



Adaptación y Validación de un Instrumento de Medición del Concepto de Variable para Universitarios

Adaptation and Validation of an Instrument to Measure the Concept of Variables for University Students


Miguel Alcaraz-Rivera*

 ORCID iD 0000-0003-2350-2794

Cristina Eccius-Wellmann**

 ORCID iD 0000-0001-7681-7840

Pedro Saúl Orenday Yáñez***

 ORCID iD 0000-0002-3420-1252

Resumen

Alumnos de primer ingreso a la universidad cometen errores algebraicos cuya fuente, probablemente, es un uso incorrecto o inadecuado de las variables. Es de interés para la Educación Matemática contar con un instrumento que permita identificar cuáles son los usos y caracterizaciones de la variable que presentan mayor dificultad. El objetivo de este trabajo es la adaptación y validación de un instrumento que cumpla con estas características. Las preguntas del instrumento son un conjunto representativo de la complejidad del objeto matemático *variable* con los tres significados parciales: variable como incógnita, variable como número general y variable en relación funcional. Las caracterizaciones abordan niveles de abstracción que van desde la interpretación a la manipulación y simbolización. Para la validación del cuestionario, éste se aplica a 251 alumnos de las carreras administrativas de una universidad privada en Guadalajara, México. Aquellos ítems con bajas comunalesidades y que en un análisis factorial muestran, ya sea factores inestables o una distribución en factores múltiples se descartan, generando un cuestionario reducido que se aplica a 129 alumnos. La confiabilidad del nuevo cuestionario es buena con un alfa de Cronbach de 0.808. Se comprueba su validez con once factores relativos a las distintas caracterizaciones de los tres usos de la variable, que explican el 75.68% de la varianza total.

Palabras clave: Álgebra. Concepto de variable. Instrumento de Medición. Matemáticas.

Abstract

University students make algebraic errors whose source is probably an incorrect or inappropriate use of variables. It is interesting for Mathematics Education to have an instrument that identifies the uses and characterizations of the variable that presents the greatest difficulty. This work's objective is to adapt and validate an instrument that meets these characteristics. The instrument questions represent the complexity of the mathematical object *variable* with three partial meanings: variable as unknown, variable as a general number, and variable in functional relation. The characterizations address levels of abstraction ranging from interpretation to manipulation and symbolization.

* Dr. en Ciencias con Especialidad en Óptica (INAOE). Profesor Investigador (UP), Zapopan, Jalisco, México. E-mail: malcaraz@up.edu.mx

** Dra. en Pedagogía de las Matemáticas (UHH). Profesor Investigador (UP), Zapopan, Jalisco, México. E-mail: ceccius@up.edu.mx

*** Maestro en Educación Matemática (UdG). Profesor Investigador (UP), Zapopan, Jalisco, México. E-mail: porendays@up.edu.mx

For the validation, the questionnaire is applied to 251 business school freshmen at a private university in Guadalajara, Mexico. Those items with low commonalities and that in a factorial analysis show either unstable factors or distribution in multiple factors are discarded, generating a reduced questionnaire that is applied to 129 students. The reliability of the new questionnaire is good with a Cronbach's alpha of 0.808. Its validity is verified with eleven factors related to the different characterizations of the three uses of the variable, which explain 75.68% of the total variance.

Keywords: Algebra. Variable Concept. Measuring Instrument. Mathematics.

1 Introducción

Los estudiantes de primer ingreso a la universidad que se someten a evaluaciones diagnósticas en el área de matemáticas suelen presentar deficiencias en su quehacer algebraico como lo señala Cuesta-Borges (2019) en su investigación, quien encontró falta de competencias en los procesos algebraicos y de generalización. En las evaluaciones se detectan errores y conceptos equivocados de los alumnos, los cuales, autores como Ursini (1994), Herrera, Cuesta y Escalante (2016), López, Moreno y Souza (2010), Juárez (2011) y Bolaños-González y Lupiáñez-Gómez (2021) atribuyen a que no reconocen los diferentes usos de la variable, situación que puede llegar a ser un obstáculo para dominar el álgebra (LUCARIELLO; TINE; GANLEY, 2014).

Es muy común que, en los cursos de álgebra escolares, el proceso de enseñanza se limite a poner énfasis en la manipulación de símbolos en las expresiones, así como en la resolución de ecuaciones (GARCÍA; SEGOVIA; LUPIÁÑEZ, 2014). Küchemann (1980, p. 70) afirma que un estudiante tiene un grado mayor en el entendimiento del álgebra si es capaz de trabajar con “la letra como variable”.

Errores o concepciones erróneas como visualizar la variable como etiqueta (USISKIN, 1988), entender las variables únicamente como valores perdidos o por determinar, o tener dificultad para encontrar el rol adecuado de la variable (PHILIPP, 1992), entre otros, reportados por Bush y Karp (2013), constatan las dificultades con el simbolismo algebraico, los múltiples significados de la variable, las problemáticas con la sintaxis algebraica y el entendimiento conceptual del significado de términos y expresiones. En 2018, De Araujo, Dougherty y Zenigamila sugieren, dadas las dificultades con los múltiples significados de la variable, fomentar su comprensión en la enseñanza de las matemáticas.

Font, Pino-Fan y Breda (2020) mencionan, en su trabajo, que para evaluar la comprensión de un objeto matemático específico, en su caso, la derivada, se necesita representatividad sobre todas las configuraciones, aspectos o significados parciales distintos que se pueden relacionar con él, es decir, reflexionar a través de las pluri-significaciones sobre

la complejidad de los objetos matemáticos, según la visión pragmatista del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS) (GODINO; BATANERO; FONT, 2019).

La representatividad de la complejidad de los objetos matemáticos (la pluralidad de significados parciales) permite evaluar la comprensión de un objeto matemático específico (MONJE; SECKEL; BREDÁ, 2018), sin embargo, se requiere de indicadores medibles que permitan la evaluación de los significados parciales, es decir, tareas que activen los diversos significados parciales del objeto matemático.

Uno de los primeros trabajos relativos al análisis de las concepciones de la variable (pluri-significados, sin que los llamara así), fue un cuestionario diseñado por Küchemann (1980) en el que estudió las distintas maneras en que niños interpretan *letras* en una aritmética generalizada. También Pincheira y Alsina (2021) y Diosa Bedoya (2019) estudiaron el uso de variables en edades tempranas. En un orden ascendente de dificultad Küchemann (1980, p.49) encontró seis interpretaciones, de las cuales se da un ejemplo sencillo.

- 1 *Letra evaluada, asignando un valor a una letra. Si $a = 3$, entonces ¿a qué es igual $a + 5$?*
- 2 *Letra no usada, cuando la letra puede ser ignorada o no se le atribuye ningún valor. Si $x + y = 20$, no es necesario saber el valor de x y de y para evaluar $x + y + 20$.*
- 3 *Letra como objeto, la letra es una abreviación para un objeto. Uno de los errores clásicos al interpretar la letra como objeto es: por cada 6 alumnos en una escuela se tiene un maestro. $6A = M$*
- 4 *Letra como incógnita específica, es decir, la letra es un número único pero desconocido. Resolver para x : $3x + 2 = 8$*
- 5 *Letra como número general, donde la letra puede tomar múltiples valores. ¿Qué valor es mayor? $2n, n + 3$*
- 6 *Letra como variable, cuando tiene un rango no específico de valores y puede existir una relación entre dos conjuntos. $a = b + 3$, ¿qué le pasa a a si b se incrementa en dos unidades?*

Además de catalogar un ejercicio en las seis interpretaciones, Küchemann (1980, p. 51) le asigna un nivel de comprensión de acuerdo con la complejidad, por ejemplo, para la letra no usada, el nivel 1 y el nivel 3 representan abstracciones distintas:

Nivel 1: Si $a + b = 43$, $a + b + 2$ ¿a qué es igual?

Nivel 3: Si $e + f = 8$, $e + f + g$ ¿a qué es igual?

En investigaciones similares posteriores, Usiskin (1988, p. 17) propone una clasificación distinta basada en la de Küchemann, considerando los usos de la variable: “para la aritmética generalizada, para el medio de resolver problemas, para la concepción algebraica de relaciones y para la estructura”.

1.1 Usos de la variable

En el caso del objeto matemático: *variable*, en el que se centra este trabajo y para el cual se adapta y valida un cuestionario para medir las concepciones de la variable de alumnos de primer ingreso a la universidad, se utilizó el trabajo de Ursini y Trigueros (1997), en el que definen como usos de la variable: la variable como incógnita específica, como número general y en relación funcional. Con la intención de reflejar la representatividad de la complejidad del objeto matemático y su pluralidad de significados (CALLE; BREDA, 2019), cada uno de los usos de variable se subdivide en caracterizaciones que representan las capacidades básicas de interpretación, simbolización y manipulación, según Ursini *et al.* (2005) y Ursini y Trigueros (1997). Este modelo es conocido como el Modelo 3UV (tres usos de la variable).

Es importante mencionar, que las caracterizaciones en el Modelo 3UV no tienen un orden jerárquico, sin embargo, cada una representa un nivel distinto de abstracción (TRIGUEROS *et al.*, 1996).

1.1.1 Variable como incógnita específica

En el modelo 3UV la comprensión de la variable como incógnita abarca la identificación de la existencia de un valor desconocido dentro de una situación matemática y la posibilidad de poder determinar su valor numérico. La variable como incógnita específica se podrá representar con un símbolo alfabético para su manejo algebraico o aritmético dentro de una ecuación. Al tener el valor específico de la incógnita, éste podrá ser utilizado para comprobar la veracidad de la ecuación mediante la sustitución.

1.1.2 Variable como número general

La comprensión de una variable como número general implica la utilización de símbolos literales para la construcción de expresiones algebraicas en las que se tienen identificados elementos que pueden tomar cualquier valor. Es posible manejar estos elementos de una forma operativa, por ejemplo, para calcular múltiplos, combinaciones lineales, potencias, o cualquier otra operación matemática. La variable como número general puede utilizarse para plantear problemas de representación de cantidades o en generalizaciones de aspectos algebraicos en forma de patrones bien definidos.

1.1.3 Variable en relación funcional

La última categoría engloba los casos en que elementos de diferentes dominios se relacionan entre sí. Estas relaciones pueden describir cambios conjuntos o dependencias causales. La representación de la relación puede tomar la forma de gráficos, tablas, problemas verbales o expresiones analíticas.

Más adelante se especificarán, con más detalle, las distintas caracterizaciones de cada uso de variable, que servirán como indicadores de las dimensiones del constructo.

1.2 Consideraciones para la elaboración del cuestionario de los usos de la variable

Los mismos símbolos pueden utilizarse para diversos usos y caracterizaciones de la variable (URSINI; TRIGUEROS, 2006), lo cual dificulta la comprensión. En el Cuadro 1 se desarrolla el ítem 24, con los distintos significados parciales consecutivos:

Los lápices azules cuestan 5 pesos mientras que los lápices rojos cuestan 6. Al comprar cierta cantidad de lápices azules y rojos me gasté 90 pesos. Si a es el número de lápices azules y r el número de lápices rojos, ¿qué se puede concluir sobre a y r ?	G3. Interpretar a y r como variables simbólicas (número de lápices azules y número de lápices rojos) a las que se puede multiplicar por su costo para obtener el costo total de cada tipo de lápices. F1. Reconocer la correspondencia entre lápices azules (a) y lápices rojos (r) F6. Expresar el costo de la compra de los lápices azules y rojos como una relación funcional $5a+4r = 90$ F4. Reconocer la variación conjunta de a y r para obtener el gasto total $5a + 4r = 90$ <i>Se considera que la caracterización principal que define el objetivo de este ítem es expresar el costo como una relación funcional (F6).</i>
---	---

Cuadro 1 – Ejemplo de significados parciales utilizados en el ítem 24

Fuente: elaborado por los autores.

Se pone en relieve, a través de las investigaciones al respecto que, si un mismo ejercicio puede contener distintos usos y caracterizaciones implícitos de la variable, la dificultad de generar ítems *puros* en los cuales se analice un solo uso y una sola caracterización de la variable, es compleja.

1.3 Objetivo de la investigación

Es de interés para la Educación Matemática contar con un instrumento que permita identificar cuáles son los usos y caracterizaciones de la variable que presentan mayor dificultad. El objetivo de esta investigación es la adaptación y validación de un instrumento que cumpla con estas características. El grado de dominio respecto a los distintos significados parciales del concepto de variable de alumnos de primer ingreso a la universidad se medirá a través de los

usos y caracterizaciones establecidos por Ursini y Trigueros (2006). Una vez logrado el objetivo de este trabajo, se podrá utilizar el instrumento validado para identificar las dificultades que los estudiantes presentan en algunos de los significados parciales del objeto matemático *variable*, lo que dará paso al diseño y rediseño de secuencias didácticas. El cuestionario es de respuestas abiertas que permiten un análisis cuantitativo (correcto o incorrecto) y cualitativo al poder distinguir las diferentes fases de los significados parciales del objeto matemático (BREDA; FONT; PINO-FAN, 2018).

2 Método

De la discusión anterior, después de considerar la importancia de la representatividad de la complejidad del objeto matemático (pluralidad de los significados) (BREDA; FONT; PINO-FAN, 2018), se utilizó como base de la operacionalización del concepto de variable, para la adaptación, desarrollo y validación del cuestionario, el Modelo 3UV de Ursini *et al.* (2005), del cual se tomaron los tres usos de la variable como dimensiones con sus respectivas caracterizaciones como indicadores.

2.1 Definición de los componentes del concepto de variable

Las tres dimensiones son los distintos usos de la variable, la variable como incógnita (I), la variable como número general (G) y la variable en relación funcional (F). Para cada uso de variable, las caracterizaciones están organizadas por la interpretación, la manipulación y la simbolización que pretenden facilitar el diagnóstico de cuáles son las dificultades en cada una de las distintas manifestaciones.

2.2 Operacionalización del concepto de variable

Para la selección, modificación, adecuación y formulación de las preguntas, se tomaron en cuenta los criterios mencionados por Hernández, Fernández y Baptista, (2014).

El Cuadro 2 muestra el constructo con sus dimensiones y los indicadores.

Constructo	Dimensión (usos de la variable entendidos como significados parciales)	Indicadores (caracterizaciones de la variable)
Concepto de la variable		II. Reconocer e identificar en un problema la existencia de algo desconocido que se puede determinar

	Variable como incógnita	I2. Interpretar la variable simbólica que aparece en una ecuación como un ente que puede tomar valores específicos. I3. Sustituir el o los valores de la variable que hacen que la ecuación sea verdadera. I4. Determinar la incógnita que aparece en ecuaciones o problemas, llevando a cabo las operaciones algebraicas o aritméticas necesarias. I5. Identificar la incógnita en una situación específica y representarla simbólicamente en una ecuación.
	Variable como número general	G1. Reconocer patrones y reglas en secuencias numéricas y en familias de problemas. G2. Interpretar la variable simbólica como un ente que puede tomar cualquier valor. G3. Interpretar la variable simbólica como un objeto indeterminado que se puede operar. G4. Manipular el símbolo para simplificar o desarrollar expresiones algebraicas. G5. Desarrollar la idea de método general distinguiendo los elementos variables de los invariantes en familias de problemas similares, hasta llegar a la simbolización de un método general sobre el cual éste actúa.
	Variable en relación funcional	F1. Reconocer la correspondencia entre cantidades en sus diferentes representaciones: tabla, gráfica, problema verbal o expresión analítica. F2. Determinar los valores de la variable dependiente cuando se conocen los de la variable independiente. F3. Determinar los valores de la variable independiente cuando se conocen los de la variable dependiente. F4. Reconocer la variación conjunta de las variables que intervienen en una relación en cualquiera de sus formas de representación. F5. Determinar los intervalos de variación de una de las variables cuando se conocen los de la otra. F6. Expresar una relación funcional de manera tabular, gráfica, y/o analítica, a partir de los datos de un problema.

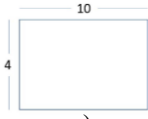

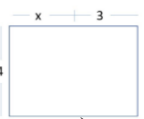
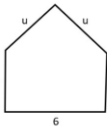
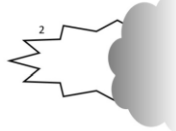
Cuadro 2 – Concepto de variable: Constructo, dimensiones y sus indicadores

Fuente: Ursini y Trigueros (2006, p. 7-8).

2.3 Adaptación, selección y desarrollo del instrumento

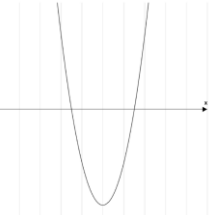
Los cuestionarios utilizados por García (2016), Escalante y Cuesta (2012) y Bolaños-González y Lupiáñez-Gómez (2021) constan de un conjunto base de ítems muy similar entre ellos, basados en el cuestionario de Küchemann (1980). Los cuadros 3 al 5 muestran la configuración del cuestionario propuesto e indican si los ítems fueron retomados, modificados o agregados. La K significa que el ítem fue retomado del cuestionario de Küchemann (1980).

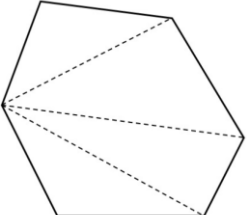
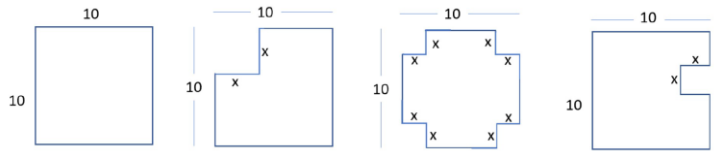
1) Ordene de menor a mayor las siguientes expresiones: $n + 1, n - 7, n, n + 2$.	2) Ordene de menor a mayor las siguientes expresiones: $n - 5, 2n, 0, n + 2$. K. Se agrega el elemento	3) Ordene de menor a mayor las siguientes expresiones: $2n, -7n, n, 8n$. <i>Elaboración propia. Se agrega una variación de los problemas 1 y 2, en el que se incluye una cantidad con coeficiente negativo.</i>
--	---	--

<p>K</p>	<p>0 para el análisis de su integración en el ordenamiento.</p>																									
<p>4) Duplique el valor de las siguientes expresiones: $n, n + 4, 3n, 3n - 6.$ K</p>	<p>5) Si $x + y = 20$ ¿a qué es igual? a) $x + y + 20,$ b) $x + y + z$ a) K b) <i>Elaboración propia. Variación del problema 5a en el que se suma una variable extra en vez de una constante a la expresión de la que se conoce el valor.</i></p>	<p>6) Complete la siguiente tabla:</p> <table border="1" data-bbox="1015 383 1246 584"> <tr> <td></td> <td>3</td> <td>2</td> <td>5</td> </tr> <tr> <td></td> <td>6</td> <td>1</td> <td>7</td> </tr> <tr> <td></td> <td>\vdots</td> <td>\vdots</td> <td>\vdots</td> </tr> <tr> <td>a)</td> <td>$x + 1$</td> <td>6</td> <td></td> </tr> <tr> <td>b)</td> <td>$y + 4$</td> <td>$y - 4$</td> <td></td> </tr> <tr> <td>c)</td> <td>$z + 2$</td> <td>$2 - z$</td> <td></td> </tr> </table> <p>6a) $K.$ Aunque fue descartado por Küchemann en su versión final del cuestionario por considerarlo confuso, lo consideramos valioso por la inducción que se debe realizar para su resolución. Se modificó el planteamiento para evitar ambigüedades. 6b) Mismo caso que el 6a. 6c) <i>Elaboración propia. Variación del problema 6a y 6b en el que se suma un número con su recíproco aditivo.</i></p>		3	2	5		6	1	7		\vdots	\vdots	\vdots	a)	$x + 1$	6		b)	$y + 4$	$y - 4$		c)	$z + 2$	$2 - z$	
	3	2	5																							
	6	1	7																							
	\vdots	\vdots	\vdots																							
a)	$x + 1$	6																								
b)	$y + 4$	$y - 4$																								
c)	$z + 2$	$2 - z$																								
<p>7) Calcule el área de las siguientes figuras:</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;">  <p>a)</p> </div> <div style="text-align: center;">  <p>b)</p> </div> <div style="text-align: center;">  <p>c)</p> </div> </div> <p>$K.$ Se agregan líneas de medidas para que los datos del problema sean más específicos.</p>	<p>8) Exprese el perímetro de las figuras utilizando los datos que se proporcionan, la figura (b) no se ve completa, pero tiene n lados que tienen la misma longitud.</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;">  </div> <div style="text-align: center;">  </div> </div> <p>$K.$ 8b) Se modifica la figura y el enunciado para que quede más clara.</p>																									

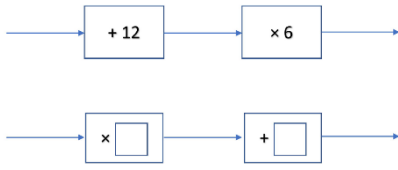
Cuadro 3 - Enunciados de los ítems de la evaluación del concepto de variable. Ítems 1 al 8.

Fuente: elaborado por los autores.

<p>9) Las lechugas cuestan 8 pesos la pieza y los jitomates 6 pesos la pieza. Si l es la cantidad de lechugas compradas y j la cantidad de jitomates comprados, a) ¿qué significado tiene la expresión $8l + 6j$? b) ¿cuántas verduras se compraron en total? $K.$</p>	<p>10) ¿Qué se puede concluir sobre x si $x = y + z$ y $x + y + z = 50$? $K.$</p> <p>11) Se sabe que $y = x + 5$, ¿qué valores puede tener x si y tiene valores entre 10 y 20? <i>Elaboración propia. Intervalos de variación cuando se conoce el intervalo de variación de "y".</i></p>	<p>12) Se sabe que $x + y = 15$, y x tiene valores entre 5 y 20. a) ¿Cuál es el máximo valor que puede tener y? b) ¿Qué rango de valores puede tener y? <i>Elaboración propia. Intervalos de variación cuando se conoce el intervalo de variación de "x".</i></p>
<p>13) Las dos intersecciones de la parábola de la figura con el eje x están dadas por la fórmula, $x = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - 40}}{2}$. ¿De las dos intersecciones dadas, cuál es el valor de la intersección que está más a la izquierda?</p> <p><i>Elaboración propia. Problema que utiliza variables en funciones cuadráticas, en particular en la fórmula cuadrática.</i></p>		<p>14) Las dos intersecciones una cierta parábola con el eje x están dadas por la fórmula, $x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 16k}}{2k}$. ¿De las dos intersecciones dadas, cuál es el valor de la intersección que está más a la izquierda? <i>Elaboración propia. Mismo caso que el anterior, sin embargo, el signo de k influye.</i></p>

<p>15) ¿Cuál es el valor de y si x vale 5 en la siguiente expresión? $y = \frac{(x+5)(x-5)}{x-5}$ <i>Elaboración propia. Revisar casos especiales en simplificación de expresiones algebraicas racionales</i></p>	<p>17) El número de diagonales que se pueden trazar a partir de un punto en una figura parecida a la de la imagen se puede calcular restando tres al número de lados.</p>	
<p>16) ¿Qué puede concluir del resultado de la operación $\sqrt{-x}$? <i>Elaboración propia. Revisar la concepción de raíz cuadrada.</i></p>	<p>a) ¿Cuántas diagonales tiene una figura de 6 lados? b) ¿Cuántas diagonales tiene una figura de 47 lados? c) ¿Cuántas diagonales tiene una figura de n lados?</p> <p>K.</p>	
<p>18) ¿Qué se puede decir de c si c y d son números positivos, $c + d = 10$, y c es menor que d? K.</p>	<p>19) ¿Cuáles de las siguientes figuras tienen el mismo perímetro que la figura de la izquierda?</p>  <p><i>Elaboración propia. Revisar la intuición en el cálculo de perímetros ante la presencia de variables.</i></p>	

Cuadro 4 - Enunciados de los ítems de la evaluación del concepto de variable. Ítems 9 al 19
 Fuente: elaborado por los autores.

<p>20) Ana gana \$2000 a la semana, y además le pagan \$200 por cada hora extra que trabaje. Si h es el número de horas extras que trabaja en una semana y S es su salario total por semana, escriba una ecuación que relacione S con h. K.</p>	<p>21) Si $y = x + 3$, ¿cuánto cambia y si x aumenta 2? K.</p> <p>22) Si $f = 4z + 1$, ¿cuánto cambia f si z aumenta en 2? K.</p> <p>23) Si $(x - 4)^4 + x = 22$ se sabe cierto para $x = 6$, ¿qué valor debe tener x si $(4x - 4)^4 + 4x = 22$? K.</p>	<p>24) Los lápices azules cuestan 5 pesos mientras que los lápices rojos cuestan 6. Al comprar cierta cantidad de lápices azules y rojos me gasté 90 pesos. Si a es el número de lápices azules y r el número de lápices rojos, ¿qué se puede concluir sobre a y r? K.</p>
<p>25) De las dos máquinas que se muestran a continuación, la máquina de arriba puede ser alimentada por cualquier número y se van aplicando las operaciones indicadas en las cajas.</p>  <p>¿Se puede diseñar una máquina tal que si se alimenta con el mismo valor que la máquina de arriba se obtenga el mismo resultado utilizando las operaciones indicadas en la máquina de abajo? K. <i>Se modifica la redacción y la figura para clarificar el objetivo del ítem.</i></p>	<p>26) Se tiene un terreno cuadrado de 25 metros de largo y 25 metros de ancho, se quiere quitar un pedazo a la base de manera que el área del terreno quede de 650 metros cuadrados. ¿De qué tamaño debe ser el fragmento de base que se debe eliminar? <i>Elaboración propia. Revisar el razonamiento sobre variación conjunta.</i></p>	
<p>27) En una granja hay 120 vacas, algunas son completamente negras, otras completamente blancas y otras negras con blanco. Se sabe que hay a vacas completamente negras, y que son un tercio del total, hay b vacas completamente blancas y el resto c son negras con blanco. ¿Es</p>	<p>28) El volumen de un prisma rectangular está dado por $V = b \times h \times l$. ¿Qué se puede concluir del volumen si b aumenta y h disminuye? <i>Elaboración propia. Misma justificación que el anterior.</i></p>	

<p>verdadero o falso que c siempre tiene un valor de 40?</p> <p><i>Elaboración propia. Misma justificación que el anterior.</i></p>	<p>29) Una conversión aproximada de grados °C a °F se logra al multiplicar por dos y sumar treinta. Escriba la fórmula que logra esta conversión.</p> <p><i>Elaboración propia. Revisar el uso de variable en funciones.</i></p>
--	--

Cuadro 5 - Enunciados de los ítems de la evaluación del concepto de variable. Ítems 20 al 29
Fuente: elaborado por los autores.

Los ítems se clasifican según su caracterización principal, sin embargo, en el proceso de respuesta se pueden utilizar diferentes usos y caracterizaciones del concepto de variable, como se mostró en el Cuadro 1 con el ítem 24.

A continuación, en la Tabla 1 se clasifican los ítems de acuerdo con su caracterización más representativa.

Tabla 1 – Número de pregunta relacionado con las distintas caracterizaciones (Indicadores) de los usos de variable

Indicador	I-1	I-2	I-3	I-4	I-5	
Número de Ítem			5a, 26	5b	17ab, 23	
Indicador	G-1	G-2	G-3	G-4	G-5	
Número de Ítem	7a	1, 2, 3, 6abc	10, 19a	4, 7bc, 8a	9ab, 8b, 14, 17c, 19b, 19c	
Indicador	F-1	F-2	F-3	F-4	F-5	F-6
Número de Ítem	29	12a	11	18, 21, 22, 27,28	12b	13, 20, 24, 25

Fuente: elaborada por los autores.

Esto implica que las caracterizaciones I-1 e I-2 no se vean representadas por algún ejercicio, lo cual no significa que no se haya tenido que pasar por estas caracterizaciones al responder a algunos ítems. Un ítem cuya caracterización principal fuera I-1 o I-2, serían ítems de un nivel que correspondería a educación primaria y secundaria, por lo que no se enfocaron en este cuestionario.

3 Metodología

3.1 Muestra: participantes en la validación del cuestionario

El cuestionario desarrollado lo contestaron a principios de agosto de 2021, 252 alumnos de primer ingreso a una universidad de Guadalajara, Jalisco, México, de los 361 alumnos que ingresaron a una de las carreras administrativas que ofrece la universidad (Administración y

Negocios Internacionales, Administración y Finanzas, Administración y Mercadotecnia, Administración y Recursos Humanos, Contaduría y Administración y Dirección). Los alumnos voluntariamente contestaron el cuestionario, que fue aplicado en su primer día de clase de la materia de Fundamentos de Cálculo. Los estudiantes realizaron sus estudios de Preparatoria en diversas escuelas y en diferentes estados de la República Mexicana, primordialmente del occidente del país.

Se capturaron las respuestas de los estudiantes siguiendo una escala nominal, dando un valor de 1 a las respuestas correctas, un valor de 0 a las respuestas equivocadas y a los ejercicios no abordados por los alumnos.

El promedio de edad de los alumnos participantes fue de 18.6 años, siendo el 57% hombres y 43% mujeres.

3.2 Consistencia interna

Para medir la consistencia interna o confiabilidad del cuestionario se calcula el coeficiente alfa de Cronbach que requiere de una sola aplicación (HERNÁNDEZ; FERNÁNDEZ; BAPTISTA, 2014).

3.3 Validez de constructo

La verificación de la estructura interna y el significado teórico de un conjunto de ítems se puede realizar mediante un análisis factorial exploratorio que reduce el número de indicadores operativos a un conjunto de factores subyacentes reducido. Agrupa ítems que están correlacionados, siendo la correlación con otros agrupamientos relativamente baja (LLORET-SEGURA *et al.*, 2014).

Si existe una alta correlación entre ítems, la solución factorial obtenida es poco estable, por lo que la correlación entre los ítems debe ser menor a 0.9. Sin embargo, los ítems tienen que estar lo suficientemente relacionados, para que se pueda realizar un análisis factorial por componentes principales. Se aplican las pruebas de KMO (Kaiser-Mayer-Olkin) y la prueba de esfericidad de Bartlett. Si en la prueba de esfericidad de Bartlett se obtienen resultados significativos, $p < 0.05$ y un valor de KMO mayor a 0.7, que es el índice promedio de los términos de la diagonal de la matriz de correlación de anti-imagen, que establecen la viabilidad de un análisis factorial, se concluye que hay suficiente correlación entre los ítems. Lloret-Segura *et al.* (2014) recomiendan la extracción de factores con autovalores (*eigenvalues*)

superiores a uno o mediante el análisis de la gráfica de sedimentación. El porcentaje de varianza explicada por el factor es el autovalor dividido entre el número de ítems y multiplicado por 100. Los factores extraídos deberían explicar, al menos, un 50% de la varianza total (LLORET-SEGURA *et al.*, 2014). En ocasiones, para lograr una estructura más simple, Lloret-Segura *et al.* (2014) recomiendan una rotación oblicua (*Oblimin*).

Una vez determinada la forma en que se va a validar el instrumento, los resultados de ésta se podrán consultar en la siguiente sección.

4 Resultados de la validación del instrumento de medición del concepto de variable

Los datos se procesaron en el programa SPSS (versión 27). Fueron 252 cuestionarios, de los cuales se descartó uno, por no haber contestado ninguna pregunta, por lo cual se procesaron 251 datos.

4.1 Medida de consistencia interna (confiabilidad)

El cuestionario consta de 29 tareas, algunos con incisos, en los cuales se preguntan indicadores distintos para dar un total de 41 preguntas, de las cuales el valor del alfa de Cronbach se muestra en la Tabla 2:

Tabla 2 - Estadísticas de fiabilidad

Estadísticas de fiabilidad	
Alfa de Cronbach	N de elementos
,818	41

Fuente: elaborada por los autores en SPSS.

Como análisis adicional se consideró el cálculo de alfa de Cronbach omitiendo un ítem a la vez. Siendo que el coeficiente de alfa de Cronbach no creció ni decreció en valor considerablemente al descartar alguno de los ítems, se considera que todos aportan al alfa de Cronbach más o menos el mismo valor, por lo cual, no se descarta ningún ítem.

Se calculó la matriz de correlación, en la cual se constató que ninguno de los ítems tuvo una interrelación con otro mayor o igual a 0.9.

4.2 Validez interna

En la Tabla 3 se muestran los datos de la interrelación entre los ítems para la pertinencia de realizar un análisis de componentes principales. Un p-valor de la prueba de esfericidad de Bartlett igual a 0.000 y una KMO de 0.770, mayor que 0.7 (PIZARRO; MARTÍNEZ, 2020), confirman la pertinencia de un análisis factorial.

Tabla 3 - Prueba de KMO y Bartlett

Medida Kaiser-Meyer-Olkin de adecuación de muestreo		0.770
Prueba de esfericidad de Bartlett	Aprox. Chi-cuadrado	6491.635
	gl	820
	Sig.	,000

Fuente: elaborada por los autores en SPSS (27).

En el proceso para encontrar los factores subyacentes, se descartan los ítems, 1,4, 8b, 10, 13, 15, 16, 20 y 23, ya sea por presentar comunalidades bajas, ser el único ítem en un factor (factor inestable) o por cargas factoriales bajas o dispersas en varios factores. (PIZARRO; MARTÍNEZ, 2020). El número de factores se determinó mediante eigenvalores mayores a 1, que fueron confirmados con la gráfica de sedimentación. La Tabla 4 muestra la matriz del análisis de componentes principales (con rotación *Oblimin*) con doce factores subyacentes. Se marcó en gris la ubicación de cada ítem en su factor correspondiente.

El cuestionario depurado consta de 32 preguntas relacionadas con el concepto de variable. Se aplicó en enero de 2022 a 129 alumnos de primer ingreso de las carreras administrativas. Se realizó un nuevo análisis de la consistencia interna en el que la alfa de Cronbach arrojó un valor de 0.808, lo cual indica que hay una buena consistencia interna o fiabilidad y otro análisis de componentes principales (con una rotación *Oblimin* para simplificar la interpretación). Se extrajeron once factores con una varianza explicada del 75.68%, considerando la gráfica de sedimentación.

En la Tabla 5 se ubican los 32 ítems del cuestionario depurado y vuelto a aplicar según su factor. Se observa, que los ítems 24, 25 y 28, que estaban en un solo factor en el análisis factorial inicial, se repartieron en tres factores, lo cual disminuye el número de factores en uno. Para la interpretación de los factores se utiliza la numeración de los ítems del cuestionario original mostrada en los Cuadros 3 a 5 antes presentados.

Tabla 4 – Matriz de componente rotado Oblimin

	Componente											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P2	,000	-,062	-,064	,025	,004	-,007	,899	-,012	,007	-,043	,050	,030
P3	,060	-,114	-,044	,086	-,026	,026	,898	-,066	-,040	-,024	,016	-,027
P5a	,188	-,143	-,060	,062	,080	-,934	-,022	,013	-,019	-,030	-,016	,154

P5b	,155	-,276	-,137	,093	,108	-,922	,013	-,008	,030	-,012	-,066	,205
P6a	,124	-,934	-,061	,111	,169	-,152	,079	,044	-,064	-,001	-,072	,163
P6b	,108	-,936	-,048	,049	,222	-,223	,119	,102	-,060	-,007	-,079	,139
P6c	,144	-,960	-,072	,113	,180	-,221	,081	,032	-,053	,005	-,049	,207
P7a	,036	-,138	-,207	,760	,047	,043	-,040	-,005	-,179	-,223	-,043	-,004
P7b	,097	-,119	-,117	,858	,025	-,035	,022	-,010	-,172	-,094	-,012	,102
P7c	,139	-,050	,026	,713	,058	-,101	,158	,287	-,205	,083	-,029	,127
P8a	,308	,006	-,066	,628	,192	-,261	,093	,198	-,189	,135	-,017	,090
P9a	,191	,006	-,085	,107	,070	,035	-,030	,814	-,134	,097	,007	,015
P9b	,231	-,103	,015	,141	,050	-,066	-,028	,756	-,096	,028	,043	,163
P11	,118	-,085	,011	,094	,121	-,050	,033	,097	-,745	,098	-,164	-,083
P12a	,164	,008	,035	,272	,197	-,057	-,030	,099	-,667	-,059	-,061	,191
P12b	,110	-,027	,127	,186	-,013	,075	,049	,144	-,826	-,039	,059	,074
P14	,045	-,038	,031	-,173	-,005	-,005	-,002	-,041	-,029	,806	,058	-,001
P17a	,922	-,102	-,195	,076	,158	-,161	,038	,167	-,136	,064	,052	,145
P17b	,933	-,111	-,182	,115	,116	-,190	,028	,195	-,122	,068	,067	,130
P17c	,920	-,132	-,108	,236	,188	-,171	,048	,186	-,192	,127	,015	,125
P18	,083	,066	-,130	,092	,093	,040	-,060	,157	,035	,734	-,090	-,065
P19a	,136	-,122	-,767	,130	,056	-,006	,108	-,031	,114	,062	-,021	,144
P19b	,165	-,044	-,908	,079	,074	-,087	,003	,049	,043	,033	-,005	,070
P19c	,198	-,010	-,876	,099	,119	-,157	,032	,024	,018	,057	,022	,133
P21	,264	-,260	-,156	,141	,432	-,254	-,006	,074	-,257	,090	-,059	,776
P22	,072	-,147	-,128	,055	,054	-,149	,006	,098	,028	-,073	-,147	,906
P24	-,124	-,085	-,091	,025	,027	-,147	,006	,017	-,058	,015	-,804	,107
P25	,047	-,028	,057	,031	,205	,064	-,068	-,038	-,053	,003	-,743	,075
P26	,136	-,199	-,112	,063	,720	-,106	-,020	-,032	-,025	,155	-,186	,141
P27	,067	-,170	-,074	,034	,826	-,069	-,016	,118	-,151	,001	-,206	,132
P28	-,037	-,122	,091	,022	,292	-,156	-,008	,483	-,216	,105	-,540	-,002
P29	,196	-,135	-,045	,085	,878	-,104	,018	,111	-,120	,009	-,013	,137

Método de extracción: análisis de componentes principales.

Método de rotación: Oblimin con normalización Kaiser.

Fuente: elaborada por los autores en SPSS (27).

4.3 Interpretación de la estructura subyacente del cuestionario definitivo

Tabla 5 – Ubicación de los ítems del cuestionario definitivo en los distintos factores

Factor	1	2	3	4	5
Ítems	17 ^a ,17b,17c,24	6 ^a ,6b,6c	19 ^a ,19b,19c	26,27,29	2,3
	6	7	8	9	10
	9 ^a ,9b,28	7 ^a ,7b,7c,8 ^a	5 ^a ,5b,	21,22,25	11,12 ^a ,12b
					14,18

Fuente: elaborada por los autores.

Factor 1: *variables que siguen un patrón (G1)* P17a, b y c; en la cual se tiene que establecer una expresión algebraica para la determinación de las diagonales (I5). Se ubica en este factor P24; correspondencia entre cantidades en forma verbal e interpretación de la variable como valor específico (F1, F6 e I2).

Factor 2: *variable como número general, encontrar el patrón que se sigue en la tabla (G1) y manipulación para simplificar (G4)*. P6a, b y c; suma de las dos primeras columnas por renglón.

Factor 3: *variable como objeto que se puede operar (G3)*. P19a, b y c; perímetro de una figura geométrica con valores variables x .

Factor 4: *variable en relación funcional (F)*. P26; determinación de una variación (F3 y F6). P27; determinación del rango de variación conjunta (F5 y F6). P29; simbolización por medio de los datos una regla general (F6).

Factor 5: *interpretar la variable como un ente que puede tomar cualquier valor (G2)*, P2 y P3; ordenamiento ascendente considerando una variable como número general.

Factor 6: *identificar la incógnita en una situación específica e interpretarla simbólicamente en una fórmula (I5)*, P9a y b. P28; reconocimiento de la variación conjunta de las variables en una fórmula (F4).

Factor 7: *variables en un contexto geométrico de áreas y perímetros (G4)*. P7a; figuras geométricas en las cuales se dan datos numéricos (I4 e I3). P7b y c, P8a; figuras en las que algunos datos son variables (I1 e I5).

Factor 8: *distinguir los elementos invariantes en una expresión (G5, I4 e I5)*. P5a y b; variables no usadas o ignoradas.

Factor 9: *variables en relación funcional*. P21, P22 y P25; determinación del cambio del valor de la variable dependiente cuando cambia el valor de la variable independiente (F4).

Factor 10: *rango de valores que adopta una de las variables, conociendo su relación funcional con respecto a la otra (F5, F2 y F5)*. P11, P12a y b.

Factor 11: *variables en relación funcional gráfica y simbólica*. P14 y P18; reconocer la correspondencia entre cantidades en una representación gráfica y/o analítica (F1), reconocer una variable como número general (G2).

5 Conclusiones

En este trabajo se generó y validó un cuestionario que comprende la complejidad del objeto matemático *variable* con el objetivo de su aplicación en estudiantes de primer ingreso a la universidad para identificar sus deficiencias en los significados parciales. Reconocer las deficiencias en los estudiantes universitarios permitirá diseñar y rediseñar secuencias didácticas para la enseñanza en la escuela Secundaria, Preparatoria, y cursos de Precálculo y Álgebra, que logren conducirlos hacia un entendimiento más completo que les permita enfrentar problemas matemáticos más avanzados en su paso por la universidad. La representatividad del objeto matemático *variable* se logró por medio de la pluralidad de significados que Ursini *et al.* (2005) puntualizaron como los usos y las caracterizaciones en el modelo 3UV.

El cuestionario original constó de 29 ítems con 41 preguntas. En el proceso de la validación, y a través de un análisis factorial, se redujo el cuestionario a 21 ítems con 32 preguntas, ambos mostraron una buena confiabilidad con valores de alfa de Cronbach mayores a 0.8.

El cuestionario validado mostró doce factores. El número de factores del cuestionario validado en su subsecuente aplicación fue de once. Cabe mencionar, que los ítems se agruparon de la misma forma, debiéndose la reducción de un factor a que los ítems 24, 25 y 28 se reagruparon en tres factores.

Se notó que los factores no sólo se agruparon por los usos y caracterizaciones de la variable involucrada. Hubo algunos ítems cuya agrupación se debió a aspectos distintos, aparentemente por tener alguna característica con una correlación muy fuerte. Un caso distintivo fueron los ítems geométricos (7abc y 8^a, 17abc, 19abc). El ejercicio 19abc trata de perímetros de figuras de cuadrados con resaques, en las cuales se tenía que determinar cuáles de ellas tenían el mismo perímetro; en el ejercicio 17abc, se daba una fórmula para determinar el número de diagonales desde un solo punto de un polígono irregular convexo. El último de ellos con un número indeterminado de lados.

Los ítems que se descartaron fueron P1, P4, P8b, P10, P13, P15, P16, P20 y P23. En un intento de analizar el por qué estos ítems tuvieron que ser eliminados, se llega a varias conclusiones:

P1 y P4 probablemente fueron de un nivel muy simple comparado al nivel de los estudiantes. En P4, la duplicación de algunas expresiones les causó ciertas dificultades. Aún así, no tuvo interrelación con las demás preguntas.

P15 y P16 mostraron una interrelación muy pobre con los demás ítems. Estas dos preguntas corresponden al cálculo de una variable al conocer el valor de la variable independiente y a la interpretación como número general de $-x$ dentro de un radical,

respectivamente.

P8b, P13 y P23 resultaron ser ítems sumamente difíciles para los alumnos, de acuerdo con el índice de facilidad. Mostraron comunalidades de interrelación baja.

Los ítems P10 y P20 se ubicaron con cargas factoriales bajas en tres y en dos factores, respectivamente. Esto puede significar que los ítems tienen distintos usos y caracterizaciones de la variable, lo cual se consideró que no era favorable para las intenciones de este cuestionario.

El cuestionario definitivo de medición del concepto de variable en cuanto al álgebra, geometría y funciones se constituye por los ítems: P2, P3, P5a, P5b, P6a, P6b, P6c, P7a, P7b, P7c, P8a, P9a, P9b, P11, P12a, P12b, P14, P17a, P17b, P17c, P18, P19a, P19b, P19c, P21, P22, P24, P25, P26, P27, P28 y P29.

En el desarrollo de esta investigación, se comentó que a la mayoría de los ítems no se puede dar respuesta considerando, únicamente, un significado parcial del objeto matemático *variable* (ver Cuadro 1). Para investigaciones futuras se propone desglosar de cada ejercicio los significados parciales (FONT; BREDÁ; SECKEL, 2017) para poder distinguir, con mayor precisión, cuáles son las dificultades y, así, poder diseñar y rediseñar secuencias didácticas que aporten a una mejor comprensión del concepto de variable por parte de los alumnos.

Referencias

- BOLAÑOS-GONZÁLEZ H.; LUPIÁÑEZ-GÓMEZ J.L. Errores en la comprensión del significado de las letras en tareas algebraicas en estudiantado universitario. **Uniciencia**, Heredia, v. 35, n 1, p. 1-18, 2021. Disponible en: <https://www.revistas.una.ac.cr/index.php/uniciencia/article/view/14385/20077>. Acceso en: 14 ago. 2023. Disponible en: <http://dx.doi.org/10.15359/ru.35-1.1>. Acceso en: 9 oct. 2023.
- BREDÁ, A.; FONT, V.; PINO-FAN, L.R. Criterios valorativos y normativos en la didáctica de las matemáticas: El caso del constructo idoneidad didáctica. **Bolema**, Río Claro, v. 32, n. 60, p. 255-278, abr. 2018. Disponible en: <https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n60a13>. Acceso en: 14 ago. 2023.
- BUSH, S.; KARP, K.S. Prerequisite algebra skill sans associated misconceptions of middle grade students: A review. **The Journal of Mathematical Behavior**, New Brunswick, v. 32, n. 3, p. 613-632, 2013. Disponible en: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jmathb.2013.07.002>. Acceso en: 9 oct. 2023.
- CALLE, E.; BREDÁ, A. Reflexión sobre la complejidad de los objetos matemáticos en la formación inicial de profesores. En: AGUILAR D.; COBOS M.; CLAUDIO CORTÉS L.C.; CAMPOZANO E. (eds), **La Investigación Educativa en un Mundo en Constante Transformación**. Cuenca: ASEFIE, 2019. P. 29-50. Disponible en: <http://dspace.ucuenca.edu.ec/bitstream/123456789/36468/1/documento.pdf>. Acceso en: 13 oct. 2023.
- CUESTA-BORGES, A. Sentido del estudiante universitario. Un estudio comparativo. **Matanzas**, Atenas, v. 2, n. 46, p. 32-46, 2019. Disponible en: Acceso en: <https://www.redalyc.org/journal/4780/478060100003/478060100003.pdf> . Acceso en: 9 oct. 2023.
- DE ARAUJO, Z.; DOUGHERTY, B.; ZENIGAMI, F. Interpreting Variables and Expressions. En: DE ARAUJO, Z.; DOUGHERTY, B.; ZENIGAMI, F. **Putting Essential Understanding of Expressions**

and Equations Into Practice in Grades 6-8. 1st Edition. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 2018. p. 25-26.

DIOSA-BEDOYA, H. D. **Comprensión del concepto de variable como incógnita en el marco de la EpC.** 2019, 167 hojas. (Máster en Educación) - Facultad de Educación, Universidad de Antioquía, Colombia, 2020. Disponible en: https://bibliotecadigital.udea.edu.co/bitstream/10495/17370/1/DiosaHelmer_2019_ComprensionVariableIncognita.pdf. Acceso en: 10 de oct. 2023.

ESCALANTE, J. E.; CUESTA, A. Dificultades para comprender el concepto de variable: un estudio con estudiantes universitarios. **Educación matemática**, Ciudad de México, v. 24, n. 1, p. 107-132, abr. 2012. Disponible en: <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40525850002>. Acceso en: 13 oct. 2023.

FONT, V.; PINO-FAN, L.R.; BREDÁ, A. Una evolución de la mirada sobre la complejidad de los objetos matemáticos. **Revista Paradigma**, Maracay, v. 41, p. 107-129, jun. 2020. Disponible en: <http://funes.uniandes.edu.co/22200/1/Font2020Una.pdf>. Acceso en: 14 ago. 2023.

FONT, V.; BREDÁ, A.; SECKEL, M. J. Algunas implicaciones didácticas derivadas de la complejidad de los objetos matemáticos cuando estos se aplican a distintos contextos. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia**, Ponta Grossa, v. 10, n. 2, p. 1-23, mayo/ago. 2017. Disponible en <https://doi.org/10.3895/rbect.v10n2.5981>. Acceso en: 14 ago. 2023.

GARCÍA, J. **Errores y dificultades de estudiantes de primer curso universitario en la resolución de tareas algebraicas.** 2016. 228 hojas. Tesis (Doctorado en Didáctica de la Matemática) - Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Granada, Granada, 2016.

GARCÍA, J.; SEGOVIA, I.; LUPIÁÑEZ, J. El uso de las letras cómo fuente de errores de estudiantes universitarios en la resolución de tareas algebraicas. **Bolema**, Río Claro, v. 28, n. 50, p. 1545-1566, dic. 2014. Disponible en: <https://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n50a26>. Acceso en: 14 ago. 2023.

GODINO, J. D., BATANERO, C.; FONT, V. The onto-semiotic approach: implications for the prescriptive character of didactics. **For the Learning of Mathematics**, New Westminster, v. 39, n. 1, p. 37- 42, 2019.

HERNÁNDEZ, R.; FERNÁNDEZ, C.; BAPTISTA, P. **Metodología de la Investigación.** 6. ed. México: McGraw Hill Interamericana, 2014.

HERRERA, H; CUESTA, A; ESCALANTE, J.E. El concepto de variable: un análisis con estudiantes de bachillerato. **Educación matemática**, Ciudad de México, v. 28, n. 3, p. 217-240, 2016. Disponible en: <http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/Vol28/3/8.pdf>. Acceso en: 14 ago. 2023.

JUÁREZ, J. A. Dificultades en la interpretación del concepto de variable en profesores de matemáticas de secundaria: un análisis mediante el modelo 3UV. **Números**, Revista de didáctica de las matemáticas, Tenerife, v. 76, n. 1, p. 83-103, 2011.

KÜCHEMANN, D. **The understanding of generalized arithmetic (algebra) by secondary school.** 1980. 219 hojas. Tesis (Doctorado Filosofía) - Chelsea College, Universidad de Londres, Londres, 1980.

LLORET-SEGURA, S.; FERRERES-TRAVER, A.; HERNÁNDEZ-BAEZA, A.; TOMÁS-MARCO, I. El análisis factorial exploratorio de los ítems: una guía práctica, revisada y actualizada. **Anales de Psicología**, Ciudad de Murcia, v. 30, n. 3, p. 1151-1169, oct. 2014.

LÓPEZ, A.; MORENO, B.; SOUZA, M. Reconocimiento de la identidad de la variable algebraica en estudiantes brasileños y mexicanos. **Acta Latinoamericana de Matemática Educativa**, Ciudad de México v. 23, n. 1, p. 197-204, 2010.

LUCARIELLO, J.; TINE, M.; GANLEY, C. A formative assessment of students' algebraic variable misconceptions. **The Journal of Mathematical Behavior**, New Brunswick, v. 33, n. 1, p. 30-41, 2014.

MONJE, Y.; SECKEL, M.J.; BRENDA, A. Tratamiento de la inecuación en el currículum y textos escolares chilenos. **Bolema**, Río Claro, v. 36, n. 61, p. 480-500, ago. 2018. Disponible en: <https://doi.org/10.1590/1980-4415V32N61A09>. Acceso en: 9 oct. 2023.

PHILIPP, R. The many uses of algebraic variables. **The Mathematics Teacher**, Reston, v. 85, n. 7, p. 557-561, 1992.

PINCHEIRA, N.; ALSINA, Á. Hacia una caracterización del álgebra temprana a partir del análisis de los currículos contemporáneos de Educación Infantil y Primaria. **Educación matemática**, Ciudad de México, v. 33, n. 1, p. 153-180, 2021. <https://doi.org/10.24844/EM3301.06>

PIZARRO, K; MARTÍNEZ, O. Análisis factorial exploratorio mediante el uso de las medidas de adecuación muestral KMO y esfericidad de Bartlett para determinar factores principales. **Journal of Science and Research**, Babahoyo: v. 5, n. CININGE2020, p. 903-924, abr. 2020. Disponible en: <https://doi.org/10.5281/zenodo.4453224>. Acceso en: 14 ago. 2023.

TRIGUEROS, M.; REYES, A.; URSINI, S.; QUINTERO, R. Diseño de un cuestionario de diagnóstico acerca del manejo del concepto de variable en el álgebra. **Enseñanza de las ciencias**, Barcelona, v. 14, n. 3, p. 351-363, 1996. Disponible en: <https://ensciencias.uab.cat/article/view/v14-n3-trigueros-reyes-ursini-et-al/2118>. Acceso en: 14 ago. 2023.

URSINI, S. Los niños y las variables. **Educación Matemática**, Ciudad de México, v. 06, n. 3, p. 90-108, dic. 1994. Disponible en: <http://funes.uniandes.edu.co/9736/1/Ninos1994Ursini.pdf>. Acceso en: 14 ago. 2023.

URSINI, S.; TRIGUEROS, M. Understanding of different uses of variable: A study with starting college students. En: PME CONFERENCE, 21., 1997, Lahti. **Proceedings...** Helsinki: University of Helsinki/Lahti Research and Training Centre, 1997. p. 4-254-261. Disponible en: <https://www.igpme.org/wp-content/uploads/2019/05/PME21-1997-Lahti.zip>. Acceso en 13 oct. 2023.

URSINI, S.; ESCAREÑO, F.; MONTES, D.; TRIGUEROS, M. **Enseñanza del álgebra elemental: Una propuesta alternativa**. México: Trillas, 2005.

URSINI, S.; TRIGUEROS, M. ¿Mejora la comprensión del concepto de variable cuando los estudiantes cursan matemáticas avanzadas? **Educación Matemática**, Ciudad de México: v. 18, n. 3, p. 5-38, dic. 2006. Disponible en: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40518302>. Acceso en: 14 ago. 2023.

USISKIN, Z. Conceptions of School Algebra and Uses of Variables. **The ideas of algebra, K-12**, Reston, v. 8, n.1, p. 19, 1988.

Submetido em 15 de Agosto de 2022.
Aprovado em 29 de Maio de 2023.