ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a14

Compreensão da Definição Formal de Limite: um estudo na formação inicial de professores de Matemática

Understanding the Formal Limit Definition: a study in preservice Mathematics' teacher education

Vilmar Fonseca*

ORCID iD 0000-0002-3313-9485

Ana Henriques**

ORCID iD 0000-0001-7844-2157

Resumo

Neste artigo analisamos que compreensão evidenciam os estudantes de um curso de formação de professores de Matemática, no Brasil, sobre a definição formal de limite de uma função num ponto, no decorrer de uma intervenção didática que visa a aprendizagem com compreensão deste conceito matemático. Os dados, recolhidos a partir da observação participante com gravação em áudio e vídeo das aulas lecionadas e as produções escritas dos estudantes na resolução das tarefas propostas em sala de aula, foram analisados qualitativa e interpretativamente considerando três elementos evidenciadores de compreensão: os significados, as representações de limite e a sua aplicação na resolução de problemas. Os resultados mostram que os estudantes, em geral, atribuíram ao limite diferentes significados, que emergem dos seus conceito-imagem e que evidenciam uma concepção adequada da simbologia da definição formal de limite, sendo igualmente capazes de reconhecer e representar o limite algébrica e geometricamente, com registros assentes na simbologia dessa definição e de a aplicarem corretamente na análise de erros e na resolução de problemas de validação de conjecturas. Evidenciaram, assim, uma aprendizagem com compreensão da definição formal de limite.

Palavras-Chave: Limite. Definição Formal de Limite. Aprendizagem com Compreensão. Representações. Formação Inicial de Professores de Matemática.

Abstract

In this paper, we analyze Brazilian preservice mathematics teachers' understanding on the formal limit definition of a function in a point, during a didactic intervention aiming at the learning of this mathematical concept with understanding. The data, collected from participant observation with audio and video recording of the classes and the written productions of these students in solving the proposed tasks, were qualitatively and interpretatively analyzed considering three elements involved in understanding: the meanings and the representations of limit and its application in problem-solving. The results showed that students, in general, assigned different meanings to the limit, which emerged from their concept-image and showed an adequate conception of the symbols present on the formal limit definition. They were also able to recognize and represent the limit, both algebraic and geometrically

* Doutorando em Educação Matemática no Instituto de Educação da Universidade de Lisboa (IEUL). Professor efetivo do Instituto de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro (IFRJ), Nilópolis, Rio de Janeiro, Brasil. Endereço para correspondência: IFRJ-Nilópolis, Rua Cel. Delio Menezes Porto, 1045, Centro, Nilópolis, Rio de Janeiro, Brasil, CEP: 26530-060. E-mail: vilmar.fonseca@ifrj.edu.br.

** Doutora em Educação Matemática pelo Instituto de Educação da Universidade de Lisboa (IEUL). Professora auxiliar no Instituto de Educação da Universidade de Lisboa (IEUL), Lisboa, Portugal. Endereço para correspondência: Instituto de Educação, Alameda da Universidade, Lisboa, Portugal, CEP: 1649-013. E-mail: achenriques@ie.ul.pt.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a14

with records based on the symbols of this definition and to apply it correctly in the errors analysis and when solving problems involving conjecture validation. Thus, they unveiled comprehension of the formal limit definition.

Keywords: Limit. Formal Limit Definition. Learning with Understanding. Representations. Preservice Mathematics Teacher Education.

1 Introdução

A compreensão do conceito de limite de uma função tem tido lugar de destaque em extensa investigação na Educação Matemática (DOMINGOS, 2003; JUTER, 2006; KARATAS; GUVEN; CEKMEZ, 2011; SWINYARD; LARSEN, 2012; COTTRILL et al., 1996) em resposta às inúmeras dificuldades evidenciadas por estudantes de diversos níveis de ensino, na aprendizagem de conceitos matemáticos avançados e de muitos outros que requerem conhecimento conceitual de limite. Esses estudos têm se focado maioritariamente na compreensão informal de limite, sobretudo no que respeita às concepções errôneas mais comuns de estudantes e futuros professores, e em abordagens didáticas do conceito, havendo poucas evidências empíricas sobre como os estudantes formalizam as suas noções intuitivas e atribuem significado à definição formal de limite[1] (SWINYARD; LARSEN, 2012).

Reconhecendo o papel instrumental das definições matemáticas na compreensão dos conceitos matemáticos e na resolução de tarefas que os envolvem, e o desafio que representa para os estudantes a compreensão das mesmas quando lhes são apresentadas (EDWARDS; WARD, 2008; TALL; SMITH; PIEZ, 2008), foi realizada uma intervenção didática com estudantes de um curso de formação inicial de professores de Matemática, no Brasil, que considerou a formação de significados para o limite, através do estabelecimento de conexões entre a sua definição formal e intuitiva, envolveu o uso de suas diferentes representações e a sua aplicação na resolução de problemas, permitindo encaminhar os estudantes à aprendizagem com compreensão da definição formal de limite e evidenciar essa compreensão a partir destes três elementos.

Este artigo pretende, assim, contribuir para a escassa investigação sobre a eficácia de atividades desenhadas para ajudar os estudantes a criarem compreensões mais robustas da definição formal de limite, apresentando um estudo cujo objetivo é analisar que compreensão evidenciam os estudantes de um curso de formação inicial de professores de Matemática, no Brasil, sobre a definição formal de limite de uma função num ponto, no decorrer da intervenção

[1] Neste artigo, o termo *definição formal* é usado para designar a expressão algébrica, ou equivalente, que define o limite de uma função no ponto, a partir da noção de vizinhança, nomeadamente, $\lim_{x \to x_0} f(x) = L \iff \forall\, \varepsilon > 0$ $\exists\, \delta > 0$ tal que se $x \in D_f$ e $|x - x_0| < \delta$ então $|f(x) - L| < \varepsilon$ (TALL; SMITH; PIEZ, 2008).

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a14

didática descrita. Em particular, procuramos responder às seguintes questões: *i)* Quais os significados que os estudantes atribuem ao limite de uma função no ponto quando explicam/interpretam a sua definição formal? *ii)* Como é que os estudantes representam o limite em diferentes representações, cujos registros assentam nas simbologias da sua definição formal? *iii)* Que conhecimentos mobilizam para resolver problemas que envolvem a definição formal de limite?

2 Aprendizagem com compreensão do conceito de limite de uma função

A compreensão matemática é reconhecidamente um dos grandes objetivos da Educação Matemática (DOMINGOS, 2003; SIMON, 2017). A importância de uma aprendizagem da Matemática, com compreensão, é enfatizada nas orientações curriculares (NCTM, 1991) e suportada em resultados de investigação que salientam que os estudantes que aprendem com compreensão são capazes de explicar significados associados aos conceitos matemáticos, de justificar procedimentos e de aplicar os conhecimentos adquiridos no aprendizado de novos conceitos e resolver problemas matemáticos (DOMINGOS, 2001).

A compreensão tem sido abordada por vários autores com o objetivo de explicar a construção do conhecimento. Para Skemp (2006), a compreensão pode ser *Instrumental*, caracterizada pela memorização de regras ou métodos que permitem saber usá-los na resolução de problemas, ou *Relacional,* que consiste na concepção de uma estrutura conceitual rica e integrada, que permite relacionar os significados, os procedimentos e as representações, possibilitando a sua mobilização na resolução de novos problemas. É esta estrutura conceitual que permite uma aprendizagem com compreensão e, por isso, pesquisas anteriores sobre a aprendizagem do limite têm indicado que os significados a ele atribuídos, o uso de suas representações e a resolução de problemas que o envolve, constituem elementos que apoiam a investigação sobre a sua compreensão pelos estudantes (DOMINGOS, 2001, 2003; JUTER, 2006; KARATAS; GUVEN; CEKMEZ, 2011).

2.1 Os significados e a compreensão de limite

Os estudos para analisar a compreensão dos estudantes sobre o limite de uma função apoiam-se, frequentemente, na teoria de Tall e Vinner (1981) do *Conceito-Imagem* e *Conceito-Definição*. Segundo os autores, o *Conceito-Imagem* descreve a estrutura cognitiva total associada ao conceito matemático, incluindo todas as imagens mentais, propriedades e

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a14

processos. Associada a esta estrutura, os autores denominam por *Conceito-Imagem evocado* a parte do *Conceito-Imagem* ativada num dado contexto, não sendo necessariamente tudo o que o estudante sabe sobre o conceito.

O conjunto de palavras usado pelo estudante para comunicar ideias, a partir do seu *Conceito-Imagem*, é definido pelos autores como *Conceito-Definição,* o qual pode ser ensinado ao estudante ou construído por ele, sendo aperfeiçoado ao longo do tempo, e que pode ser diferente do que é aceite pela comunidade matemática.

Os significados são usados para analisar a compreensão dos estudantes por resultarem de aspectos por eles mobilizados dos seus *Conceito-Imagem evocado* e *Conceito-Definição* (DOMINGOS, 2003). Estes significados podem ser caracterizados por conceitos-imagem corretos e apropriados à situação em questão, como por exemplo, a concepção do limite como resultado da implicação baseada na noção de vizinhanças $x \in V_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in V_\varepsilon(L)$ e que é necessária à compreensão da definição formal de limite.

No entanto, os significados também podem inexistir ou serem conflitantes, quando as concepções dos estudantes são evocadas do *Conceito-Imagem* de forma desconexa com o *Conceito-Definição* (TALL; VINNER, 1981) revelando, por exemplo, incompreensão do uso dos quantificadores (ε e δ) ou de sua ordem na definição formal. Neste sentido, é amplamente reconhecido o valor de envolver ativamente os estudantes na construção das suas compreensões, relacionando as noções intuitiva e formal de limite de modo a darem sentido à notação algébrica presente na definição formal de limite, isto é, a formalizarem a sua compreensão informal de limite (SWINYARD; LARSEN, 2012).

2.2 As representações na compreensão de limite

Uma vez que a comunicação em Matemática se estabelece com base em representações, estas são referidas como fundamentais na construção de conceitos matemáticos pelos estudantes, existindo evidências de uma relação entre o seu desempenho e as representações por eles usadas (DUVAL, 2003; KARATAS; GUVEN; CEKMEZ, 2011).

Para Duval (2003), o uso de diversas representações ajuda os estudantes a obterem uma ideia mais completa de um conceito matemático e, por isso, aprendê-lo requer uma abordagem que contemple essa diversidade. A capacidade de reconhecer e representar o limite, nas suas diferentes representações, é considerada um requisito para a sua compreensão, sendo as representações verbais, numéricas, algébricas e geométricas as mais consideradas no seu ensino (DOMINGOS, 2003; TALL, 1992; KARATAS; GUVEN; CEKMEZ, 2011).

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a14

A representação verbal do limite consiste na sua descrição utilizando a linguagem coloquial ou natural, sendo muito comum o uso de termos como, “se aproxima”, “tende” e “tão pequeno quanto se queira” para expressar ideias sobre o limite. A representação numérica está presente quando se usam sequências de números para descrever as aproximações $x \to x_0$ e $f(x) \to L$. As representações algébricas contemplam as expressões matemáticas que recorrem às simbologias da álgebra, como, por exemplo, a expressão algébrica da definição formal de limite no ponto. As representações geométricas contemplam a representação gráfica de uma função, apoiada num sistema de coordenadas cartesianas, contendo registros indicativos das variáveis do limite ($x \to x_0$ / $f(x) \to L$) por meio de setas, intervalos abertos ou de vizinhanças.

O uso das diferentes representações do limite, assentes nas simbologias da sua definição formal, pode contribuir para a compreensão dessa definição, desenvolvendo nos estudantes a capacidade de pensar abstratamente e de construir significados adequados sobre o limite (DOMINGOS, 2003; TALL; SMITH; PIEZ, 2008). Segundo Domingos (2003), um estudante que é capaz de operar com diversas representações e estabelecer conexões entre os seus registros, explicando o significado das simbologias $|x - x_0| < \delta$ e $|f(x) - L| < \varepsilon$ em termos das vizinhanças $V_\delta(x_0)$ e $V_\varepsilon(L)$, reconhecendo o papel dos quantificadores δ e ε nesses registros e reconhecendo o limite como resultado da implicação ($x \in V_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in V_\varepsilon(L)$), evidencia ter uma concepção adequada da definição formal, necessária à compreensão de limite.

O uso de diversas representações de um mesmo objeto matemático aponta para a necessidade de as transformar. Para Duval (2003), as transformações podem ocorrer de duas formas distintas, nomeadamente, *tratamento* e *conversão*. Os *tratamentos* são transformações realizadas dentro do mesmo registro de representação enquanto que as *conversões* são realizadas entre diferentes registros de representação, conservando o mesmo objeto. O autor realça ainda a importância de os estudantes serem capazes de trabalhar dentro e entre os diferentes registros, com fluência, a fim de alcançarem compreensão na aprendizagem.

2.3 A definição de limite na resolução de problemas que o envolvem

A resolução de problemas matemáticos envolve atividade criativa de formulação de conjecturas e sequências de testar, modificar e redefinir conjecturas até ser possível produzir uma demonstração formal de um teorema ou propriedade (TALL, 1991). No entanto, é comumente aceite que os estudantes não “sabem” as definições que precisam para realizar uma tarefa matemática que requeira o uso da definição do limite, como a demonstração de um teorema, para a qual a sua memorização não é suficiente (EDWARDS; WARD, 2008).

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a14

A compreensão do limite de funções está ligada com a capacidade de mobilizar conhecimentos para resolver problemas que o envolvam (KARATAS; GUVEN; CEKMEZ, 2011). Os problemas de análise de erros que requerem a identificação do erro em expressões ou resoluções matemáticas, que se propõem definir formalmente o limite e a sua correção justificada (JUTER, 2006), bem como os de validação matemática correspondentes à demonstração de conjecturas, propriedades ou teoremas matemáticos, a partir da aplicação da sua definição formal (TALL, 1991), têm importantes objetivos didáticos, sendo frequentemente usados para conduzir os estudantes à formalização do limite (SWINYARD; LARSEN, 2012). Entre eles, destacam-se a promoção de uma profunda compreensão conceitual e do papel das definições matemáticas, além de constituir uma oportunidade para os estudantes desenvolverem a capacidade de pensar abstratamente sobre o limite (EDWARDS; WARD, 2008; TALL, 1992).

Deste modo, a aprendizagem com compreensão da definição formal de limite evidencia-se quando o estudante é capaz de: *i)* reconhecer o limite quando representado algebricamente pela sua definição formal ou geometricamente recorrendo a registros que envolvem a simbologia contida nesta definição, atribuindo-lhe significado correto e apropriado ao contexto em questão; *ii)* de apresentar explicações corretas das simbologias $|x - x_0| < \delta$ e $|f(x) - L| < \varepsilon$, dos quantificadores (ε e δ) e de sua ordem, na referida definição formal; *iii)* representar geometricamente o limite a partir da conversão da sua representação algébrica, expressa pela definição formal; *iv)* representar corretamente o limite por meio de sua definição formal; e *v)* de mobilizar conhecimentos sobre a definição formal de limite e aplicá-los corretamente na validação do limite e na análise de erros (DOMINGOS, 2003; SWINYARD; LARSEN, 2012).

3 Metodologia do estudo

Este estudo é parte de uma investigação qualitativa e interpretativa (COUTINHO, 2011) mais abrangente sobre a aprendizagem com compreensão do conceito de limite e continuidade de uma função. Tem por base uma experiência de ensino (STEFFE; THOMPSON, 2000) realizada no 1º semestre de 2016 com os 19 estudantes iniciantes do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro (IFRJ), que frequentavam a disciplina de Pré-Cálculo, lecionada pelo investigador e primeiro autor deste artigo, e que não possuíam ainda conhecimento sobre o limite de funções. A experiência de ensino compreendeu um total de 84 aulas de 45 minutos cada em 11 semanas letivas e envolveu a aplicação de 17 tarefas exploratórias abordando os conceitos de limite e

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a14

continuidade recorrendo ao uso do GeoGebra.

Neste texto focamo-nos em quatro tarefas exploratórias (T_4, T_5, T_8 e T_{15}) da experiência de ensino que visa promover a aprendizagem com compreensão da definição formal de limite de uma função num ponto.

Esta aprendizagem envolve os seguintes aspectos, referidos na literatura (COTTRILL et al., 1996; DOMINGOS, 2003; JUTER, 2006; TALL, 1992) como objetivos de aprendizagem num curso de introdução ao Cálculo: *i)* representar o limite por meio da expressão da sua definição formal e geometricamente; *ii)* reconhecer o limite a partir de sua definição formal; e *iii)* aplicar a definição formal para provar a existência do limite.

Estas tarefas foram realizadas após os estudantes terem explorado as noções intuitivas de limite pela aproximação ao objeto e o cálculo do limite por procedimentos algébricos, asnoções intuitivas e o cálculo de limite infinito $[\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty]$ e as noções intuitivas de continuidade de função no ponto. Cada uma das tarefas foi realizada em três aulas consecutivas, as quais seguiram uma abordagem exploratória (CANAVARRO, 2011) que contemplou quatro momentos: a apresentação da tarefa, a sua realização de forma autônoma pelos estudantes, trabalhando em pares ou em trio, a discussão coletiva das suas resoluções e a sistematização das aprendizagens pelo professor.

A recolha de dados incluiu a observação participante com gravação em áudio e vídeo das aulas lecionadas e as produções escritas dos estudantes na resolução das tarefas (STEFFE; THOMPSON, 2000). A análise dos dados relativos à compreensão que os estudantes evidenciam sobre a definição formal de limite num ponto tem por base um referencial de três categorias (quadro 1), nomeadamente, os *significados*, as *representações* e a *resolução de problemas*, que são consideradas no quadro teórico como componentes dessa compreensão.

Compreensão da Definição Formal	
Significados	Aspectos do *Conceito-Imagem evocado* e *Conceito-Definição* de limite, mobilizados pelos estudantes, que revelam a sua concepção sobre este conceito matemático.
Representações	Representações usadas pelos estudantes para reconhecer o limite algébrica e geometricamente, cujos registros assentam nas simbologias da definição formal, e para realizar transformações (tratamentos e conversões) entre elas.
Resolução de Problemas	Conhecimentos mobilizados pelos estudantes para resolver problemas envolvendo a definição formal de limite, nomeadamente, a análise de erros e a validação de conjecturas matemáticas.

Quadro 1 – Categorias de análise de dados e respectivos descritores.
Fonte: Elaboração dos autores, 2017.

Na seção seguinte apresentamos os resultados da análise, organizada pelas categorias descritas e evidenciada com excertos das resoluções das tarefas (designadas por Q – questão da

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a14

tarefa e T – tarefa) pelos estudantes cujos nomes são fictícios.

4 Resultados

4.1 Significados de limite

Os significados que os estudantes atribuem ao limite foram evidenciados nas Q_1T_5 e Q_1T_{15}, nas quais foram solicitados a explicar o significado da expressão $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ *tal que se* $x \in D$ *e* $|x - 2| < \delta$ *então* $|f(x) - 4| < \varepsilon$ que define formalmente o limite e na Q_5T_5, quando justificam a existência do $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$ representado geometricamente com elementos baseados na simbologia desta definição.

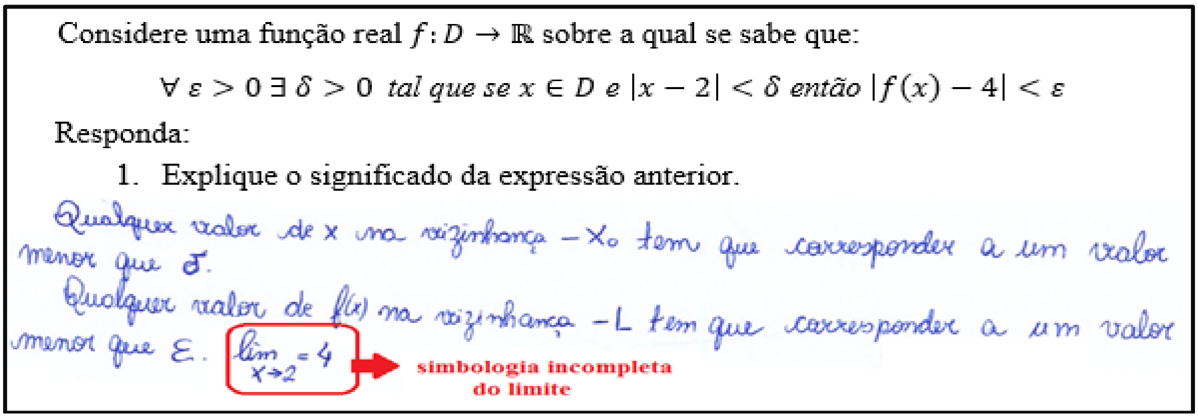
Três grupos, na Q_1T_5, e quatro grupos, na Q_1T_{15}, apresentaram *conceitos-imagem* associados ao significado de limite como *resultado de um processo de aproximação ao objeto*. Nas suas respostas, termos como "*tende a*", "*se aproxima de*" e "*aproximando-se*" são usados para traduzir as aproximações simultâneas de $|x - 2| < \delta$ e $|f(x) - 4| < \varepsilon$, conforme exemplificado nas respostas de Joelson e Jorge (Q_1T_5): "*Para todo valor de* $x \to x_0 = 2$*,* $f(x)$ *se aproxima de 4*"; e de Luiz e Rui (Q_1T_{15}): "*Significa que quando* x *tende a* 2*, a função tende a* 4*. Logo* $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$" (Produção escrita, 2016).

O significado de limite como resultado de uma *correspondência implicativa baseada na noção de vizinhança* ($x \in V_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in V_\varepsilon(L)$) está associado aos *conceitos-imagem* de outros três grupos de estudantes, na Q_1T_5, e dos restantes quatro grupos que responderam à Q_1T_{15}. Os estudantes apresentaram explicações corretas das simbologias $|x - 2| < \delta$ e $|f(x) - 4| < \varepsilon$, baseadas na noção de vizinhança e reconhecem o limite nesta correspondência evidenciado pelo uso da simbologia $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$, tal como na resposta de Adilson e Soares na Q_1T_5: "*Significa que* $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$*, onde a expressão* $|x - 2| < \delta$ *é a vizinhança em torno de* x_0 *e* δ *é o raio, e* $|f(x) - 4| < \varepsilon$ *representa a vizinhança em torno de* L *e* ε *é o raio*" e na de Fátima e Miriam na Q_1T_{15}: "*Para uma vizinhança em torno* $x_0 = 2$ *de raio* δ *, a função* $f(x)$ *varia em torno de uma vizinhança de* $L = 4$ *e raio* ε *.* $\operatorname{Lim}_{x \to 2} f(x) = 4$" (Produção escrita, 2016).

Os outros três grupos de estudantes que responderam à Q_1T_5, incluindo o único grupo que consideramos não ter reconhecido o limite nesta tarefa, parecem não ter atribuído significado ao limite traduzido na sua definição formal. Estes estudantes apresentaram explicações incompletas, por vezes até incoerentes, indicativas de memorização de algumas das

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a14

simbologias da definição formal de limite, revelando dificuldades na sua compreensão, tal como se observa na resposta de Beatriz, André e Paulo (Figura 1):


Considere uma função real $f: D \to \mathbb{R}$ sobre a qual se sabe que:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \textit{tal que se}\ x \in D\ e\ |x-2| < \delta\ \textit{então}\ |f(x)-4| < \varepsilon$$

Responda:

1. Explique o significado da expressão anterior.

Qualquer valor de x na vizinhança $-x_0$ tem que corresponder a um valor menor que δ.
Qualquer valor de $f(x)$ na vizinhança $-L$ tem que corresponder a um valor menor que ε. $\boxed{\lim_{x\to 2} = 4}$

Figura 1 – Resposta do trio Beatriz, André e Paulo à Q_1T_5.
Fonte: Dados da pesquisa (2016).

Esta explicação confusa e incorreta das simbologias $|x - x_0| < \delta$ e $|f(x) - L| < \varepsilon$ revela incompreensões no significado de vizinhança, pois os estudantes afirmam "*x(...) tem que corresponder a um valor menor que δ*" (Produção escrita, 2016), não se apercebendo que será a distância do x *ao* x_0 e não o x, que terá um valor inferior a δ. A simbologia incompleta que usaram para representar o limite mostra que reconheceram o limite na sua definição formal, mas que a memorizaram sem lhe atribuir significado.

Já na Q_5T_5, após os estudantes terem explorado o limite representado geometricamente – numa *applet* do GeoGebra – contendo registros assentes na simbologia da definição formal, todos os grupos atribuíram-lhe significado. Quatro destes grupos reconheceram a existência do limite nas condições exploradas, apresentando *conceitos-imagem* associados ao significado de limite como *resultado de um processo de aproximação ao objeto*, como verificado quando Beatriz, André e Paulo respondem "*Sim,* $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$*. Quando x tende a* 2*, $f(x)$ tende a* 4" (Produção escrita, 2016) à questão "O $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$ existe? Caso exista, qual é o seu valor? Justifique sua resposta".

Três grupos atribuíram significado ao limite como *resultado da igualdade dos limites laterais*, concluindo, como Miriam e Fátima, que o limite é 4 e justificaram com base na igualdade dos limites laterais: "*Existe.* $L = 4$, $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = 4$" (Produção escrita, 2016). Os dois pares restantes atribuíram ao limite o significado do resultado de uma *correspondência implicativa baseada na noção de vizinhança.* Por exemplo, Miguel e Talita reconhecem a existência de limite e indicam corretamente o seu valor, recorrendo à definição formal de limite para justificar a sua resposta (Figura 2):

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a14

5. Nestas condições, o $\lim_{x\to 2} f(x)$ existe? Caso exista, qual é o seu valor? Justifique sua resposta.

Sim, $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$ porque $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tal que $x \in D$ e $|x - 2| < \delta$ então $|f(x) - 4| < \varepsilon$.

Figura 2 – Resposta do par Miguel e Talita à questão 5 da tarefa 5.
Fonte: Dados da pesquisa (2016).

A resposta destes estudantes pode parecer uma escrita memorizada da definição do enunciado da Q_1T_5. No entanto, o diálogo entre eles durante a resolução da tarefa indica que compreenderam a simbologia da definição formal, atribuindo-lhe significado ao estabelecer uma correspondência implicativa entre as vizinhanças ($x \in V_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in V_\varepsilon(L)$), e o papel dessa definição na justificação da sua resposta:

> ***Talita:*** *Sim, quanto mais diminuir o valor de* ε*, à medida que* x *se aproxima de* 2*, os valores de* $f(x)$ *aproximam-se do valor do limite. (...) Se eu diminuo um (*ε*) o outro (*δ*) também diminui. (...) Para mim sim,* 4.
> ***Miguel:*** *O que você entende agora se ele [professor] perguntar para você explicar?*
> ***Talita:*** *Aqui está querendo dizer que, (...) vou aproximar tanto – o valor de* δ *e o valor de* ε *são tão pequenos, mas tão pequenos – que vai existir imagem de* $f(x)$ *no ponto* 2*. Aqui (recorrendo à* $V_\varepsilon(4)$*) o intervalo é aberto. Eu não tenho que ter imagem! Mas vai se aproximar tanto que vai ter imagem neste ponto. Entendeu? (...). Na aula passada eu respondi um negócio de se aproxima (...) Ele quer que a gente explique assim, desta forma algébrica. Existe limite pois (...) (lê a sua resposta). Vamos escrever?*
> (Gravação áudio-visual, 2016).

4.2 Representações

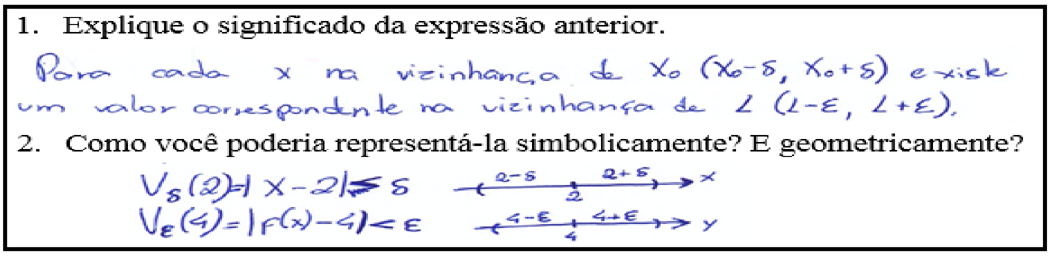
Nas questões Q_1T_5, Q_2T_{15} e Q_5T_5 os estudantes foram desafiados a reconhecer o limite quando representado simbolicamente pela sua definição formal (Q_1T_5 e Q_2T_{15}) e geometricamente com registros baseados na simbologia desta definição (Q_5T_5).

Oito dos nove grupos, na Q_1T_5, e todos os grupos, na Q_2T_{15}, reconheceram que a expressão apresentada no enunciado "$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tal que $|x - 2| < \delta$ então $|f(x) - 4| < \varepsilon$" traduzia o limite. Eles recorreram à linguagem natural (representação verbal), dando explicações adequadas e elucidativas das simbologias $|x - 2| < \delta$ e $|f(x) - 4| < \varepsilon$ para traduzir o limite, complementando-a com a simbologia $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$ para expressar o seu valor, conforme exemplificado nas respostas de Adilson e Soares (Q_1T_5): "*Significa que* $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$ *onde a expressão* $|x - 2| < \delta$ *é a vizinhança em torno de* x_0 *e* δ *é o raio, e* $|f(x) - 4| < \varepsilon$ *representa a vizinhança em torno de L e* ε *é o raio*" e de Talita e Clara (Q_2T_{15}): "*A definição de limite é o significado da expressão anterior que relaciona a vizinhança em*

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a14

torno de x_0 e $f(x)$. *Simbolicamente:* $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$” (Produção escrita, 2016).

Apenas o par Gil e Maria, na Q_1T_5, demonstrou não ter reconhecido o limite, a partir de sua definição formal. Esse par não apresentou nenhuma referência de que a expressão apresentada se tratava do $\lim_{x \to 2} f(x)$ (Figura 3).


1. Explique o significado da expressão anterior.

Para cada x na vizinhança de X_0 $(X_0-\delta, X_0+\delta)$ existe um valor correspondente na vizinhança de L $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$.

2. Como você poderia representá-la simbolicamente? E geometricamente?

$V_\delta(2) = |x-2| \leq \delta$ $2-\delta$ 2 $2+\delta$ x

$V_\varepsilon(4) = |f(x)-4| < \varepsilon$ $4-\varepsilon$ 4 $4+\varepsilon$ y

Figura 3 – Resposta do par Gil e Maria às (Q_1 e Q_2)T_5.
Fonte: Dados da pesquisa (2016).

A resposta à questão 1 evidencia que este par possui uma noção do significado das simbologias, $|x-2| < \delta$ e $|f(x)-4| < \varepsilon$ e da correspondência $x \in V_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in V_\varepsilon(L)$. No entanto, a falta de indicação dos valores de x_0 e L e da correspondência entre as vizinhanças $V_\delta(x_0)$ e $V_\varepsilon(L)$, através da relação entre seus raios, $\delta\ e\ \varepsilon$, (questão 1) e de registros incorretos das representações algébrica e geométrica do limite (questão 2), revelam dificuldades no reconhecimento do limite.

Na Q_5T_5, todos os nove grupos reconheceram o limite através da sua representação geométrica, cujos registros assentam nas simbologias presentes na definição formal. Seis grupos recorreram à representação verbal, apresentando argumentos adequados sobre o limite e complementam-na com a expressão $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$ para justificar sua existência, conforme é exemplificado na resposta de Gil e Maria “*Sim.* $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$, *pois para valores de* x *se aproximando de* $x_0 = 2$ *os valores de* $f(x)$ *se aproximam de* 4”(*P*rodução escrita, 2016). Os outros três grupos recorreram a representações algébricas do limite para justificar a sua existência a partir da igualdade dos limites laterais, tal como na resposta de Fátima e Miriam “*Existe,* $L = 4$, $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = 4$” (Produção escrita, 2016).

A capacidade dos estudantes representarem o limite de uma função, algébrica e geometricamente, foi analisada nas questões $Q_{12}T_4$, Q_2T_5 e Q_3T_{15}, nas quais foram requeridas também a realização de transformações entre as representações.

A $Q_{12}T_4$ pretendia verificar se os estudantes eram capazes de traduzir o limite por uma expressão algébrica envolvendo a noção de vizinhanças, representadas pelas simbologias $V_\delta(2)$ e $V_\varepsilon(8)$ ou por intervalos $(2-\delta, 2+\delta)$ e $(8-\varepsilon, 8+\varepsilon)$, uma vez que já tinham explorado tais ideias em questões anteriores. Três pares recorrem à representação verbal do

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a14

limite e, para defini-lo, complementam-na adequadamente com representações algébricas das variáveis do limite em questão, tendo por base a noção de vizinhança, como exemplificado no diálogo entre Miriam e Fátima durante a resolução e a sua resposta a esta questão (Quadro 2).

Fátima: *Vai, vamos ver a* 12. ***Miriam:*** *Deixa eu ler (lê a questão). Então pera aí! Para* $x \in V_\delta(2)$... *Coloca então: Para* $\lim_{x\to2} 2x+4=8$ *temos que, para* $x \in V_\delta(2)$, *isso quer dizer que* x *está na vizinhança de* 2. *Temos que, não! Pera aí! Coloca uma setinha! (diz à Fátima que está a escrever a resposta)* $y = f(x)$ *pertence a vizinhança do limite,* 8. ***Fátima:*** *Ah que lindeza que ficou! Então ficou o* x *está na vizinhança do* x_0 , *e o* y *na vizinhança do limite. E acabou!* (Gravação áudio-visual, 2016)
12. A partir das ideias trabalhadas nas questões anteriores apresente uma definição do $\lim_{x\to2} 2x+4=8$, tomando como base as ideias de vizinhanças $V_\varepsilon(8)$ e $V_\delta(2)$. Para $\lim_{x\to2} 2x+4=8$, temos que para $X \in V_\delta(2) \to Y \in V_\varepsilon(8)$

Quadro 2 – Diálogo do par Fátima e Miriam e sua resposta à $Q_{12}T_4$.
Fonte: Dados da pesquisa (2016).

Este par recorreu à representação verbal e utilizou corretamente uma implicação algébrica ($x \in V_\delta(2) \to y \in V_\varepsilon(8)$) para indicar que o limite é resultado do processo em que as imagens $f(x)$ pertencem à vizinhança de $L = 8$, sempre que os valores de x pertencem à vizinhança de $x_0 = 2$.

Os demais seis pares de estudantes não conseguiram traduzir o limite por uma expressão algébrica que envolvesse a noção de vizinhanças. Estes pares apresentaram respostas incompletas e até incoerentes do limite, revelando possuírem dificuldades em conceber o limite como resultado da implicação $x \in V_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in V_\varepsilon(L)$, conforme se verifica na resposta de Vítor e Eliseu: "*Os <u>valores das vizinhanças</u> de $x_0(\delta)$ será <u>sempre metade</u> dos <u>limites</u> de $L(\varepsilon)$*" (Produção escrita, 2016). A resposta deste par não apresenta uma definição de limite, uma vez que não indica a implicação $x \to x_0 \Rightarrow f(x) \to L$. Além disso, os termos sublinhados nesta resposta correspondem a explicações incorretas, de resultados também incorretos obtidos na exploração da tarefa sobre o limite em questão.

Nas questões Q_2T_5 e Q_3T_{15}, em que os estudantes eram solicitados a traduzir geometricamente o limite expresso pela sua definição formal, oito grupos na Q_2T_5 e sete grupos na Q_3T_{15} conseguiram representá-lo geometricamente. Destes, dois grupos na Q_2T_5 e três grupos na Q_3T_{15} representaram apenas o caso em que $L = f(x_0)$. Os outros seis grupos na Q_2T_5 e cinco grupos na Q_3T_{15}, uma vez que não havia informação sobre a existência de $f(x_0)$, representaram os três possíveis casos de existência do limite (L) num ponto, nomeadamente, *i)* $L = f(x_0)$, *ii)* $L \neq f(x_0)$ ou *iii)* o limite (L) existir e a função não estar definida em x_0.

Todos estes grupos foram capazes de converter a representação algébrica para geométrica e explicar as variáveis relacionadas aos registros convertidos, por exemplo,

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a14

representar geometricamente a expressão $|x - x_0| < \delta$ em termos de vizinhança $V_\delta(x_0)$, apresentando um correto tratamento da representação geométrica do limite, conforme exemplificado nas respostas de Vítor e Eliseu (Q_2T_5) e de Pedro e Cláudio (Q_3T_{15}), apresentadas na Figura 4.

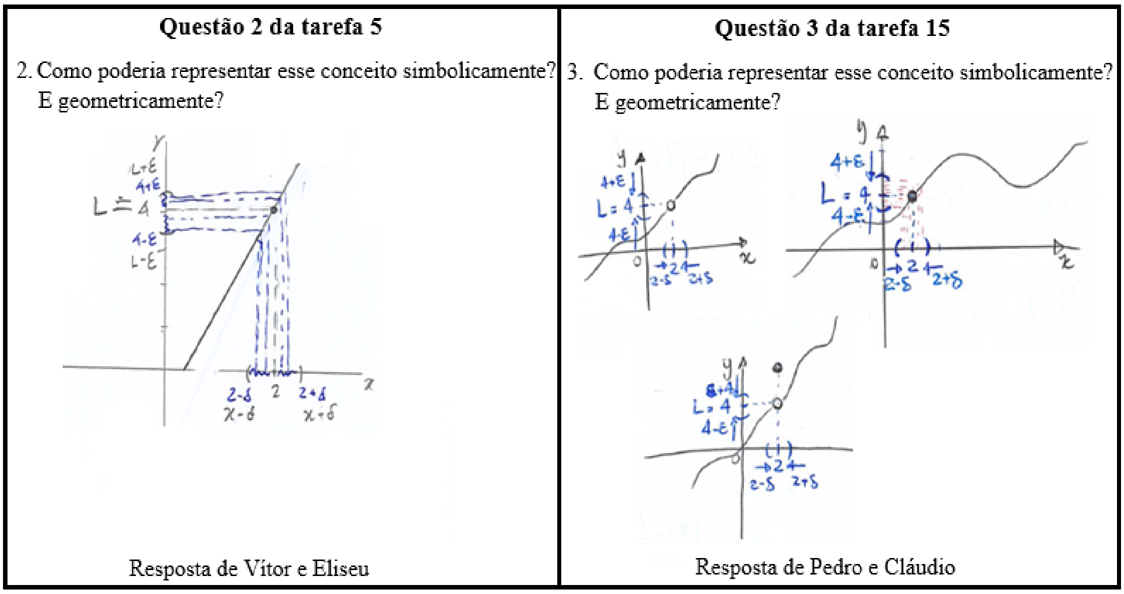


Figura 4 – Resposta de pares de estudantes às Q_2T_5 e Q_3T_{15}.
Fonte: Dados da pesquisa (2016).

Estes estudantes apresentaram no plano cartesiano o esboço do gráfico de uma função, representações corretas das simbologias $|x - 2| < \delta$ e $|f(x) - 4| < \varepsilon$, formadas por intervalos abertos centrados em $x_0 = 2$ e $f(x) = 4$ e por esquemas elucidativos de pontos $(x, f(x))$ ou por setas, apresentando assim correta representação geométrica do limite.

Os pares Gil e Maria, na Q_2T_5, e Miguel e Paulo, na Q_3T_{15}, embora apresentem registros geométricos no plano cartesiano de expressões presentes na definição formal, revelam dificuldades na transformação (tratamento e conversão) da representação geométrica devido aos erros conceituais no registro dos extremos de $V_\varepsilon(L)$, colocando por exemplo $(f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon)$ em vez de $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$, e à falta do esboço do gráfico da função e de indicações de $x \in V_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in V_\varepsilon(L)$, tal como observado na resposta de Miguel e Paulo (Figura 5):

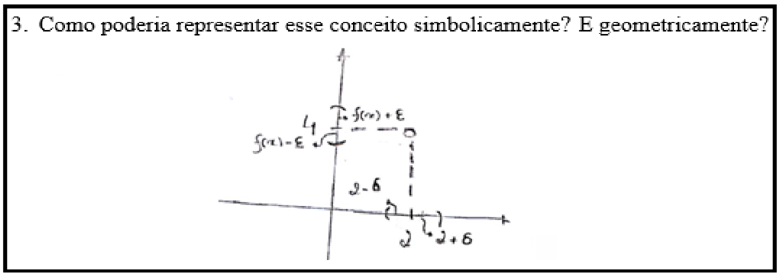


Figura 5 – Resposta do par Miguel e Paulo à Q_3T_{15}.
Fonte: Dados da pesquisa (2016).

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a14

4.3 Resolução de problemas

Esta componente da compreensão foi analisada nas Q_8T_{15} e Q_2T_8, que requeriam a aplicação de conhecimento sobre a definição formal de limite para resolverem problemas que a envolvessem, tais como a identificação de expressões algébricas que definem $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$ ou de incorreções nessas expressões (Q_2T_8) e a realização de uma demonstração (Q_8T_{15}).

Na Q_2T_8, os estudantes deveriam analisar a expressão algébrica apresentada em cada um de seus 4 itens e associá-la a uma das afirmações: (1) Definição formal de $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$; (2) Definição formal de $\lim_{x\to 1} f(x) = -\infty$; e (3) Não corresponde à definição formal de nenhum dos limites anteriores.

Verifica-se que nove grupos responderam corretamente a todos os itens, mobilizando conhecimento sobre a definição formal de limite, particularmente os significados dos quantificadores ε e δ e da sua ordem, para identificarem as expressões corretas e justificarem incorreções identificadas. No item *a)* $\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, \delta > 0$ *tal que se* $x \in D_f$ *e* $|x-1| < \delta$ *então* $|f(x)-2| < \varepsilon$, os estudantes reconheceram a definição formal do limite baseando-se na relação entre $|x - x_0| < \delta$ e $|f(x) - L| < \varepsilon$ e os seus respectivos quantificadores ε e δ, tal como na resposta de Talita (Figura 6):

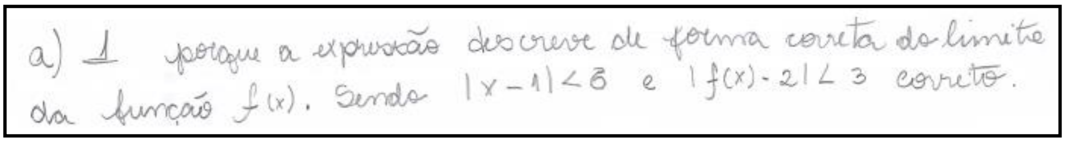


Figura 6 – Resposta da aluna Talita à $Q_{2(a)}T_8$.
Fonte: Dados da pesquisa (2016).

No item *b)* $\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, \delta > 0$ *tal que se* $x \in D_f$ *e* $|x-1| < \delta$ *então* $|f(x)-2| > \varepsilon$, estes estudantes identificaram que a referida expressão não traduzia a definição formal do limite $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$. Fátima e Miriam, por exemplo, usaram o significado de vizinhança para justificar corretamente que $|f(x)-2| > \varepsilon$ representava as imagens $f(x)$ fora da vizinhança de $L = 2$, concluindo que a expressão não representava uma definição de limite, como se evidencia no diálogo seguinte e na sua resposta à questão (Quadro 3).

Diálogo	***Fátima:*** *Eu coloquei que não existe porque aqui é maior que* ε *(referindo-se a* $|f(x)-2| > \varepsilon$ *). Pois para todo* $\varepsilon > 0$ *o* $|f(x)-2| < \varepsilon$. ***Miriam:*** *Sim, deixa eu ver (analisa a expressão). Mas olha só, então se* $|f(x)-2| > \varepsilon$ *, significa que são valores fora desta vizinhança (representa o intervalo* $(\varepsilon - 2, \varepsilon + 2)$*)?* ***Fátima:*** *Sim! É isso mesmo. Representa valores fora da vizinhança de 2. Coloca assim para ficar bonitinho*. (Gravação áudio-visual, 2016)
Resposta	3. Porque $|f(x)-2| > \varepsilon$ não representa vizinhança. Pelo contrário, representa valores fora dessa vizinhança. Todo o resto da sentença está correto. (Produção escrita, 2016)

Quadro 3 – Diálogo e resposta do par Fátima e Miriam à $Q_{2(b)}T_8$.
Fonte: Dados da pesquisa (2016).

No item *c)*, todos os grupos conseguiram identificar e justificar o erro causado pela troca de posição dos quantificadores ε e δ na expressão $\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0$ *tal que se* $x \in D_f$ *e* $|x-1| < \varepsilon$ *então* $|f(x)-2| < \delta$. Estes estudantes foram capazes de associar corretamente cada quantificador à respectiva expressão que o envolvia e identificar a sua ordem na definição formal de limite, tal como se verifica na reposta de Eliseu e Vítor e no diálogo mantido por eles durante a resolução deste item (Quadro 4).

Diálogo	***Vítor:*** *Ele trocou! Este* (δ) *deveria ser com este* ($|x-1| < \varepsilon$) *e este* (ε) *com esse* ($|f(x)-2| < \delta$). *Ok?* ***Eliseu:*** *Pera aí! (analisa a definição formal). Sim, é isso mesmo.* ***Vítor:*** *Ele inverteu! As associações foram invertidas. Tá vendo aqui óh ... (indica que deveria ser* $|x-1| < \delta$ *e* $|f(x)-2| < \varepsilon$). ***Eliseu:*** *Sim, vamos escrever.* (Gravação áudio-visual, 2016)
Resposta	3. Não corresponde, pois as associações estão invertidas/erradas. A vizinhança de x_0 deve ter δ e a vizinhança de $f(x)$, ε. (Produção escrita, 2016)

Quadro 4 – Diálogo e resposta do par Eliseu e Vítor à $Q_{2(c)}T_8$.
Fonte: Dados da pesquisa (2016).

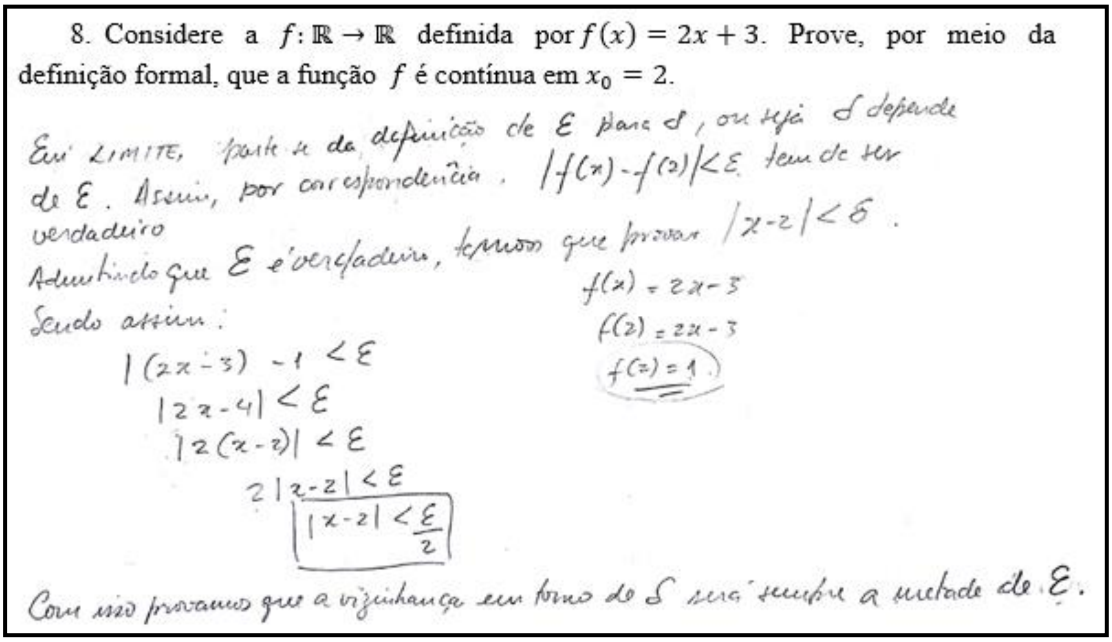
Por fim, no item *d)*, todos os grupos reconheceram a definição formal do limite na expressão $\forall\, M > 0\, \exists\, \delta > 0$ *tal que se* $x \in D_f$ *e* $|x-1| < \delta$ *então* $|f(x)-2| < M$, mesmo contendo uma simbologia (M) diferente da convencional (ε) para representar do raio da vizinhança do limite. Tal como na resposta de Clara e Haziel, "*Mesmo quando trocamos ε da definição formal por outra letra, contanto que as propriedades se mantenham, a representação encontra-se correta*" (Produção escrita, 2016), estes estudantes basearam as suas conclusões na relação estabelecida entre as quantificações $|f(x)-L| < \varepsilon$ e $|x-x_0| < \delta$ e seus quantificadores (ε e δ), evidenciando uma compreensão do papel destes quantificadores na definição formal de limite.

Nesta Q_2T_8, somente o par Elias e Robson não respondeu corretamente a todos os 4 itens. A sua resposta "3. *Não sei explicar*" (Produção escrita, 2016) ao item *d)* revela dificuldades em atribuir significado aos quantificadores e ao seu papel na definição formal. Estes estudantes concluíram que a expressão não traduzia a definição formal de $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$ (indicado na resposta pela opção 3) e não souberam explicar qual a possível incorreção quando o quantificador que representa o raio da vizinhança em torno de L estava representado por M (e não por ε).

Na Q_8T_{15}, pedia-se aos estudantes para provar, usando a definição formal de limite, que a função $f(x) = 2x + 3$ era contínua em $x_0 = 2$. Apenas quatro grupos aplicaram corretamente a definição formal para provar a continuidade. As respostas destes grupos contêm indicações da necessidade de encontrar δ em função de ε que tornam as desigualdades $|x-x_0| < \delta$ e

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a14

$|f(x) - L| < \varepsilon$ verdadeiras, conforme verifica-se na resposta de Eliseu e Vítor (Figura 7).


8. Considere a $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x + 3$. Prove, por meio da definição formal, que a função f é contínua em $x_0 = 2$.

Em LIMITE, parte-se da definição de ε para δ, ou seja δ depende de ε. Assim, por correspondência. $|f(x)-f(2)|<\varepsilon$ tem de ser verdadeiro

Admitindo que ε é verdadeiro, temos que provar $|x-2|<\delta$.

Sendo assim:

$|(2x-3)-1<\varepsilon$

$|2x-4|<\varepsilon$

$|2(x-2)|<\varepsilon$

$2|x-2|<\varepsilon$

$\boxed{|x-2|<\frac{\varepsilon}{2}}$

$f(x)=2x-3$

$f(2)=2x-3$

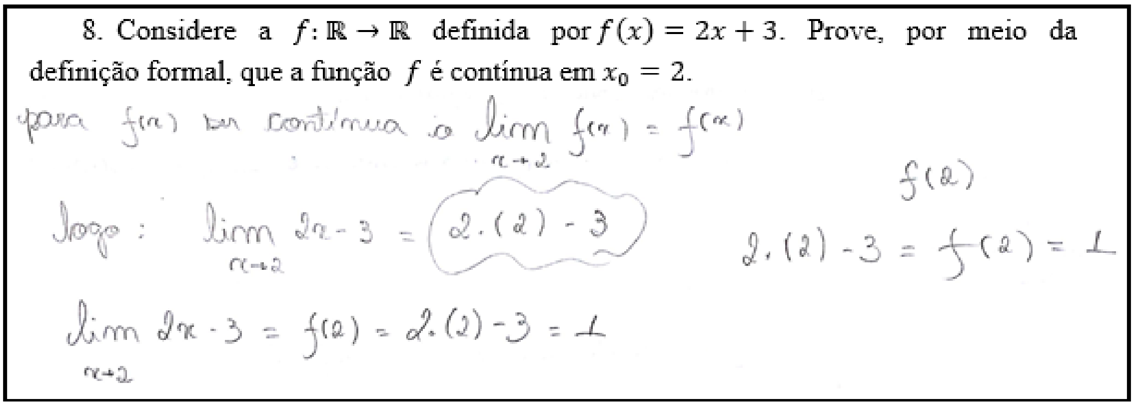
$f(2)=1$

Com isso provamos que a vizinhança em torno de δ será sempre a metade de ε.

Figura 7 – Resposta do par Eliseu e Vítor à Q_8T_{15}.
Fonte: Dados da pesquisa (2016).

Este par de estudantes evidencia compreender a definição formal do limite, indicando a necessidade de determinar δ que valida a inequação $|f(x) - 1| < \varepsilon$. Resolve-a corretamente e encontra o valor de δ em função de ε, concluindo que "δ *será sempre a metade de* ε".

Os outros quatro grupos não aplicaram a definição formal de limite para provar a continuidade. Destes grupos, o par Miguel e Paulo recorreu ao cálculo do limite para provar a sua existência, mesmo tendo sido solicitados a usar a definição formal, evidenciando falta de compreensão do papel da definição formal numa demonstração da continuidade (Figura 8).


8. Considere a $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x + 3$. Prove, por meio da definição formal, que a função f é contínua em $x_0 = 2$.

para $f(x)$ ser contínua o $\lim_{x\to 2} f(x) = f(x)$

$f(2)$

logo: $\lim_{x\to 2} 2x-3 = 2.(2)-3$ $\quad 2.(2)-3 = f(2) = 1$

$\lim_{x\to 2} 2x-3 = f(2) = 2.(2)-3 = 1$

Figura 8 – Resposta do par Miguel e Paulo à Q_8T_{15}.
Fonte: Dados da pesquisa (2016).

Os outros três grupos, apesar de terem escrito corretamente a definição formal de $\lim_{x\to 2} f(x) = 1$, não a usaram para concluir sobre a existência de limite e provar a continuidade, como se pode observar na reposta de Gil e Maria que recorreram à noção intuitiva das

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a14

aproximações $x \to 2$ e $f(x) \to 1$ e se apoiaram em tabelas para validar o limite (Figura 9).

8. Considere a $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x + 3$. Prove, por meio da definição formal, que a função f é contínua em $x_0 = 2$.

para $x < 2$

x	$f(x) = 2x - 3$
1,9	$2 \cdot 1,9 - 3 = 0,8$
1,99	$2 \cdot 1,99 - 3 = 0,98$
1,999	$2 \cdot 1,999 - 3 = 0,998$

para $x > 2$

x	$f(x) = 2x - 3$
2,1	$2 \cdot 2,1 - 3 = 1,2$
2,01	$2 \cdot 2,01 - 3 = 1,02$
2,001	$2 \cdot 2,001 - 3 = 1,002$

Podemos concluir que:
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tal que se $x \in D$ e $|x - 2| < \delta$ então $|f(x) - 1| < \varepsilon$
Sendo $f(2) = 1$ $(f(2) = 2 \cdot 2 - 3 = 1)$
Concluimos que
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tal que se $x \in D$ e $|x - 2| < \delta$ então $|f(x) - f(2)| < \varepsilon$
$\lim_{x \to 2} 2x - 3 = 1 = f(2)$

Figura 9 – Resposta do par Gil e Maria à Q_8T_{15}.
Fonte: Dados da pesquisa (2016).

5 Conclusões e implicações do estudo

Os resultados do estudo permitem-nos concluir que as três dimensões adotadas do referencial teórico se revelaram úteis para analisar a compreensão que os estudantes evidenciam sobre a definição formal de limite de uma função num ponto, no decorrer da intervenção didática. A diversidade de significados corretos que a generalidade dos estudantes atribui ao limite e que emergem dos seus *conceito-imagem* (TALL; VINNER, 1981), nomeadamente, o limite como um processo de aproximação ao objeto, como resultado da igualdade dos limites laterais e como resultado de uma correspondência implicativa baseada na noção de vizinhança, evidencia uma concepção adequada sobre a simbologia contida na definição formal de limite, tal como atestam Domingos (2003) e Swinyard & Larsen (2012), a qual passou a fazer parte dos seus *conceito-definição* (TALL; VINNER, 1981).

Quando solicitados a reconhecerem o limite, *algébrica* e *geometricamente* com registros assentes na simbologia da sua definição formal, recorreram predominantemente à representação *verbal* para explicar adequadamente as simbologias que traduzem o conceito. Para além disso, complementam-na com outras expressões que traduzem igualmente o limite, como por exemplo $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$, mostrando facilidade nas *conversões* e *tratamentos* entre as representações do conceito, o que evidencia compreensão do mesmo, segundo Duval (2003).

Apesar de nem todos os estudantes terem conseguido representar formalmente o limite, no início da aprendizagem da sua definição formal, há evidências que a sua maioria superou

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a14

estas dificuldades iniciais e foram capazes de definir formalmente o limite no final da intervenção. Para além disso, revelaram facilidade em representar geometricamente o limite, a partir da *conversão* da representação algébrica que traduza sua definição formal e realizando *tratamentos* adequados nesta representação geométrica.

No que diz respeito à resolução de problemas, os estudantes foram capazes de aplicar os seus conhecimentos sobre a definição formal de limite para identificarem expressões algébricas que definem corretamente o limite ou justificarem incorreções nelas presentes e para realizarem uma demonstração.

No primeiro caso, os estudantes baseiam-se na relação implicativa entre os quantificadores (δ e ε) e as respectivas vizinhanças ($|x - x_0| < \delta$ e $|f(x) - L| < \varepsilon$) e reconhecem o papel destes quantificadores e da sua ordem na definição formal do limite, evidenciando uma concepção adequada da mesma, necessária à compreensão de limite, tal como defende Domingos (2003).

O uso da definição formal para validação de um limite trouxe maiores dificuldades, pois apenas alguns estudantes o fizeram corretamente. A incompreensão das simbologias $|x - x_0| < \delta$ e $|f(x) - L| < \varepsilon$ e da correspondência $x \in V_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in V_\varepsilon(L)$, dificuldades também identificadas nos estudos de Domingos (2003), Juter (2006) e Cottrill et al. (1996), podem ter contribuído para que alguns estudantes recorressem a argumentos baseados em aproximações ao invés de baseá-los na noção de vizinhança para justificar a existência do limite, e não conseguissem aplicar a definição formal para o validar. Ainda assim, quase todos os estudantes foram capazes de representar algebricamente o limite, traduzindo-o na sua definição formal, diferindo dos resultados de Juter (2006) e Domingos (2003).

Estes resultados permitem afirmar que os estudantes, de forma geral, evidenciam uma *compreensão relacional* (SKEMP, 2006) de limite, sendo possível afirmar que foram capazes de relacionar diferentes significados e diversas representações do conceito e de os mobilizar na resolução de problemas. Apenas um par de estudantes mantém uma *compreensão instrumental* (SKEMP, 2006) no final da intervenção, pois não foram capazes de representar algébrica e geometricamente o limite, nem de usar a definição formal de limite na resolução de problemas.

Ainda que a definição formal de limite seja considerada de difícil aprendizagem para os estudantes dos cursos de introdução ao Cálculo (COTTRILL et al., 1996; TALL; VINNER, 1981), os elementos que emergiram deste estudo dão-nos uma boa indicação de que a exploração em sala de aula dos significados da simbologia nela presente, envolvendo o uso de diferentes representações do limite e sua aplicação na resolução de problemas, pode potenciar a compreensão da definição formal de limite. Contudo, este estudo é apenas uma primeira etapa

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a14

para compreendermos tais potencialidades, o modo como essa compreensão emerge e se desenvolve requer um aprofundamento dos recursos e estratégias que para isso contribuem.

Referências

CANAVARRO, A. P. Ensino exploratório da Matemática: práticas e desafios. **Educação e Matemática**, Lisboa, n. 115, p. 11-17, nov./dez. 2011.

COTTRILL, J. et al. Understanding the limit concept: beginning with a coordinate process scheme. **Journal of mathematical behavior**, New Jersey (NJ), v. 15, n. 2, p. 167-192, jun. 1996.

COUTINHO, C. **Metodologia de Investigação em Ciências Sociais e Humanas**: teoria e prática. 1. ed. Coimbra: Almedina, 2011.

DOMINGOS, A. Contextos escolares que favorecem o pensamento matemático avançado. In: ENCONTRO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA – EIEM, 5., 2001, Consolação. **Livro de Atas do EIEM 2001 – Matemática e comunidades**: a diversidade social no ensino-aprendizagem da matemática. Consolação: SEM-SPCE, 2001, p. 113-122. Disponível em: <http://spiem.pt/DOCS/ATAS_ENCONTROS/2001/2001_12_ADomingues.pdf>. Acesso em: 30 jul. 2017.

DOMINGOS, A. **Compreensão de conceitos matemáticos avançados**: a matemática no início do Superior. 2003. 387f. Tese (Doutoramento em Ciência da Educação) – Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa, Lisboa, 2003.

DUVAL, R. Registros de Representação Semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. (Ed.). **Aprendizagem em Matemática**: registros em representação semiótica. São Paulo: Papirus, 2003. p. 11-33.

EDWARDS, B.; WARD, M. The Role of Mathematical Definitions in Mathematics and in Undergraduate Mathematics Courses. In: CARLSON, M.; RASMUSSEN, C. (Ed.). **Making the Connection**: research and teaching in undergraduate mathematics education**.** Washington: Mathematical Association of America, 2008. p. 223-232.

JUTER, K. **Limits of functions**: University students' concept development. 2006. 175f. Tese (Doutoramento em Educação Matemática) – Departamento de Matemática, Lulea University of Technology, Lulea, 2006.

KARATAS, I.; GUVEN, B.; CEKMEZ, E. A cross-age study of students' understanding of limit and continuity concept. **Bolema**, Rio Claro, v. 24, n. 38, p. 245-264, abr. 2011.

NCTM. **Normas para o currículo e avaliação da Matemática escolar**. Lisboa: APM e IIE, 1991. (Tradução portuguesa da edição original de 1989).

SIMON, M. Explicating mathematical concept and mathematical conception as theoretical constructs for mathematics education research. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, n. 94, p. 117-137, fev. 2017.

SKEMP, R. R. Relational understanding and instrumental understanding. **Mathematics Teaching in the Middle School**, Reston (Virginia), v. 12, n. 2, p. 88-95, set. 2006. (Republicação da edição original de 1976). Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/41182357>. Acesso em: 30 jul. 2017.

STEFFE, L; THOMPSON, P. Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a14

elements. In: LESH, R.; KELLY, A. (Ed.). **Research design in mathematics and science education**. Hillsdale, NJ: Erlbaum, 2000. p. 267-307.

SWINYARD, C; LARSEN, S. Coming to Understand the Formal Definition of Limit: insights gained from engaging students in reinvention. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston (Virginia), v. 43, n. 4, p. 465-493, jul. 2012.

TALL, D. The psychology of advanced mathematical thinking. In: TALL, D. (Ed.). **Advanced Mathematical Thinking**. Dordrecht: Kluwer, 1991. v. 11. p. 3-21.

TALL, D. The Transition to Advanced Mathematical Thinking: Functions, Limits, Infinity, and Proof. In: GROUWS, D. A. (Ed.). **Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning**. New York, NY: Macmillan, 1992. p. 495-511.

TALL, D; VINNER, S. Concept image and concept definition with particular reference to limits and continuity. **Educational Studies in Mathematics**, Nova York, NY, n. 12, p. 151-169, mai. 1981.

TALL, D.; SMITH, D.; PIEZ, C. Technology and Calculus. In: HEIDM. K.; BLUME, G. M. (Ed.). **Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics**. Charlotte, NC: Information Age Publishing, 2008. v. 1. p. 207-258.

Submetido em 31 de Julho de 2017.
Aprovado em 13 de Abril de 2018.