, ajudam a desenvolver e recordar determinadas expressões para o cálculo de volumes e a desenvolver a visualização geométrica. Referem, também, que "evocar os objetos e formas e suas representações, tanto por novas representações como mediante mensagens verbais, orais ou escritas, é o último passo de esta graduação na criação de capacidades" (GÓMEZ & MARTÍNEZ, 2011, p. 345).

Algumas das representações apresentadas nas tarefas (*e.g.*, em perspectiva) conservam a informação do aspecto visual dos sólidos, mas perdem o correspondente à parte oculta dos sólidos. Outras representações (*e.g.*, a ortogonal) mantêm a informação sobre a estrutura dos

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a05

sólidos (quantidade de elementos, posições relativas, etc.), mas perdem o referente ao seu aspecto visual. Além disso, parte da informação que se conserva deve-se a que, tanto para fazer a representação plana como para a interpretar, se partilharam determinados códigos ou convenções (como linhas pontilhadas em desenhos que representam arestas não vistas e paralelogramos que representam faces quadradas em desenhos de cubos), pelo que determinados dados objetivos interpretam-se sempre da mesma forma.

Isto é o que Parszyz (1988) chama "restituição do significado". O desconhecimento destes códigos, características de cada tipo de representação plana, faz com que se produza uma leitura errada das representações planas. Estudos prévios sobre a compreensão dos alunos em tarefas com construções com policubos descrevem várias estruturas conceptuais que os alunos produzem ao enumerar cubos e sugerem operações mentais subjacentes a estas construções.

Por exemplo, num estudo realizado por Hirstein (1981), o autor concluiu que muitos dos erros dos alunos, ao trabalharem com este tipo de tarefas, são atribuídos a uma confusão entre volume e área da superfície do sólido.

Num outro estudo, Ben-Chaim, Lappan e Houang (1985) trabalharam com tarefas do tipo "Quantos cubos são necessários para construir ...?". Estes autores referem que estas tarefas eram encontradas em livros didáticos para introduzir os alunos no conceito de volume e em estudos de avaliação educacional, como a Avaliação Nacional do Progresso Educacional nos Estados Unidos e o Projeto de Matemática e Ciência no Secundário na Grã-Bretanha. Ben-Chaim, Lappan e Houang (1985) referem que as dificuldades que alunos, do quinto ao oitavo ano, revelaram foram relacionadas à confusão entre a contagem das faces visíveis dos cubos e a contagem dos cubos visíveis nos diagramas. Verificaram, também, que os alunos, naquela época, sentiam muitas dificuldades na contagem dos cubos invisíveis nos diagramas. Estes autores consideram que o erro "contar faces" foi cometido por alunos que lidavam com a imagem como um objeto puramente bidimensional, enquanto a contagem dos pequenos cubos visíveis indica uma consciência da tridimensionalidade sugerida pela imagem. Neste estudo foram encontradas quatro categorias de estratégias utilizadas pelos alunos na tentativa de responder a esse tipo de tarefas: (1) contando o número real de faces mostradas; (2) contando o número real de faces mostradas e duplicando esse número; (3) contando o número real de cubos mostrados; e (4) contando o número real de cubos mostrados e duplicando esse número. Os autores concluíram que os dois tipos de erros que os alunos cometeram com maior incidência, ao trabalharem com duas dimensões em vez de três dimensões e não contando os cubos ocultos, "estão claramente relacionados com alguns aspectos da capacidade de visualização espacial" (BEN-CHAIM, LAPPAN & HOUANG, 1985, p. 406).

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a05

Um outro estudo, realizado por Battista e Clements (1996), ampliou a pesquisa anterior ao providenciar uma descrição mais elaborada das estratégias, soluções e erros que os alunos do terceiro e quinto ano apresentaram ao trabalhar com construções com policubos. São descritas várias operações cognitivas que parecem ser requeridas pelos alunos ao conceituarem e contarem os cubos nessas construções, "explorando em profundidade operações cognitivas gerais, como coordenação, integração e 'estruturação', como se manifestam em um contexto espacial" (BATTISTA & CLEMENTS, 1996, p. 258). Os autores consideram, também, que as operações espaciais estão relacionadas com as operações numéricas requeridas para contagem. As estratégias específicas utilizadas pelos alunos para encontrarem o número de cubos em construções de prismas retangulares foram sintetizadas em quatro amplas categorias que apresentamos de forma sucinta. As categorias que se seguem foram organizadas por ordem decrescente em relação ao número de alunos que utilizou cada estratégia: (A) *Conceituação do conjunto de cubinhos como formando uma construção retangular organizada em camadas* (1. Multiplicando Camadas; 2. Adicionar camadas/repetição; 3. Contando subunidades de camadas); (B) *Conceituação do conjunto de cubos como preenchimento de espaço, mas não são utilizadas camadas* (1. Iteração coluna/linha; 2. Contando subunidades de colunas ou linhas; 3. Contagem sistemática; 4. Contagem não sistemática); (C) *Conceituação do conjunto dos cubos em termos das suas faces* (1. Contando todos os cubos no exterior; 2. Contando subconjuntos ou cubos visíveis; 3. Contando alguns cubos exteriores; 4. Contando cubos na camada frontal; 5. Contagem dos cubos no exterior, mas não organizada por face*s*); (D) *Uso da fórmula* "*c x l x a*"; (E) *Outras* – Uso de outras estratégias para além das descritas de A a D.

Battista e Clements (1996) observaram uma sequência de "etapas cognitivas" dos alunos, à medida que eles trabalharam a "estruturação espacial" com construções tridimensionais. Os autores definem "estruturação espacial" como o ato mental de construir uma organização ou forma para um objeto ou conjunto de objetos. O processo mental inclui o estabelecimento de unidades, estabelecendo relações entre as mesmas e reconhecendo que um subconjunto dos objetos, se repetido corretamente, pode gerar todo o conjunto. Os resultados do estudo sugeriram uma sequência hipotética de concepções ou etapas cognitivas. Nesta sequência, a concepção inicial dos alunos de uma construção tridimensional de policubos é como um conjunto de "faces não coordenadas". Como não conseguem conciliar as diferentes vistas (não conseguem reorganizar a forma como as vistas do prisma se encaixam, ou seja, como devem ser colocadas em posições apropriadas uma em relação à outra), eles cometem muitos erros de contagem, contando, por exemplo, duplamente os cubos que apareceram em uma aresta comum de faces adjacentes de um prisma. À medida que os alunos se tornam capazes

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a05

de coordenar as vistas e, ao refletir sobre experiências com contagem ou construção de configurações de cubos, eles podem passar a ver a construção como o preenchimento do espaço, esforçando-se para reestruturá-lo como tal. Aqueles que completam uma reestruturação global da construção – concepção integrada que necessita do reconhecimento de como as vistas estão inter-relacionadas espacialmente, formando uma imagem mental integrada e coerente do todo – concebem unidades compostas, ou seja, eles veem a construção como sendo composta de múltiplas camadas em vez de apenas uma coleção de cubos unitários. Os autores referem que apenas os alunos que estão nesta categoria parecem "prontos" para começar a formular o próprio procedimento de contagem de forma mais abstrata em termos de uma fórmula.

Num estudo mais recente, realizado com alunos de idades entre os 11 e os 15 anos, Finesilver (2015) desenvolve uma experiência de ensino, também com construções de prismas retangulares com policubos. De acordo com a autora, os dados são analisados segundo três dimensões analíticas distintas, mas inter-relacionadas: a *estruturação* – como a estrutura física das construções é usada pelos alunos e as estruturas numéricas correspondentes tiradas deles; *enumeração* – como os alunos usaram os números que derivaram das construções físicas; e *erros* – o que deu errado na invenção, seleção e aplicação de estratégias de enumeração. A autora utiliza as categorias analíticas da estruturação espacial de Battista e Clements (1996), adapta-as e reordena-as da seguinte forma, numa hierarquia não estanque: (M) *O aluno conceitua o conjunto de cubos como uma estrutura multiplicativa em três dimensões*; (L) *O aluno conceitua o conjunto de cubos como uma pilha de camadas em duas dimensões*; (C) *O aluno conceitua o conjunto de cubos como uma matriz de colunas em duas dimensões:* 1 – Multiplicação de colunas; 2 – Adição de colunas; 3 – Contagem de subunidades de colunas; (F) *O aluno conceitua o conjunto de cubos em termos das suas faces*; (O) *Outras:* O aluno usa uma conceituação diferente das descritas anteriormente.

Relativamente às estratégias de contagem, Finesilver (2015) refere que todos os alunos começaram de alguma forma por utilizar estratégias baseadas em contagem e, em geral, estas foram, de longe, as mais populares. A autora, durante o seu estudo observou quatro tipos de erros decorrentes respectivamente: *da estruturação espacial; do cálculo ou recuperação numérica; de contagem verbal sequenciada*; *visuoespacial/cinestésico.* Os alunos não só cometeram erros na escolha dos cubos que deveriam contar, mas também no processo de contagem. Assim, a autora considera que é necessário distinguir uma estratégia errada de uma estratégia em que são cometidos erros, mas que é correta.

Nos estudos apresentados, os autores tiveram como objetivo comum compreender o desenvolvimento da estruturação espacial dos alunos no trabalho com construções de prismas

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a05

retangulares com policubos. Estes estudos foram apresentados em sequência cronológica, permitindo observar a evolução das dimensões analíticas abordadas. Partindo desta revisão, tentamos analisar o desenvolvimento da estruturação espacial dos alunos em construções com policubos, mas, agora, com objetos com estruturas e formas diferentes dos prismas retangulares.

3 Metodologia de investigação

A presente investigação, de natureza *interpretativa*, centra-se no significado que os indivíduos conferem aos fenômenos em estudo (BOGDAN & BIKLEN, 1994). Participaram 171 alunos que estavam a terminar o 6.º ano de escolaridade. A seleção destes alunos foi intencional e teve em atenção a proximidade e confiança entre a primeira autora deste trabalho (igualmente professora dos alunos durante, pelo menos, o 6.º ano), e os participantes, uma vez que assim se sentiriam mais encorajados a expor as suas ideias num ambiente escolar que lhes era familiar. Considerou-se ainda os seus níveis de desempenho porque isso poderia permitir aceder a uma maior diversidade de estratégias de resolução e, consequentemente, a diferentes processos cognitivos e erros. A seleção dos alunos entrevistados foi feita após a análise de todas as produções, permitindo assim considerar a diversidade presente nas estratégias de resolução, nos processos cognitivos utilizados, nos erros cometidos e nas dificuldades.

A resolução das tarefas efetuou-se após ter sido lecionada a unidade de Geometria do 2º ciclo do Ensino Básico, relativamente ao Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007), para os alunos que frequentaram o 6º ano até 2013, e o Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico (MEC, 2013), para os alunos que frequentaram o 6º ano, até 2015.

A recolha de dados foi feita em contexto escolar, baseando-se: (i) na recolha documental (tarefas das provas de aferição[5] de 2010 e das provas finais[6] do 2º ciclo de 2012 e 2013 e resoluções dessas tarefas pelos alunos participantes); e (ii) em entrevistas semiestruturadas a alunos, registradas em vídeo. O número de entrevistas realizadas encontra-se registado na tabela seguinte.

[5] As provas nacionais de aferição destinavam-se a fornecer informação relevante aos professores, às escolas e à administração educativa, não produzindo efeitos na progressão escolar dos alunos.
[6] As provas nacionais finais desempenham as funções de certificação, seleção, aferição e regulação, produzindo efeitos na progressão escolar dos alunos.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a05

Tabela 1 – Número de alunos entrevistados em relação às três tarefas em estudo

	Tarefas		
	PA 2010	PF 2012	PF 2013
Número total de alunos	34	21	27

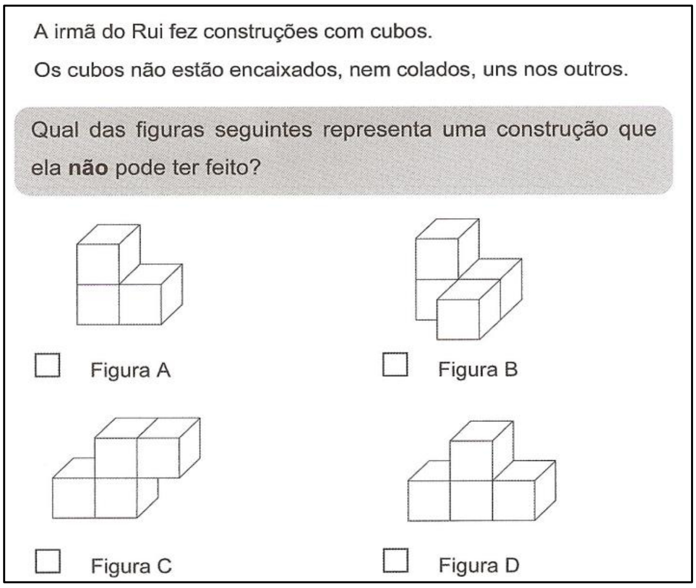
Fonte: elaborada pelas autoras.

Cada um dos alunos entrevistados teve em mãos a ficha com a resolução produzida por si e, após ler cada pergunta, explicou a forma como chegou à resposta. A análise dos dados envolveu, inicialmente, a organização das informações obtidas pelas produções escritas dos alunos e pelas entrevistas posteriormente efetuadas. Nas transcrições das entrevistas usamos "A" para indicar a fala do aluno, seguido de um número que corresponde à ordem em que foi feita a entrevista, e "E" para indicar a fala da entrevistadora.

4 Apresentação e análise dos dados

Nas Provas de Aferição e nas Provas Finais do 6º ano, de 2010 a 2015[7], só se encontram três tarefas que envolvem representações bidimensionais de construções tridimensionais com policubos: a tarefa 21, da Prova de Aferição de 2010; a tarefa 13, da Prova Final de 2012; e a tarefa 15, da Prova Final de 2013. Apesar de parecerem muito diferentes no que é pedido aos alunos, elas têm algumas similitudes porque evocam, em comum, algumas capacidades visuais necessárias para resolver as três tarefas.

A figura 1 apresenta o enunciado da primeira tarefa.


A irmã do Rui fez construções com cubos.
Os cubos não estão encaixados, nem colados, uns nos outros.

Qual das figuras seguintes representa uma construção que ela **não** pode ter feito?

Figura 1 – Tarefa 21 da Prova de Aferição de 2010
Fonte: GAVE (2010).

[7] Período em que se efetuou a recolha de dados.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a05

Para responder corretamente a esta tarefa é necessário interpretar as representações bidimensionais de construções tridimensionais apresentadas, evocar capacidades de visualização espacial, utilizar com eficácia o processamento visual e, sobretudo, saber interpretar a informação figurativa.

Dentre as capacidades espaciais enunciadas por Del Grande (1990), as relevantes para a resolução desta tarefa são a *conservação da percepção* e a *percepção de relações espaciais*. A conservação da percepção refere-se à capacidade de extrair informação de figuras e formas espaciais que não se podem ver por completo. Como a construção é composta por sólidos opacos, é necessário, no caso desta tarefa, inferir informação partindo dos referentes a que temos acesso. A percepção de relações espaciais refere-se à capacidade de identificar as características e propriedades básicas de objetos no espaço, assim como das relações entre eles, como, por exemplo, explorar e imaginar como se verá no espaço uma figura que está representada no plano. Nesta tarefa, todos os cubos das figuras têm pelo menos uma face visível, o que facilita a percepção das relações espaciais, mas, por outro lado, por serem corpos (sólidos) opacos, só são visíveis alguns dos elementos do sólido (faces, arestas e vértices). Na verdade, para resolver corretamente este tipo de tarefa, é necessário desenvolver uma capacidade de visualização espacial, complementada com o conhecimento de certos códigos de representação em perspectiva.

Os resultados obtidos pelos 171 alunos que resolveram a tarefa encontram-se representados na tabela seguinte. Da leitura da tabela 2, podemos verificar que uma grande percentagem de alunos conseguiu utilizar com eficácia o processamento visual e, sobretudo, o processo de interpretação da informação figurativa (82% escolheu a opção que corresponde à questão colocada).

Tabela 2 – Respostas dos alunos à tarefa 21 da Prova de Aferição de 2010

	Opções de resposta				
	A	*B*	*C*	*D*	N.º total de alunos
N.º de alunos	12	8	140	11	171
Percentagem	7%	5%	82%	6%	100%

Fonte: elaborada pelas autoras.

Dos 34 alunos que foram entrevistados, todos escolheram a opção correta. A maioria identificou, em primeiro lugar, as construções em que todos os cubos ou estavam apoiados no “plano” ou estavam assentes em outros cubos e, por fim, a construção que tinha um cubo, o qual apesar de parecer fixo a outro, numa das suas faces laterais não o poderia estar, porque o enunciado refere que “os cubos não estão encaixados, nem colados, uns aos outros”. Na

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a05

entrevista o aluno A2 disse o seguinte:

> *A2: Ela podia ter feito figura A, porque eles* [os cubos] *estão todos sobrepostos. Não há nenhum que não esteja sem uma base. A figura B também. Eu escolhia a figura C, porque este cubo* [o aluno assinala o cubo 1] *não está colado a este* [o aluno assinala o cubo 2]*, porque era o único que devia estar "pegado". Ele com a força da gravidade cai. Por isso era impossível construir aquilo.*
> *E: E o D?*
> *A2: É igual aos outros. Ao A e ao B.*
> (Diálogo entre a 1ª autora e aluno A2, 2012).

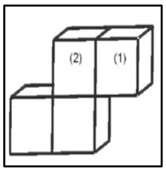


Figura 2 – Esquema representativo da indicação do aluno

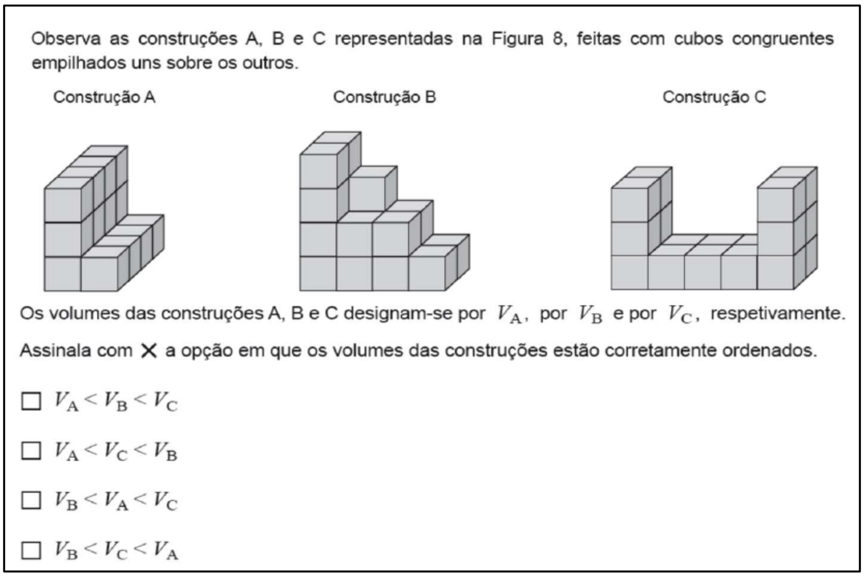
Um outro aspecto que importa referir diz respeito ao fato de alguns alunos terem identificado a existência de um plano onde as construções estão apoiadas, apesar de este não estar explicitamente representado. Na fala seguinte podemos perceber como um dos alunos se refere ao plano:

> *A7: Eu pus que é C, porque eles não estão colados e este aqui* [cubo 1 da figura 2], *como não está colado pode cair.*
> *E: E nas outras figuras, não podem? Em mais nenhuma? Por quê?*
> *A7: Não, porque estão uns em cima dos outros e os outros estão em cima da "mesa".* [Apesar da figura não mostrar nenhuma mesa, como a folha de papel do enunciado está assente na mesa, o aluno refere a mesa como sendo o plano que apoia a construção]
> (Diálogo entre a 1ª autora e aluno A7, 2012).

Durante a realização da tarefa pudemos verificar que uma das dificuldades sentidas por alguns dos alunos que responderam incorretamente foi a interpretação do enunciado. Em alguns casos, apesar da questão estar na negativa, eles compreenderam "pode ter feito" no lugar de "não pode ter feito", daí ter surgido a seleção das figuras A, B e D como respostas, em percentagens aproximadas. Mesmo alguns dos alunos entrevistados e que responderam corretamente, ao lerem "… que ela não pode ter feito?" tiveram que ler mais do que uma vez para interiorizarem o que era pedido. Como já foi referido, nenhum dos alunos entrevistados escolheu outra opção além da C e por isso não é possível identificar com maior precisão, além da hipótese já anteriormente referida, a razão pela qual os alunos que não foram entrevistados escolheram as outras opções.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a05

A Figura 3 apresenta o enunciado da segunda tarefa.


Observa as construções A, B e C representadas na Figura 8, feitas com cubos congruentes empilhados uns sobre os outros.

Construção A

Construção B

Construção C

Os volumes das construções A, B e C designam-se por V_A, por V_B e por V_C, respetivamente.

Assinala com ✕ a opção em que os volumes das construções estão corretamente ordenados.

☐ $V_A < V_B < V_C$

☐ $V_A < V_C < V_B$

☐ $V_B < V_A < V_C$

☐ $V_B < V_C < V_A$

Figura 3 – Tarefa 13 da Prova Final de 2012.
Fonte: GAVE (2012).

Nesta tarefa, a capacidade de visualização espacial também é preponderante. Os alunos têm que extrair informação das representações, interpretando as representações planas de corpos espaciais (construções com policubos), as quais não podem ver por completo. Por isso, têm que utilizar com eficácia o processamento visual e os processos de interpretação da informação figurativa. Para tanto, devem utilizar a *capacidade de conservação da percepção*, ou seja, a capacidade de reconhecer certas figuras geométricas em diversas posições (DEL GRANDE, 1990; GUTIÉRREZ, 2006; GOMÉZ & MARTÍNEZ, 2011).

As figuras encontram-se representadas em perspectiva, a qual permite ter uma visão frontal, uma visão lateral e uma visão superior do objeto real. Esta forma de representação de objetos tridimensionais no plano torna visível, pelo menos, uma das faces de um grande número de cubos e, por isso, facilita a sua contagem. A estratégia inicial usada pelos alunos foi a contagem dos cubos de cada figura e, para isso, eles tiveram que identificar os cubos visíveis e os invisíveis, entender a diferença entre a área da superfície lateral de um cubo e o seu volume. A tabela seguinte ilustra algumas das possibilidades de contagem segundo a possível estruturação espacial dos alunos.

Tabela 3 – Possíveis contagens efetuadas pelos alunos

Construções	*Nº total de faces visíveis*	*Nº de cubos visíveis*	*Nº total de cubos*
A	24	13	16
B	26	13	19
C	29	17	18

Fonte: elaborada pelas autoras.

Entre outras possibilidades, os alunos podem contar atendendo ao número total de faces

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a05

visíveis, ao número de cubos visíveis ou ao número de cubos visíveis e invisíveis.

Dos 126 alunos que responderam a esta tarefa, 64% (tabela 4) responderam acertadamente, ou seja, consideraram que o volume da construção A é menor que o volume da C e este menor que do B.

Tabela 4 – Respostas dos alunos à tarefa 13 da PF de 2013

	1ª hipótese	2ª hipótese	3ª hipótese	4ª hipótese	Total
Total	6	81	10	29	126
Percentagem	5%	64%	8%	23%	100%

Fonte: elaborada pelas autoras.

Estes alunos, ao responderem acertadamente, levam-nos a concluir que conseguiram conjugar as capacidades visuais associadas à capacidade de enumeração, e que a *estruturação espacial* destes alunos apoiou uma contagem viável. Em algumas exceções, verificamos que apesar dos alunos terem errado na contagem, contando um cubo a mais ou a menos, esse facto por vezes não interfere na escolha, como é o caso do seguinte aluno:

A28: Eu escolhi esta [assinalando a hipótese $V_A<V_C<V_B$].
E: O volume de A é 15? [o aluno tinha escrito na sua ficha, ao lado da figura, o número 15].
A28: [O aluno volta a contar os cubos, um a um, conforme ilustra o esquema da Figura 4] *Não, é 16.*
(Diálogo entre a 1ª autora e aluno A28, 2013).

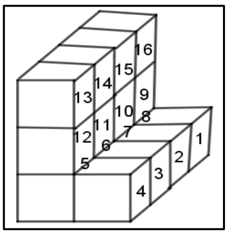


Figura 4 – Esquema exemplificativo da estratégia de contagem do aluno A28
Fonte: Esquema elaborado pelas autoras.

Na tabela 4, observa-se que 23% dos alunos escolheram a quarta hipótese. Verificamos nas entrevistas que este erro pode explicar-se porque, apesar de saberem identificar o número de cubos que tem cada construção, não identificaram o sinal “<” como “menor que” e, por isso, colocaram os volumes por ordem decrescente:

A4: Em primeiro lugar contei os quadradinhos [referindo-se aos cubos], *que me deu 16* [indicando a figura A], *19* [indicando a figura B] *e 18* [indicando a figura C]. *Então, primeiro é a B, depois a C e depois a A. Então, B, C e A* [indicando a quarta hipótese].
E: Que sinal é este? [indicando o sinal de “<”].
A4: É o de maior.
(Diálogo entre a 1ª autora e aluno A4, 2012).

Como este aluno, outros demonstraram dificuldade em ler o significado dos símbolos matemáticos. Dos 21 alunos entrevistados, 7 cometeram esse erro, tendo 6 escolhido a quarta hipótese e 1 a terceira, apesar de terem contado corretamente o número de cubos em cada construção.

A partir da análise das entrevistas foi construída uma categorização tendo em consideração as propostas de Battista e Clements (1996) e de Finesilver (2015), apesar das duas

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a05

categorizações se aplicarem a construções de paralelepípedos com policubos. Nesta tarefa, as construções também preenchem um determinado espaço e, por isso, apelam à estruturação espacial já construída pelos alunos. Contudo, perante uma nova situação, eles tiveram que reconstruir a sua estruturação espacial e desenvolver estratégias que melhor se adequassem às suas capacidades e preferências. Embora se possa supor que a estratégia escolhida para a contagem dos cubos decorre diretamente da estrutura espacial de cada aluno, o relacionamento é bidirecional, a contagem também pode orientar a estruturação (FINESILVER, 2015).

As estratégias que os alunos entrevistados utilizaram na contagem dos cubos enquadram-se nas seguintes categorias: (A) *Conceituação do conjunto de cubos como formando uma construção organizada em planos paralelos (horizontais ou verticais):* 1 - O aluno conta inicialmente o número de cubos em uma fila ou coluna assente em cada plano e, se o número for igual em cada fila ou coluna, multiplica-o pelo número de filas ou colunas. Depois, usa a multiplicação ou a adição para calcular o número total de cubos; 2 – O aluno conta o número de cubos em cada fila assente em cada plano e usa a adição para calcular o número de cubos em cada plano e para calcular o número total de cubos; 3 – O aluno conta o número de cubos, um a um, assentes em cada plano e recursivamente até obter o número total de cubos; 4 – O aluno calcula o número total de cubos utilizando uma composição das estratégias A1, A2 e A3, dependendo do *input* dado pela representação bidimensional; (B) *Conceituação do conjunto de cubos como preenchimento de espaço, mas não formando uma construção organizada em planos paralelos (horizontais ou verticais):* 1 – O aluno conta o número de cubos em cada fila ou coluna de planos diferentes (sempre horizontais ou sempre verticais) e usa a multiplicação ou a adição para obter o total; 2 – O aluno conta o número de cubos um a um, em cada fila ou em cada coluna de planos diferentes (sempre horizontais ou sempre verticais) até chegar ao total; (C) *Conceituação do conjunto de cubos em termos das suas vistas:* 1 – O aluno conta o número de cubos em uma ou mais vistas. Eles podem estar a contar cubos (volume parcial) ou a contar quadrados (área de superfície); (D) *Outras:* O aluno usa uma conceituação diferente das descritas anteriormente.

Alguns alunos aproveitaram os padrões de números salientados pelas estruturas, percebendo que havia quatro cubos seguidos em cada linha na construção A, ou dois na construção B e na C, e utilizaram esses padrões na sua contagem, como foi o caso do aluno A11. Este aluno utilizou a estratégia A_2 para contar os cubos nas construções A e B, mas não na C. Na C, começou por contar os dois cubos à esquerda do plano superior, adicionando um grupo de dois do plano intermédio, cinco grupos do plano inferior, um grupo à direita do plano intermédio e um grupo à direita do plano superior, utilizando assim a estratégia B_1. Este aluno

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a05

perante as diferentes construções acedeu a mais do que uma estruturação potencial, pois escolheu a que melhor se adequou às suas capacidades e preferências.

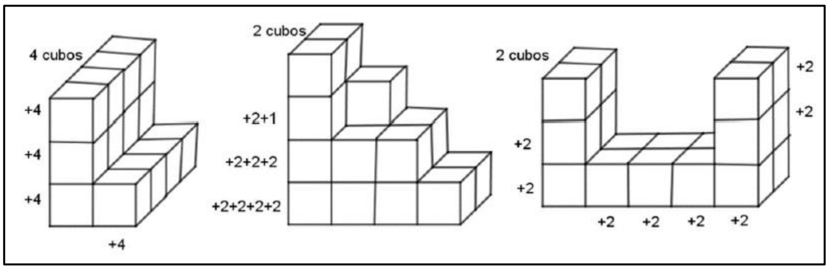


Figura 5 – Esquema exemplificativo da estratégia de contagem do aluno A11
Fonte: Esquema elaborado pelas autoras.

O aluno A6 é um dos que utilizou a estratégia A_3 para fazer a contagem dos cubos nas construções A e B e para contar os cubos na construção C utilizou a estratégia B_2.

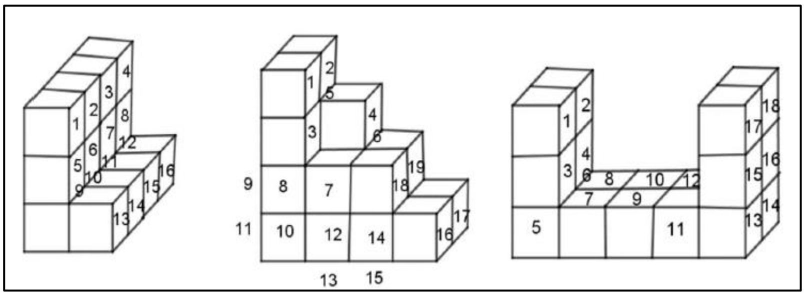


Figura 6 – Esquema exemplificativo da estratégia de contagem do aluno A6
Fonte: Esquema elaborado pelas autoras.

Nas duas estratégias utilizadas (A_3 e B_2), o aluno fez uma contagem de cubos um a um, mas em linhas paralelas ao plano da base.

O aluno A2 é exemplo dos alunos que utilizaram a estratégia A_1 para contar os cubos nas três construções.

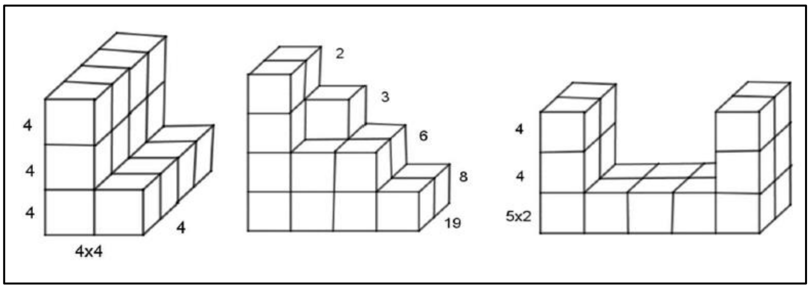


Figura 7 – Esquema exemplificativo da estratégia de contagem do aluno A2
Fonte: Esquema elaborado pelas autoras.

Nos exemplos de contagem anteriores, os alunos, utilizando estratégias diferentes, seguiram uma contagem organizada por planos horizontais ou por filas desses planos, mesmo quando contaram os cubos um a um e estas foram as estratégias que levaram a mais acertos.

Embora a estrutura espacial das construções tenha parecido óbvia para a maioria dos alunos, outros tiveram dificuldades significativas para conceituar a construção como uma

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a05

estrutura coordenada global e de preenchimento de espaço, e contaram as faces dos cubos, contando duplamente os cubos das arestas e triplamente os cubos dos vértices, sem contar os cubos que não são visíveis. Por exemplo, o aluno A20 escreveu vinte e quatro ao lado da figura A, que é exatamente o número total de faces visíveis dessa construção.

A Figura 8 apresenta o enunciado da tarefa 15.

Observa a Figura 6, que representa uma construção feita com 3 cubinhos congruentes.

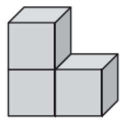


Figura 6

Quantos cubinhos congruentes com aqueles é necessário acrescentar à construção para formar um cubo com o menor volume possível?

Resposta: ____

Figura 8 – Tarefa 15 da Prova Final de 2013
Fonte: GAVE (2013).

Nesta tarefa é necessário que o aluno identifique o cubo com menor volume, ou seja, com o menor número possível de cubinhos, compreendendo que o comprimento, a largura e a altura têm a mesma medida, isto é, nesta construção têm o mesmo número de cubos pequenos no comprimento, na largura e na altura. O menor número de cubinhos do cubo que era possível construir, a partir da imagem dada, era oito.

Dos 125 alunos que a realizaram a tarefa, 46% responderam acertadamente.

Foram entrevistados 20 alunos que explicaram com detalhe as suas estratégias e assim pudemos detectar os erros que os alunos cometeram.

Tabela 5 – Respostas dos alunos à tarefa 15 da PF de 2013

Resposta	NR	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*12*	*24*	*32*	*Total*
Total	4	1	39	2	5	7	58	2	1	4	1	1	125
Percentagem	3%	1%	31%	2%	4%	6%	46%	2%	1%	3%	1%	1%	100%

Fonte: Elaborada pelas autoras.

Para responder acertadamente, os alunos deveriam recompor a imagem dada que é composta por três cubinhos, como foi o caso do aluno A16:

A16: São necessários cinco cubinhos.
E: Como?
A16: Para formar um cubo é preciso ter dois de comprimento, dois de largura e dois de altura.
E: Onde vão estar esses cubinhos?
A16: Na camada da frente falta um cubinho e na de trás faltam quatro.
(Diálogo entre a 1ª autora e aluno A16, 2013).

Este, e a maioria dos entrevistados, utilizou uma estruturação espacial por camadas

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a05

verticais para justificar a sua resposta, partindo do pressuposto de que o comprimento, a largura e a altura tinham o mesmo número de cubos. Estes alunos completaram a camada frontal, atendendo ao comprimento e à altura e, depois, imaginaram uma outra camada, à frente ou atrás para formar o cubo, atendendo à largura. Outros alunos, pensaram primeiro em termos de profundidade, atendendo ao comprimento e à largura do cubo e, depois, acrescentaram cubos para ter o cubo completo na altura, como é o exemplo do aluno A24.

> *A24: Eu escrevi que eram 5 cubinhos.*
> *E: Por quê?*
> *A24: Para ser um cubo tinha que ter outra parte igual a esta* [o aluno assinala a figura do enunciado]*, que eram 3 cubinhos e depois mais dois por cima* [faltava uma fila de dois do lado direito no plano superior].
> (Diálogo entre a 1ª autora e aluno A24, 2013).

Um outro aluno utilizou também a *estruturação espacial por camadas verticais* para conceituar o número total de cubos, mas seguiu uma outra estratégia para calcular o número de cubos em falta:

> *A22: Faltam cinco cubinhos.*
> *E: Vejo que escreveu 8 – 3 = 5. De onde vem o oito?*
> *A22: Oito para formar um cubo. Portanto, tinha que ter quatro na parte da frente e quatro na parte de trás, que dá oito. Portanto, oito menos os três que já cá estão, dá cinco.*
> (Diálogo entre a 1ª autora e aluno A22, 2013).

Este e outros alunos partem do menor número de cubinhos que a construção podia ter e retiram o número de cubinhos que já estão representados na figura.

Salienta-se que uma percentagem muito significativa dos alunos (31%) respondeu que para formar um cubo era necessário acrescentar um cubinho. Os alunos que responderam que faltava um só cubinho parece que não entenderam bem o diagrama, lidando com a imagem como um objeto puramente bidimensional, como foi o caso do aluno A20:

> *A20: Só é necessário um cubinho. Se pusesse aqui um cubinho já formava um cubo.*
> *E: Tens a certeza?*
> *A20: Sim.*
> *E: Um cubo não tem o mesmo comprimento, largura e altura?*
> *A20: Sim.*
> *E: Então? Para ter a mesma largura quantos cubinhos faltavam?*
> *A20: Faltavam cinco.*
> (Diálogo entre a 1ª autora e aluno A20, 2013).

Ao ser alertado para a necessidade das três dimensões de um cubo serem todas iguais, o aluno tomou consciência de que faltava uma outra camada vertical na parte de trás da figura. Este aluno, bem como outros 38 alunos, na resolução desta tarefa, parece não ter acedido de imediato à noção exata das propriedades do cubo, não considerando que num cubo o comprimento, a largura e a altura medem o mesmo.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a05

Dos alunos que responderam erradamente alguns fizeram-no porque interpretaram incorretamente o enunciado. A leitura parcial ou apressada do enunciado levou alguns alunos a dizerem que se acrescentasse mais um cubinho o volume da construção ia aumentar, sem atender ao que era pedido: o volume de um cubo.

5 Considerações finais

As evidências do presente estudo sugerem que alguns alunos entre os 11 e os 12 anos ainda têm dificuldade em relacionar representações em perspectiva com os sólidos que representam, bem como na visualização de partes ocultas de objetos apresentados de forma gráfica, porque a estruturação espacial que possuem da construção é incorreta. A raiz dessa estruturação espacial errada parece ser a incapacidade de coordenar e integrar as vistas de uma construção para formar um modelo mental coerente e único. De uma forma geral, a resolução das três tarefas evoca a necessidade simultânea de algumas capacidades de visualização, principalmente a capacidade de conservação da percepção e a percepção de relações espaciais. Para além disso, requer a construção e manipulação de representações mentais de objetos tridimensionais e a percepção de um objeto a partir de diferentes perspectivas. Podemos, no entanto, verificar que os alunos possuíam diferentes níveis de destreza no uso dos processos e capacidades visuais.

A resolução da segunda tarefa, para além das capacidades anteriormente referidas, necessita que os alunos dominem estratégias organizadas de contagem de cubinhos. É ainda necessário que os alunos tenham conhecimento do significado de símbolos matemáticos. Uma das dificuldades indicadas na revisão da literatura refere-se à confusão que os alunos fazem entre faces (área) e os cubos em si mesmos (volume). Neste estudo, e concretamente na segunda tarefa, essa dificuldade foi residual, apesar de alguns alunos utilizarem o termo quadradinhos quando se referiram aos cubos. Verificou-se, na maioria dos alunos, que a contagem dos cubos invisíveis não foi um obstáculo à resolução da tarefa. No entanto, para além de outros fatores, parece-me que a representação apresentada em perspectiva e a constituição das três construções com policubos também aparentam ter facilitado a contagem dos cubos. Esta tarefa mostrou-se extremamente rica em informações sobre a natureza da variedade de estratégias enumerativas em uso. Sendo esta uma tarefa que poderia ser resolvida contando, essa contagem, em muitos casos, não foi trivial e rotineira, porque alguns alunos recorreram a estratégias mais elaboradas dessa habilidade numérica mais básica e aplicaram-na com sucesso. A enumeração bem-sucedida deve ter em conta a conceituação da estrutura organizacional da construção como um

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a05

objeto de preenchimento de espaço (FINESILVER, 2015).

Na terceira tarefa, uma das dificuldades sentidas foi a da necessidade da recomposição da imagem dada, sendo indispensável recordar que, num cubo, o comprimento, a largura e a altura têm a mesma medida.

O estudo das estratégias utilizadas pelos alunos na tentativa de responder a este tipo de tarefas, bem como os erros cometidos, deve ser levado em conta para a construção de tarefas que visam avaliar o desempenho dos alunos e diagnosticar os erros em situações de sala de aula ou em avaliação externa. Os dois tipos de erros frequentemente cometidos, nomeadamente abordando as duas dimensões em vez das três dimensões, ou faltando a parte oculta da figura, estão claramente relacionados a alguns aspectos da capacidade de visualização espacial.

Referências

ARCAVI, A. The role of visual representations in the learning of mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, Netherlands, v. 52, p. 215-241, 2003.

BATTISTA, M. The Development of Geometric and Spatial Thinking. In: LESTER, F. (Ed.). **The Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning**. Reston VA: NCTM, 2007. p. 843-907.

BATTISTA, M.; CLEMENTS, D. H. Students' understanding of three-dimensional rectangular arrays of cubes. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, VA, v. 27, n. 3, p. 258-292, 1996.

BEN-CHAIM, D.; LAPPAN, G.; HOUANG, R. Visualizing rectangular solides made of small cubes: Analyzing and effecting studens' performance. **Educational Studies in Mathematics**, Netherlands, v. 16, p. 389-409, 1985.

BISHOP, A. Review of research on visualization in mathematics education. **Focus on Learning Problem Solving in Mathematics**, inserir local de publicação do periódico, v. 11, n. 1, p. 7- 6, 1989.

BOESEN, J.; LITHNER, J.; PALM, T. The relation between types of assessment tasks and the mathematical reasoning students use. **Educational Studies in Mathematics**, Netherlands, v. 105, p. 75-89, 2010.

BOGDAN, ; BIKLEN. **Investigação Qualitativa em Educação**. Porto: Porto Editora, 1994.

COOPER, L. Mental representation of three-dimensional objects in visual problem solving and recignition. **Journal of Experimental Psychology**: Learning, Memory and Cognition, Washington, DC, v. 16, n. 6, p. 1097-1106, 1990.

DEL GRANDE, J. Spatial sense. **Arithmetic Teacher**, Reston, VA, v. 37, n. 6, p. 14-20, 1990.

DUVAL, R. Les Conditions Cognitives de L'apprentissage de la Géométrie: Développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. **Annales de Didatctique et sciences cognitive**. Strasbourg: Irem, v. 10, 2005. p. 5-53.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a05

FINESILVER, C. Spatial structuring, enumeration and errors of S.E.N. students working with 3D arrays. In: CONGRESS OF THE EUROPEAN SOCIETY FOR RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION, 9., 2015, Praga. **Proceedings…** Praga: Charles University in Prague, Faculty of Education and ERME, 2015. p. 252-258.

GAVE. **Provas de Aferição 2.º Ciclo -** Matemática: Relatório. Lisboa: Ministério da Educação, 2010.

GAVE. **Prova Final de Matemática -** 2º Ciclo do Ensino Básico. Lisboa: Ministério da Educação, 2012.

GAVE. **Prova Final de Matemática -** 2º Ciclo do Ensino Básico. Lisboa: Ministério da Educação, 2013.

GÓMEZ, J. L.; MARTINÉZ, P. F. Sentido espacial. In: ALEX, I. S.; ROMERO, L. R. (Coord.). **Matemáticas para maestros de Educación Primaria**. Madrid: Pirámide, 2011. p. 329-349.

GUTIÉRREZ, A. Procesos e habilidades en visualizacion espacial. In: CONGRESO INTERNACIONAL SOBRE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 3., 1991, Valemcia. M**emorias...** Valencia: Departamento de Didáctica de la Matematica de la Universidad de Valencia , 1991. p. 44-59.

GUTIÉRREZ, A. Las representaciones planas de cuerpos 3-dimensionales en la ensenãnza de la geometria espacial. **Revista EMA**, Universidad de los Andes. Empresa Docente (Santafé de Bogotá) v. 3, n. 3, p. 193-220, 1998.

GUTIÉRREZ, A. La investigación sobre enseñanza y aprendizaje de la geometria. In: FLORES, P.; RUIZ, F.; FUENTE, M. **Geometría para el siglo XXI**. Andaluzia: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas e Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales. 2006. p. 14-58.

GUTIÉRREZ, A.; JAIME, A. **Módulo III del proyeto de investigación "Memoria final del poyecto de investigación**: La enseñanza de la geometría de sólidos en la E.G.B". Valencia, 1991.

HIRSTEIN, J. J. The second national assessment in mathematics: area and volume. **Mathematics Teacher**, Reston, VA, v. 74, p. 704-708, 1991.

MATOS, J. M.; GORDO, M. C. Visualização espacial: algumas atividades. **Educação e Matemática**, Lisboa, p. 13-17, 1993.

ME. **Programa de Matemática do Ensino Básico**. Lisboa: Ministério da Educação. 2007.

MEC. **Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico**. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência. 2013.

NCTM. **Princípios e Normas para a Matemática Escolar**. Lisboa: APM. 2007.

PARZYSZ, B. "Knowing" vs "seeing". Problems of the plane representation of space geometry figures. **Educational Studies in Mathematics**, Netherlands, v. 19, p. 79-92, 1988.

PONTE, J. P. O ensino da matemática em Portugal: uma prioridade educativa? **Seminário "O Ensino da Matemática**: Situações e Perspectivas". Lisboa: CNE, 2002.

PONTE, J. P. **A substituição do Programa de Matemática do Ensino Básico** – Um exemplo de como não se deve conduzir a política educativa. 2013. Disponivel em: <http://app.parlamento.pt/webutils /docs/doc.pdf?path.>. Acesso em: 17 de setembro de 2017.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a05

PONTE, J. P.; SERRAZINA, L. O Novo Programa de Matemática: Uma oportunidade de mudança. **Educação e Matemática**, Lisboa, n. 105, p. 2-6, 2009.

Submetido em 03 de Janeiro de 2018.
Aprovado em 17 de Maio de 2018.