ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a05

O *Modelo de Barras* de Singapura na Resolução de Problemas Aritméticos e Algébricos

The Singapore *Bar Model* for solving arithmetical and algebraic problems

Luiz Augusto **Richit**[*]

ORCID iD 0000-0003-3054-4933

Adriana **Richit**[**]

ORCID iD 0000-0003-0778-8198

Resumo

As representações figurais assumem importante papel na aprendizagem e compreensão conceitual da Matemática, a exemplo do caso de figuras em demonstrações da geometria. Uma abordagem que tem se popularizado pelo seu potencial para a resolução de problemas utilizando representações figurais é o *Modelo de Barras* de Singapura (‘*Model’ Method*). Mobilizados por esses aspectos, realizamos uma revisão de literatura com o objetivo de apresentar o *Modelo de Barras* de Singapura e suas contribuições para a aprendizagem da Matemática. O material empírico do estudo foi constituído mediante uma busca realizada na plataforma *Google Scholar*. Os resultados dos trabalhos analisados apontam contribuições para a aprendizagem nos seguintes aspectos: protagonismo assumido pelos alunos na construção do conhecimento, aprofundamento de conceitos e relações matemáticas, aprimoramento das habilidades de resolução de problemas e uso de representações mais abstratas, assim como a antecipação da resolução de problemas avançados. Nesta perspectiva, o *Modelo de Barras* tem potencial para promover mudanças no ensino da Matemática e favorecer a aprendizagem dos alunos.

Palavras-chave: Modelo de Barras de Singapura. Método ‘Modelar’. Diagramas de Barras. Resolução de Problemas. Aprendizagem da Matemática.

Abstract

Figurative representations play a significant role in learning and conceptual understanding of mathematics, for example, the figures in demonstrations in Geometry. An approach that has become popular for its potential to solve problems using figural representations is the Singapore *Bar Model* (‘*Model’ Method*). Mobilized by these aspects, we carried out a literature review aiming to present the Singapore Bar Model and its contributions to mathematics learning. The research empirical material was gathered from a search carried out in the *Google Scholar* platform. The results of the analyzed works point to contributions to the learning of mathematics in the following aspects: protagonism assumed by students in the construction of knowledge, deepening of mathematical concepts and relationships, enhancing problem-solving skills, and use of more abstract representations, as well as anticipation of advanced troubleshooting. In this perspective, the *Bar Model* allows promoting changes in mathematics teaching and favors student learning.

Keywords: Singapore Bar Model. ‘Model’ Method, Bar Diagrams. Problem-solving. Mathematics Learning.

[*] Bacharel em Engenharia Ambiental e Sanitária pela Universidade Federal da Fronteira Sul (UFFS). Graduando em Licenciatura em Matemática pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), Porto Alegre, Rio Grande do Sul, Brasil. E-mail: luizaugustorichit@gmail.com.

[**] Doutora em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista (UNESP). Docente da Universidade Federal da Fronteira Sul (UFFS), Erechim, Rio Grande do Sul, Brasil. E-mail: adriana.richit@uffs.edu.br.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a05

1 Introdução

A aprendizagem da Matemática e de seus sistemas de representação é objeto de estudo consolidado em Educação Matemática (D'AMORE *et al*., 2015; DUVAL, 2004, 2006, 2012, 2017; IORI, 2017, 2018; PINO-FAN *et al*., 2015; RICHIT; PASA; MORETTI, 2015). Estudos mostram que representações figurais podem desempenhar diferentes papéis nos processos de ensino e aprendizagem, como, por exemplo, a compreensão e o desenvolvimento de competências algébricas e operatórias na resolução de problemas (ARCAVI, 2003; INTAROS; INPRASITHA; SRISAWADI, 2014). Uma abordagem que recentemente tem se destacado é o *Modelo de Barras de Singapura* (KAUR, 2019; URBANO; FERNÁNDEZ; FERNÁNDEZ, 2016). Trata-se de uma abordagem caracterizada pela utilização de figuras pictóricas, especialmente retângulos, cujos comprimentos representam as relações comparativas entre as quantidades informadas e descritas em enunciados de problemas (HO; LOWRIE, 2014; KAUR, 2019; LEE *et al*., 2007). Embora seja empregado em tarefas que objetivam o desenvolvimento de propriedades operatórias em Aritmética (por exemplo, efetuar o produto de frações - ver Lorenzato (2010)), em Álgebra (por exemplo, efetuar a diferença $7a – 2a$ (KHO; YEO; LIM, 2009), ou problemas de cálculo de áreas em Geometria (por exemplo, a demonstração do Teorema de Pitágoras[1]), o *Modelo de Barras de Singapura* tem sido investigado principalmente como ferramenta de Resolução de Problemas.

Resultados de pesquisas têm evidenciado contribuições distintas, dentre as quais se destacam estudos dedicados a avaliar o potencial do *Modelo de Barras* para ensinar alunos com deficiências ou dificuldades de aprendizagem em Matemática (DENNIS; KNIGHT; JERMAN, 2016; MORIN *et al*., 2017; SHARP; DENNIS, 2017; SHIN; BRYANT, 2017; THOMPSON, 2019[2]) e para promover o ensino no contexto de classes de linguagem dual (RAMASAMY; PUTEH, 2018). Além disso, estudos evidenciam o *Modelo de Barras* como estratégia de mediação para introdução à Álgebra (LOOI; LIM, 2009), desenvolvimento de competências e habilidades operatórias na resolução de problemas matemáticos com maior exigência (OSMAN *et al*., 2018), bem como ferramenta para resolução de problemas aritméticos desafiadores a nível fundamental e em geral somente abordados para alunos de Ensino Médio (CHEONG, 2002).

[1] Disponível em: http://www.barmodelhost.com/books/. Acesso em: 24 jan. 2021.
[2] Para efeito de esclarecimento, a referência Thompson (2019) indicada apresenta um trabalho desenvolvido com pessoas com transtorno de espectro autista, que, conforme Lei brasileira 12764/2012, são entendidas como pessoas com deficiência (PcDs) (BRASIL, 2012).

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a05

Estudos do campo neuroanatômico apontam que o *Modelo de Barras* demanda menores recursos de atenção na resolução de problemas (LEE *et al*., 2007). Ao comparar os resultados da atividade cognitiva de resolução de problemas algébricos com adultos, utilizando-se tanto uma abordagem algébrica quanto pelo *Modelo de Barras*, Lee *et al*. (2007) mostraram que o uso de representações pictóricas não depende de competências técnicas dos participantes no uso da estratégia. Recentemente, Lee e Fong (2009) mostraram, por meio de um estudo de neuroimagem, que o uso de Álgebra Simbólica exige mais recursos da memória operacional do que o *Modelo de Barras*. Estes resultados, complementados pelo potencial de aplicabilidade à resolução de problemas em um amplo espectro de tópicos da Matemática escolar (DENNIS; KNIGHT; JERMAN, 2016; KHO; YEO; LIM, 2009; KHO; YEO; FAN, 2014; KAUR, 2019; NG; LEE, 2009), corroboram o *Modelo de Barras* como uma poderosa ferramenta na resolução de problemas (CHEONG, 2002).

Embora o *Modelo de Barras de Singapura* venha ganhando reconhecimento nas comunidades científicas devido ao Método de Singapura (Programa Curricular de Matemática), verifica-se que ainda são restritas as produções que o apresentam e que possam orientar práticas que o tomem como ferramenta de resolução de problemas. Nesta perspectiva, nos dedicamos a apresentar o *Modelo de Barras de Singapura* e as suas contribuições para a aprendizagem da Matemática, orientados pelas seguintes questões:

1. O que é o *Modelo de Barras* de Singapura?
2. Qual é o quadro geral de resultados de pesquisas envolvendo o *Modelo de Barras*?

Nesta perspectiva, organizamos nosso texto em cinco (5) seções principais. A partir desta seção inicial de Introdução, na Seção (2) - Metodologia, delineamos a abordagem empregada para pesquisa bibliográfica. Na Seção (3), apresentamos de forma ilustrada o *Modelo de Barras de Singapura*, abordando os três modelos iniciais apresentados por Kho (1987) e complementados por um modelo apresentado por Kho, Yeo e Fan (2014): *Modelo Parte-Todo* (subseção 3.1), *Modelo de Comparação* (subseção 3.2*), Modelo de Modificação ou Antes-Depois* (subseção 3.3) e *Modelo de Razão* (subseção 3.4). Por esta seção, endereçamos a resposta à nossa primeira questão de pesquisa. Na Seção (4) apresentamos uma visão geral sobre as pesquisas e observações envolvendo o *Modelo de Barras* de forma a responder nossa segunda questão de pesquisa. Na Seção (5) trazemos as considerações finais para o nosso trabalho.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a05

2 Metodologia

A análise consiste em uma revisão sistemática da literatura de espectro internacional, realizada sobre um conjunto de produções recuperadas na plataforma *Google Scholar*, com o objetivo de apresentar o *Modelo de Barras de Singapura* e as suas contribuições para a aprendizagem da Matemática. Para o levantamento, consideramos artigos relacionados à temática, independentemente de critérios de qualificação de periódicos ou filtro de busca, pois nos interessa sistematizar os resultados de trabalhos que contemplam nossas questões de análise. Neste sentido, uma nova revisão pode considerar a possibilidade de analisar produções de periódicos reconhecidos na Educação Matemática, tendo como referência de seleção os critérios Qualis.

Na primeira etapa, realizamos a busca por trabalhos envolvendo o *Modelo de Barras Singapura*, a partir dos seguintes descritores (em língua inglesa): *Model Method*, *Bar Model*, *Bar Model Method*, *Bar Diagram* e *Strips Diagram*. Não foram adotados filtros no processo de busca em relação às datas de publicação dos trabalhos ou outro critério uma vez que o quantitativo de trabalhos é reduzido. Mediante essa busca, quarenta trabalhos, disponíveis em língua inglesa e alguns em português, foram identificados e compilados, constituindo o material empírico da nossa revisão.

Complementarmente, realizamos uma busca por trabalhos em língua portuguesa, em âmbito nacional, sobre o *Modelo de Barras de Singapura*, adotando os seguintes termos de busca: *Modelo de Barras de Singapura*, *Método Modelar de Singapura*, *Diagrama de Barras de Singapura* e os mesmos termos sem o epíteto Singapura. Nessa busca, recuperamos um artigo e seis trabalhos de pós-graduação.

Os textos que constituíram o material empírico do estudo foram organizados de modo a fornecerem elementos para responder às questões de pesquisa e, a seguir, organizados nas seguintes temáticas: (a) *Modelo de Barras* de Singapura e seus diagramas pictóricos padrão e (b) estudos envolvendo o Modelo de Barras na resolução de problemas e a aprendizagem de Matemática em diferentes contextos e países. Desse modo, um mesmo trabalho pode subsidiar igualmente a discussão de cada dimensão analisada. No Quadro 1, são apresentados os trabalhos que constituíram o *corpus* da pesquisa e organizados segundo as questões estabelecidas.

Agrupamento	Seção	Trabalhos examinados
(a) Modelo de Barras de Singapura e seus	*O Modelo de Barras de Singapura*	Cai, Ng e Moyer (2011), Cheong (2002), Collars *et al.* (2007), Dennis, Knight e Jerman (2016), Fong (2004), Ho e Lowrie (2014), Hoven e Garelick (2007), Kaur (2015), Kaur (2019), Kho (1987), Kho, Yeo e Lim (2009), Kho,

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a05

diagramas pictóricos padrão.		Yeo e Fan (2014), Lee e Fong (2009), Looi e Lim (2009), Mahoney (2012), Mei e Soo (2014), Morin *et al*. (2017), Ng e Lee (2009), Said e Tengah (2021) e Willyarto, Pane e Chairiyani (2015).
(b) Estudos envolvendo o Modelo de Barras na resolução de problemas e na aprendizagem de Matemática	*Modelo de Barras de Singapura na Resolução de Problemas*	Abreu (2018), Cheong (2002), Dennis, Knight e Jerman (2016), Empson *et al.* (2006), Hofer (2015), Kaur (2019), Kho, Yeo e Lim (2009), Kho, Yeo e Fan (2014), Koleza (2015), Lee e Fong (2009), Looi e Lim (2009), Madani, Tengah e Trahmana (2018), Matzin e Mundia (2020), Men, Ismail e Abidin (2019), Morin *et al*. (2017), Naroth e Luneta (2015), Rianasari, Budayasa e Patahuddin (2012), Said e Tengah (2021), Sharp e Dennis (2017), Shin e Bryant (2017), Widyasari e Rosiyanti (2018), Willyarto, Pane e Chairiyani (2015) e Xin (2019). Trabalhos em nível nacional: Baldin (2018), Cintra (2017), Dotti (2016), Fontes (2019), Gois (2014), Holetz (2019) e Queiroz (2014).

Quadro 1 – Referências analisadas
Fonte: Elaborado pelos autores (2021).

Posterior a essa etapa, procedemos a leitura criteriosa dos trabalhos que constituíram o *corpus* da pesquisa, complementada pela elaboração de fichas de leitura, mediante a qual buscamos sistematizar aspectos caracterizadores do *Modelo de Barras de Singapura* e, também, evidenciar as suas contribuições para o ensino da Matemática, especialmente para a Resolução de Problemas. Além disso, na temática (a), incluímos 4 subseções correspondentes aos modelos pictóricos encontrados em nossa revisão e que compõem o *Modelo de Barras de Singapura*. Essa apresentação está alinhada, por exemplo, àquelas realizadas em Kaur (2019), Kho, Yeo e Lim (2009), Ng e Lee (2009) e Urbano, Fernández e Fernández (2016).

3 O *Modelo de Barras* de Singapura

O ensino da Matemática em Singapura, país em que o *Modelo de Barras* é amplamente empregado, apresenta uma característica distinta. Desde os primeiros anos de escolaridade, as crianças são instigadas a desenvolver o numeramento por meio de recursos concretos, tais como "ursos de pelúcia e outros objetos familiares" (LEE; FONG, 2009, p. 217). Nessa fase, a aprendizagem de conceitos matemáticos caracteriza-se pelo uso de contadores, sejam eles objetos concretos ou representantes "sugestivos".

Quando familiarizados com as operações aritméticas básicas, os recursos concretos são substituídos progressivamente por retângulos (LEE; FONG, 2009), caracterizando a passagem para uso de representações pictóricas das quantidades relatadas nos problemas (COLLARS *et al*., 2007). A Figura 1 ilustra essa transição.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a05

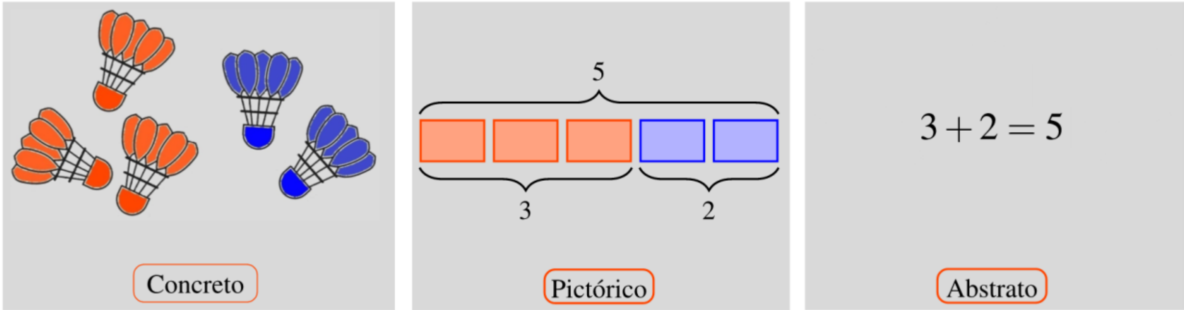

Figura 1 – Abordagem Concreto-Pictórico-Abstrata baseada em Jerome Bruner. A situação mostra o agrupamento concreto de grupos de quantidades diferentes de petecas (jogo de origem indígena brasileira cujo termo provem do tupi e significa *golpear com a mão espalmada* (NAVARRO, 1998, p. 157), a representação pictórica através de barras e a representação simbólica da etapa abstrata.
Fonte: Elaborado pelos autores (2021).

Estes modelos pictóricos (e.g., *Modelo de Barras*) são então sistematicamente empregados para a abordagem e resolução de problemas paralelamente à aquisição de símbolos e operações com essas mesmas quantidades – estágio abstrato. Por essa razão, o *Modelo de Barras de Singapura* pode ser referido como *uma estratégia para resolução de problemas que emprega barras pictóricas* (URBANO; FERNÁNDEZ; FÉRNANDEZ, 2016) e, a despeito da aparente simplicidade, esconde uma poderosa ferramenta para visualização, mediação e compreensão de conceitos abstratos em Matemática (CHEONG, 2002). Apesar de Kho (1987) não ter fornecido considerações teóricas em seu trabalho de apresentação do *Modelo de Barras* (KAUR, 2019), essas três etapas caracterizam uma abordagem construtivista *Concreto-Pictórico-Abstrata* (ver ilustração na Figura 1) que, segundo Kaur (2019), alinha-se aos três estágios de desenvolvimento intelectual de Jerome Bruner: representação ativa, icônica e abstrata (ver detalhes em Bruner (1973) ou consultar Goi e Santos (2018)). Dessa forma, o *Modelo de Barras* funciona como um mediador para ativar a fase icônica de aprendizagem (KAUR, 2019; KHO; YEO; LIM, 2009; LOOI; LIM, 2009).

Além disso, Kho, Yeo e Fan (2014, p. 276) esclarecem que "o *Modelo de Barras* é parcialmente baseado nos modelos parte-todo e comparação, que são formas pictóricas dos esquemas parte-parte-todo e comparação de Greeno[3] para problemas de adição e subtração", o que indica que os desenhos do *Modelo de Barras* não são simples ilustrações (KAUR, 2019). Assim, para diferentes situações-problemáticas, os alunos produzem os modelos pictóricos apropriados, fixam as quantidades do enunciado em diagramas e descobrem qual o tratamento de dados requerido para resolução do problema (KAUR, 2015; KHO; YEO; FAN, 2014; MEI; SOO, 2014).

[3] Para detalhes dos Esquemas de Greeno e Teoria dos Esquemas (Schematas), ver Greeno (1979), Nesher, Greeno e Riley (1982) e Wolters (1983).

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a05

As subseções seguintes apresentam e ilustram, por meio de exemplos, os três modelos (*Modelo Parte-todo, Comparação* e *Antes-Depois*[4]) propostos inicialmente por Kho (1987) e o *Modelo de Razão* (KHO; YEO; FAN, 2014) **-** empregado para resolução de problemas com taxas, frações, razões e proporções; e que compõem o *Modelo de Barras de Singapura*.

3.1 Modelo Parte-Todo (*Part-Whole Model*)

Este modelo apoia a resolução de problemas que se caracterizam por relações entre o todo e suas partes (KAUR, 2019) e podem ser aditivas, multiplicativas, envolver frações e porcentagens (NG; LEE, 2009), por exemplo. Situações problemáticas aditivas que envolvem o todo composto de duas partes podem ser representadas por meio deste modelo, conforme ilustra a Figura 2, enquanto situações problemáticas multiplicativas que envolvem o todo composto por iguais partes são ilustrados na Figura 3. No primeiro caso, o *Modelo Parte-Todo* representa uma equação pictórica (FONG, 2004) análoga às situações aritméticas representadas por $a + b = x$ ou aos casos algébricos do tipo $x + c = d$ (NG; LEE, 2009). A versão aritmética (Figura 2, esquerda) corresponde a problemas de enunciado: *tenho a, tenho b, quanto tenho ao todo?*. Assim, ao desenhar o diagrama**,** o estudante encontra, de forma visual, a resposta do problema: $a + b$. A versão algébrica (Figura 2, direita) modela problemas de enunciado como em: *tenho ao todo d, à parte c, quanto resta?* e são resolvidos pela subtração $d - c$**,** visualizada através do diagrama produzido para o problema.

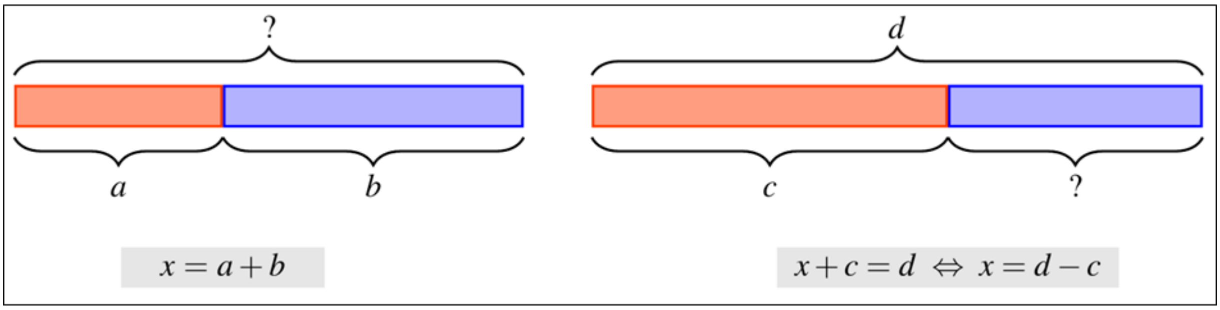

Figura 2 – *Modelo Parte-Parte-Todo* para problemas aditivos: modelo aritmético (esquerda) e modelo algébrico (direita) - a partir de Ng e Lee (2009)
Fonte: Elaborado pelos autores (2021).

Os problemas parte-todo multiplicativos são análogos algébricos de problemas $x \div n = p$ ou $nx = q$ (NG; LEE, 2009). Os primeiros estão ilustrados na Figura 3 (esquerda) e são

[4] Nas quatro subseções seguintes são descritos os modelos pictóricos padrão do *Modelo de Barras de Singapura*. Exemplos ilustrativos são remetidos aos anexos, com exceção do *Modelo Antes-Depois* que exige detalhamento devido ao maior número de etapas para a resolução dos problemas. Dessa forma, apresentamos problemas cuja resolução pelo *Modelo Antes-Depois* está comentada em sua subseção descritiva.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a05

resolvidos por multiplicação ($n \times p$). Os segundos, ilustrados na Figura 3 (direita), são resolvidos pela divisão $q \div n$ (KAUR, 2019; NG; LEE, 2009). O terceiro caso mostrado na Figura 3 (inferior) refere-se à situação em que o todo e o valor de cada parte são informados e para o qual se inquere o número de partes. São análogos algebricamente de $p \times x = q$ e sua solução é dada pela divisão $q \div p$ (KAUR, 2019). Estas duas modalidades (aditiva e multiplicativa), compõem uma significativa variedade de problemas que envolvem tanto números naturais quando outras situações-problemáticas (frações, porcentagens, decimais) (DENNIS; KNIGHT; JERMAN, 2016; NG; LEE, 2009; KHO; YEO; FAN, 2014; KHO; YEO; LIM, 2009; KAUR, 2019). Com o uso do modelo, as quantidades nos problemas são interpretadas e empregadas para produzir as equações pictóricas e, a partir delas, as operações necessárias para resolução dos problemas são descobertas de forma visual (NG; LEE, 2009). A Figura 11 (Anexo 1) ilustra a resolução de alguns problemas a partir do *Modelo Parte-Todo* para diferentes cenários.

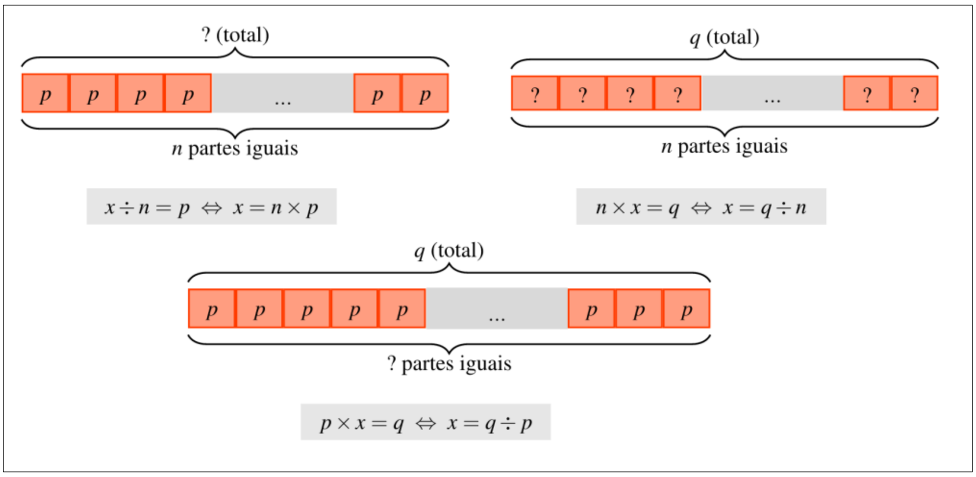

Figura 3 – *Modelo Parte-Todo* para problemas multiplicativos a partir da apresentação feita por Ng e Lee (2009) e Kaur (2019)
Fonte: Elaborado pelos autores (2021).

3.2 Modelo de Comparação (*Comparision Model*)

Relações comparativas entre ao menos duas quantidades determinam uma classe específica de problemas e envolvem os típicos termos comparativos *a mais do que*, *a menos do que*, *n vezes maior do que* e *n vezes menor do que* (NG; LEE, 2005). Duval, ao estudar enunciados matemáticos, verificou barreiras semânticas na escrita correta das equações algébricas em problemas que envolviam estes termos comparativos (DUVAL, 2004, 2012; RICHIT; RICHIT, 2022). Por exemplo, os alunos podem simplesmente associar "*a mais do que*" com a "*adição*" e empregá-la para resolver um problema, obtendo uma resposta incorreta

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a05

(KAUR, 2019; SAID; TENGAH, 2021). Uma maneira visual para representação dessas relações é empregar o *Modelo de Comparação*. Na Figura 4, o *Modelo de Comparação* é apresentado para problemas que envolvem comparações aditivas entre duas quantidades. A Figura 5 apresenta o modelo para resolução de problemas de comparação multiplicativa, que é denominado por Ng e Lee (2009) de *Modelo de Multiplicação e Divisão*. Os problemas com comparações aditivas desta classe são análogos às equações $a = b + d$ e $a + b = x$ e tem enunciados de problemas que se assemelham aos: *Dado b, a tem d a mais do que b, quanto é o todo?* ou *Dado a, b tem d a menos do que a, quanto é o todo?*. Ambas as situações podem ser representadas por meio do *Modelo de Comparação* (Figura 4, esquerda) e, a seguir, resolvidas de forma visual ($x = a + b$). O mesmo modelo (Figura 4, esquerda) pode ser empregado para representar problemas que mencionam a diferença entre duas quantidades como em: "*A diferença entre a e b (a - b) é d, dado b (ou a), quanto vale o todo?*" e é resolvido por $a = b + d$ (dado b e d) e $x = a + b$. O Modelo da direita (Figura 4) pode ser empregado para representar problemas algébricos com comparação aditivas que envolvem solicitar uma das partes (*?*), dada a outra parte (b) e o todo (c), correspondendo à equação $x + b = c$ e cuja solução é $x = c - b$.

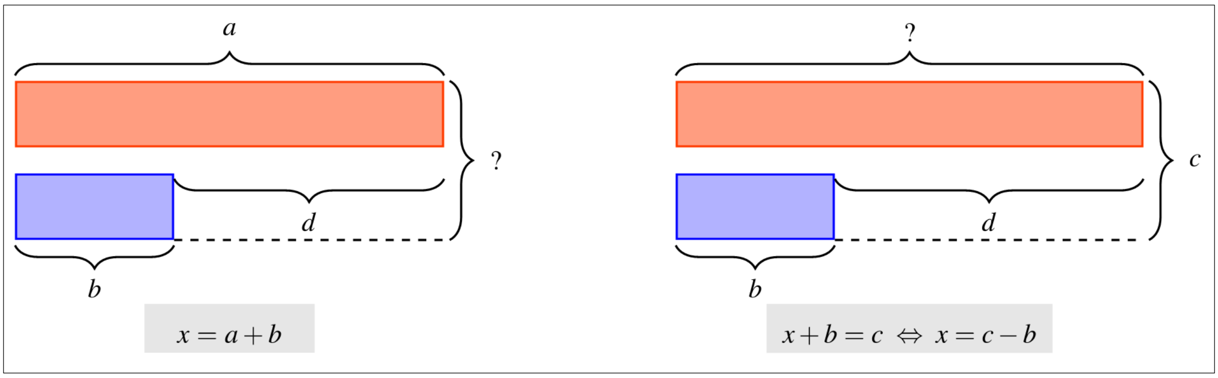

Figura 4 – *Modelo de Comparação* para problemas com relações aditivas: modelo aritmético (esquerda) e modelo algébrico (direita), a partir de Ng e Lee (2009)
Fonte: Elaborado pelos autores (2021).

Os comparativos multiplicativos são análogos às equações $a = nb$ (a e b múltiplos por n natural) e $a + b = x$. Estes últimos são modelados conforme ilustra a Figura 5 (esquerda). Nestes problemas, os enunciados estabelecem relações do tipo *Dado b, a é n vezes maior do que b, quanto é o todo (E.1)?* ou *Dado a, b é n vezes menor do que b, quanto é o todo (E.2)?*. A resposta de problemas com enunciado *E.1* pode ser encontrada calculando-se a ($a = nb$) e depois somando-se b, obtendo o total $x = a + b$ (Figura 5, esquerda). Para problemas com enunciado *E.2,* basta calcular-se b ($b = a \div n$) e somar a, para obter-se o total $x = a + b$ (figura

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a05

5, esquerda). No caso algébrico (Figura 5, direita) o valor da *unidade pictórica* [5] (*?*) é requerido. Sendo conhecido o todo *c* e a relação de multiplicidade *n*, o valor de cada parte (*? = b*) é encontrado por meio da divisão $c \div (n + 1)$. Na Figura 12 (Anexo 2), problemas com relações comparativas são apresentados para ilustrar a resolução de problemas por meio do *Modelo de Comparação*.

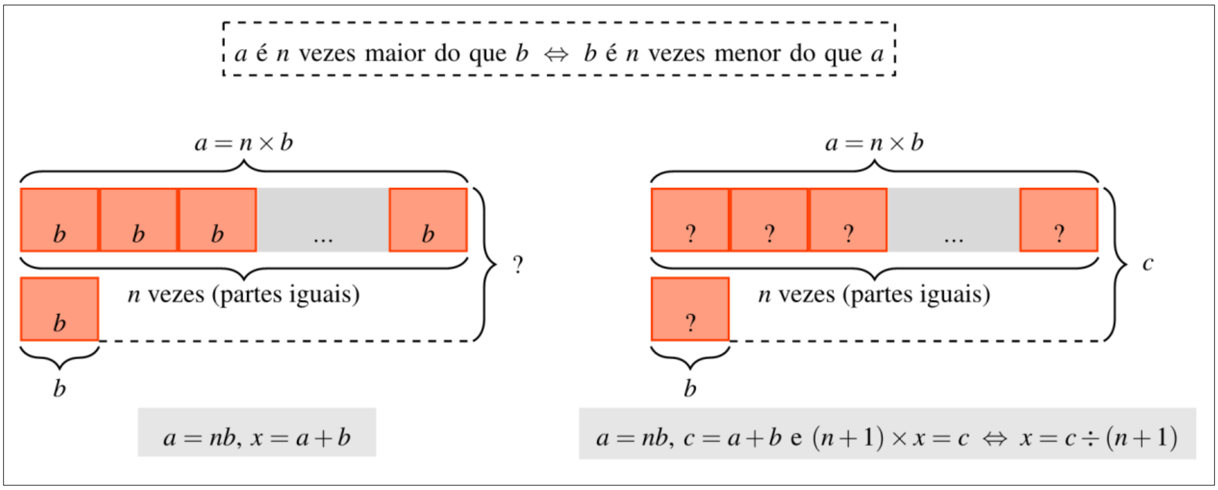

Figura 5 – *Modelo de Comparação* para problemas com relações comparativas multiplicativas naturais - *Modelo de Multiplicação e Divisão* em Ng e Lee (2009)
Fonte: Elaborado pelos autores (2021).

3.3 Modelo de Modificação ou Antes-Depois (*Change Model ou Before-After Model*)

O *Modelo de Modificação* ilustra a relação entre os novos valores de uma quantidade e seus valores originais dada uma modificação (KAUR, 2019). Essa modificação ocorre por acréscimos ou decréscimos e pode estar relacionada às mudanças aditivas, multiplicativas, por porcentagens ou fracionárias. Assim, a partir do valor para o aumento ou redução, é possível encontrar as quantidades iniciais (originais) pelos novos valores ou vice-versa (KAUR, 2019). Para enunciados mais simples a sua aplicação equivale ao *Modelo de Comparação* ou ao *Modelo Parte-Todo* (URBANO; FERNÁNDEZ; FÉRNANDEZ, 2016), o que indica que o *Modelo de Modificação* ou *Modelo Antes-Depois* é empregado para resolução de problemas mais desafiadores (KAUR, 2019). Por consequência das comparações entre as quantidades ocorrerem em dois estágios (ou mais), as representações produzidas seguem o *Modelo de Comparação*, que é produzido para as duas situações: *Antes e Depois*. Como resultado, este

[5] Trabalhos como os de Cheong(2002), Ng e Lee (2009) e Kaur (2019) empregam os termos *unidade pictórica, parte unitária, unidade básica, retângulo unitário* ou *bloco unitário* para referirem-se às partes iguais que compõem um todo ou relações comparativas envolvendo multiplicidade natural, frações ou proporções. As relações estabelecidas envolvem quantidades discretas que são representadas por retângulos iguais (indicando o mesmo número), por exemplo, as ilustradas na Figura 5.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a05

modelo não é apresentado por diagramas-padrão como nos modelos anteriores**,** sendo necessário articulá-los. Assim, analogamente à apresentação feita em Kaur (2019) e Urbano, Fernández e Fernández (2016), incluímos e detalhamos particularmente nessa seção, problemas com situações que envolvem mudanças de quantidades em estágios e os resolvemos pelo *Modelo Antes-Depois*. A seguir, apresentamos a resolução comentada para quatro problemas cuja resolução pelo modelo está associada à situações *Antes-Depois*.

Problema 1 (PM.1): *Solange confeitou 900 docinhos e destes vendeu 3/4. Se ela presenteou uma amiga com 1/3 dos restantes, quantos docinhos sobraram?* (Pelos autores)

O problema ilustra uma circunstância em duas etapas que envolve uma quantidade: o número de docinhos. Assim, podemos alinhar à etapa *Antes,* a venda dos docinhos por Solange e à etapa *Depois,* a ocasião em que ela oferece os docinhos à amiga. O diagrama para as duas etapas é mostrado na Figura 6. Na etapa *Antes* (Figura 6, superior), o diagrama é elaborado para ter *4* partes iguais. Destas partes, são destacadas *3* para representar a quantidade de docinhos vendidos por Solange. Na etapa *Depois* (Figura 6, inferior), a quantidade remanescente da venda é dividida em *3* partes iguais, sendo *1* das partes indicada para os docinhos que Solange presenteou sua amiga. O aluno então divide o total em *4* partes e obtêm o valor da unidade pictórica na primeira etapa ($900 \div 4 = 225$ docinhos). Pela equivalência entre a unidade pictórica da primeira etapa e o todo da segunda etapa, é possível calcular a unidade pictórica na etapa *Depois*, fazendo $225 \div 3 = 75$. Dessa forma, o total remanescente é $? = 2 \times 75 = 150$ ou $? = 225 - 75 = 150$ docinhos.

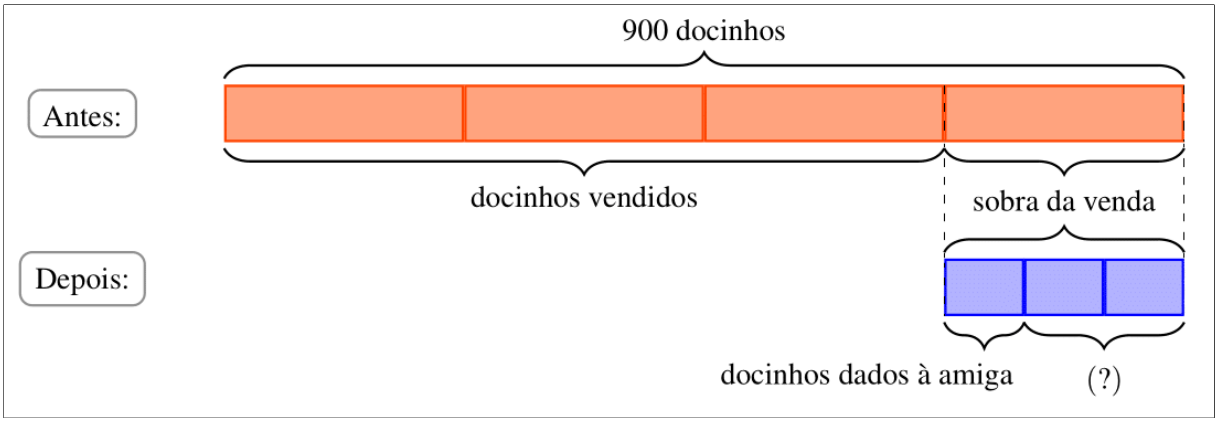

Figura 6 – Resolução possível para o Problema PM.1 pelo *Modelo Antes-Depois*
Fonte: Elaborado pelos autores (2021).

Problema 2 (PM.2): *"André tem 124 bolas de gude e Begonha 473. Begonha dá algumas de suas bolinhas de gude para André, de modo que André fica com o dobro de bolinhas de gude*

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a05

de Begonha. Quantas bolinhas de gude André tem agora?" (URBANO; FERNÁNDEZ; FÉRNANDEZ, 2016, p. 33).

O problema ilustra a comparação entre duas quantidades em duas ocasiões consecutivas. Esse problema é um problema resolvido pelo *Modelo Antes-Depois* e emprega o *Modelo de Comparação* para representar pictoricamente a comparação entre as quantidades de bolinhas de gude de André e Begonha. Na Figura 7 o *Modelo Antes-Depois* é empregado, seguindo as duas etapas. Na primeira (*Antes*), o diagrama comparativo reúne as informações iniciais: a quantidade de bolinhas de gude de André (124), de Begonha (473) e destaca uma quantidade *"g?"* de bolinhas de gude para representar a quantidade que Begonha passa a André (Figura 7, esquerda). Na etapa seguinte (Figura 7, direita), após a modificação, as novas informações são representadas por meio da relação multiplicativa enunciada no problema. Uma vez que a quantidade de bolinhas na situação final se conserva, pois houve apenas troca entre os titulares, o valor de cada unidade *"?"* pode ser obtido facilmente. Para isso basta calcular *597 ÷ 3 = 199*, o que indica que cada unidade pictórica (?) na etapa *Depois* equivale a *199* e, portanto, André tem agora *199* bolinhas de gude.

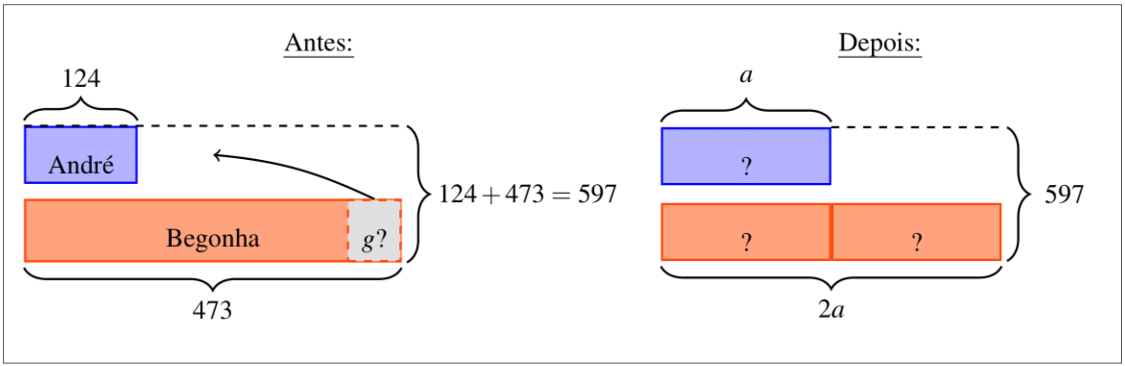

Figura 7 – Resolução possível para o Problema PM.2 pelo *Modelo Antes-Depois*
Fonte: Elaborado pelos autores (2021).

Problema 3 (PM.3): *"Rolff agora é 7 anos mais velho que Erik. Cinco anos atrás, Rolff tinha o dobro da idade que Erik tinha. Quantos anos tinha Rolff há 5 anos?"* (Adaptado de Walker (2010)).

Os dois lapsos de tempo descritos no problema (no presente e *5* anos atrás) estão alinhados com os estágios *Antes* e *Depois* do modelo. Se fizermos equivaler a ocasião *há 5 anos* à etapa *Antes* e o momento agora ao estágio *Depois,* podemos produzir o modelo ilustrado na Figura 8. A etapa *Antes* representa a relação entre as idades de Erick e Rolff para a ocasião *há 5 anos*: Rolff tinha o dobro da idade de Erick (Figura 8, esquerda). Na etapa *Depois* (que

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a05

equivale ao momento agora no enunciado) as quantidades iniciais são acrescidas de *5* anos cada - indicando o aumento na idade transcorridos *5* anos (Figura 8, direita). A diferença de idade na etapa *Depois* (momento agora) informada no enunciado (*7* anos) é anotada no diagrama e pode então ser empregada para determinar o valor de "*?*". Essa relação é representada na Figura 8 (direita) – etapa *Depois*. Pelo diagrama, podemos visualizar que $? + 5 = 5 + 7$, e logo $? = 7$. Dessa forma, como a idade de Rolff há *5* anos era $2 \times ?$, então Rolff tinha $2 \times 7 = 14$ anos.

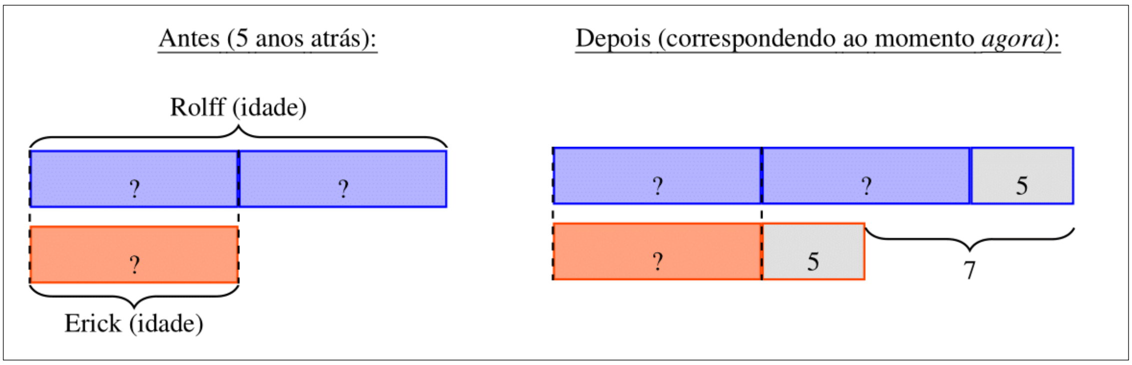

Figura 8 – Resolução possível para o Problema PM.3 pelo *Modelo Antes-Depois*
Fonte: Elaborado pelos autores (2021).

Problema 4 (PM.4): *"Devi e Minah têm \$ 520 no total. Se Devi gastar 2/5 de seu dinheiro e Minah gastar \$ 40, eles terão a mesma quantia de dinheiro. Quanto Devi tem?"* (KHO; YEO; FAN, 2014, p. 278-279).

Neste problema temos a comparação entre duas quantidades: o dinheiro de Devi e Minah. Além disso, elas são comparadas em dois estágios: *Antes* e *Depois*. Para resolvê-lo é necessário produzir um diagrama de comparação pelo *Modelo de Comparação* para os dois estágios (ver Figura 9). O primeiro deles (*Antes*) mostra a comparação entre as quantidades de dinheiro de Devi e Minah, indicando o total entre eles, de acordo com o enunciado (Figura 9, superior). No *Modelo de Barras* do estágio *Depois*, as informações após o gasto feito por Devi e Minah são incorporadas (Figura 9, inferior). A barra que representa o dinheiro de Devi (estágio *Depois*) é dividida em *5* partes e *2* são destacadas, representando a fração do valor que foi gasto. Da barra correspondente ao dinheiro de Minah, é descontado o valor de *\$40*. Pela informação fornecida no enunciado, as partes restantes de Minah equivalem às restantes de Devi. A partir dessa informação é possível fixar uma unidade comum e encontrar o seu valor, uma vez que a soma total é dada (*\$520*). A Figura 9 ilustra uma representação possível pelo *Modelo de Barras* e com base nela, essa resolução é desenvolvida.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a05

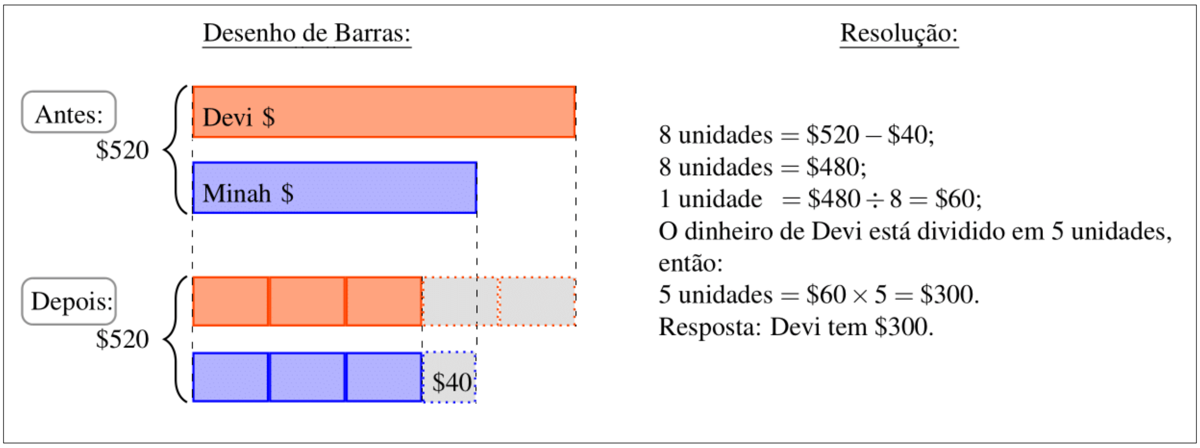

Figura 9 – Resolução possível para o Problema PM.4 pelo *Modelo Antes-Depois*
Fonte: Elaborado pelos autores (2021).

O *Modelo Antes-Depois* também é empregado para resolver problemas que envolvem mudanças de proporção em duas etapas ou mais. Para a resolução de problemas comparativos com razões, Kho, Yeo e Fan (2014) apresenta o *Modelo de Razão*. A apresentação deste modelo é o conteúdo da subseção seguinte.

3.4 Modelo de Razão (*Ratio Model*)

A partir de Kho, Yeo e Fan (2014), os problemas que envolvem razões são abordados por meio do *Modelo de Razão*. Este modelo pode ser produzido de forma análoga ao *Modelo Parte-Todo* ou ao *Modelo de Comparação*, no qual as unidades pictóricas básicas das razões são fixadas de acordo com o enunciado. O modelo para problemas que envolvem razões do tipo '*n:m:o'* é ilustrado na Figura 10 para a razão *2:3:4*. Com base na razão informada (por exemplo, *'n:m:o'*), as quantidades inqueridas no problema são interpretadas e obtidas por meio do modelo. Se o *total* é informação dada, pode ser requerido obter o valor da *unidade pictórica* (valor de *p*, Figura 10). Se o problema informa o valor correspondente à parte das unidades pictóricas, a unidade pictórica pode ser calculada e assim o *total* ou qualquer fração do todo solicitado pode ser obtido. Na Figura 10, o *Modelo de Razão* é ilustrado para a razão *2:3:4* de forma análoga ao *Modelo Parte-Todo* (esquerda) e ao *Modelo de Comparação* (direita). Na Figura 13 (Anexo 3) alguns problemas são resolvidos por meio do uso do *Modelo de Razão* - através do análogo *Parte-Todo* ou *Comparação*, ilustrando sua aplicação.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a05

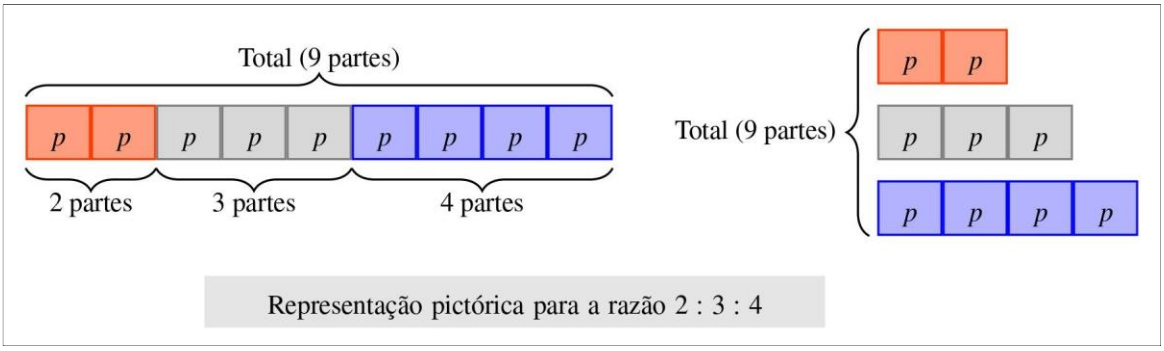

Figura 10 – *Modelo de Razão* para resolução de problemas: apresentação Parte-Todo (esquerda) e Comparação (direita)
Fonte: Elaborado pelos autores (2021).

Como observado, o *Modelo de Barras* funciona como um mediador da aprendizagem durante um processo articulado no uso de representações baseado na abordagem Concreto-Pictórico-Abstrata (Figura 1). Usando o *Modelo de Barras*, os alunos podem elaborar seus próprios esquemas pictóricos de forma não rotineira para resolver problemas matemáticos algébricos ou aritméticos (KAUR, 2019). Assim, a partir do conhecimento prévio desses "modelos padrão", é possível representar relações entre problemas que envolvem comparação, modificação e composição, por exemplo. Além disso, ao oportunizar o tratamento de problemas algébricos desde os primeiros anos de escolarização, o *Modelo de Barras* pode funcionar como um mediador para o desenvolvimento do pensamento algébrico conforme os objetivos da Base Curricular Comum Nacional vigente (BRASIL, 2017). E, embora o *Modelo de Barras* não pressuponha a noção de incógnitas representadas algebricamente, os seus retângulos e suas medidas desconhecidas estabelecem relações estreitas com a notação simbólica de letras (CAI *et al.*, 2005).

4 *Modelo de Barras* de Singapura na Resolução de Problemas

Embora tenham sido reportados poucos resultados a partir da implementação do *Modelo de Barras* em Singapura na década de 1980 (KAUR, 2019), estudos posteriores vêm demonstrando, sob diferentes contextos e perspectivas, o potencial do uso do *Modelo de Barras* para resolução de problemas (KHO; YEO; LIM, 2009), ainda que dificuldades frequentes no uso da estratégia tenham sido observadas (CHEONG, 2002). Uma abordagem menos discutida, por exemplo, refere-se ao papel do uso da estratégia para conceituação de propriedades operatórias aritméticas ou algébricas. Entre as investigações e pesquisas apresentadas à comunidade científica, estão a resolução de problemas aritméticos que envolvem principalmente os tópicos: Adição-Subtração, Multiplicação-Divisão, Frações e Porcentagens e

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a05

Acréscimos-Decréscimos (KHO; YEO; FAN, 2014). Neste sentido, pesquisas corroboram a eficiência do *Modelo de Barras* em dois contextos principais: resolução de problemas aritméticos com números naturais e resolução de problemas com frações (KAUR, 2019). De fato, a resolução desses problemas aritméticos por alunos não familiarizados com a representação algébrica de problemas, tem nas representações pictóricas do *Modelo de Barras* o recurso visual para verificação de relações estabelecidas em enunciados de problemas (CHEONG, 2002). Assim, os alunos podem se beneficiar pelo uso dos diagramas do *Modelo de Barras* na resolução de problemas antes do letramento algébrico (KHO; YEO; LIM, 2009; LOOI; LIM, 2009). Estes aspectos evidenciam as contribuições do *Modelo de Barras* para o desenvolvimento e antecipação de raciocínios elaborados no processo de resolução de problemas à medida que oportunizam aos alunos explorar novas estratégias, mobilizar recursos matemáticos distintos, resolver problemas mediante a introdução da noção de incógnitas preparando-os para o uso de letras em álgebra.

A segunda modalidade de problemas envolve o estudo de frações. Uma razão para o sucesso do *Modelo de Barras* neste contexto é que o uso das representações pictóricas permite representar e reforçar o conceito parte-todo associado às frações (SHARP; DENNIS, 2017). O conceito de fração (positiva) é um estágio avançado de numeramento que envolve uma relação multiplicativa entre pares de números naturais, muito mais complexo, por exemplo, do que o numeramento de números naturais (EMPSON *et al.*, 2006). Como estratégia para superar dificuldades conceituais e de interpretação de problemas, o uso do *Modelo de Barras* em contextos que envolvem a resolução de problemas com frações, taxas, razões, descontos e acréscimos tem favorecido práticas escolares (DENNIS; KNIGHT; JERMAN, 2016; MADANI; TENGAH; TRAHMANA, 2018; RIANASARI; BUDAYASA; PATAHUDDIN, 2012; SHARP; DENNIS, 2017; SHIN; BRYANT, 2017).

Apesar dos resultados promissores relatados em trabalhos realizados em vários países, limitações são observadas. Em uma pesquisa realizada em Brunei, por exemplo, Matzin e Mundia (2020) observaram que um pequeno número de professores declarou empregar o *Modelo de Barras* (mesmo que os demais tenham expressado o desejo de empregá-lo futuramente) e que a experiência no seu uso era um dos critérios relevantes para aplicação persistente da estratégia em práticas escolares. Embora estudos específicos, como o de Willyarto, Pane e Chairiyani (2015) na Indonésia, já tenham demonstrado que empregar o *Modelo de Barras* promoveu o aumento significativo do rendimento dos alunos na resolução de problemas, outros estudos sugerem que este uso deve receber atenção por parte dos professores (CHEONG, 2002; MEN; ISMAIL; ABIDIN, 2019). Por exemplo, Men, Ismail e

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a05

Abidin (2019) observaram em uma pesquisa na Malásia, que empregar o Modelo de Barras promove aumento de rendimento na resolução de problemas, desde que os alunos sejam treinados para o uso do *Modelo de Barras*. Já as soluções apresentadas em materiais de ensino, segundo Cheong (2002), escondem, muitas vezes, a dificuldade que é desenhar de maneira precisa as relações estabelecidas entre as quantidades relatadas nos problemas. Requer-se que os professores mostrem que a produção de uma representação pictórica é uma atividade não-trivial, que comumente requer refinamento e correção (CHEONG, 2002). Em Singapura, embora pesquisas pioneiras mostrem que os professores muitas vezes se refiram ao uso do modelo como um processo infantil (LEE; FONG, 2009), não é raro encontrar casos de reclamação de pais em relação aos professores, pois as vezes eles próprios não sabem como resolver problemas que aparecem em livros didáticos por meio do *Modelo de Barras* (CHEONG, 2002). Essa situação demonstra um ponto chave: a necessidade de formação dos professores para proficiência no uso da abordagem.

Por outro lado, pesquisas têm-se dedicado a investigar o papel mediador do uso do *Modelo de Barras* na aprendizagem matemática dos alunos. Por exemplo, em Brunei, os autores Said e Tengah (2021) verificaram um desempenho significativamente melhor em relação ao pré-teste e em especial para alunos com mais dificuldades, ao examinar o desempenho de alunos (8º ano, Brunei) resolvendo problemas de razão por meio do *Modelo de Barras*. Esses autores aplicaram uma tarefa que consistia da resolução de problemas com razões antes do contato dos alunos com o *Modelo de Barras*. Na sequência, realizaram uma tarefa com o objetivo de introduzir e aplicar o *Modelo de Barras* na representação de relações do tipo razão e, em seguida, aplicaram uma nova seção de resolução de problemas. Os excelentes resultados obtidos, especialmente com alunos que apresentavam dificuldades, mostraram que o *Modelo de Barras* favoreceu a aprendizagem dos conceitos envolvidos e a compreensão do conteúdo de problemas de razão (SAID; TENGAH, 2021). Embora os alunos tivessem aprendido sobre o tópico de razão em aulas anteriores ao pré-teste, os autores verificaram que os alunos preferiam determinar o valor da unidade para calcular as quantidades desconhecidas o que pode ser verificado visualmente pelo *Modelo de Barras* (SAID; TENGAH, 2021). Além disso, os autores também relataram que os alunos permaneceram usando o *Modelo de Barras* para representar e resolver problemas com razões em aulas seguintes (SAID; TENGAH, 2021).

Nos Estados Unidos da América (EUA), Xin (2019) propõe um “modelo de caixas” para resolução de problemas com a introdução de incógnitas e menciona o uso do *Modelo de Barras* como mediador desse processo. Também nos EUA, Morin *et al*. (2017) descrevem uma experiência bem sucedida no uso sistemático do *Modelo de Barras* envolvendo problemas

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a05

aditivos e multiplicativos em um contexto de ensino de crianças (8-10 anos) com dificuldades de aprendizagem. Embora Morin *et al*. (2017) apontem o pequeno número de participantes (6) como uma limitação desse trabalho, os resultados mostraram que o *Modelo de Barras* é uma estratégia eficaz, pois observaram que os alunos aumentaram a precisão na manipulação das quantidades fixadas nos enunciados dos problemas ao empregarem o *Modelo de Barras*. Além disso, também evidenciaram que os alunos construíram uma base conceitual sólida para resolução gradativa de problemas mais complexos empregando o *Modelo de Barras* durante a sequência de aulas (MORIN *et al.*, 2017).

Possivelmente os resultados evidenciados nos estudos sobre esta abordagem têm motivado a produção e desenvolvimento de materiais a partir da abordagem em diversos países, como o relatado por Widyasari e Rosiyanti (2018), na Indonésia, ou mesmo o trabalho de Naroth e Luneta (2015), que reporta a implementação do Programa Curricular da Matemática de Singapura na África do Sul. Nesse sentido, Widyasari e Rosiyanti (2018) evidenciaram, através do parecer dado pelos próprios alunos (5º ano escolar, Indonésia), que os materiais de ensino elaborados com a inclusão do *Modelo de Barras* se mostraram atrativos e de fácil entendimento, o que revelou uma melhor compreensão e desempenho na resolução de problemas pelos alunos.

Em Portugal, o *Modelo de Barras* foi implementado a partir de 2015 no âmbito de um plano integrado de promoção do sucesso escolar (ProSucesso), no arquipélago dos Açores, com objetivo de aprimoramento das habilidades em resolução de problemas dos alunos (ABREU, 2018). Nesse trabalho, Abreu (2018) descreve uma experiência com alunos do primeiro ciclo, envolvendo uma série de atividades, construção de materiais pedagógicos como jogos de cartas, planilhas de exercícios, recortes e materiais concretos que, baseadas na abordagem *Concreto-Pictórico-Abstrata*, empregaram o *Modelo de Barras* para representação de frações, medidas de comprimento e capacidade. Embora a experiência se baseie no Método de Ensino de Singapura, o *Modelo de Barras* foi empregado para aprendizagem dos alunos durante parte do trabalho realizado. Assim, Abreu (2018) argumenta que a seleção e elaboração adequada e rigorosa de materiais “revelam um elevado potencial na promoção de aprendizagens contextualizadas, ativas e significativas” (ABREU, 2018, p. 137) que contribuíram para a passagem do estágio concreto para o abstrato de aprendizagem dos conceitos abordados.

No Reino Unido, Hofer (2015) relata uma experiência na resolução de problemas aditivos com um pequeno grupo de alunos com idade entre 5-6 anos. O autor observou que o uso da estratégia na modelagem de problemas mediou a visualização de ligações específicas entre a adição e subtração, bem como permitiu a algumas crianças identificar padrões,

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a05

aprofundar sua compreensão e desvendar o conteúdo de problemas matemáticos aditivos. Um trabalho similar envolvendo problemas multiplicativos, descrito por Koleza (2015), foi realizado na Grécia com alunos em idade de 8 anos. Nesta experiência, os alunos beneficiaram-se do uso do *Modelo de Barras* como mediador para conexão entre multiplicação e divisão em um esquema unificado. Embora se tenha observado que os alunos apresentaram mais dificuldades com problemas inversos (algébricos), também verificou-se que rapidamente capacitaram-se no uso da estratégia para formular representações pictóricas para enunciados de problemas (Koleza, 2015).

No contexto nacional, trabalhos reportados ainda são limitados em número. Experiências descritas na literatura referem-se basicamente à pesquisas de pós-graduação. Destacam-se os trabalhos de Dotti (2016), Gois (2014) e Queiroz (2014) e, mais recentemente, os trabalhos de Cintra (2017), Fontes (2019) e Holetz (2019).

Dotti (2016) apresenta uma análise de materiais didáticos empregados em escolas de Singapura e o papel dessas atividades para o desenvolvimento do raciocínio algébrico em alunos dos primeiros anos do Ensino Fundamental. Nesse sentido, Baldin (2018) complementa a discussão do *Modelo de Barras* para os Anos Iniciais do Ensino Fundamental argumentando a respeito da necessidade de conhecimento aprofundado pelos professores, tanto relativo aos significados conceituais como de “metodologias adequadas, diversificadas e sequenciadas para promover a aprendizagem significativa dos alunos” (BALDIN, 2018, p. 35). Assim, por meio da análise de materiais didáticos que empregam o *Modelo de Barras* em Singapura, Baldin (2018) conecta o desenvolvimento do pensamento algébrico, o currículo escolar e competências esperadas a partir da BNCC para os primeiros anos do ensino escolar.

Os autores Cintra (2017), Gois (2014) e Queiroz (2014) abordam tópicos do currículo do Ensino Fundamental II. Gois (2014) empregou o *Modelo de Barras* para explorar o conceito de frações equivalentes na perspectiva da relação parte-todo e as operações básicas de adição, subtração, multiplicação e divisão entre frações. Gois (2014) concluiu que os materiais produzidos e as atividades envolvendo o *Modelo de Barras* melhoraram a capacidade de argumentação de conjecturas dos alunos, que passaram a recorrer ao *Modelo de Barras* sempre que necessário quando resolviam problemas com frações. Além disso, Gois (2014) evidenciou uma diferença significativa na compreensão e abstração dos conceitos trabalhados quando comparadas com experiências prévias de trabalho com turmas de 7º ano.

Nesta perspectiva, Cintra (2017) também explora o conceito parte-todo das frações, frações equivalentes e adição e subtração de frações com denominadores iguais e distintos com alunos do 7º ano. Embora tenha verificado que alunos já familiarizados com outros métodos (às

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a05

vezes puramente mecânicos) comumente os preferiram ao *Modelo de Barras*, Cintra (2017) evidenciou avanço na aprendizagem entre os alunos que o empregaram para resolver problemas e manipular frações. O trabalho de Queiroz (2014) reporta uma pesquisa que integrou o *Modelo de Barras* e a abordagem de Resolução de Problemas de Pólya por meio de um módulo de 6 seções, com alunos de 6º e 7º anos, na transição aritmética-álgebra. Pela experiência, Queiroz (2014) destaca o papel facilitador do *Modelo de Barras* na mediação ao uso de letras, pois a metodologia permitiu que os alunos encontrassem significado no uso de simbologias e fórmulas em comparação com abordagens tradicionais de memorização e repetição de técnicas algébricas.

Em Fontes (2019), encontramos uma análise do Modelo de Barras na Resolução de Problemas Algébricos com objetivo de ilustrar a transição da Aritmética para Álgebra. Assim, a partir de sete problemas com números naturais e racionais não-inteiros, Fontes (2019) discute teoricamente a implementação da abordagem de Resolução de Problemas de Pólya e mesmo que, na seleção dos problemas apresentados, tenha verificado que grande quantidade deles não podiam ser modelados pelo *Modelo de Barras*, argumenta que a apresentação feita é favorável e eficiente para a aprendizagem dos alunos.

Por fim, Holetz (2019) apresenta uma investigação com alunos do 5º ano envolvendo a gamificação do *Modelo de Barras* através da resolução de problemas. Neste trabalho, o autor analisou uma experiência envolvendo a experimentação, observação e aplicação para criação de um jogo de cartas baseado no *Modelo de Barras* para representação de relações matemáticas em problemas. A partir do desempenho alcançado, Holetz (2019) conclui que o uso do *Modelo de Barras*, potencializado pela interação colaborativa entre os alunos, desempenhou um papel facilitador na aprendizagem, pois os exemplos visuais e contextualizados favoreceram a aprendizagem ou a revisão de diversos tópicos matemáticos.

Estas pesquisas iniciais compõem as aproximações para utilização do *Modelo de Barras de Singapura* no Brasil e, além de revelarem o rendimento superior obtido da sua aplicação, podem subsidiar o trabalho de entusiastas e professores interessados. Por exemplo, uma apresentação em vídeo (em português) ilustra de forma dinâmica a aplicação do *Modelo de Barras* na resolução de problemas envolvendo equações do primeiro grau e frações e pode ser acessada nas referências Richit e Santos (2021a, 2021b).

As experiências apresentadas nessa seção assinalam as contribuições do *Modelo de Barras* para o aprofundamento de conceitos, processos e significados matemáticos, sobretudo no que diz respeito à possibilidade de explorar, em contextos de resolução de problemas, relações entre conceitos (a exemplo de frações, taxas, razões), operações matemáticas (a

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a05

complementaridade entre multiplicação e divisão, por exemplo), propriedades matemáticas (a identificação de padrões nos problemas e nos diagramas produzidos para resolvê-los) e materiais e recursos (tais como o "modelo de caixas" e a estratégia de gamificação). É neste contexto, ao mobilizar e articular distintas representações, conceitos, relações matemáticas, buscando formalizar os procedimentos usados para resolver problemas e conclusões, que o processo de aprendizagem da Matemática se desenvolve (BALDIN, 2018; RICHIT; TOMKELSKI; RICHIT, 2021).

Como observado nessa seção, o *Modelo de Barras* tem sido empregado em diferentes contextos de ensino da Matemática, nomeadamente na resolução de problemas aritméticos e algébricos. Em um panorama geral, o Modelo de Barras é descrito como promotor de um maior rendimento de estudantes, sobretudo para resolução de problemas e para o qual tem sido prioritariamente estudado. As dificuldades relatadas para o uso do Modelo de Barras referem-se à produção de diagramas corretos para os problemas - o que pode ser desafiador em muitos casos, e o que indica a necessidade de preparação dos professores e mediação para os estudantes. Assim, considerando que o tempo dedicado ao aprofundamento de aspectos da Matemática nos cursos de licenciatura é insuficiente (RICHIT, 2005), a realização de atividades formativas é fundamental para o desenvolvimento profissional do professor que ensina Matemática. Nesta perspectiva, as pesquisas nacionais para a abordagem são particularmente relevantes. Elas podem subsidiar reflexões, ao mesmo tempo em que fornecem os primeiros materiais cientificamente discutidos e que se constituem como suporte ao planejamento de práticas escolares baseadas no *Modelo de Barras*.

5 Considerações finais

Uma vez que o desempenho em Matemática é paralelamente crucial para o desenvolvimento da sociedade, abordagens favoráveis ao seu ensino são fundamentais. Como demostrado, o *Modelo de Barras* é uma possibilidade acessível. De fato, um ponto forte do *Modelo de Barras* é que ele não requer recursos sofisticados. A sua aplicação envolve apenas a elaboração de diagramas e modelos pictóricos que podem ser esboçados no quadro ou no caderno, sem grandes dificuldades, a partir de uma introdução prévia.

Pesquisas conduzidas em diferentes contextos têm mostrado os benefícios para o ensino de tópicos matemáticos e resolução de problemas mais exigentes em aulas de Matemática quando incluem o *Modelo de Barras*.

Uma característica do uso do *Modelo de Barras* de Singapura é o protagonismo dos alunos no processo de aprendizagem. O *Modelo de Barras* pode ser aplicado de forma que eles próprios podem desenhar os diagramas mais apropriados e de acordo com o seu processo de raciocínio. Além disso, ao modelarem pictoricamente problemas matemáticos, os alunos tem a oportunidade de antecipar a articulação de representações mais complexas em Matemática. Outro benefício do uso sistemático do *Modelo de Barras* é o acompanhamento do progresso em Matemática dos alunos, de forma articulada entre os Anos Iniciais até os Finais do Ensino Fundamental.

Dessa forma, ao realizarmos uma revisão de literatura para o *Modelo de Barras*, endereçamos respostas às nossas duas questões norteadoras. Na seção 3 apresentamos de forma ilustrada o *Modelo de Barras*, respondendo à primeira questão de pesquisa. Na seção 4, compilamos as contribuições relatadas da aplicação da abordagem para o contexto escolar em diferentes países, respondendo a nossa segunda questão de pesquisa. Finalmente, além de apresentar, ilustrar, exemplificar e possibilitar ao leitor o acesso ao material de suporte para compreensão das possibilidades que a abordagem oferece, fornecemos um catálogo de diagramas pelo *Modelo de Barras* para as figuras deste texto. Para acesso e alteração, com suporte de editores (La)tex, verificar a referência Richit (2021).

Agradecimentos

Os autores agradecem ao CNPq pelo apoio financeiro (Processo: 305476/2020-3) e aos revisores anônimos pelas acuradas sugestões de aprimoramento para versão final do manuscrito.

Referências

ABREU, J. C. F. **Construção e Gestão de Materiais Pedagógicos no Ensino da Matemática:** uma adaptação do Método de Singapura no contexto da Educação Pré-Escolar e do 1. º Ciclo do Ensino Básico. 2018. Dissertação (Mestrado em Educação Pré-Escolar e Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico) – Universidade dos Açores, Faculdade De Ciências Sociais e Humanas, Ponta Delgada, 2018. Disponível em: https://repositorio.uac.pt/handle/10400.3/4645. Acesso em: 09 jan. 2021.

ARCAVI, A. The role of visual representations in the learning of mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 52, n. 3, p. 215-241, 2003. DOI: https://doi.org/10.1023/A:102431232107.

BALDIN, Y. Y. Desenvolvimento do pensamento algébrico no currículo de escola básica: caso de modelagem pictórica da Matemática de Singapura. **Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática**, San José, v. 17, p. 31-44, 2018. Disponível em: https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/34362. Acesso em: 09 jan. 2021.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**: Educação Infantil e Ensino

Fundamental. Brasília: MEC, 2017.

BRASIL. **Lei nº 12.764, de 27 de dezembro de 2012**. Institui a Política Nacional de Proteção dos Direitos da Pessoa com Transtornos do Espectro Autista. Brasília: Presidência da República, Casa Civil, 2012. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2011-2014/2012/lei/l12764.htm. Acesso em: 12 ago. 2021.

BRUNER, J. S. **Beyond the information given**: Studies in the psychology of knowing. WW Norton, 1973.

CAI, J.; NG, S. F.; MOYER, J. C. Developing students' algebraic thinking in earlier grades: Lessons from China and Singapore. *In*: CAI, J.; KNUTH, E. (org.). **Early algebraization**. Berlin, Heidelberg: Springer, 2011. p. 25-41.

CHEONG, Y. K. The Model Method in Singapore. **The Mathematics Educator**, Athens, v. 6, n. 2, p. 47-64, 2002. Disponível em: http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.555.5563&rep=rep1&type=pdf. Acesso em: 09 jan. 2021.

CINTRA, C. C. **Proposta para o Ensino de Frações para o 7 ano:** do Diagnóstico à Aprendizagem Mediada por Modelo de Barras. 2017. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de São Carlos - UFSCar, São Carlos, 2017. Disponível em: https://repositorio.ufscar.br/handle/ufscar/10005. Acesso em: 20 mar. 2021.

COLLARS, C.; KOAY, P. L.; LEE, N. H.; TAN, T. S. **Shaping maths**: Coursebook 3A. Singapore: Marshall Cavendish, 2007.

D'AMORE, B.; PINILLA, M. F.; IORI, M.; MATTEUZZI, M. Análisis de los antecedentes histórico-filosóficos de la "Paradoja cognitiva de Duval". **Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa**, Ciudad de México, v. 18, n. 2, p. 177-212, 2015. DOI: https://doi.org/10.12802/relime.13.1822.

DENNIS, M. S.; KNIGHT, J.; JERMAN, O. Teaching high school students with learning disabilities to use model drawing strategy to solve fraction and percentage word problems. **Preventing School Failure**: Alternative Education for Children and Youth, London, v. 60, n. 1, p. 10-21, 2016. DOI: https://doi.org/10.1080/1045988X.2014.954514.

DOTTI, T. G. P. **Um estudo do modelo de barras nos livros didáticos da matemática de Singapura:** fundamentação da álgebra no Ensino Eundamental I ciclo. 2016. Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso de Licenciatura em Matemática) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2016.

DUVAL, R. **Semiosis y pensamiento humano**: registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Santiago de Cali: Universidad del Valle, 2004.

DUVAL, R. A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 61, n. 1, p. 103-131, 2006. DOI: https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z.

DUVAL, R. **Understanding the mathematical way of thinking:** The registers of semiotic representations. Cham: Springer International Publishing, 2017. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-56910-9.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 266-297, dez. 2012. DOI

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a05

https://doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n2p266.

EMPSON, S. B.; JUNK, D.; DOMINGUEZ, H.; TURNER, E. Fractions as the coordination of multiplicatively related quantities: A cross-sectional study of children's thinking. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 63, n. 1, p. 1-28, 2006. DOI: https://doi.org/10.1007/s10649-005-9000-6.

FONG, N. S. **Developing algebraic thinking in early grades**: Case study of the Singapore primary mathematics curriculum. 2004. Disponível em: https://repository.nie.edu.sg/bitstream/10497/67/1/TME-8-1-39.pdf. Acesso em: 09 jan. 2021.

FONTES, G. O. **O modelo de barras como recurso na resolução de problemas algébricos.** 2019. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2019. Disponível em: https://repositorio.ufscar.br/handle/ufscar/13376. Acesso em: 08 maio 2021.

GOI, M. E. J.; SANTOS, F. M.T. Contribuições de Jerome Bruner: aspectos psicológicos relacionados à Resolução de Problemas na formação de professores de Ciências da Natureza. **Ciências & Cognição**, Rio de Janeiro, v. 23, n. 2, p. 315-332, 2018.

GOIS, R. C. **O efeito do material concreto e do modelo de barras no processo de aprendizagem significativa do conteúdo curricular de frações pelos alunos de 7º ano do ensino fundamental.** 2014. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2014. Disponível em: https://repositorio.ufscar.br/handle/ufscar/4472. Acesso em: 09 maio 2021.

GREENO, J. G. **Some examples of cognitive task analysis with instructional implications**. PITTSBURGH UNIV PA LEARNING RESEARCH AND DEVELOPMENT CENTER, 1979. Disponível em: https://apps.dtic.mil/sti/citations/ADA073189. Acesso em: 06 mar. 2021.

HO, S. Y.; LOWRIE, T. The model method: Students’ performance and its effectiveness. **The Journal of Mathematical Behavior**, Burnaby, v. 35, p. 87-100, 2014. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2014.06.002.

HOFER, C. The introduction of the Singapore Bar Model in year 1 problem solving: a personal reflection. **The STeP Journal**: Student Teacher Perspectives, London, v. 2, n. 2, p. 107-117, 2015. Disponível em: http://ojs.cumbria.ac.uk/index.php/step/article/view/243. Acesso em: 16 jan. 2021.

HOLETZ, M. S. **Utilizando a gamificação e a metodologia de ensino de Singapura para trabalhar com as operações matemáticas básicas nos anos iniciais do ensino fundamental**. 2019. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação e Novas Tecnologias) – Centro Universitário Internacional UNINTER campus Tiradentes, Curitiba, 2019. Disponível em: https://repositorio.uninter.com/handle/1/491. Acesso em: 06 mar. 2021.

HOVEN, J.; GARELICK, B. Singapore math: Simple or complex?. **Educational Leadership**, v. 65, n. 3, p. 28, 2007.

INTAROS, P.; INPRASITHA, M.; SRISAWADI, N. Students’ problem solving strategies in problem solving-mathematics classroom. **Procedia-Social and Behavioral Sciences**, v. 116, p. 4119-4123, 2014. DOI: https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2014.01.901.

IORI, M. Objects, signs, and representations in the semio-cognitive analysis of the processes involved in teaching and learning mathematics: A Duvalian perspective. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 94, n. 3, p. 275-291, 2017. DOI: https://doi.org/10.1007/s10649-016-9726-3.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a05

IORI, M. Teachers' awareness of the semio-cognitive dimension of learning mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 98, n. 1, p. 95-113, 2018. DOI: https://doi.org/10.1007/s10649-018-9808-5.

KAUR, B. **The model method**: A tool for representing and visualising relationships. 2015. Disponível em: https://repository.nie.edu.sg/handle/10497/17100. Acesso em: 30 jan. 2021.

KAUR, B. The why, what and how of the 'Model'method: A tool for representing and visualising relationships when solving whole number arithmetic word problems. **ZDM**, Hamburg, v. 51, n. 1, p. 151-168, 2019. DOI: https://doi.org/10.1007/s11858-018-1000-y.

KHO, T. H. Mathematical models for solving arithmetic problems. *In:* Southeast Asian conference on mathematics education, 4, 1987, Singapore. **Proceedings of the 4th Southeast Asian conference on mathematics education (ICMI-SEAMS),** Singapore, 1987, p. 345–351.

KHO, T. H.; YEO, S. M.; FAN, L. Model method in Singapore primary mathematics textbooks. *In*: JONES, K.; BOKHOVE, C.; HOWSON, G.; FAN, L. (Eds). **Proceedings of the International Conference on Mathematics Textbook Research and Development (ICMT2014).** Southampton: University of Southampton, p. 275-282, 2014.

KHO, T. H.; YEO, S. M.; LIM, J. **The Singapore model method for learning mathematics**. Singapura: Marshall Cavendish Education, 2009.

KOLEZA, E. The bar model as a visual aid for developing complementary/variation problems. *In*: NINTH CONGRESS OF THE EUROPEAN SOCIETY FOR RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION, 9, 2015. Praga. **Proceedings of CERME 9**, Praga: Faculty of Education, 2015. p. 1940-1946. Disponível em: https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01288480/. Acesso em: 23 jan. 2021.

LEE, K.; FONG, N. S. Solving algebra word problems: The roles of working memory and the model method. *In*: YOONG, W. K.; YEE, L. P.; KAUR, B.; YEE, F. P.; FONG, N. S. (ed.). **Mathematics education**: the Singapore journey. Singapura, 2009. p. 204-226. DOI: https://doi.org/10.1142/9789812833761_0009.

LEE, K.; LIM, Z. Y.; YEONG, S. H.; NG, S. F.; VENKATRAMA, V.; CHEE, M. W. Strategic differences in algebraic problem solving: Neuroanatomical correlates. **Brain Research**, Gainesville, v. 1155, p. 163-171, 2007. DOI: https://doi.org/10.1016/j.brainres.2007.04.040.

LOOI, C. K.; LIM, K. S. From bar diagrams to letter-symbolic algebra: a technology-enabled bridging. **Journal of Computer Assisted Learning**, Heerlen, v. 25, n. 4, p. 358-374, 2009. DOI: https://doi.org/10.1111/j.1365-2729.2009.00313.x.

LORENZATO, S. **Para aprender matemática**. Campinas: Autores Associados, 2010.

MADANI, N. A.; TENGAH, K. A.; PRAHMANA, R. C. I. Using bar model to solve word problems on profit, loss and discount. **Journal of Physics**: Conference Series, Yogyakarta, v. 1097, p. 012103, 2018. Disponível em: https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1097/1/012103/meta. Acesso em: 30 jan. 2021.

MAHONEY, K. **Effects of Singapore's model method on elementary student problem-solving performance**: Single-case research. Tese (Doutorado em Educação) - Northeastern University (School of Education), Boston, 2012. Disponível em: http://hdl.handle.net/2047/d2000 2962. Acesso em: 30 mar. 2021.

MATZIN, E. S.; MUNDIA, L. Efficacy of the Bar Model Method of Teaching Mathematics to Year 7 Students: Case Study of Teachers in Brunei Darussalam. **Journal of Educational Issues**, Las Vegas,

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a05

v. 6, n. 1, p. 402-421, 2020. Disponível em: https://eric.ed.gov/?id=EJ1259982. Acesso em: 23 jan. 2021.

MCE - Marshall Cavendish Education. **Primary Mathematics 6A Textbook**. SingaporMath.com. 2003.

MEI, L. Y.; SOO, V. L. **Mathematical Problem Solving - the Bar Model Method**: A Professional Learning Workbook on the Key Problem Solving Strategy Used by Global Top Performer, Singapore. Singapura: Scholastic Education International (Singapore) Private Limited, a division of Scholastic Incorporated, 2014.

MEN, O. L.; ISMAIL, Z.; ABIDIN, M. Using maths model method in solving pre-algebraic problems among year five students. *In*: International Conference on Teaching, Assessment, and Learning for Engineering (TALE), 2018. **Proceedings of 2018 IEEE**, Wollongong: IEEE, p. 222-227, 2019. DOI: https://doi.org/10.1109/TALE.2018.8615364.

MORIN, L. L.; WATSON, S. M.; HESTER, P.; RAVER, S. The use of a bar model drawing to teach word problem solving to students with mathematics difficulties. **Learning Disability Quarterly**, Austin, v. 40, n. 2, p. 91-104, 2017. DOI: https://doi.org/10.1177%2F0731948717690116.

NAROTH, C.; LUNETA, K. Implementing the Singapore mathematics curriculum in South Africa: experiences of foundation phase teachers. **African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education**, London, v. 19, n. 3, p. 267-277, 2015. Disponível em: https://hdl.handle.net/10520/EJC181277. Acesso em: 23 jan. 2021.

NAVARRO, E. A. **Método moderno de tupi antigo**: a língua do Brasil dos primeiros séculos. São Paulo: Vozes, 1998.

NESHER, P.; GREENO, J. G.; RILEY, M. S. The development of semantic categories for addition and subtraction. **Educational studies in mathematics**, Dordrecht, v. 13, n. 4, p. 373-394, 1982. DOI: https://doi.org/10.1007/BF00366618.

NG, S. F.; LEE, K. How Primary Five Pupils Use the Model Method to Solve Word Problems. **The Mathematics Educator**, Athens, v. 9, n. 1, p. 60-83, 2005. Disponível em: http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.540.3055&rep=rep1&type=pdf. Acesso em: 30 jan. 2021.

NG, S. F.; LEE, K. The model method: Singapore children's tool for representing and solving algebraic word problems. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, v. 40, n. 3, p. 282-313, 2009. DOI: https://doi.org/10.5951/jresematheduc.40.3.0282.

OSMAN, S.; YANG, C. N. A. C.; ABU, M. S.; ISMAIL, N.; JAMBARI, H.; KUMAR, J. A. Enhancing students' mathematical problem-solving skills through bar model visualisation technique. **International Electronic Journal of Mathematics Education**, Eastbourne, v. 13, n. 3, p. 273-279, 2018. DOI: https://doi.org/10.12973/iejme/3919.

PINO-FAN, L.; GUZMÁN, I.; DUVAL, R.; FONT, V. The theory of registers of semiotic representation and the onto-semiotic approach to mathematical cognition and instruction: linking looks for the study of mathematical understanding. *In*: **Proceedings of the 39th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**. 2015. p. 33-40. Disponível em: http://docente.ulagos.cl/luispino/wp-content/uploads/2015/04/RR_Guzman.pdf. Acesso em: 30 jan. 2021.

QUEIROZ, J. M. S. **Resolução de problemas da pré-álgebra e álgebra para fundamental II do ensino básico com auxílio do modelo de barras**. 2014. Dissertação (Mestrado Profissional em

Matemática) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2014. Disponível em: https://repositorio.ufscar.br/handle/ufscar/4473. Acesso em: 20 mar. 2021.

RAMASAMY, R.; PUTEH, M. Bar Model Method for Higher Order Thinking Skills Questions in Mathematics for Dual Language Program Pupils. **International Journal of Academic Research in Business and Social Sciences**, Bahawalpur, v. 8, n. 9, p. 1456-1462, 2018.

RIANASARI, V. F.; BUDAYASA, I. K.; PATAHUDDIN, S. M. Supporting Students' Understanding of Percentage. **Indonesian Mathematical Society Journal on Mathematics Education**, Palembang, v. 3, n. 1, p. 29-40, 2012. Disponível em: https://eric.ed.gov/?id=EJ1078574.

RICHIT, A. **Projetos em geometria analítica usando software de geometria dinâmica**: repensando a formação inicial docente em matemática. 2005. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (UNESP), Rio Claro, 2005. Disponível em: https://repositorio.unesp.br/handle/11449/91153. Acesso em: 22 maio 2021.

RICHIT, L. A.; PASA, B. C.; MORETTI, M. T. Análise do Processo de Aprendizagem de Geometria de Estudantes do Programa de Iniciação Científica: perspectivas a partir da Teoria dos Registros Semióticos. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 17, n. 3, 2015. Disponível em: http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/view/1333. Acesso em: 06 jan. 2021.

RICHIT, A., TOMKELSKI, M. L., RICHIT, A. Understandings of Perimeter and Area Mobilized with an Exploratory Approach in a Lesson Study. **Acta Scientiae**, v. 23, n. 5, p 1-36, 2021. DOI: https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.6226.

RICHIT, L. A.; RICHIT, A. Fenômenos de congruência semântica na representação algébrica de enunciados de problemas de duas equações lineares simultâneas. **Uni-pluriversidad**, 2022, no prelo.

RICHIT, L. A. Catálogo de ilustrações ((La)tex) para diagramas padrão do Modelo de Barras de Singapura. **Zenodo**. 2021. DOI: https://doi.org/10.5281/zenodo.5202793.

RICHIT, L. A.; SANTOS, M. A. Resolução algébrica e pictórica de problema de fração de quantidade desconhecida. **Zenodo**. 2021a. DOI: https://doi.org/10.5281/zenodo.5070509.

RICHIT, L. A.; SANTOS, M. A. Resolução algébrica e pictórica de problema de fração de quantidade desconhecida e acréscimo. **Zenodo**. 2021b. DOI: https://doi.org/10.5281/zenodo.5070472.

SAID, S. N.; TENGAH, K. A. Supporting solving word problems involving ratio through the bar model. **Infinity Journal**, Cimahi, v. 10, n. 1, p. 149-160, 2021. Disponível em: http://e-journal.stkipsiliwangi.ac.id/index.php/infinity/article/view/1975. Acesso em: 20 jan. 2021.

SHARP, E.; DENNIS, S. M. Model drawing strategy for fraction word problem solving of fourth-grade students with learning disabilities. **Remedial and Special Education**, Lawrence, v. 38, n. 3, p. 181-192, 2017. DOI: https://doi.org/10.1177%2F0741932516678823.

SHIN, M.; BRYANT, D. P. Improving the fraction word problem solving of students with mathematics learning disabilities: Interactive computer application. **Remedial and Special Education**, Lawrence, v. 38, n. 2, p. 76-86, 2017. DOI: https://doi.org/10.1177%2F0741932516669052.

THOMPSON, S. Bar modelling and autism - sufficient or necessary in problem solving? *In*: Imagining Better Education: Conference Proceedings, 2018. Durham. **Proceedings of the 2018 IBE Conference**, Durham, Durham University, 2019, p. 1940-1946. Disponível em: https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01288480/. Acesso em: 23 jan 2021.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a05

URBANO, S.; FERNÁNDEZ, J. A.; FERNÁNDEZ, M. P. El modelo de barras: una estrategia para resolver problemas de enunciado en Primaria. **Revista Internacional de Aprendizaje en Ciencia, Matemáticas y Tecnología**, Madrid, v. 3, n. 1, p. 23-37, 2016. Disponível em: https://journals.epistemopolis.org/index.php/cienciaymat. Acesso em: 08 maio 2021.

WALKER, L. **Model drawing for challenging word problems**: Finding solutions the Singapore way. Singapura: Crystal Springs Books, 2010.

WIDYASARI, N.; ROSIYANTI, H. Developing material for promoting problem-solving ability through Bar Modeling Technique. **Journal of Physics**: Conference Series, Singapore, v. 948, p. 012055, 2018. Disponível em: https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/948/1/012055/meta. Acesso em: 20 jan 2021.

WILLYARTO, M. N.; PANE, M.; CHAIRIYANI, R. Mathematics Learning Method of Bar Modeling for Elementary School Students. **Advanced Science Letters**, Valencia, v. 21, n. 7, p. 2328-2331, 2015. DOI: https://doi.org/10.1166/asl.2015.6266.

WOLTERS, M. A. D. The part-whole schema and arithmetical problems. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 14, n. 2, p. 127-138, 1983. DOI: https://doi.org/10.1007/BF00303682.

XIN, Y. P. The effect of a conceptual model-based approach on ‘additive’ word problem solving of elementary students struggling in mathematics. **ZDM**, Hamburg, v. 51, n. 1, p. 139-150, 2019. DOI: https://doi.org/10.1007/s11858-018-1002-9.

Submetido em 19 de Agosto de 2021.
Aprovado em 14 de Abril de 2022.