ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n69a14

Contribución del Círculo Hermenéutico de la Comprensión al Desarrollo de una Interpretación Ética en el Aula de Matemáticas

Contribution of the Hermeneutic Circle of Understanding to Development of Ethical Interpretation in Mathematics Classroom

Verónica A. Quintanilla*

ORCID iD 0000-0003-4939-9406

Jesús Gallardo**

ORCID iD 0000-0003-0117-2173

Resumen

En este trabajo nos proponemos explorar la ética que regula la práctica interpretativa en el aula de matemáticas. Lo hacemos utilizando el círculo hermenéutico de la comprensión en matemáticas como método de interpretación en dos episodios independientes de actividad geométrica en los que participan estudiantes de primer y tercer curso de educación secundaria obligatoria. Las evidencias aportadas nos permiten afirmar que el diálogo centrado en el uso compartido del conocimiento matemático y en la búsqueda del consentimiento transforma y mejora la ética involucrada en la interpretación de los alumnos durante su actividad matemática. Concluimos que el círculo hermenéutico contribuye en la práctica a la generación de entornos de aula democráticos y al propósito didáctico de ser justos con la comprensión matemática del otro.

Palabras clave: Comprensión en Matemáticas. Consentimiento. Geometría. Interpretación. Justicia y Democracia.

Abstract

In this paper, we propose the exploration of ethics that regulate interpretive practice in the mathematics classroom. We use the hermeneutic circle of understanding in mathematics as a method of interpretation in two independent episodes of geometric activity involving students in the first and third grades of secondary education. The evidence allows us to affirm that the dialogue centered on the use of mathematical knowledge and in the search for consent transforms and improves the ethics involved in the students' interpretation during their mathematical activity. We conclude that the hermeneutic circle contributes in practice to the generation of democratic classroom environments and to the didactic purpose of being fair to the mathematical understanding of others.

Keywords: Consent. Geometry. Interpretation. Justice and Democracy. Understanding in Mathematics.

* Doctora en Didáctica de la Matemática por la Universidad de Málaga (UMA). Profesora de Didáctica de la Matemática. Departamento de Didáctica de la Matemática, de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales de la Universidad de Málaga (UMA), Málaga, España. E-mail: veronicaquintanilla@uma.es.

** Doctor en Didáctica de la Matemática por la Universidad de Málaga (UMA). Profesor de Didáctica de la Matemática. Departamento de Didáctica de la Matemática, de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales de la Universidad de Málaga (UMA), Málaga, España. E-mail: gallardoromero@uma.es.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n69a14

1 Introducción

En Educación Matemática se estudian, con regularidad, las características de las interpretaciones que realizan profesores y estudiantes durante los procesos de interacción en el aula, con el propósito de encontrar en ellas posibles razones que justifiquen el tipo de enseñanza matemática que se desarrolla y el aprendizaje que se promueve entre los escolares (MORGAN; WATSON, 2002; PLANAS; IRANZO, 2009; PONTE *et al.*, 2017). En general, se observa que la práctica interpretativa en el aula de matemáticas genera disimetrías entre los protagonistas. Así, en situaciones de interacción, es frecuente que surjan poderes e influencias mutuas que unas voluntades ejercen sobre otras, por el hecho mismo de participar y actuar en actividades conjuntas.

Estas interacciones suelen tener repercusiones de distinto tipo que afectan a la ética que regula las prácticas matemáticas en el aula, y terminan influyendo en la percepción de la escuela como espacio para el desarrollo social y cultural de la persona y en la formación integral del estudiante como individuo con conciencia crítica (MOREIRA, 2002; VALERO; GARCÍA, 2014; VANEGAS; D'AMBROSIO; GIMÉNEZ, 2019). Por este motivo, cobra importancia como objetivo didáctico contribuir en la práctica al desarrollo ético en el aula de matemáticas a través de la actividad interpretativa de sus protagonistas (D'AMBROSIO, 1997; ERNEST, 2018).

En este trabajo, asumimos este compromiso desde la perspectiva del modelo operativo para la interpretación de la comprensión en matemáticas (*An Operative Model for Interpreting Understanding in Mathematics* [OMIUM]), que venimos desarrollando en los últimos años (GALLARDO; GONZÁLEZ; QUINTANILLA, 2013, 2014; GALLARDO; QUINTANILLA, 2016, 2019; QUINTANILLA, 2019). Dicho modelo incorpora un método de interpretación, al que denominamos *círculo hermenéutico de la comprensión en matemáticas*, y planteamos su aplicación en el aula como opción factible para identificar las manifestaciones éticas que los alumnos establecen al interpretar y caracterizar su relación con el uso dado a los conocimientos matemáticos durante la argumentación.

Consideramos que el recorrido por el que transita el círculo facilita la observación de los condicionantes éticos que interfieren e influyen en la comprensión matemática de los estudiantes durante las prácticas interpretativas compartidas. Además, proponemos el uso del círculo hermenéutico como herramienta metodológica para la generación de contextos democráticos en el aula a través del diálogo matemáticamente argumentado y de la búsqueda del consentimiento con el otro durante la actividad matemática.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n69a14

Iniciamos el estudio delineando, en el apartado 2, el componente ético de la interpretación presente en el aula de matemáticas, a partir de supuestos y principios básicos vinculados con el desarrollo de la educación democrática y la búsqueda de justicia social en la escuela. Estos referentes justifican la pertinencia de incorporar una dimensión ética en nuestro modelo interpretativo, cuyos fundamentos desarrollamos en el apartado 3. A continuación, a lo largo de los apartados 4, 5 y 6, mostramos la operatividad del círculo hermenéutico de la comprensión como método para ilustrar las evidencias éticas que se desprenden al interpretar en el aula de matemáticas, mediante su aplicación práctica en dos episodios de interpretación independientes con alumnos de primer (12-13 años) y tercer (14-15 años) curso de educación secundaria obligatoria.

En cada episodio interviene un grupo reducido de estudiantes que realizan e interpretan, conjuntamente, actividades geométricas de construcción de figuras con el *software* Geogebra. Finalmente, con base en las evidencias obtenidas, en el apartado 7 justificamos la contribución de nuestra propuesta para favorecer en la práctica la interpretación ética de la comprensión en el aula de matemáticas.

2 Componente ético de la interpretación en matemáticas

Señala Maturana (2001) que el origen de nuestra conciencia social se sitúa en la naturaleza cooperativa y amorosa de los seres humanos, en nuestra capacidad para convivir, de manera solidaria, con nuestros iguales. Para desarrollar esta capacidad desde la escuela, se requieren espacios que favorezcan y promuevan especialmente las actividades comunes y las experiencias compartidas, la comunicación y la diversidad de opiniones, la aceptación del cambio y la resolución pacífica de las diferencias.

Todos estos elementos, en conjunto, caracterizan la educación democrática (DEWEY, 2004; NUSSBAUM, 2010). Bajo este punto de vista, el aula se convierte en la institución básica desde la que promover lo que Ricœur (1996) denomina la estructura del vivir-juntos, necesaria para la consecución del objetivo de justicia e igualdad en la escuela. Para hacerla posible, es necesario que en el aula se considere al otro como un legítimo otro en la convivencia; que se reconozca la existencia de planteamientos, ideologías y principios fundamentales distintos y se ponga en valor la diversidad de pensamiento a través del respeto por esas diferencias; que se ejerza la virtud cognitiva de la empatía hacia la diferencia con los otros en la percepción de una situación común (HABERMAS, 1999; MATURANA, 2001; MORIN, 1999). Solo así, con la puesta en cuestión de uno mismo por la presencia crítica del otro, resulta posible el desarrollo

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n69a14

ético en la escuela (CORTINA, 2013; LEVINAS, 2016).

La preocupación por la construcción de contextos democráticos y justicia social en la escuela, vinculada con la formación ética de los estudiantes, también es compartida por la Educación Matemática. En nuestro ámbito, se reconoce que las matemáticas escolares ofrecen un entorno propicio para el desarrollo de las relaciones humanas éticas, siempre que se fomenten los encuentros colaborativos, respetuosos y abiertos al diálogo entre el profesor y los estudiantes durante los procesos de enseñanza y aprendizaje (ANDRADE-MOLINA; VALERO, 2019). Ello se puede lograr si se concibe el aula de matemáticas como un espacio en el que propiciar la participación equitativa de todos sus protagonistas, en el que el conocimiento matemático asuma el papel de herramienta democratizadora y donde profesor y estudiantes se traten unos a otros como individuos intelectualmente iguales, como buscadores de una verdad común a partir de situaciones de equidad (HANNAFORD, 1998; MORGAN; WATSON, 2002).

Las teorías fenomenológicas de la interpretación en Educación Matemática contribuyen a alcanzar este propósito. Propuestas como las de Drouhard y Sackur (1997) o Brown (2001, 2008) defienden y fomentan el consenso a través de la reciprocidad en las actividades interpretativas del alumnado, como elemento mediador de la aparente diversidad personal, y promueven el acercamiento equitativo con el propósito último de garantizar unas interpretaciones más inclusivas con los escolares. El papel que desempeña la intersubjetividad en ello, a través de la confrontación y el reencuentro con el otro, permite pensar en la posibilidad real de lograr la equidad en las situaciones de diálogo y deliberación, de la que podrían resultar los posibles acuerdos deseados (RADFORD, 2014; SACKUR *et al.*, 2005).

Al asumir estos planteamientos, también constatamos que, desde un punto de vista operativo, resulta pertinente dedicar esfuerzos a configurar procedimientos específicos aplicables en la práctica para fomentar el desarrollo ético en el aula de matemáticas. Para afrontar esta tarea compleja, que supone un reto importante para el área, Planas e Iranzo (2009) sugieren combinar diferentes modelos de análisis en la interpretación de los procesos de interacción en el aula, que relacionen el propio conocimiento matemático con la interacción social.

La propuesta más reciente de Vanegas, D'Ambrosio y Giménez (2019) también busca vincular distintas tipologías para interpretar las prácticas matemáticas en las que se desarrolla las características éticas del diálogo democrático. Por nuestra parte, siguiendo en esta línea integradora, nos proponemos presentar la interpretación de la comprensión en matemáticas como un ejercicio continuo, cuyo principal objetivo es el reconocimiento del otro en sus distintas manifestaciones. En la labor de apoyar la formación ética de los estudiantes al

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n69a14

interpretar, justificamos el papel relevante que desempeñan, conjuntamente, el uso del conocimiento matemático y la búsqueda del consentimiento con el otro.

En la siguiente sección, desarrollamos estas ideas exponiendo los principios básicos que delimitan la dimensión ética de nuestro modelo interpretativo. También, aportamos un método particular con el que explorar y desarrollar el componente ético presente en las interpretaciones que realizan los alumnos de la comprensión matemática de sus compañeros en el aula.

3 Marco teórico

Argumentamos en favor de concebir y fomentar la interpretación como una oportunidad esencial para reconocer al estudiante en toda su integridad, un requisito necesario para establecer las relaciones sociales que permiten la convivencia con los demás a través del diálogo compartido, la igualdad de oportunidades de participación y el acceso a la cultura (MATURANA, 2001; RICŒUR, 2005). Todo ello lo identificamos con la búsqueda de justicia social desde nuestro modelo.

Como contribución específica, desde el OMIUM proponemos concebir la *interpretación justa* esencialmente como un ejercicio de curiosidad hacia el otro y asombro desinteresado por sus acciones y producciones. En este propósito, tal como subraya Radford (2013), no se trata de promover una negociación o confrontación de posiciones resistentes que buscan algún tipo de control final sobre el otro o algún beneficio propio. Se trata de una interpretación dirigida por una intención inclusiva y una pretensión de reciprocidad y equidad al interpretar. Una interpretación que, asumiendo la doble perspectiva del conocimiento matemático y de la interacción social subrayada por Planas e Iranzo (2009), pone en valor la diversidad de pensamiento a través del consenso en un diálogo matemáticamente argumentado y del respeto por tales diferencias, contribuyendo, así, a la construcción de contextos de aula democráticos.

Queda claro que son interpretaciones que reconocen lo que el otro es capaz de hacer con el conocimiento matemático; que identifican los usos apropiados y pertinentes que realizan del conocimiento matemático; que se centran en los aspectos positivos de la comprensión, en lo que el estudiante comprende y cómo lo comprende.

Concretamos estas ideas planteando el círculo hermenéutico de la comprensión en matemáticas como método interpretativo específico (GALLARDO; QUINTANILLA, 2019). Partimos de reconocer la comprensión en matemáticas como una actividad cognitiva que capacita al individuo para elaborar respuestas que involucran el uso registrable e interpretable del conocimiento matemático. El producto de desarrollar una actividad matemática concreta en

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n69a14

el aula, individual o colectiva, queda materializado en forma de registro escrito variado. Este registro es el depositario de los rastros de comprensión matemática de la actividad realizada por el autor. En una primera etapa, la aplicación del método supone identificar los rastros de comprensión diseminados a lo largo de cada registro escrito mediante aproximaciones de tipo semiótico (plano semiótico).

Seguidamente, aunque la interpretación se ejerza sobre la mediación de un texto, rebasa el campo de lo meramente semiótico y se dirige, en una segunda transición, hacia la búsqueda de referencias extralingüísticas complementarias, centradas en la experiencia matemática del otro, en el actuar y en el hacer más allá del propio registro observable literal. Ello legitima nuestra propuesta funcional de buscar la comprensión matemática de los alumnos en los usos que estos hacen de los conocimientos matemáticos (GALLARDO; GONZÁLEZ; QUINTANILLA, 2014; GALLARDO; QUINTANILLA, 2016).

La labor interpretativa requerida en esta etapa consiste en caracterizar, a partir de los rastros de comprensión emergentes, los posibles usos dados a los conocimientos matemáticos durante la acción o actividad matemática realizada (plano fenómeno-epistemológico). Esta labor del intérprete genera unos resultados de referencia que serán contrastados, a continuación, con el autor u otros resolutores.

La interpretación avanza, entonces, hacia una última etapa de carácter esencialmente dialógico, donde la explicitación de la intención del autor de la actividad matemática, a través de sus acciones matemáticas públicas (lo que hace y dice), se confronta y comparte con la apropiación por parte del intérprete de los usos intencionales identificados previamente. Se trata de una interpretación inclusiva y transformadora, centrada en la búsqueda del consentimiento con el otro (GALLARDO; QUINTANILLA, 2016).

Se espera que la apropiación que acontece durante el consentimiento con el otro genere un efecto transformador sobre el propio intérprete: el proceso de interpretar la comprensión matemática termina transformando al intérprete al apropiarse este de los usos intencionados del conocimiento matemático del autor, de cuya faceta pública o externa ya tiene constancia (plano dialógico). En la confluencia de la explicitación de esta intención pública del texto y de su apropiación por parte del intérprete es donde, finalmente, se completa el círculo hermenéutico de la comprensión en matemáticas.

Consideramos que el círculo hermenéutico ofrece un entorno común propicio para el discurso, la discusión crítica y el intercambio necesario para alcanzar el consentimiento con el otro. Interpretar con justicia a través del consentimiento implica estar dispuestos a quedar transformados por el otro a través de sus productos interpretables en un proceso principalmente

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n69a14

dialógico. Se trata de reconocer y permitir al otro poder actuar y expresarse en las condiciones más próximas posibles a la simetría y de estar dispuestos los protagonistas a hacer evolucionar y dar por buenos resultados y conclusiones finales que, aunque no siempre sean considerados externamente correctos o idóneos, resulten satisfactorios para sus intereses compartidos (DROUHARD; MAUREL; SACKUR, 2011; DROUHARD; SACKUR, 1997; LLEWELLYN, 2012; VALERO; GARCÍA, 2014). Solo bajo tales condiciones cabe pensar en alcanzar el propósito final del consentimiento con el otro en la interpretación en matemáticas.

Con la aplicación del círculo hermenéutico, pretendemos estudiar el carácter ético de las interpretaciones que realizan los alumnos de la comprensión matemática de sus compañeros en el aula. Además, consideramos que a través de él podemos alentar a los estudiantes a transformar su propio método interpretativo y ayudarles a transitar hacia formas más operativas e inclusivas de acceder a la comprensión matemática del otro, basadas en el uso del conocimiento matemático y en la búsqueda del consentimiento con el otro.

Fomentando su empleo en el aula, pensamos que se pueden lograr unas interpretaciones más justas con los propios protagonistas de la actividad matemática compartida. Planteamos, entonces, la interpretación a través del círculo esencialmente como una oportunidad para desarrollar la comprensión matemática del alumnado y garantizar la obtención de nuevos aprendizajes de calidad, así como el desarrollo de valores cívicos y democráticos entre los escolares. En definitiva, nuestro principal objetivo consiste en evidenciar la posibilidad de observar y promover tales interpretaciones en el aula, mostrando la potencialidad del círculo para lograrlo. Precisamente, en ello fundamentamos la dimensión ética del OMIUM como propuesta operativa para interpretar la comprensión en matemáticas.

4 Metodología

Aplicamos el círculo hermenéutico en dos episodios de interpretación independientes donde intervienen seis estudiantes de primer curso de educación secundaria obligatoria (1º ESO, 12-13 años) y cuatro alumnos de tercer curso (3º ESO, 14-15 años), respectivamente. En ellos, los estudiantes participan junto con su profesor de matemáticas en una actividad geométrica con Geogebra que transcurre en el ambiente natural de trabajo de su aula de matemáticas. La actividad con los escolares de primer curso se desarrolla tras finalizar el periodo dedicado al estudio de las figuras planas (abril 2018). El grupo de tercer curso, por su parte, desarrolla la actividad una vez concluida la secuencia de enseñanza correspondiente a la unidad didáctica de los movimientos en el plano (mayo 2018).

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n69a14

4.1 Fases

La aplicación del círculo hermenéutico, en ambos episodios, se desarrolla a lo largo de tres fases consecutivas.

Primera fase. Se inicia con una actividad matemática concreta realizada por los propios estudiantes, que genera distintos productos observables en forma de registros escritos variados. La actividad matemática consiste, en esta ocasión, en el diseño y construcción, de manera individual o en pareja, de una composición geométrica con Geogebra. En el caso del grupo de 1º ESO, se trata del diseño libre de una figura geométrica plana haciendo un uso combinado de las diferentes opciones básicas que ofrece la barra de herramientas gráficas del *software*. Los alumnos de 3º ESO, por su parte, deben construir distintas teselaciones del plano a partir de, al menos, una de las isometrías básicas estudiadas en clase (traslaciones, giros y simetrías).

Segunda fase. En ambos episodios, los estudiantes analizan las diferentes composiciones geométricas generadas, buscando identificar en ellas los rastros de comprensión evidenciados por los autores y caracterizar a partir de ellos los usos dados a los conocimientos matemáticos puestos en juego durante la construcción (planos semiótico y fenómeno-epistemológico). Esta labor exige al intérprete determinar los distintos conocimientos matemáticos empleados por el autor de la figura y, también, explicar cómo los utiliza en la configuración de la composición.

Tercera fase. Transcurre en torno a la selección y elaboración consensuada de descripciones apropiadas para el grupo, a partir del material aportado en la fase anterior, con las que reconocer la comprensión matemática evidenciada por los compañeros autores. Para cada figura, se trata de decidir conjuntamente, de manera justificada, qué resultados de los análisis fenómeno-epistemológicos aportados permiten describir la comprensión matemática desplegada por el correspondiente autor de la figura. Se puede optar por un análisis concreto, o bien, configurar una respuesta híbrida con aportes de distintos análisis. En cualquier caso, se busca que los estudiantes alcancen el consentimiento con el otro a través de argumentos en los que el conocimiento matemático intervenga como criterio de decisión durante la discusión (plano dialógico). En esta fase, se anima a los alumnos a que centren sus intervenciones atendiendo a los usos de los conocimientos matemáticos ya identificados y elaboren sus respuestas con base en ellos (visión funcional de la comprensión).

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n69a14

4.2 Obtención y análisis de datos

En nuestra propuesta interpretativa, es el uso personal del conocimiento matemático por parte del alumno, como forma de acción observable, el que da cuenta de su propia comprensión matemática. Las composiciones generadas en la primera fase son tomadas como registro escrito inicial de referencia para desarrollar el posterior trabajo interpretativo en las dos fases siguientes. Este registro escrito es considerado como el depositario de los rastros de comprensión matemática evidenciada por los autores de las composiciones. En este artículo, ilustramos la aplicación del círculo hermenéutico a partir de los registros aportados por tres composiciones en cada curso (Figura 1).

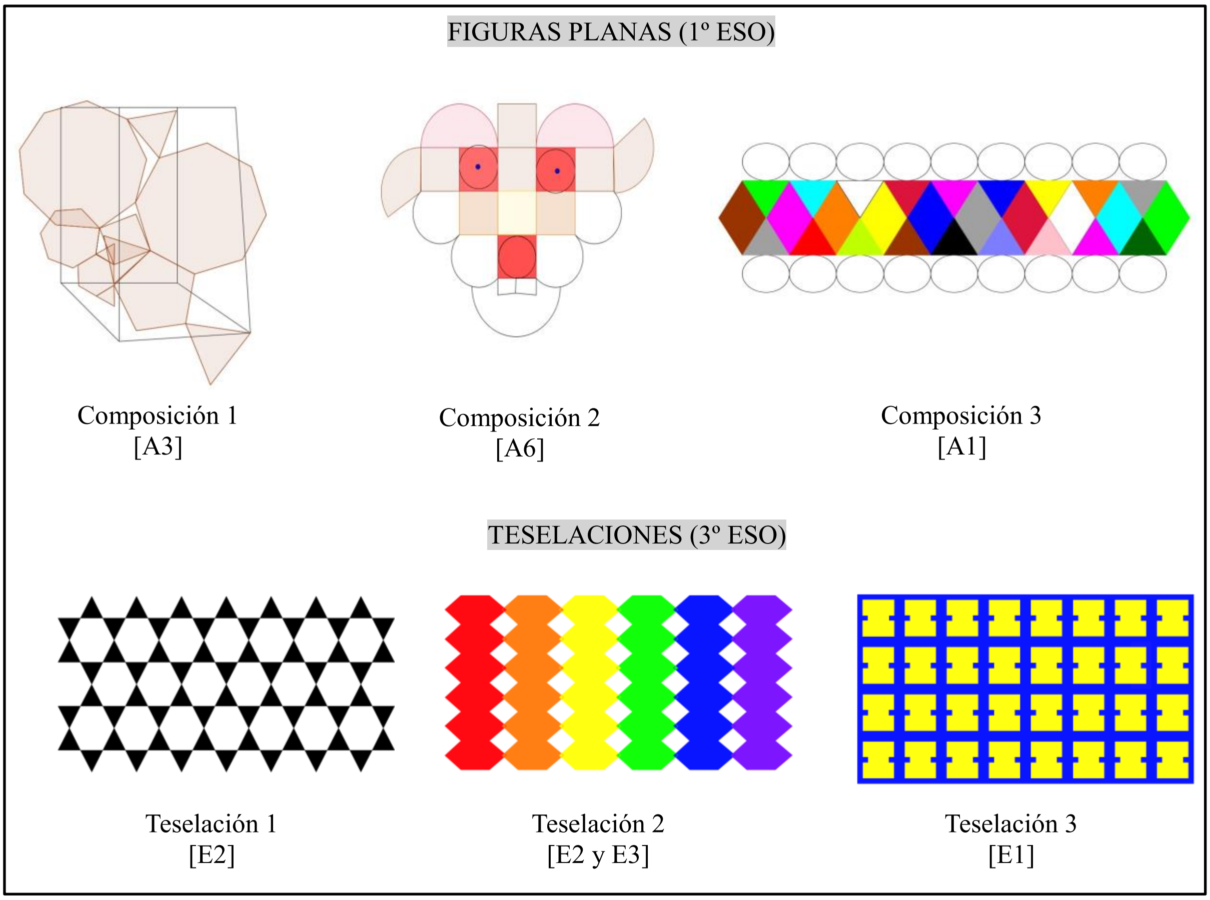

Figura 1 – Composiciones geométricas con Geogebra
Fuente: elaboradas por alumnos de 1º ESO y 3º ESO

En la segunda fase interpretativa, para facilitar la labor de los estudiantes en la identificación y caracterización de los conocimientos matemáticos involucrados en las composiciones geométricas, se les sugiere centrar la atención en los siguientes elementos que dirigen su análisis fenómeno-epistemológico:

Objetos (Ob). Los estudiantes han de identificar, nombrar y enumerar los objetos geométricos básicos que componen cada figura.

Procedimientos (Pr). Se han de subrayar las acciones, pasos y procesos necesarios para la construcción de las composiciones.

Instrumentos (Ins). Señalar, también, las opciones y herramientas de Geogebra que podrían utilizarse en la construcción de las composiciones.

Cualidades (Cu). Valorar el carácter estético-matemático de la composición resultante.

La labor en esta segunda fase genera nuevos datos en forma de descripciones que incluyen objetos geométricos, procedimientos e instrumentos para elaborar las figuras y valoraciones sobre sus cualidades matemáticas. Todos ellos son rastros de comprensión que los estudiantes identifican en las composiciones, caracterizando en diferente medida, según la contribución de cada intérprete, los usos dados a los conocimientos matemáticos por parte de los autores.

Por estas descripciones fenómeno-epistemológicas podemos valorar la contribución matemática en la interpretación realizada por los estudiantes. Es posible que se perciban descripciones básicas que aporten información breve, parcial y superficial o que apenas atiendan a alguna categoría. También, aportaciones elaboradas que incluyan información matemática más detallada y diversa, proveniente de varias categorías. No obstante, nuestro propósito no es discriminar a los estudiantes por sus respuestas, con objeto de clasificar o nivelar su desempeño interpretativo en el plano fenómeno-epistemológico del círculo hermenéutico. La información recopilada en esta fase nos sirve de referencia para posicionar y valorar la pertinencia de las decisiones posteriores que va tomando el grupo durante la fase dialógica de la interpretación.

Finalmente, la actividad interpretativa en la última fase del círculo nos ofrece un diálogo compartido, cuya transcripción genera un nuevo registro escrito con entradas correspondientes a las distintas intervenciones realizadas durante la discusión acontecida. Esta información nos ofrece unos parámetros útiles para vislumbrar la evolución que va experimentando el grupo en torno a la comprensión matemática de los autores de las figuras y al reconocimiento de los demás a través de sus respectivas contribuciones. Todo ello a partir de las sucesivas transformaciones que se van produciendo en las interpretaciones de la actividad geométrica evidenciada, como consecuencia de la búsqueda del consentimiento con el otro.

En esta fase, también identificamos y caracterizamos las manifestaciones éticas de distinto tipo, favorables y desfavorables, que afloran en los estudiantes durante el proceso interpretativo. Estas manifestaciones emergen en forma de intervenciones que evidencian el posible reconocimiento que unos alumnos tienen de otros al interactuar entre sí e interpretar sus

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n69a14

respectivas contribuciones matemáticas. Exploramos, además, la relación de tales manifestaciones con los usos dados a los conocimientos matemáticos durante la argumentación.

Procuramos vislumbrar cómo el conocimiento matemático contribuye al desarrollo de una interpretación más justa, identificando los usos que los estudiantes hacen de él para evitar o resolver conflictos, reconducir el diálogo, fundamentar respuestas o hacer evolucionar argumentos. También, es posible que los alumnos utilicen el conocimiento matemático como instrumento de poder frente a sus compañeros cuando dejan de lado la búsqueda del consentimiento con el otro.

5 Resultados del episodio I: diseño de figuras planas (1º ESO)

El Cuadro 1 recoge los resultados aportados por cinco estudiantes en forma de análisis fenómeno-epistemológicos personales para cada una de las tres composiciones geométricas analizadas (A6, autor de la composición 2, no asiste a clase durante esta fase).

Alumno	Composición 1	Composición 2	Composición 3
A1	Cuadrado, octógono, eneágono, triángulo (Ob). Me parece bonito, pero no muy geométrico (Cu).	Círculo, cuadrado, medio círculo (Ob). Me parece una figura ordenada y encajada. Me parece limpio y bonito (Cu).	Círculo, rombo, romboide, triángulo, segmento (Ob). Limpio, bonito, ordenado y muy bien encajado (Cu).
A2	Eneágono, cuadrilátero, triángulo, heptágonos, cuadrados (Ob). Ha sido construido con la herramienta polígono (Ins). Me recuerda a una fábrica (Cu).	Cuadrados, semicírculos, puntos, conos (Ob). Herramienta circunferencia y polígono (Ins). Me parece geométricamente correcto y se parece al león (Cu).	Rombos, círculos, triángulos (Ob). Simetría axial y polígonos (Ins). Entretiene con tantos colores y figuras (Cu).
A3	Hay tres triángulos, un eneágono, un octógono, un heptágono, un cuadrado y un trapecio. Lo que tiene en negro es un rectángulo (Ob). Cómo se hace: he hecho un rectángulo y primero he puesto un triángulo y después he puesto varios polígonos de varios lados (Pr).	Hay cinco cuadrados, tres círculos, cuatro arcos de circunferencia, sectores circulares (Ob). Cómo se hace: primero habrá empezado por los ojos, después por la nariz, después por la boca y, por último, las orejas (Pr).	Tiene un montón de rombos, triángulos y círculos con colores (Ob). Cómo se hace: Primero hace un rombo, después otro rombo al lado y dos triángulos arriba y abajo y luego un círculo encima del triángulo de arriba y debajo del triángulo de abajo. Y así sucesivamente (Pr).
A4	Tiene eneágonos, cuadrados, triángulos y un cubo (Ob). Lo podría haber construido con segmentos, con polígonos o con polígonos regulares (Ins). Tiene una figura en 3D, pero las demás son planas y no tiene mucho sentido (Cu).	Hay cuadrados, mitades de círculos, rectángulos y círculos (Ob). Creo que lo ha hecho con segmentos o polígono (Ins). Me parece muy geométrico y me encanta el diseño (Cu).	Hay triángulos y círculos (Ob). Creo que lo ha hecho con polígonos (Ins). Me parece muy geométrico y a la vez muy bonito. Muy colorido (Cu).
A5	Está hecho por hexágonos, triángulos, pentágonos, cuadrados (Ob). Está bien (Cu).	Está hecho por cuadrados y rectángulos (Ob). Está muy chula, me encanta el diseño (Cu).	Está hecho por cosas geométricas (Ob). Es un pájaro comiendo semillas. Está muy chulo (Cu).

Cuadro 1 – Análisis fenómeno-epistemológico personal de las tres figuras planas (1ºESO)
Fuente: resultados de la investigación

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n69a14

Todos aportan información sobre los objetos geométricos en las tres composiciones. Las descripciones de objetos no suelen ser exhaustivas, aunque algunas son bastante completas, como la de A3 para la primera figura. En general, los estudiantes suelen emplear una terminología geométrica apropiada, si bien varía la precisión con la que se refieren a ellos. Las figuras evocan, en algunos alumnos, ciertos objetos geométricos que no están presentes en ellas como tales, como es el caso del cubo (A4) o del cono (A2).

Sólo las descripciones de A3 aportan información explícita sobre los procedimientos, en respuesta al *cómo se hace* de las tres figuras. A través de la tercera descripción podemos vislumbrar que esta alumna percibe la figura esencialmente como un friso, al delimitar una posible base generatriz e insinuar una isometría (*Y así sucesivamente*).

En lo referente a los instrumentos, sólo A2 y A4 prestan atención a este aspecto y lo analizan en las tres figuras. Nombran herramientas pertinentes como segmento, polígono, polígono regular, circunferencia y simetría axial.

Las cualidades de las figuras parecen aportar información más bien complementaria que los alumnos introducen para completar su descripción. Los comentarios que destacan alguna característica matemática de las figuras son escasos y genéricos (*figura ordenada y encajada*, *me parece muy geométrico*).

5.1 Composición 1

La discusión grupal en torno a los resultados del análisis fenómeno-epistemológico realizado configura la fase dialógica del círculo hermenéutico. Esta fase se inicia reflexionando sobre la idoneidad de las descripciones aportadas en relación con la primera composición geométrica (Cuadro 2).

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10	*Profesor: ¿Si tuvieseis que elegir una…?* *Grupo: La de A4.* *A1: Porque siendo de A4, ya está mejor.* *Profesor: Pero alguna razón habrá.* *A1: Estaría perfectamente y aparte de decir lo que piensa, dice lo que podría mejorar.* *Profesor: ¿Y de las vuestras no rescatáis nada?* *A1: No, las nuestras están fatal.* *A2: Sólo lo que ha dicho A4 y ponerlo de otro color.* *Profesor: A3, ¿tú qué dices? ¿También elegirías la de A4?* *A3: [Sonríe y asiente con la cabeza]*	No se usan conocimientos matemáticos en la argumentación. No se reconoce el valor de los análisis propios.
11 12 13 14 15	*Profesor: A5, ¿tú qué elegirías?* *A5: La mía.* *A3: ¡Hombre, porque la tuya la has escrito tú!* *A5: Porque la he hecho yo.* *Profesor: ¿Pero tiene la tuya algo que no diga A4?*	No se usan conocimientos matemáticos en la argumentación. No se reconoce el valor de otros análisis.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n69a14

16	*A4: Mala letra.*	
17	*Grupo: [Risas]*	
18	*Profesor: ¿Y no os parece una buena opción ir por todas las descripciones eligiendo palabras distintas…?*	Se usan conocimientos matemáticos para excluir otros posibles análisis.
19	*A2: No lo veo.*	
20	*A1: No, no, no lo veo. Mira [Lee la descripción de A4]: "Tiene una figura en tres dimensiones, pero las demás son planas y no tiene mucho sentido". [Lo justifica] Es que esto [la figura] está muy chico y no tiene mucho sentido. [Continúa leyendo] "Lo podría haber construido con segmentos, con polígonos o con polígonos regulares. Tiene eneágonos, cuadrados, triángulos y un cubo". ¡Más perfecto que eso...!*	

Cuadro 2 – Diálogo entre profesor y estudiantes (abril, 2018)
Fuente: resultados de la investigación

La elección de la descripción de A4 como opción apropiada (2, 3, 8, 10) pone de manifiesto que los estudiantes perciben diferencias en la elaboración de las respuestas y en el contenido matemático de las mismas. La contribución de A4 destaca fundamentalmente por (a) mencionar algunos de los objetos geométricos básicos presentes en la composición, (b) por reconocer posibles instrumentos para su construcción con Geogebra y (c) por añadir, de forma justificada, una valoración particular, cualitativa y genérica de la figura (*no tiene mucho sentido*).

No obstante, su descripción no puede considerarse completa en la categoría de objetos, no incluye procedimientos de construcción y su valoración tampoco subraya características matemáticas de la figura. Aun así, algunos estudiantes anteponen esta opción concreta a cualquier otra posibilidad (7, 19-20), a pesar de sus limitaciones y de que otras respuestas también podrían contribuir a hacer más completo el análisis de la figura, con información complementaria igualmente detallada. Las descripciones de A2 y A3, por ejemplo, incorporan información sobre objetos no considerados por A4.

La estrategia adoptada por el grupo, de seleccionar una respuesta particular como opción predilecta y única válida frente al resto de posibilidades, a pesar de la insistencia del profesor por considerar otras alternativas más integradoras (4, 6, 18), genera respuestas que afectan y deterioran las relaciones interpersonales entre los alumnos durante su actividad matemática (11-14, 16-17). En la mayoría de las intervenciones, los estudiantes no utilizan conocimientos matemáticos en la argumentación y, cuando finalmente los consideran, no buscan el consentimiento con el otro (20).

5.2 Composición 2

Los estudiantes empiezan a percibir la posibilidad de elaborar un análisis conjunto de la figura a partir de distintas descripciones individuales (Cuadro 3).

21 22	*A4: Una frase de A6, una frase de A2 y una frase de A3* [Propone que sean ellos los que elijan una frase para componer una respuesta híbrida]. *A1: Y ahí va a salir una "pedazo" de respuesta…* [Dirigiéndose a A2] *A ver, di una de tus frases, la que más bonita te parezca.*	Predisposición al consentimiento con el otro al reconocerse otros posibles análisis.
23 24 25 26 27	A2: "*Me parece geométricamente correcto y se parece al león".* A1: [Dirigiéndose a A6] *¿Y la tuya?* A6: [Elige parte de la descripción dada por A3] *"Hay cinco cuadrados, tres círculos…"* *A1: Vale.* [Dirigiéndose ahora a A3] *¿Y una frase tuya?* *A3: "Primero habrá empezado por los ojos, después por la nariz, …"*	Se usan conocimientos matemáticos en la argumentación.
28 29 30	*A1: Venga, pues ya está, pues esas tres…* *A4: Una buena respuesta.* *A1: Mira, primero va la de A6* [objetos]*, después va la de A3* [procedimiento] *y después va la de A2* [cualidades]. *Porque lo de "se parece a un león", eso es más… Que es más información de él, vamos.*	Se usan conocimientos matemáticos para fundamentar una respuesta conjunta. Se mantiene la predisposición al consentimiento con el otro.

Cuadro 3 – Diálogo entre profesor y estudiantes (abril, 2018)
Fuente: resultados de la investigación

La sugerencia inicial de A4 (21) y la labor de A1 como moderador (22, 24, 26) permiten recopilar las propuestas que hacen sus compañeros A2, A3 y A6 sobre posibles fragmentos apropiados (23, 25, 27). No se trata sólo de que un alumno en particular proponga, de manera personal, una solución híbrida. La respuesta correcta para el grupo emerge, ahora, como resultado de (a) solicitar la participación de varios compañeros en su configuración, (b) aceptar como pertinentes las sugerencias dadas por ellos y (c) reunir en una sola respuesta los distintos fragmentos seleccionados (28-29).

Este proceso de configuración conjunta permite, además, a los alumnos apreciar diferencias en la información aportada por cada uno. A1 insinúa que la aportación de A2 destaca una característica de la figura no equiparable al resto de información, que apunta a conocimientos matemáticos (30). Este resultado pone de relieve que para ellos no todos los aspectos reflejados en sus análisis fenómeno-epistemológicos son igualmente válidos o tienen la misma importancia como indicadores de comprensión matemática. En esta etapa del episodio, no se aprecian manifestaciones éticas desfavorables, las intervenciones incorporan el uso de algunos conocimientos matemáticos y reflejan la búsqueda del consentimiento con el otro. Los estudiantes comienzan a experimentar una transformación en su actividad interpretativa que los hace transitar de lo individual a lo colectivo.

5.3 Composición 3

El grupo continúa explorando con mayor intención las posibilidades que otorga la selección variada de fragmentos para la configuración de una respuesta más integradora (Cuadro 4).

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n69a14

31 32	*A2: El de A1.* A1: [Centrándose en su propio análisis] *La frase de* "*limpio, bonito, ordenado y muy bien encajado*" *tiene que entrar, porque rima. Y porque está muy bien explicado matemáticamente.*	Se usan conocimientos matemáticos (aspectos geométricos informales) para justificar y anteponer el análisis propio. No se reconoce suficientemente el valor de otros análisis.
33 34 35 36 37 38	*Profesor: ¿Qué más cosas?* *A6: Yo, de A2.* *A3: Yo el de A1.* *Profesor: A4, ¿tú?* *A4: A1, A2.* *A1: La fusionamos y sale una cosa buena.*	Se mantiene la predisposición al consentimiento con el otro mediante el reconocimiento de diferentes análisis.
39 40 41 42 43	*Profesor: ¿A qué conclusión llegamos entonces?* *A1: Una frase de A2 y después mi frase de* "*limpio, ordenado y muy bien encajado*". [Dirigiéndose a A2] *Y tu frase, ¿cuál? Dila.* *A2: Entretiene con tantos colores y figuras.* *A1: No, que A2 diga lo que hay, por si hay círculos, cuadrados, …* *A2: Yo he puesto:* "*rombos, círculos, triángulos*"	Se usan conocimientos matemáticos en la argumentación.
44 45 46	*Profesor: ¿Y lo que dice A3, de cómo se construye la figura?* *A1: Eso también se debería meter. Eso está bien. Encima de todo lo que le ha costado para decir eso. Porque yo me lio.* *A4: A1, A2 y A3.*	Se mantiene la predisposición al consentimiento con el otro mediante el reconocimiento de diferentes análisis.

Cuadro 4 – Diálogo entre profesor y estudiantes (abril, 2018)
Fuente: resultados de la investigación

Un recorrido por las distintas elecciones de los alumnos permite al grupo acotar una posible opción como idónea, con fragmentos de respuestas de A1, A2 (31, 34, 35, 37) y, finalmente, A3 (44-46). Además, se evidencia el uso del conocimiento matemático como criterio para configurar la selección final (40-43). El resultado es una descripción de la composición en la que también se marca, con mayor claridad, la diferencia entre objetos matemáticos, procedimientos de construcción y cualidades de la figura: *Rombos, círculos, triángulos* (Ob). *Primero hace un rombo, después otro rombo al lado y dos triángulos arriba y abajo y luego un círculo encima del triángulo de arriba y debajo del triángulo de abajo* (Pr). *Y así sucesivamente* (Pr). *Limpio, bonito, ordenado y muy bien encajado* (Cu). El episodio concluye con los estudiantes reconociéndose entre sí a través de la consideración de sus respectivas contribuciones matemáticas (45, 46).

5.4 Discusión sobre las evidencias éticas al interpretar en el episodio I

Se ha partido de una situación inicial particular, caracterizada por la selección de un resultado individual considerado mejor frente a otros. Durante el transcurso de la actividad interpretativa, se ha ido transitando hacia otra situación que consideramos más justa y democrática, caracterizada por la contribución colectiva y la construcción compartida (HANNAFORD, 1998) de una respuesta común no existente al inicio de manera explícita y no

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n69a14

proporcionada de forma individual.

Los alumnos ya no eligen entre respuestas enfrentadas entre sí, según criterios no matemáticos que fomentan la aparición de condicionantes éticos desfavorables. Ahora, tratan de contribuir de forma conjunta a la configuración de un análisis nuevo compartido, integrador y matemáticamente más completo o evolucionado en relación con cualquiera de los análisis personales del inicio. Fruto del ejercicio interpretativo centrado en el uso del conocimiento matemático y en la búsqueda del consentimiento, se llega a reconocer al otro a través de la consideración y limitación efectiva de una comprensión matemática intersubjetiva compartida por el grupo (RADFORD, 2015).

6 Resultados del episodio II: construcción de teselaciones del plano (3º ESO)

En la mayoría de casos, los alumnos utilizan las cuatro categorías en sus análisis para identificar y caracterizar los usos dados a los conocimientos matemáticos en las composiciones (Cuadro 5). E3 y E4 realizan su análisis de forma conjunta, una posibilidad que permite la aplicación del círculo.

Estudiante	Teselación 1	Teselación 2	Teselación 3
E1	La figura es un triángulo. Ha utilizado traslación, simetría axial y simetría central (Ob). Ha tenido que utilizar la acción de polígono y ha hecho un triángulo. Lo ha trasladado y ha hecho simetría axial y central (Pr). Las herramientas que utiliza son: polígono, traslación, simetría axial y central (Ins). Está guapo ya que de un triángulo saca hexágonos (Cu).	La figura es un hexágono (Ob). Ha utilizado la acción de polígono, ha hecho un hexágono, lo ha trasladado y luego ha utilizado la simetría axial (Pr). No me gusta, ya que no tiene nada en especial (Cu).	La figura es una E y la otra es (Ob):  Ha utilizado el polígono, luego la simetría axial (Pr). Polígono, simetría axial (Ins). Me gusta. Tiene forma curiosa y es muy acogedor a la vista (Cu).
E2	Triángulo (Ob). Primero se dibuja un triángulo. Luego, se traslada usando la traslación central. Se quitan los puntos y se colorean los triángulos (Pr). Traslación central (Ins). Está muy bonito y además lo he hecho yo (Cu).	Hexágonos (Ob). Primero tienes que dibujar un hexágono y trasladarlo usando la traslación central. Se seleccionan todos y se colorean todos a la vez (por filas) (Pr). Es precioso (Cu).	La figura es una E y la otra es (Ob):  Polígono, simetría axial (Ins). No me gusta. Está muy cargado (Cu).
E3 y E4	Triángulos, pentágonos, rombos, rectángulo (Ob). Primero haría triángulos pequeños y pondría dos de pico juntos y luego de base separados (Pr). Simetría axial, simetría central, colores, punto y polígono (Ins). Me parece muy curioso, porque depende	Pentágonos, rombos, triángulos, cuadrado (Ob). Primero dibujaría un pentágono, después copiaría uno al lado del otro y lo iría copiando hacia abajo y los lados (Pr). Punto, polígono, traslación, inversión, color (Ins). Juntando los pentágonos puedes llegar a hacer triángulos y rombos y me	Cuadrados, rectángulos (Ob). Haría cuadrados y los pegaría hacia abajo y los lados. Y pondría rayas en la mitad de los cuadrados. Luego colorearía (Pr). Simetría axial, punto y colores (Ins). Es interesante y muy ordenada (Cu).

Estudiante	Teselación 1	Teselación 2	Teselación 3
	cómo lo mires, puedes ver diferentes formas geométricas (Cu).	parece algo significativo (Cu).	

Cuadro 5 – Análisis fenómeno-epistemológico personal de las tres teselaciones del plano (3ºESO)
Fuente: resultados de la investigación

En la identificación de objetos, E1 y E2 subrayan los objetos empleados para generar las tres teselaciones (triángulo, hexágono, figura en forma de E, respectivamente). Sus compañeras mencionan, además, otros objetos que pueden percibirse una vez construidas las teselaciones (hexágonos, rombos, rectángulos) e incluso objetos no presentes en ellas (pentágonos).

Los procedimientos reflejan las acciones esenciales necesarias para la composición de las figuras, aunque las descripciones también incluyen un uso impreciso del lenguaje matemático (*pondría dos de pico*, *pondría rayas*).

Al enumerar los instrumentos utilizados, los alumnos emplean, en general, un vocabulario oportuno, aunque también incorporan términos incorrectos (inversión, traslación central). No suelen ser exhaustivos al enumerar los instrumentos aplicados.

Finalmente, al valorar las cualidades de las composiciones, los estudiantes son capaces de percibir en ellas ciertas regularidades o características geométricas (*de un triángulo saca hexágonos, depende de cómo lo mires, puedes ver diferentes formas geométricas*). Al mismo tiempo, sustentan sus valoraciones subrayando aspectos no matemáticos (*lo he hecho yo*, *no me gusta, ya que no tiene nada de especial*).

6.1 Teselación 1

La fase dialógica parte del acuerdo de crear una nueva interpretación, de manera conjunta, a partir de las distintas propuestas aportadas (Cuadro 6).

1 2 3	*Profesor: ¿Qué podemos hacer con estas descripciones? Tendremos que llegar a algún acuerdo.* *E1: Crear una nueva, ¿no? Entre todas las opciones, cogemos las mejores en cada categoría.* *E3: Yo haría eso. Por ejemplo, hay algunas que se parecen… porque todo el mundo ha puesto triángulos.*	Se usan conocimientos matemáticos en la argumentación. Predisposición al consentimiento con el otro al reconocerse otros posibles análisis.
4 5 6	*E4: Porque os habéis copiado de mí.* *E3: Si todos tenemos lo mismo, no quiere decir que nos hayamos copiado.* *E2: Que pensamos lo mismo.*	Predisposición al consentimiento con el otro frente a no reconocer el valor de otros análisis.
7 8 9	*Profesor: ¿Cuál elegimos?* *Todos: Triángulos.* *E2: O sea, los hexágonos se forman de poner los triángulos de esa manera, pero no forman parte de la figura. Es el espacio que tienen entre los triángulos.*	Se usan conocimientos matemáticos en la argumentación.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n69a14

10	*E4: Son pentágonos.*	Se usan conocimientos matemáticos en la argumentación para contribuir a resolver una discusión.
11	*Todos: No, son hexágonos.*	
12	*E4: ¡Qué no!*	
13	*E2: Tienen seis lados, E4.*	
14	*E4: E3, por tu culpa.*	
15	*E2: Es un triángulo solo.*	Se usan conocimientos matemáticos en la argumentación.
16	*Profesor: ¿Estáis de acuerdo?*	
17	*Todos: Sí.*	
18	*Profesor: Y luego, ¿qué tipo de movimiento se ha utilizado? Porque E1 dice simetría axial y central, E2 habla de traslación central…*	
19	*E2: A ver, yo lo hice con la traslación central.*	
20	*E1: Dirás, simetría central.*	
21	*E2: Que le das a la figura y luego le das al pico, a la esquina, y se pone así.*	
22	*E1 y E4: Eso es simetría.*	
23	*E2: Pues, simetría central.*	
24	*Profesor: ¿Y respecto a las cualidades matemáticas de la figura?*	
25	*E3: Yo he puesto que me parece muy curioso, porque depende de cómo lo mires, puedes ver diferentes formas geométricas.*	
26	*Profesor: Como por ejemplo…*	
27	*E4: Los rombos.*	
28	*E3: Triángulos de diferentes medidas.*	
29	*E1: A ver, yo he puesto que está guapo porque de un triángulo se sacan hexágonos.*	
30	*Profesor: Oye E2, ¿hacerlo tú es una cualidad de la figura?*	No se usan conocimientos matemáticos en la argumentación. No se reconoce el valor de otros análisis.
31	*E2: ¡Claro! Le da puntos extra.*	
32	*E4: Que es muy fea porque la ha hecho E2. Al hacerla E2 ya está fea.*	

Cuadro 6 – Diálogo entre profesor y estudiantes (mayo, 2018)
Fuente: resultados de la investigación

El diálogo transcurre centrado mayormente en la argumentación matemática. Las semejanzas que los estudiantes reconocen entre sus propuestas les permiten identificar por consenso un triángulo como objeto generatriz (1-3, 7-8, 15-17). Además, identifican otros polígonos en la composición y el argumento matemático empleado por E2 posibilita el acuerdo sobre la presencia de hexágonos en ella (9,11,13). Por otra parte, la discrepancia sobre los movimientos involucrados en la composición dirige al grupo al acuerdo sobre el uso de la simetría axial en la construcción, un diálogo matemático que permite mejorar la comprensión de los protagonistas sobre los movimientos en el plano (18-23). Finalmente, las cualidades de la composición también son resaltadas atendiendo a características matemáticas, como la posibilidad de percibir y combinar diferentes formas geométricas en la figura (25-29).

Durante esta etapa, se aprecian diversas manifestaciones de carácter ético que contravienen el trabajo propio de los espacios de aprendizaje democráticos. Por ejemplo, insinuar que los compañeros se copian o no aceptar los errores propios evidencian un comportamiento negativo por parte de E4, más próximo al descrédito que al reconocimiento del otro (4, 12, 14). Sus compañeros, no obstante, procuran contrarrestarlo con reiteradas intervenciones que buscan el consentimiento (5-6, 13). También emergen interpretaciones

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n69a14

injustas que no se sustentan en el uso del conocimiento matemático, como en los casos de E2 y E4 (30-32).

6.2 Teselación 2

La fase dialógica prosigue con el compromiso compartido de realizar una interpretación conjunta, aunque este propósito todavía se ve afectado por condicionantes éticos (Cuadro 7).

33 34 35 36 37	*E4: La ha hecho E2.* *E3: ¡La he hecho yo! Esta la hice yo con E2, pero yo participé más que E2.* *E2: Bueno, vamos a tener una conversación matemática.* *Profesor: ¿Qué objetos base son los que se utilizan para crear esta teselación?* *Todos: Hexágonos.*	Se usan conocimientos matemáticos en la argumentación para evitar la discusión. Predisposición al consentimiento con el otro.
38 39 40 41	*E2: Algunos han puesto pentágonos, maestro. Yo no he sido.* *E3: Sí, es que me equivoqué. Vale, no sabemos contar en esta clase.* *E1: No sabrás contar tú.* *E3: No sabemos. Y no te estoy metiendo a ti.*	No se reconoce el valor de otros análisis.
42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58	*Profesor: Bueno, ¿cómo se construiría la figura?* *E2: Con una traslación.* *E4: Que no, que no es una traslación. Se llama simetría.* *E2: Pues simetría.* *E4: Con la simetría central, ¿no? ¡Axial!* *E1: Central.* *E4: ¿Por qué central?* *E1: Porque es sobre un punto. Si es sobre un punto, es central. Si es sobre una recta, es axial.* *E3: Sí, sí, nosotros hicimos el punto.* *Profesor: ¿Y la segunda fila cómo la hacéis? ¿También simetría central?* *E3: Sí.* *Profesor: ¿Y dónde tocáis…?* *E2: En el punto de la derecha, creo. O en el de la izquierda, no me acuerdo.* *E4: Por eso yo creo que es simetría axial.* *E2: Ah, yo he puesto traslación. Me he confundido, maestro. Me he confundido.* *Profesor: ¿Y lo que dice E4 está bien?* *Todos: Sí.*	Se usan conocimientos matemáticos en la argumentación. Predisposición al consentimiento con el otro.
59 60 61 62 63 64	*Profesor: ¿Y qué os parece la figura? Escuchemos a E3.* *E4: Yo paso de escucharla.* *Profesor: Hacéis una figura…* *E3: Y sacamos otra.* *Profesor: ¿Alguna otra característica matemática?* *E1: A ver, ¿cuál?*	No se reconoce el valor de otros análisis.
65 66	*E4: Tiene seis hexágonos para abajo, seis para el lado y son hexágonos.* *E2: Claro. Y entonces, concuerda seis y seis. Y queda estético.*	Se usan conocimientos matemáticos en la argumentación.

Cuadro 7 – Diálogo entre profesor y estudiantes (mayo, 2018)
Fuente: resultados de la investigación

El grupo identifica el hexágono como objeto generatriz de la composición (36-37). En la revisión del proceso de construcción, se desarrolla un debate centrado en los conceptos de traslación y simetría, donde los alumnos emplean lenguaje y argumentos matemáticos. Durante este diálogo, emergen aspectos particulares de la comprensión de los estudiantes sobre las

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n69a14

isometrías del plano. Además, en la búsqueda del consentimiento se produce un efecto transformador positivo, en forma de reconocimiento de errores (56) y mejora de la distinción entre simetría central y axial (46-50, 53-55). Por último, los alumnos justifican las cualidades de la composición desde una perspectiva esencialmente matemática, encontrando nuevas regularidades en ella no subrayadas en sus análisis previos (65-66).

En cuanto a las manifestaciones éticas, observamos que el uso del conocimiento matemático en la argumentación facilita los consensos y desarrolla la comprensión matemática, mientras que su ausencia lleva implícita preferencias e intereses personales que dificultan el acuerdo entre los protagonistas. Los condicionantes de tipo ético surgen cuando las intervenciones incorporan juicios de valor que promueven los enfrentamientos personales. La discusión de E3 y E4 (33-34), la denuncia de E2 (38), el intercambio de acusaciones entre E1 y E3 (39-41), el desprecio de E4 (60) o la desconfianza de E1 (64) son ejemplos de ello. Al mismo tiempo, intervenciones como la de E2 reconduciendo la atención del grupo (35) o E3 y E2 aceptando sus errores (39, 56), también evidencian un reconocimiento por el diálogo basado en el uso del conocimiento matemático.

6.3 Teselación 3

Los usos del conocimiento matemático centran la discusión en la tercera composición. Las interpretaciones sugieren reciprocidad más que disimetría entre los escolares (Cuadro 8).

67	*Profesor: Bueno, vamos a seguir el orden de las otras composiciones.*	Se usan conocimientos matemáticos en la argumentación. Predisposición al consentimiento con el otro.
68	*E2: Primero, los objetos.*	
69	*E3: Con un cuadrado.*	
70	*E2: Yo he puesto que la figura es una E y la otra la he dibujado.*	
71	*E3: Dibujó una E.*	
72	*E1: Claro, se dibuja una E. Después de dibujar una E, se coge la simetría axial y se va todo el rato copiando las E. Luego, coges y dibujas ese polígono en medio y lo vas trasladando… No, no es traslación, es también simetría axial. Y vas haciendo simetría axial hasta rellenar todos los huecos.*	
73	*Profesor: ¿Qué os parece esta composición?*	Al final, se usan conocimientos matemáticos en la argumentación para reconocer el valor de la figura.
74	*E2: A mí no me gusta. Porque está muy cargado de cosas.*	
75	*Profesor: ¿La figura no tiene ningún valor matemático?*	
76	*E3: Es que, en verdad, no sé por qué puse "es interesante y muy curiosa". Si no me gusta. Me recuerda a una cárcel.*	
77	*E2: Es simétrico todo.*	

Cuadro 8 – Diálogo entre profesor y estudiantes (mayo, 2018)
Fuente: resultados de la investigación

Se reconoce y acepta el acuerdo de iniciar la interpretación por los objetos (67-68). El consentimiento sobre los objetos utilizados y sobre los procedimientos involucrados en la construcción de la figura se alcanza a través del uso de argumentos matemáticos pertinentes

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n69a14

que facilitan y agilizan el proceso de interpretación (70-72). Al discutir las cualidades de la composición, aún se comparten valoraciones vinculadas a preferencias personales (74, 76), aunque alumnos como E2 terminan sustituyendo algunas de sus apreciaciones por características matemáticas que reconocen el valor de la figura (77).

En general, en la parte final del diálogo, las interpretaciones ya no se acompañan de juicios negativos sobre las acciones ajenas. El diálogo no se ve tan afectado por condicionantes éticos y hay más predisposición a reconocer las contribuciones de los demás. Estas evidencias de transformaciones éticas positivas las vinculamos al uso del conocimiento matemático y a la búsqueda del consentimiento con el otro.

6.4 Discusión sobre las evidencias éticas al interpretar en el episodio II

Encontramos evidencias de la transformación de los estudiantes hacia comportamientos para una convivencia productiva, evolución hacia el trabajo en grupo, respeto por las producciones ajenas, valoración de las diferencias como elemento enriquecedor y avances en la desmitificación negativa del error. La interpretación se inicia con ciertos desencuentros personales originados por el juicio a las ideas y producciones de los demás y por la negativa a aceptar propuestas diferentes. No obstante, durante el transcurso del diálogo, los estudiantes van evidenciando sensibilidad por argumentar matemáticamente.

En la mayoría de sus intervenciones utilizan los conocimientos matemáticos y recuerdan la conveniencia de centrar el diálogo en ellos. Por ello, consideramos que el conocimiento matemático cumple con su función de democratizar el contexto del aula y facilitar, a través de su uso, el consentimiento con el otro (HANNAFORD, 1998). Asimismo, que los alumnos sean capaces de establecer una interpretación colaborativa y solidaria (VANEGAS; D’AMBROSIO; GIMÉNEZ, 2019) y la acepten como algo propicio para su buen desempeño escolar evidencia el carácter ético que lleva consigo y promueve la interpretación de la comprensión del otro siguiendo las pautas y fases del círculo hermenéutico.

7 Conclusión

La introducción del discurso ético en el ámbito de la Educación Matemática suele justificarse, usualmente, por las diversas aplicaciones de las matemáticas que transforman la realidad, por la responsabilidad que las matemáticas poseen para desarrollar ciudadanos con conciencia crítica y por su influencia para desarrollar la justicia social mediante la inclusión en

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n69a14

el aula de grupos sociales desfavorecidos o minoritarios (ERNEST, 2018).

En este trabajo, hemos aportado nuevas razones complementarias, incorporando la ética al debate abierto sobre la interpretación de la comprensión en matemáticas. Desde una perspectiva próxima a la que promueven autores como Ernest (2018) o Valero y García (2014), hemos reconocido el potencial de la actividad interpretativa en el aula de matemáticas para conformar las subjetividades de los estudiantes, así como el impacto que posee el uso del conocimiento matemático en el desarrollo de la comprensión y las relaciones con los demás. En la práctica, el uso del conocimiento matemático y la búsqueda del consentimiento con el otro contribuyen, conjuntamente, a una interpretación justa de la comprensión en matemáticas.

Como contribución metodológica específica, hemos pretendido mostrar la potencialidad del círculo hermenéutico de la comprensión en matemáticas como método para diagnosticar y desarrollar las manifestaciones éticas que despliegan los estudiantes cuando interpretan en el aula. Mediante su aplicación, perseguimos como fin fomentar el reconocimiento de los estudiantes a lo largo de un proceso continuo de valoración y desarrollo de su comprensión matemática a partir de los conocimientos matemáticos que utilizan durante la actividad interpretativa en el aula.

Hemos presentado evidencias de posibles influencias que la actividad matemática de unos alumnos ejercen sobre otros en el ejercicio de interpretación de su comprensión y hemos puesto de manifiesto la presencia de actuaciones que podrían llegar a rivalizar en el aula de matemáticas, con el peligro asociado de una posible imposición de unas frente a otras. Esta confrontación, que en los episodios se ha evidenciado de diferentes formas, es un modo de contravenir la idea de aula como lugar de encuentro entre personas en comunicación que buscan reconocerse entre sí (RICŒUR, 2005).

Al mismo tiempo, en los ejemplos descritos también hemos sido testigos de transformaciones progresivas en la actividad interpretativa, dando lugar a unas prácticas matemáticas que entendemos más justas y democráticas (VANEGAS; D'AMBROSIO; GIMÉNEZ, 2019). Este efecto transformador en los estudiantes se ha evidenciado sobre todo en el desprendimiento progresivo de lo individual y en la configuración intersubjetiva de un producto final compartido (RADFORD, 2015) a través del uso pertinente del conocimiento matemático y de la búsqueda del consentimiento con el otro. En línea con Levinas (2016), el carácter ético de esta actividad interpretativa también reside en la responsabilidad del otro al poner en cuestión el desempeño propio a través de la crítica permanente y la argumentación matemática.

Por otra parte, cabe pensar en el desarrollo en el aula de entornos interpretativos

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n69a14

regulados que favorezcan las oportunidades para que los estudiantes determinen y decidan, conjuntamente, posibles contextos alternativos de aplicación de los conocimientos matemáticos compartidos durante su actividad. La posibilidad de que los estudiantes asuman el protagonismo de decidir construir y aplicar junto a los demás, sin que nadie lo haga por ellos (CORTINA, 2013; D'AMBROSIO, 1997), es en nuestra opinión otro de los aspectos que caracteriza la formación ética que nuestra propuesta interpretativa ofrece a los escolares a través del círculo hermenéutico.

Nuestra propuesta interpretativa promueve, además, compartir diferentes modos de ver y comprender las matemáticas desde el interior del aula, antes que insistir en promocionar desde el exterior una versión correcta de ellas y una supuesta buena comprensión a priori determinada (BROWN, 2008). En los episodios descritos, constatamos, como ya lo hicieran Llewellyn (2012) o Valero y García (2014), que un lugar alejado de la comprensión estándar establecida también puede resultar una situación favorable para determinados alumnos.

Finalmente, consideramos que el trabajo matemático en el aula puede generar condiciones propicias que permitan a cada estudiante desarrollar no sólo sus capacidades cognitivas sino, también, promover una formación ética que contribuya a la construcción de su identidad como persona. Por ello, al igual que autores como Brown (2008) o Morgan y Watson (2002), planteamos la posibilidad de garantizar una interpretación que pueda considerarse justa con la comprensión matemática del otro. En este sentido, la actividad interpretativa desde nuestro modelo ofrece oportunidades para que los escolares incrementen sus posibilidades de alcanzar un desarrollo íntegro con los demás en instituciones como el aula regidas por el uso compartido del conocimiento matemático.

Referencias

ANDRADE-MOLINA, M.; VALERO, P. Lo ético-político en la educación matemática. **Uno**, Barcelona, n. 84, p. 7-14, abr. 2019.

BROWN, T. **Mathematics education and language**: Interpreting hermeneutics and post-structuralism. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2001.

BROWN, T. Making mathematics inclusive: interpreting the meaning of classroom activity. **Philosophy of Mathematics Education Journal***,* Exeter, n. 23, oct. 2008. Disponible en: http://people.exeter.ac.uk/PErnest/pome23/index.htm. Acceso: 05 nov. 2019.

CORTINA, A. **¿Para qué sirve realmente la ética?** Barcelona: Paidós, 2013.

D'AMBROSIO, U. Diversity, equity, and peace: from dream to reality. *In:* TRENTACOSTA, J.; KENNEY, M. J. (ed.). **Multicultural and gender equity in the mathematics classroom**: the gift of diversity. Reston: NCTM, 1997. p. 243-248.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n69a14

PONTE, J. P.; MATA-PEREIRA, J.; QUARESMA, M.; VELEZ, I. Formação de professores dos primeiros anos em articulação com o contexto de prática de ensino de matemática. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, Ciudad de México, v. 20, n. 1, p. 71-94, mar. 2017.

DEWEY, J. **Democracia y educación**. Madrid: Morata, 2004.

DROUHARD, J-PH.; SACKUR, C. Triple approach: A theoretical frame to interpret students' activity in algebra. *In:* CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 21., 1997, Lhati. **Proceedings…** Lhati: PME, 1997, p. 225-232. v. 2.

DROUHARD, J-PH.; MAUREL, M.; SACKUR, C. La souffrance à l'école. Le cas des mathématiques: souffrance ou plaisir et liberté? **Les Collectifs du CIRP**, Québec, n. 2, p. 294-310, 2011.

ERNEST. P. The ethics of mathematics: is mathematics harmful? In: ERNEST, P. (ed.). **The philosophy of mathematics education today**. Basel: Springer, 2018. p. 187-216.

GALLARDO, J.; GONZÁLEZ, J. L.; QUINTANILLA, V. A. Tareas, textos y usos del conocimiento matemático: aportes a la interpretación de la comprensión desde el cálculo aritmético elemental. **Educación Matemática**, México, v. 25, n. 2, p. 61-88, ago. 2013.

GALLARDO, J.; GONZÁLEZ, J. L.; QUINTANILLA, V. A. Sobre la valoración de la competencia matemática: claves para transitar hacia un enfoque interpretativo. **Enseñanza de las Ciencias**, Barcelona, v. 32, n. 3, p. 263-280, nov. 2014.

GALLARDO, J.; QUINTANILLA, V. A. El consentimiento con el otro en la interpretación de la comprensión en matemáticas. **Bolema**, Rio Claro, v. 30, n. 55, p. 625-648, ago. 2016.

GALLARDO, J.; QUINTANILLA, V. A. El círculo hermenéutico de la comprensión en matemáticas: una propuesta integradora para la evaluación en el aula. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, Ciudad de México, v. 22, n. 1, p. 97-122, mar. 2019.

HABERMAS, J. **Teoría de la acción comunicativa I**. Madrid: Taurus, 1999.

HANNAFORD, C. Mathematics teaching is democratic education. **ZDM Mathematics Education**, Karlsruhe, v. 30, n. 6, p. 181-187, dec. 1998.

LEVINAS, E. **Totalidad e infinito**. Salamanca: Sígueme, 2016.

LLEWELLYN, A. Unpacking understanding: the (re)search for the Holy Grail of mathematics education. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 81, n. 3, p. 385-399, 2012.

MATURANA, H. **Emociones y lenguaje en educación y política**. Palma de Mallorca: Dolmen, 2001.

MOREIRA, L. Mathematics education and critical consciousness. *In:* CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 26., 2002, Norwich. **Proceedings…** Norwich: PME, v. 3, 2002, p. 369-376.

MORGAN, C.; WATSON, A. The interpretive nature of teacher's assessment of students' mathematics: issues for equity. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, v. 33, n. 2, p. 78-111, 2002.

MORIN, E. **Los siete saberes necesarios para la educación del futuro**. París: Unesco, 1999.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n69a14

NUSSBAUM, M. **Sin fines de lucro**. Madrid: Katz, 2010.

PLANAS, N.; IRANZO, N. Consideraciones metodológicas para la interpretación de procesos de interacción en el aula de matemáticas. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, Ciudad de México, v. 12, n. 2, p. 179-213, jul. 2009.

QUINTANILLA, V. A. **Vislumbrando la dimensión socioafectiva de la comprensión en matemáticas**. Un estudio sobre la medida con maestros en formación. 2019. 960f. Tesis (Doctorado en Educación y Comunicación Social) – Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Málaga, Málaga, 2019.

RADFORD, L. Sumisión, alienación y (un poco de) esperanza: hacia una visión cultural, histórica, ética y política de la enseñanza de las matemáticas. *In*: CONGRESO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA DE AMÉRICA CENTRAL Y EL CARIBE, 1., 2013, Santo Domingo. **Actas...** Santo Domingo: CEMACYC, 2013. p. 1-16.

RADFORD, L. Towards an embodied, cultural, and material conception of mathematics cognition. **ZDM Mathematics Education**, Karlsruhe, v. 46, n. 3, p. 349-361, jul. 2014.

RADFORD, L. Of love, frustration, and mathematics: A cultural-historical approach to emotions in mathematics teaching and learning. *In:* PEPIN, B.; ROESKEN-WINTER, B. (ed.). **From beliefs to dynamic affect systems in mathematics education**. Zürich: Springer, 2015. p. 25-49.

RICŒUR, P. **Sí mismo como otro**. Madrid: Siglo XXI, 1996.

RICŒUR, P. **Caminos del reconocimiento**. Madrid: Trotta, 2005.

SACKUR, C.; ASSUDE, T.; MAUREL, M.; DROUHARD, J-PH.; PAQUELIER, Y. L'expérience de la nécessité épistémique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble, v. 25, n.1, p. 57-90, 2005.

VALERO, P.; GARCÍA, G. El currículo de matemáticas escolares y el gobierno del sujeto moderno. **Bolema**, Rio Claro, v. 28, n. 49, p. 491-515, ago. 2014.

VANEGAS, Y.; D'AMBROSIO, U.; GIMÉNEZ, J. Discurso y prácticas democráticas en la clase de matemáticas. **Journal of Research in Mathematics Education**, Barcelona, v. 8, n. 2, p. 139-165, jun. 2019.

Submetido em 10 de Fevereiro de 2020.
Aprovado em 18 de Outubro de 2020.