ISSN 1980-4415
http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a16

Las *Matemáticas para la Enseñanza* en una Formación del Profesorado Basada en el Estudio de Cuestiones*

Mathematics for Teaching in a Teachers' Training Programme Based on the Study of Questions

Alicia Ruiz Olarría**
Tomás Ángel Sierra Delgado***
Marianna Bosch Casabò****
Josep Gascón Pérez*****

Resumen

Presentamos una propuesta para la formación del profesorado de Secundaria en *matemáticas para la enseñanza* que se sitúa en el marco de la teoría antropológica de lo didáctico. De acuerdo con Gisèle Cirade (2006), basamos dicha formación en el estudio de un conjunto de cuestiones que pone de manifiesto el carácter problemático de la matemática escolar y, consiguientemente, en la construcción, como respuestas provisionales, de ciertas *praxeologías matemáticas para la enseñanza*. Las primeras experimentaciones llevadas a cabo en España en el recién implantado máster en formación del profesorado de secundaria nos han permitido empezar a calibrar posibilidades de esta formación y algunas de las restricciones que se alzan como dificultades para su desarrollo.

Palabras-clave: formación del profesorado. Teoría Antropológica de lo Didáctico. Profesión Docente. Matemáticas para la Enseñanza. Didáctica de las Matemáticas.

Abstract

We present a proposal for the training of secondary school mathematics teachers, within the framework of the Anthropological Theory of the Didactic. Following Cirade (2006), the educational proposal is based on the study of questions that emphasizes the problematic character of school mathematics and calls for the construction of new *mathematical praxeologies for teaching*. The first experiments conducted in Spain in the newly-implemented Masters of Secondary School Teachers' Training provide evidence to calibrate the possibilities of the proposal and some of the restrictions that arise as difficulties for its development.

* Investigación financiada por los proyectos EDU2012-39312-C03-01, EDU2012-39312-C03-02 y EDU2012-39312-C03-03 del Ministerio de Economía y Competitividad de España.

** Licenciada en Ciencias Exactas por la Universidad Complutense de Madrid. Profesora del Departamento de Didácticas Específicas de la Universidad Autónoma de Madrid, Madrid, España. Dirección Postal: Facultad de Formación de Profesorado y Educación, c/ Francisco Tomás y Valiente 3, Ciudad Universitaria de Cantoblanco, 28049, Madrid, España. *E-mail:* alicia.ruiz@uam.es.

*** Doctor por la Universidad Complutense de Madrid (UCM). Profesor del Departamento de Didáctica de las Matemáticas de la Facultad de Educación en la UCM, Madrid, Espanã. Dirección Postal: Facultad de Educación, c/Rector Royo Villanova, s/n, 28040, Madrid, España. *E-mail:* tomass@edu.ucm.es.

**** Doctora por la Universidad Autónoma de Barcelona (UAB). Profesora del Departamento de Estadística Aplicada de IQS School of Management de la Universidad Ramon Llull, Barcelona, España. Dirección Postal: IQS School of Management, Via Augusta 390, 08017, Barcelona, España. *E-mail:* marianna.bosch@iqs.edu.

***** Doctor por la Universidad Autónoma de Barcelona (UAB). Profesor del Departamento de Matemáticas de la UAB, Barcelona, Espanã. Dirección Postal: Facultad de Ciencias, Edificio C, Campus de la UAB, 08193 Bellaterra (Cerdanyola del Vallès, Barcelona, España. *E-mail:* gascon@mat.uab.cat.

ISSN 1980-4415
http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a16

Keywords: teachers' training, Anthropological Theory of the Didactic, teacher profession, mathematics for teaching, didactics of mathematics.

1 El oficio de profesor de matemáticas y la necesidad de una formación profesional específica

Partimos del principio según el cual el *oficio* de profesor no está considerado socialmente, todavía, como una verdadera *profesión,* sino que tiene muchos rasgos de lo que el sociólogo estadounidense Amitai Etzioni (1969) denominó una *semiprofesión*. Entre dichos rasgos podemos destacar, en primer lugar, el requerir una formación profesional inicial muy breve, con poco énfasis en el componente *teórico* y, en segundo lugar, el desarrollarse bajo una supervisión más administrativa que profesional o científica.

A modo de ejemplo podemos citar un episodio muy significativo ocurrido en un encuentro organizado por el Comité Español de Matemáticas (CEMAT) en la Universidad Complutense de Madrid[1], centrado en analizar el papel de las prácticas en el actual máster universitario en formación del profesorado de Educación Secundaria Obligatoria (ESO)[2] y Bachillerato. Durante dicho encuentro, el profesor Tomás Recio planteó una pregunta provocativa que no tuvo respuesta:

¿Es seguro que los futuros profesores de matemáticas necesitan una formación profesional específica para poder realizar el oficio de profesor? *¿Qué argumentos pueden darse a favor de la necesidad de dicha formación*?

Consideramos que el mero hecho de poder plantear esta cuestión en el seno de la comunidad responsable de la citada formación (con el agravante de no recibir respuesta alguna) pone en entredicho la existencia de un cuerpo profesional reconocido socialmente, además de poner de manifiesto la poca convicción de la comunidad matemática española de la necesidad de revertir esta situación. Es muy probable que esta misma cuestión se haya planteado, históricamente, cada vez que un oficio se ha empezado a desarrollar y ha requerido de una formación profesional específica, sólida y emancipadora, caso de algunas otrora *semiprofesiones* como las de enfermería, psicología y periodismo, entre otras.

[1] Durante los días 26 y 27 de febrero de 2009 se celebró, en la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid, el *Seminario sobre el Prácticum del Máster de Profesor de Secundaria* en la especialidad de Matemáticas, organizado por la Comisión de Educación del Comité Español de Matemáticas (CEMAT) con la cooperación de la Cátedra *UCM Miguel de Guzmán*.

[2] La enseñanza secundaria en España comprende dos niveles: la obligatoria (ESO) para alumnos entre 12 y 16 años y la postobligatoria (Bachillerato) para alumnos entre 16 y 18 años.

ISSN 1980-4415
http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a16

En este contexto social, se postula desde la teoría antropológica de lo didáctico (TAD), que la profesión de profesor de matemáticas, como *profesión en construcción***,** debe dotarse de recursos propios de naturaleza matemático-didáctica que constituyan la *infraestructura* necesaria para afrontar las dificultades, problemas y retos que surgen continuamente en el ejercicio de la docencia y que, por su complejidad, el docente no puede abordar en solitario (CHEVALLARD, 2011). Para ello es necesario plantear el problema de la formación del profesorado como un aspecto de uno de los *grandes problemas* de la didáctica: el de los vínculos entre el *desarrollo de la ciencia didáctica,* el *desarrollo del sistema de enseñanza,* y la *formación* de sus agentes. De ahí que las deficiencias del sistema de enseñanza no deban achacarse única ni principalmente al profesor como individuo ni, tampoco, a su nivel de formación.

Puesto que la TAD es uno de los primeros enfoques en considerar como objeto de estudio e investigación didáctica todo el proceso que va desde la *creación* y la *utilización* del saber matemático hasta su *transposición* a las instituciones docentes, la formación del profesorado aparece como una de las partes que lo constituyen y, en consecuencia, esta debe analizarse de manera sistémica con relación a todo el proceso, sin olvidar ninguna de las instituciones que intervienen en el mismo.

Para situar el problema general de la formación del profesorado en esta perspectiva, tomaremos como punto de partida la hipótesis de la TAD según la cual toda actividad humana puede describirse en términos de *praxeologías* (CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 1997; BOSCH; GASCÓN, 2009). Como el propio término indica, una praxeología es una entidad formada por una *praxis* y un *logos*. La *praxis* hace referencia al *saber hacer* y comprende un conjunto de tipos de tareas y de técnicas (o *maneras de hacer*) para abordarlas en una institución determinada. El *logos* hace referencia al *saber* y está formado por los discursos que describen, explican y justifican la praxis. Siguiendo el trabajo de G. Cirade (2006), podemos distinguir, al menos, tres tipos de praxeologías directamente relacionadas con el ejercicio de la docencia de matemáticas, en el bien entendido que cada uno de los tipos está contenido en el siguiente: las praxeologías matemáticas *por enseñar* (que se materializan en los documentos curriculares, los libros de texto y la actividad matemática escolar); las praxeologías matemáticas *para la enseñanza* (que contienen los conocimientos matemáticos necesarios para delimitar, interpretar, relacionar y explicitar la *razón de ser* de las matemáticas por enseñar); y las praxeologías *didácticas de la profesión docente* que se requieren para diseñar y gestionar el proceso de estudio de las matemáticas (Figura 1).

ISSN 1980-4415
http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a16

Praxeologías matemáticas por enseñar	$\subset$	**Praxeologías matemáticas para la enseñanza**	$\subset$	Praxeologías didácticas de la profesión docente

Figura 1- Praxeologías relacionadas con la docencia de matemáticas
Fuente: desarrollado por los autores

El trabajo de G. Cirade (2006) muestra la enorme problematicidad que encierran las matemáticas que se enseñan en Secundaria y cómo los recursos matemáticos que permiten abordarla están, todavía, muy alejados de la cultura matemática de la comunidad docente dado que, en muchos casos, requieren elaboraciones matemáticas originales que evolucionarán para convertirse en herramientas matemáticas de uso didáctico. Por otra parte, estas elaboraciones necesarias distan mucho de ser triviales desde el punto de vista de los recursos matemáticos que solicitan. Un trabajo como *The mathematics of physical quantities*, de Hassler Whitney (1968)[3], puede ser un buen ejemplo de este tipo de recursos, elaborado para aportar una respuesta funcional a la necesidad de justificar matemáticamente expresiones del tipo:

$$\frac{3\text{ km}}{\text{h}} \times 4\text{ h} = (3 \times 4)\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \times \text{h} = 12\text{ km}$$

Otros ejemplos relevantes de elaboración de infraestructuras matemáticas potencialmente útiles para diseñar praxeologías matemáticas para la enseñanza, y dirigidos explícitamente a la formación del profesorado, se encuentran en el trabajo ya clásico de Félix Klein (1908/2006) *Matemáticas elementales desde un punto de vista superior* y en el de Henri Lebesgue (1915/1995) *La medida de las magnitudes*. Se podrían aportar otros muchos ejemplos que, en distintos ámbitos de la matemática escolar, siguen planteando serias dificultades en la docencia y para los que no se dispone todavía de una respuesta apropiada para la profesión[4].

Es importante señalar, además, que propuestas como las indicadas más arriba son difícilmente compatibles con las condiciones y restricciones bajo las que actúa el profesor. Es necesario un verdadero trabajo de investigación didáctica para construir, sobre la base de dichas infraestructuras, praxeologías matemáticas *para la enseñanza* que respondan,

[3] Para más detalles sobre este tema, ver Bosch (1994).
[4] El caso de los límites de funciones y el de la relación entre la proporcionalidad y las funciones elementales constituyen buenos ejemplos de ello, ver Bosch, Espinoza,y Gascón (2003) y García (2005).

ISSN 1980-4415
http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a16

efectivamente, a determinadas cuestiones umbilicales de la profesión de profesor de matemáticas.

Aunque en este trabajo nos centramos esencialmente en el papel que juegan las praxeologías matemáticas *para la enseñanza* en la formación del profesorado, no podemos dejar de subrayar que estas deben integrarse en determinadas *praxeologías didácticas de la profesión docente* que no se reducen a una mera *práctica*, como se interpreta a veces cuando se habla de la *práctica docente*, sino que incluyen un *logos didáctico*, esto es, un discurso justificativo y explicativo de la citada práctica. Postulamos, en definitiva, que la formación profesional específica del profesorado de matemáticas requiere de un *equipamiento praxeológico* (o conjunto de praxeologías disponible) cuya construcción y desarrollo es responsabilidad de la comunidad de investigadores en didáctica de las matemáticas en estrecha colaboración con la profesión docente (CHEVALLARD; CIRADE, 2009).

Por tanto, en el ámbito de la TAD, podemos formular el problema general de la formación matemático-didáctica del profesorado en los términos siguientes:

Problema de la formación del profesorado. ¿Cuál es el equipamiento praxeológico necesario (o por lo menos útil) para que los profesores puedan intervenir de manera efectiva y pertinente en la formación matemática de los estudiantes (de una determinada etapa educativa) y qué se puede hacer para ayudar a que los profesores dispongan de él? En particular, ¿cómo se generan las cuestiones que están en el origen de las praxeologías matemáticas por enseñar y de las praxeologías matemáticas para la enseñanza? ¿Qué problemas constituyen la razón de ser de las praxeologías didácticas de la profesión docente?

Si nos centramos en la formación del profesorado en *matemáticas para la enseñanza*, podemos decir que la propuesta de la TAD es compatible, en gran medida, con el punto de vista imperante en las investigaciones actuales en el campo de la Educación Matemática (GÓMEZ, 2007; LLINARES; VALLS; ROIG, 2008; GODINO, 2009; RIBEIRO; CARRILLO; MONTEIRO, 2010; PINO-FAN; GODINO; FONT, 2011; FONT, 2011). En todos los casos, se tiende a enfatizar la necesidad de incluir en la formación del profesorado conocimientos disciplinares (en nuestro caso, conocimientos *matemáticos*) que no se limitan a los contenidos que el profesor debe enseñar y que, en general, no forman parte de la formación disciplinar básica que han recibido los futuros profesores. La importancia formativa de este tipo de conocimientos fue señalada, en primer lugar, por Lee S. Shulman (1987) mediante la noción de *conocimiento pedagógico del contenido* (*Pedagogical Content Knowledge*, PCK) que ha dado origen, en el caso de las matemáticas, al *conocimiento*

ISSN 1980-4415
http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a16

matemático para la enseñanza (*Mathematical Knowledge for Teaching*, MKT) (BALL, 2000; BALL; LUBIENSKI; MEWBORN, 2001; HILL; BALL; SCHILLING, 2008), como un conocimiento matemático esencial en la formación del profesorado.

La originalidad de nuestra propuesta de programa de formación se basa en las siguientes asunciones:

(1) El conjunto de las praxeologías de la profesión de profesor de matemáticas – en coherencia con el modelo epistemológico general que propone la TAD –, está estructurado en una progresión de complejidad y completitud creciente, tal como se indica en la figura 1.

(2) Dado que las praxeologías referidas están en permanente estado de evolución y revisión, asumimos que no se dispone de *respuestas* completas y definitivas en ninguno de los tres niveles. Ni siquiera las praxeologías matemáticas *por enseñar* se pueden considerar como ya disponibles y listas para ser utilizadas en la formación del profesorado, y mucho menos en lo que se refiere a las praxeologías *para la enseñanza* y a las praxeologías *didácticas* de la profesión docente. Postulamos, además, que la elaboración y desarrollo de las praxeologías *matemáticas para la enseñanza* suelen modificar tanto las praxeologías matemáticas *por enseñar* como las propias praxeologías *didácticas*.

(3) En todos los casos, la construcción y puesta a punto de las praxeologías que forman parte del equipamiento del profesorado de matemáticas *requiere un laborioso trabajo de investigación* que no puede soslayarse mediante un mero análisis empírico de los conocimientos que ya utilizan los profesores en su práctica docente habitual.

(4) Las praxeologías matemáticas *para la enseñanza*, al contener los conocimientos necesarios para delimitar adecuadamente, interpretar, relacionar entre sí y explicitar la razón de ser de las matemáticas *por enseñar,* constituyen componentes esenciales de las praxeologías *didácticas* de la profesión docente. Los casos citados anteriormente relativos a los trabajos de H. Whitney, H. Lebesgue y F. Klein son ejemplos paradigmáticos que muestran que, para enseñar matemáticas, lo primero que se necesita son *más matemáticas*.

(5) Las praxeologías *didácticas* de la profesión docente se construyen (o reconstruyen) en gran medida como consecuencia del desarrollo de las respuestas a cuestiones que pueden surgir en el ámbito de las praxeologías matemáticas *para la enseñanza* o, incluso, en el ámbito de las praxeologías matemáticas *por enseñar*. Así, por ejemplo, una cuestión del tipo *¿cómo justificar en la enseñanza obligatoria la regla de los signos del producto de números enteros*?, que pertenece plenamente a las matemáticas *por enseñar*, puede generar la construcción de una praxeología matemática *para la enseñanza* —relacionando la regla de los

ISSN 1980-4415
http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a16

signos con la introducción del álgebra elemental— y una praxeología *didáctica* asociada (CID; RUIZ-MUNZÓN, 2011) (ver más ejemplos en la sección 3).

(6) Las *cuestiones generatrices* de dichas praxeologías pueden surgir tanto en el ámbito de la formación del profesorado (planteadas, por ejemplo, por los propios profesores en formación), en la *noosfera* del sistema de enseñanza (diseñadores curriculares, autores de libros de texto etc.), en la propia profesión docente (por ejemplo, vía las asociaciones de profesores), o en la investigación didáctica.

(7) Es necesario introducir nuevos dispositivos didácticos que posibiliten el *estudio de cuestiones* y sean capaces de generar y hacer vivir en las instituciones responsables de la formación del profesorado las cuestiones umbilicales de la profesión. En la sección 4 se describen algunos de estos dispositivos.

2 La formación del profesorado y el estudio de cuestiones

El trabajo que presentamos aquí no pretende abarcar la formación global matemático-didáctica del profesorado. Partimos del carácter problemático de las matemáticas *por enseñar* y nos centramos en las cuestiones generatrices de las praxeologías matemáticas *para la enseñanza*. Estas praxeologías integran conocimientos que pueden considerarse matemáticamente *elementales* y cuya *novedad* proviene del hecho de que constituyen elementos para construir una respuesta a cuestiones matemáticas que, difícilmente, podrían plantearse fuera del ámbito de su enseñanza. Bastará, para empezar, con dos ejemplos:

- ¿Qué se considera como *figura geométrica* en Secundaria? ¿Cómo se podría estudiar el *cambio de forma* de las figuras geométricas?
- ¿Es posible introducir la *derivada* en el Bachillerato sin utilizar la noción de *límite*? ¿Qué ventajas e inconvenientes comportaría?

Formalmente, proponemos un programa de formación en *matemáticas para la enseñanza* formulado en términos de *cuestiones a estudiar*, cuyo principal objetivo es proporcionar elementos de respuesta a algunas de las cuestiones que pueden considerarse como *cruciales* o *umbilicales* dentro de la problemática (matemático-didáctica) del profesorado de matemáticas de secundaria. Esta estructura responde a la convicción de que cualquier proceso de formación toma sentido a partir del estudio de un conjunto de *cuestiones problemáticas* a las que se necesita que los estudiantes puedan dar respuesta. Postulamos que la dialéctica entre el planteamiento de *cuestiones problemáticas* y la *construcción de*

ISSN 1980-4415
http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a16

respuestas constituye el fundamento de todo proceso de formación (SIERRA DELGADO; BOSCH CASABÓ; GASCÓN PÉREZ, 2011).

Desafortunadamente, esta dialéctica está en gran medida ausente en la enseñanza escolar de las disciplinas tradicionales y, en particular, en la enseñanza de las matemáticas. Dentro del ámbito de la TAD se ha analizado este fenómeno del *olvido escolar de las cuestiones* y la consiguiente *veneración de las respuestas* que conlleva la presentación escolar de obras inmotivadas como si se tratase de *monumentos* históricos, sin ningún otro sentido ni función. Este fenómeno, denominado *monumentalismo*, se ha situado dentro del *paradigma de la visita de las obras* (CHEVALLARD, 2001, 2012). Para superar este monumentalismo imperante en los sistemas educativos, Yves Chevallard (2013) propone optar por un nuevo paradigma didáctico emergente, que denomina el *paradigma del cuestionamiento del mundo*. En línea con esta propuesta, el plan de formación del profesorado de matemáticas lo hemos basado en el estudio de las cuestiones problemáticas que surgen no tanto como necesidades *personales* de los futuros profesores, sino como necesidades propias de la *profesión de profesor de matemáticas*.

Ahora bien, ¿cuáles son esas cuestiones problemáticas? Culturalmente, se ha creado una separación radical entre las cuestiones docentes más *genéricas* que se pueden formular, aparentemente, con independencia del contenido de la enseñanza como, por ejemplo:

- ¿Cómo motivar a los alumnos?
- ¿Cómo tratar la creciente diversidad de los alumnos en el aula?
- ¿Cómo utilizar las nuevas tecnologías para mejorar la enseñanza?
- ¿Cómo fomentar el trabajo en equipo?

Y aquellas cuestiones más *específicas* que necesariamente hacen referencia a la materia enseñada y que, en el caso de las matemáticas, algunas pueden ser:

- ¿Deben introducirse en primer lugar las funciones exponenciales o las funciones logarítmicas?
- ¿Qué tipos de problemas matemáticos requieren por primera vez el uso no meramente formal de expresiones algebraicas en los primeros cursos de la ESO?
- ¿Cómo definir los números racionales? ¿Hay que proponer diferentes definiciones alternativas o una sola?
- En la geometría elemental de la ESO, ¿hay que partir de las propiedades de los triángulos o es preferible empezar por las propiedades de los paralelogramos?

ISSN 1980-4415
http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a16

Como consecuencia de esta tajante separación cultural entre cuestiones genéricas y específicas, la formación inicial tradicionalmente ofrecida a los futuros profesores disocia, como si se tratara de dos campos independientes, la formación *generalista* o *pedagógica* (para la *enseñanza* de cualquier disciplina) de la formación *específica* (aquí, matemática). De este modo, el futuro profesor, después de recibir una formación matemática que en muchas ocasiones tiene una orientación dudosa para sus necesidades docentes, se enfrenta a un conjunto de conocimientos psicológicos, sociológicos, pedagógicos y didácticos desconectados entre sí. En definitiva, el profesor recibe una amalgama de conocimientos y teorías que responden a problemas de muy diferente naturaleza, con el agravante de que la integración de los mismos se deja bajo su exclusiva responsabilidad. Como ya indicaba Guy Brousseau hace más de 20 años:

> La formación de los profesores se concibe como yuxtaposición de enfoques y de teorías independientes, cuya integración y utilización se deja a cargo de los propios profesores. En ausencia de una responsabilidad teórica y técnica sobre la enseñanza misma, cada investigación en «didáctica» fundada sobre una de las disciplinas conexas no tratará en el mejor de los casos más que uno de los aspectos de la cuestión y desembocará pues en advertencias, observaciones, análisis científicos lanzados al foro, señalando a los enseñantes. Estos reproches, de nula utilidad para los profesores, están destinados en realidad, muy a menudo, al público, y éste los transforma en exigencias impacientes, en picotas ideológicas y finalmente en críticas obsesivas de la enseñanza (BROUSSEAU, 1991, p. 12).

3 Propuesta de un programa de formación en *matemáticas para la enseñanza* formulado en términos de cuestiones a estudiar

Inicialmente, incluiremos como cuestiones generatrices de las praxeologías matemáticas *para la enseñanza* aquellas referidas a la matemática escolar en su conjunto, a las diferentes áreas de ésta (Aritmética, Álgebra, Geometría, Cálculo, Estadística y Probabilidad) y a las relaciones que deben establecerse entre ellas (BOSCH; GASCÓN, 2009). Unas y otras pretenden generar nuevas cuestiones que vayan desde los niveles más *específicos* de la escala de codeterminación didáctica que propone la TAD (CHEVALLARD, 2001) hasta los más *genéricos* relacionados con el papel de las matemáticas en la Escuela y el de ésta en la Sociedad. Estructuraremos las cuestiones a estudiar en cinco bloques que se corresponden, aproximadamente, con cada una de las áreas tradicionales de la matemática escolar, aunque esta estructura (que ha variado a lo largo de los sucesivos planes de estudio) no debe tomarse como algo dado e inamovible, sino que también debe ser cuestionada en la formación del profesorado. Añadiremos un sexto bloque *trasversal* relativo al *carácter experimental de la actividad matemática y el papel de la modelización* que permitirá, precisamente, cuestionar la tradicional demarcación en *bloques* y, sobre todo, mostrar las relaciones entre ellos. Indicamos a continuación, a modo de ejemplo para cada uno de los bloques citados, algunas cuestiones umbilicales de la profesión de profesor de matemáticas de Secundaria que deberían responderse a lo largo del proceso de formación.

Ampliaciones sucesivas del campo numérico

- ¿Qué propiedades y características especiales tiene nuestro *Sistema de Numeración* para que se haya impuesto sobre todos los que han existido a lo largo de la historia y que han coexistido durante muchos siglos? ¿Qué relación hay entre la estructura de los Sistemas de Numeración *posicionales* y las propiedades de los *algoritmos* de las operaciones aritméticas?
- ¿Por qué han desaparecido las magnitudes en la enseñanza de las matemáticas en la Enseñanza Secundaria? ¿Qué fenómenos están relacionados con esta desaparición?
- ¿Cuál es la *razón de ser*, esto es, las cuestiones a las que responden los números negativos en la matemática escolar?
- ¿A qué cuestiones responden los números decimales limitados? ¿Y los racionales? ¿Qué relación se establece, o podría establecerse, entre los números decimales y la medida de magnitudes?

Proceso de algebrización de la matemática escolar

- ¿Cómo iniciar el estudio del álgebra en la ESO de una manera *funcional* (en el sentido de *no meramente formal*)? ¿Qué papel juegan los números negativos en la introducción del leguaje algebraico?
- ¿Por qué la divisibilidad tiene un papel tan limitado en la ESO? ¿Es posible relacionarla con la resolución de ecuaciones diofánticas lineales elementales?
- ¿Por qué la relación de proporcionalidad aparece aislada del resto de relaciones funcionales en la enseñanza secundaria? ¿Cómo puede relacionarse el estudio de las funciones con el proceso de algebrización?

El papel de la geometría en el estudio escolar de las matemáticas

- ¿Qué cuestiones podrían considerarse como *generatrices* de la actividad geométrica en la enseñanza secundaria? ¿Qué lugar debe ocupar, entre dichas cuestiones, la problemática de la determinación y construcción de *figuras geométricas*?
- ¿Por qué no se estudian nunca, en la matemática escolar (incluyendo la matemática universitaria) los cambios de forma de las figuras? ¿Cómo se podrían estudiar junto a los cambios de posición y tamaño?

ISSN 1980-4415
http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a16

- ¿Por qué la Geometría Sintética (que se estudia en la ESO) y la Geometría Analítica (que se introduce en el Bachillerato) aparecen como dos mundos completamente separados en la matemática escolar?

El cálculo diferencial e integral en el Bachillerato

- ¿A qué cuestiones responde (cuál es su *razón de ser*) el cálculo de límites de funciones en el Bachillerato? ¿Se necesita para introducir la noción de *continuidad* de una función en un punto?
- ¿Cuáles son las cuestiones que dan sentido al cálculo diferencial elemental en el Bachillerato? ¿Cómo se puede ligar el cálculo diferencial elemental con la modelización funcional?
- ¿A qué motivos obedece la ausencia de las funciones de dos o más variables en el Bachillerato?

De la estadística a la probabilidad

- ¿Es posible estudiar Estadística y Probabilidad sin tener en cuenta, de manera explícita, que se está llevando a cabo un proceso de modelización matemática de un sistema?
- ¿Qué papel debería jugar la Estadística, considerada como el estudio de la variabilidad, en la cultura matemática escolar?
- En el diseño de un programa de estudio en la enseñanza secundaria, ¿qué debería estudiarse primero, la Estadística o la Probabilidad?

Es importante resaltar que las cuestiones que acabamos de citar no surgen de la nada. Forman parte de un gran número de investigaciones que se desarrollan, actualmente, en didáctica de las matemáticas en diferentes enfoques, incluyendo la TAD. A modo de ejemplo, podemos citar (SIERRA, 2006) sobre la numeración y las magnitudes; (BOSCH, 1994) y (GARCÍA 2005) sobre la proporcionalidad; (CID; RUIZ-MUNZÓN, 2011) sobre los números negativos; (RUIZ-MUNZÓN, 2010) sobre el álgebra; (GASCÓN, 2001, 2003, 2004) sobre la divisibilidad y la geometría; (LICERA et al., 2011) sobre los números reales; entre muchos otros.

Además, muchas de las cuestiones descritas están estrechamente relacionadas entre sí (por lo que no pueden tratarse por separado) y, también, existen cuestiones que no se circunscriben a un área concreta de la matemática escolar. Por ello, incluimos un sexto bloque, sabiendo que las cuestiones que lo conforman no pueden tratarse independientemente de las anteriores, sino que aparecerán constantemente imbricadas con éstas para complementarlas, relacionarlas y mostrar los aspectos comunes entre ellas.

ISSN 1980-4415
http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a16

El carácter experimental de la actividad matemática y el papel de la modelización

- ¿Qué términos, qué categorías y qué lenguaje son los más adecuados para describir las matemáticas en el ámbito de la profesión del profesor? ¿Es útil y suficiente hablar de conceptos, procedimientos y actitudes o es mejor hablar de competencias?
- ¿Cuál es la función de las matemáticas en la Sociedad? ¿A qué se debe la invisibilidad social de las matemáticas?
- ¿Qué papel tienen (o podrían tener) las calculadoras simbólicas (CS) en la actividad matemática de modelización?
- ¿Por qué, cuando se habla de *modelización matemática*, se considera casi exclusivamente la modelización de sistemas extra-matemáticos?

La respuesta a cualquiera de las cuestiones que hemos propuesto tiene que tomar en consideración las *organizaciones didácticas* efectivamente existentes en las instituciones docentes, lo cual expresa la *relatividad institucional del saber matemático* y la *inseparabilidad entre lo matemático y lo didáctico*, dos postulados básicos de la TAD (SIERRA; BOSCH; GASCÓN, 2007).

Podría concebirse, *dualmente*, una formación *matemática para la enseñanza* basada en el estudio de un conjunto de *temas* que deberían, entonces, interpretarse como la respuesta a las cuestiones cruciales para la profesión de profesor. Ésta es, de hecho, la opción tradicional de los sistemas de formación. Hemos elegido tomar las cuestiones como punto de partida de la formación para que ganen protagonismo y deban ser *formuladas explícitamente*. Así, deben ser trabajadas, modificadas, reformuladas, generalizadas, situadas en un ámbito más comprensivo, interpretadas de diferentes formas y, en definitiva, desarrolladas. De este modo, se pone de manifiesto que la formación matemática para la enseñanza (como, en general, la formación del profesorado de matemáticas) es un *problema abierto* en el que aparecen constantemente nuevas cuestiones. Además, al tomar las cuestiones como punto de partida y motor de la formación, se genera inevitablemente una *dialéctica* entre cuestiones y respuestas de gran fecundidad (BARQUERO, 2009). Por el contrario, la experiencia demuestra que cuando se parte de las respuestas ya cristalizadas suelen olvidarse fácilmente las cuestiones originales, sin que nadie las eche en falta. Esta *asimetría entre cuestiones y respuestas* como punto de partida y motor de cualquier tipo de formación – partir de las cuestiones potencia la dialéctica cuestiones-respuestas, mientras que partir de las respuestas adormece y hasta excluye dicha dialéctica – constituye el principal argumento para partir de las primeras.

ISSN 1980-4415
http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a16

4 Diseño y experimentación de un proceso de formación basado en el estudio de cuestiones

Para llevar a cabo un proceso de formación centrado en el estudio de cuestiones sobre las *matemáticas para la enseñanza* como las que acabamos de presentar se requiere una organización didáctica concreta que no existe en los actuales sistemas de formación del profesorado y que, por lo tanto, debemos empezar a construir y experimentar. Con este objetivo hemos llevado a cabo dos *experimentaciones exploratorias* en el ámbito del Máster de Formación del Profesorado de Secundaria en dos universidades españolas diferentes (Autónoma de Barcelona y Complutense de Madrid).

Sintetizamos, a continuación, los principales dispositivos de formación que sustentan nuestra propuesta y los ilustramos con algunos casos sacados de las experimentaciones. Esta pequeña muestra empírica nos permitirá postular, a modo de conclusión, algunas de las grandes restricciones que surgen en la puesta en marcha de este tipo de formación.

a) Formular las preguntas de la semana por escrito

Hemos puesto en marcha un dispositivo didáctico, metodológicamente innovador, introducido por Y. Chevallard en el ámbito de la formación inicial del profesorado en Francia (CHEVALLARD, 2005; CIRADE, 2006) y que hemos adaptado al caso español (RUIZ-OLARRÍA; SIERRA, 2011). Se pide a cada grupo de profesores en formación que entregue cada semana, *por escrito* y de forma concisa, la descripción de una dificultad que han encontrado la semana anterior y los interrogantes que ésta les ha suscitado. El *contrato* alrededor de este dispositivo puntualiza que las preguntas pueden tratar sobre cualquier ámbito relacionado con su actividad profesional, tanto en sus tareas docentes como en el resto de actividades de formación, y no tienen que relacionarse necesariamente con las matemáticas. Las preguntas no deben considerarse como *dificultades personales* de los estudiantes, sino como *dificultades objetivas ligadas a la profesión* de profesor de matemáticas. En cuanto a la naturaleza de las preguntas propuestas, aunque inicialmente suelen hacer referencia a aspectos genéricos de la profesión, una gran parte ellas se sitúa dentro de las llamadas *praxeologías matemáticas para la enseñanza*, incluyendo, también, muchas de ellas en torno a las praxeologías *matemáticas por enseñar*.

Así, por ejemplo, uno de los grupos de profesores en formación formuló la siguiente pregunta: parece que el álgebra se presenta como una herramienta que viene a sustituir a la aritmética. A los estudiantes se les obliga a usar el álgebra, como si la aritmética ya *no vale para nada*, mientras que los problemas que se plantean se pueden resolver en la mayoría de

ISSN 1980-4415
http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a16

los casos aritméticamente. ¿Por qué tiene que desterrar el álgebra a la aritmética? ¿Podría enseñarse el álgebra de forma que conviva y/o se complemente con la aritmética?

b) Proponer elementos de respuesta a las preguntas de la semana

Cada semana se dedica un tiempo razonable a proponer algunos elementos de respuesta a las *preguntas de la semana*, en una actividad claramente dirigida por el formador. El objetivo de esta actividad no consiste en dar respuestas definitivas y cerradas, sino en situar las preguntas, reformularlas y mostrar las relaciones, a veces inesperadas, con otros ámbitos, así como proponer referencias en las que se podrían encontrar otros puntos de vista.

Con relación a la pregunta citada, los formadores apelaron a la interpretación del álgebra elemental como *instrumento de modelización* de todo tipo de praxeologías tanto matemáticas (aritméticas, geométricas, funcionales, combinatorias etc.) como extramatemáticas (comerciales, físicas, biológicas etc.) y al correspondiente *proceso de algebrización* de las organizaciones matemáticas escolares. Desde este punto de vista, el álgebra elemental no sólo no destierra a la aritmética sino que constituye un instrumento de desarrollo y potenciación de la misma (como del resto de praxeologías escolares). Así, por ejemplo, a lo largo del proceso de formación se estudió el caso de la praxeología matemática escolar en torno a la *divisibilidad*, mostrando cómo puede articularse y completarse relativamente, mediante un proceso de algebrización que unifica las técnicas y los tipos de tareas de dicha praxeología en el ámbito de las ecuaciones diofánticas lineales elementales (GASCÓN, 2001). Otro aspecto de la complementariedad entre la aritmética y esta forma de interpretar el álgebra elemental se pone de manifiesto en el papel del álgebra como construcción de lo numérico y, en particular, en el carácter algebraico de los números negativos (CID; RUIZ-MUNZÓN, 2011). Además de estos elementos de respuesta, los formadores proporcionaron a los profesores en formación referencias de otros puntos de vista y otras formas de interpretar el álgebra elemental como, por ejemplo, los recientes trabajos sobre *Early Algebra* que postulan la adquisición en edad temprana del pensamiento algebraico y el carácter *algebraico* de la *aritmética elemental* (CARRAHER et al., 2006).

c) Plantear cuestiones umbilicales de la profesión y entregar materiales asociados

El formador plantea al gran grupo distintas cuestiones a estudiar que provienen, en algunos casos, de reformular las propuestas por los grupos de estudiantes y, en otros, de los resultados obtenidos en determinadas investigaciones didácticas (como las de la sección 3). De este modo se completa lo que podríamos considerar como un *cuestionamiento espontáneo* con aquel, más complejo, que surge en el ámbito de la investigación didáctica. Con relación a dichas cuestiones, se entregan materiales diversos a los profesores en formación y se les

ISSN 1980-4415
http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a16

proporciona acceso a diferentes *media* (programas, libros de texto, artículos de educación, documentos históricos etc.), donde puedan encontrar elementos de respuesta.

Así, en una de las sesiones, el formador planteó las siguientes cuestiones: ¿Qué se entiende (de manera más o menos implícita) por *figura geométrica* en la enseñanza secundaria? ¿Qué relación tiene este concepto de figura con las clasificaciones que aparecen en la matemática escolar de algunos tipos de figuras como, por ejemplo, de los cuadriláteros? ¿Por qué nunca se clasifican los hexágonos? ¿Por qué no se estudian nunca, en la matemática escolar (incluyendo la matemática universitaria) los cambios de forma de las figuras? ¿Cómo se podrían estudiar junto a los cambios de posición y tamaño?

d) Buscar respuestas disponibles en la cultura a las cuestiones planteadas

Los estudiantes disponen, fuera de clase, de un cierto tiempo para buscar posibles elementos de respuesta a las cuestiones planteadas y aportar así, *respuestas provisionales* que encuentran en los *media* que la cultura pone a su disposición (artículos, libros, sitios de Internet, conferencias etc.). Estas respuestas no siempre responden exactamente a las cuestiones planteadas (de ahí su carácter provisional), por lo que requieren una adaptación (desconstrucción y reconstrucción) para convertirse en la respuesta propia al grupo de estudiantes.

En el caso de las cuestiones geométricas planteadas anteriormente, algunos grupos de profesores en formación encontraron elementos de respuesta en el ámbito de la definición de *geometría* propuesta por F. Klein y de la correspondiente clasificación de las geometrías del Programa de Erlangen (1872). Así, apelaron a las *nociones invariantes por el grupo de transformaciones* que define cada una de las geometrías. En particular, propusieron que la noción de figura geométrica dependerá de la geometría (euclidiana, afín, proyectiva etc.) en la que nos situemos, esto es, del grupo de transformaciones que se tome en consideración y, por lo tanto, los criterios de clasificación de un tipo de figuras geométricas (y la propia noción de *tipo de figuras geométricas*) dependerán de la geometría en la que se trabaje, puesto que se dirá que dos figuras son *equivalentes* (o *iguales*) si existe una transformación geométrica (perteneciente al grupo que define la geometría en cuestión) que transforma una en la otra.

El estudio de estas cuestiones dio lugar a un trabajo de ingeniería matemática elaborado por uno de los grupos de profesores en formación que, además, les permitió dar elementos de respuesta a la cuestión de la relación entre la geometrías sintético-euclidiana y analítico-cartesiana, puesto que la definición de geometría que propuso F. Klein en su Programa de Erlangen confirma que los métodos sintético y analítico no originan geometrías distintas sino que estudian, en cada caso, la misma geometría.

ISSN 1980-4415
http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a16

Este trabajo de ingeniería matemática constituye, con todas las limitaciones del caso, un esbozo de lo que denominamos una *praxeología matemática para la enseñanza*, al contener conocimientos matemáticos necesarios para delimitar e interpretar adecuadamente la geometría por enseñar en Secundaria.

e) Realizar una actividad matemática relacionada con las cuestiones estudiadas

Los estudiantes, en pequeño grupo, realizan en clase una actividad matemática relacionada con las cuestiones planteadas, ayudándose del material asociado. Esta actividad pretende, por una parte, profundizar en el significado de la cuestión que genera la actividad matemática y, por otra, empezar a dar respuesta a algunas de dichas cuestiones mediante la propia actividad matemática.

Con relación a las cuestiones planteadas anteriormente, se propuso a todos los profesores en formación que, trabajando en grupo, elaboraran una posible *clasificación de los hexágonos*. Se trataba, por una parte, de poner en evidencia las limitaciones de los criterios que se utilizan habitualmente para clasificar los cuadriláteros y, por otra, de hacer emerger otro tipo de criterios más intrínsecos relacionados, por ejemplo, con el grupo de transformaciones que define la geometría euclidiana.

f) Proponer elementos de respuesta por parte de la comunidad de estudio

Cada equipo de estudiantes debe *exponer* en gran grupo, y por medio de un *secretario* elegido entre los miembros del equipo, una síntesis de sus propias respuestas. El formador proporciona, posteriormente, en cada caso, elementos de respuesta (siempre parciales) a la problemática considerada, haciendo un esfuerzo por relacionarla o contrastarla con las aportadas por los equipos de estudiantes. La comunidad de estudio, de forma colaborativa y bajo la dirección del formador, *sintetiza* su propia respuesta (provisional) a cada una de las cuestiones estudiadas.

Algunos grupos de profesores en formación empezaron a ensayar el criterio de clasificación que proporciona el grupo de simetría de un hexágono, esto es, establecieron la siguiente relación de equivalencia en el conjunto de los hexágonos: *dos hexágonos son equivalentes si y sólo si tienen el mismo grupo de simetría*. Partiendo del grupo de simetría del hexágono regular (grupo diédrico formado por seis simetrías axiales y seis rotaciones) los profesores en formación indagaron algunas clases de hexágonos determinadas por ciertos subgrupos utilizando, en particular, que el orden de un subgrupo de un grupo finito es un divisor del orden del grupo. La utilización posterior de este mismo criterio para clasificar los cuadriláteros, permitió a los profesores en formación tomar conciencia de la arbitrariedad de algunos de los tipos de figuras que aparecen habitualmente en la geometría por enseñar

ISSN 1980-4415
http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a16

(como, por ejemplo, el de *trapecio*), así como los obstáculos didácticos que se crean cuando se utilizan clasificaciones no inclusivas, esto es, clasificaciones en las que, por ejemplo, no hay ningún cuadrilátero que sea simultáneamente *rombo* y *rectángulo* (GASCÓN, 2004).

5 A modo de conclusión: restricciones para una formación docente basada en el estudio de cuestiones

Si nos preguntamos por los resultados obtenidos a lo largo de estos dos cursos en los que se ha llevado a cabo la experimentación exploratoria que acabamos de presentar, podemos responder aportando dos tipos de elementos. Por un lado, aquellos aspectos de la formación que han funcionado bien y que los estudiantes han valorado muy positivamente al acabar la formación (generalmente en comparación con los otros tipos de cursos recibidos).[5] Por otro, los propios formadores han detectado dificultades generales que han surgido durante las dos experimentaciones realizadas y que postulamos como posibles restricciones institucionales a este tipo de formación. Este doble análisis, que en el nivel tan exploratorio de nuestra experimentación no podemos más que esbozar, constituye lo que se designa en la TAD el *análisis ecológico* de los sistemas de formación (CHEVALLARD, 2005).

En lo que se refiere a las condiciones de fácil implantación en la formación, los estudiantes mencionan el haber podido trabajar en equipo, al ser una práctica bastante ausente tanto en sus estudios de matemáticas como a lo largo del resto de su formación. Además, en los informes de memoria del curso que han realizado los diferentes grupos de estudiantes se ha considerado didácticamente útil el dispositivo de las preguntas de la semana, a la vez que se han indicado algunas deficiencias relativas al tiempo disponible y a la falta de infraestructuras necesarias para elaborar una respuesta colectiva a las cuestiones propuestas.

Todos los grupos han encontrado que la cuestión generatriz, planteada al principio de cada proceso de estudio, ha constituido un aliciente importante para el desarrollo de dicho proceso. Si bien ha sido el formador el que se ha responsabilizado de plantear las cuestiones y tareas iniciales, los profesores en formación señalan que han asumido progresivamente la responsabilidad de decidir en cada momento *los medios, los instrumentos y las técnicas* más adecuados para proseguir el estudio. Esto les ha llevado a afirmar que el *grado de autonomía* experimentado en la búsqueda de elementos de respuesta a las cuestiones propuestas ha sido

[5] Al ser estudiantes en formación inicial, no disponemos por desgracia de información sobre los aspectos del curso que pueden haber incidido en su actividad profesional. Sería extremadamente interesante poder tener accesos a estos mismos estudiantes dentro de unos años para analizarlos.

ISSN 1980-4415
http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a16

muy superior al que se tiene habitualmente en los sistemas de formación, en los que es el profesor quien asume en exclusiva dicha responsabilidad.

Describiremos, para terminar, las principales dificultades que han aparecido, así como algunas hipótesis explicativas basándonos en posibles restricciones institucionales:

(a) Los estudiantes han mostrado dificultades para *formular las preguntas de la semana* por escrito y para *buscar respuestas disponibles en la cultura* a las cuestiones propuestas por el formador. Estas dificultades podrían explicarse, en parte, como una consecuencia del *cambio del contrato didáctico* habitual, puesto que el nuevo contrato que proponemos asigna a los estudiantes la responsabilidad de realizar *gestos de estudio* que, en la pedagogía tradicional, se dejan bajo la responsabilidad exclusiva del profesor.

(b) Los estudiantes para profesores tendían a considerar que muchas de las preguntas que espontáneamente formularían (especialmente si eran de tipo matemático) se debían a *carencias personales en su formación* o a dificultades personales. Esta situación provocó que se retrajeran ante este dispositivo por considerarlo como una intromisión en su *relación personal* con las matemáticas.

(c) Para los formadores fue difícil integrar en el proceso global de formación del máster un dispositivo didáctico *centrado en el estudio de cuestiones.* En ambas experiencias, el nuevo modelo docente chocó con las expectativas de los estudiantes para profesores que inicialmente reclamaban respuestas y sólo progresivamente fueron aceptando la necesidad de buscar las respuestas por sí mismos y de plantear cuestiones tanto individualmente como en grupo.

(d) La principal dificultad que apareció para poner en marcha los nuevos dispositivos didácticos tiene su origen en una restricción objetiva: la falta de disponibilidad, en el ámbito de la comunidad matemática actual, de las praxeologías matemáticas *para la enseñanza* y de la *infraestructura* necesaria para elaborarlas. Para *plantear cuestiones umbilicales de la profesión* y para *proponer elementos de respuesta* a las mismas, se necesita disponer de materiales cuya elaboración no parece razonable hacer recaer sobre el formador (considerado individualmente) ni mucho menos, como indica Y. Chevallard, sobre la responsabilidad de los profesores.

> Contre la pente d’un petit métier dont les praticiens sont abandonnés à eux-mêmes, qui regarde toute difficulté rencontrée dans l’exercice du métier comme un trouble *personnel* du praticien, trouble qu’il s’agirait d’éliminer par un « traitement » individuel approprié, nous posons que toute difficulté rencontrée, même par un novice, est une difficulté *du métier*, dont il faut étudier les conditions de survenue et qui constitue ainsi l’un des *problèmes posés à une semi-profession en mutation*, ce que j’appellerai en anticipant *un problème de la profession de professeur*. De là la nécessité de développer des *recherches sur les problèmes de la profession*. De telles

ISSN 1980-4415
http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a16

> recherches devaient non seulement apporter des solutions théoriques et pratiques aux problèmes identifiés mais encore désigner, voire créer du même mouvement les savoirs utiles à l'exercice optimal, ou du moins optimisable, de la profession. (CHEVALLARD, 2010, p. 7)

(e) Digamos, para acabar, que a lo largo de las experimentaciones se ha puesto claramente de manifiesto la necesidad de mejorar la integración entre la formación matemático-didáctica y las *prácticas docentes* del profesorado en formación. Es en este ámbito en el que surgirán y tomarán cuerpo muchas de las cuestiones relativas al estudio de las matemáticas y en el que el futuro profesor debe ensayar las respuestas tentativas que vayan apareciendo a lo largo del proceso de formación. Esta mejor articulación teórico-práctica permitirá dar pleno sentido al dispositivo didáctico de las *Preguntas de la semana*, ya que en el *Prácticum* surgen muchas de las cuestiones *umbilicales* de la profesión de profesor.

En definitiva, el trabajo que estamos llevando a cabo pone de manifiesto que esta formación elaborada en el marco de la TAD y basada en el estudio de las cuestiones umbilicales de la profesión docente, requiere, para ser implantada de forma generalizada, del trabajo conjunto y colaborativo entre los profesores de matemáticas, el sistema de formación del profesorado y los investigadores en didáctica de las matemáticas. Este trabajo conjunto debe estar dirigido a diseñar un sistema de formación del profesorado en el que se integren de manera funcional los tres tipos de praxeologías directamente relacionadas con el ejercicio de la docencia de matemáticas: las praxeologías matemáticas *por enseñar* (que deben cuestionarse y reconstruirse de nuevo para hacer visible su *razón de ser*, en lugar de suponerlas construidas de antemano); las praxeologías matemáticas *para la enseñanza* (que requieren de infraestructuras matemáticas que, en gran medida, están por elaborar), y las praxeologías *didácticas de la profesión docente* que, conteniendo a los dos tipos de praxeologías anteriores, deben integrar las *prácticas docentes* como un componente esencial e inseparable de la formación matemático-didáctica.

Referencias

BALL, D. L. Bridging practices: Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. **Journal of Teacher Education**, Washington, v. 51, n. 3, p. 241-247, mayo/jun. 2000.

BALL, D. L.; LUBIENSKI, S. T.; MEWBORN, D. S. Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. In: RICHARDSON, V. (Ed.). **Handbook of research on teaching**. 4. ed. Washington, DC: American Educational Research Association, 2001. p. 433-456.

ISSN 1980-4415
http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a16

BARQUERO, B. **Ecología de la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las matemáticas**. 2009. 561 f. Tesis (Doctorado en Matemáticas) – Facultat de Ciències, Universitat Autònoma de Barcelona, Barcelona, 2009.

BOSCH, M. **La dimensión ostensiva en la actividad matemática. El caso de la proporcionalidad**. 1994. 532 f. Tesis (Doctorado en Matemáticas) – Facultat de Ciències, Universitat Autònoma de Barcelona, Barcelona, 1994.

BOSCH, M.; ESPINOZA, L.; GASCÓN, J. El profesor como director de procesos de estudio: análisis de organizaciones didácticas espontáneas. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble, v. 23, n. 1, p. 79-136, mayo 2003.

BOSCH, M.; GASCÓN, J. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico a la formación del profesorado de matemáticas de secundaria. In: GONZÁLEZ, M. J.; GONZÁLEZ, M. T.; MURILLO, J. (Ed.). **Investigación en Educación Matemática XIII**, Santander: SEIEM, 2009. p. 89-113.

BROUSSEAU, G. ¿Qué pueden aportar a los enseñantes los diferentes enfoques de la didáctica de las matemáticas? (Segunda parte), **Enseñanza de las Ciencias**, Barcelona, v. 9, n. 1, p. 10-21, mar. 1991.

CARRAHER, D. W.; SCHLIEMANN, A. D.; BRIZUELA, B. M.; EARNEST, D. Arithmetic an Algebra in Early Mathematics Education. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, v. 37, n. 2, p. 87-115, mar. 2006.

CHEVALLARD, Y. Aspectos problemáticos de la formación docente. In: JORNADAS DEL SEMINARIO INTERUNIVERSITARIO DE INVESTIGACIÓN EN DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS, 16., 2011, Huesca, **Analles…** Huesca: Université de Saragosse, 2001. p. 1-10. Recuperado en: <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=15>. Acceso en: 4 oct. 2012.

CHEVALLARD, Y. Didactique et formation des enseignants. Communication aux Journées d'études INRP-GÉDIAPS Vingt ans de recherche en didactique de l'Éducation Physique et Sportive à l'INRP (1983-2003). In: DAVID, B. (Ed.). **Impulsions 4**, Lyon: INRP, 2005. p. 215-231.

CHEVALLARD, Y. L'échec splendide des IUFM et l'interminable passion du pédant. Quel avenir pour le métier de professeur ? In: CONFERENCE INAUGURALE DU COLLOQUE - REGARDS DES DIDACTIQUES DES DISCIPLINES SUR LES PRATIQUES ET LA FORMATION DES ENSEIGNANTS, 1., 2010, Toulouse, **Actas...** Toulouse: Organisé par le Gridife. 2010. p. 20-22.

CHEVALLARD, Y. Quel programme pour l'avenir de la recherche en TAD ? In: BOSCH, M.; GASCÓN, J.; RUIZ OLARRÍA, A.; ARTAUD, M.; BRONNER, A.; CHEVALLARD, Y.; CIRADE, G.; LADAGE, C.; LARGUIER, M. (Ed.). **Un panorama de la TAD**, Barcelona: CRM Documents, 2011. p. 23-32.

CHEVALLARD, Y. Des programmes, oui. Mais pour quoi faire ? Vers une réforme fondamentale de l'enseignement. In: CONFERENCE NATIONALE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES A L'ECOLE PRIMAIRE ET AU COLLEGE, 1., 2012, Lyon. Analles... Lyon: Educmath, 2012. Disponible en: <http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/dossier-manifestations/conference-nationale/contributions/conference-nationale-chevallard >. Acceso en: 5 ene. 2013.

CHEVALLARD, Y. Enseñar Matemáticas en la Sociedad de Mañana: Alegato a Favor de un Contraparadigma Emergente. **REDIMAT – Journal of Research in Mathematics Education**, Barcelona, v. 2, n. 2, p. 161-182, jun. 2013. Disponible en:

ISSN 1980-4415
http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a16

<http://www.hipatiapress.com/hpjournals/index.php/redimat/article/view/631/pdf>. Acceso em: 5 ene. 2013.

CHEVALLARD, Y; BOSCH, M.; GASCÓN, J. **Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje**. Barcelona: ICE/Horsori, 1997.

CHEVALLARD, Y.; CIRADE, G. Pour une formation professionnelle d'université: éléments d'une problématique de rupture. **Recherche et formation**, Paris, n. 60, p. 51-62, mayo 2009.

CID, E.; RUIZ- MUNZÓN, N. Actividades de Estudio e Investigación para introducir los números negativos en un entorno algebraico. In: BOSCH, M.; GASCÓN, J.; RUIZ OLARRÍA, A.; ARTAUD, M.; BRONNER, A.; CHEVALLARD, Y.; CIRADE, G.; LADAGE, C.; LARGUIER, M. (Ed.). **Un panorama de la TAD**, Barcelona: CRM Documents, 2011. p. 579-604.

CIRADE, G. **Devenir professeur de mathématiques : entre problèmes de la profession et formation en IUFM. Les mathématiques comme problème professionnel**. 2006, 453 f. Tesis (Doctorat en Didactique des Mathématiques) – École doctorale de mathématiques et informatique de Marseille. Université de Provence, 2006.

ETZIONI, A. **The semi-professions and their organization: teachers, nurses, social workers**. Nueva York: Free Press, 1969.

FONT, V. Competencias profesionales en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. **Unión**, San Cristóbal de La Laguna, n. 26, p. 9-25, jun. 2011.

GARCÍA, F. J. **La modelización como herramienta de articulación de la matemática escolar**. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales. 1995. 275 f. Tesis (Doctorado en Matemáticas) – Departamento de Didáctica de las Ciencias. Universidad de Jaén, 2005.

GASCÓN, J. Reconstrucción de la divisibilidad en la Enseñanza Secundaria. **Quadrante: Revista Teórica e de Investigação**, Lisboa, v. 10, n. 2, p. 33-66, jul./dic. 2001.

GASCÓN, J. Efectos del "autismo temático" sobre el estudio de la Geometría en Secundaria. Parte I. Desaparición escolar de la razón de ser de la geometría. **Suma. Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas**, Granada, n. 44, p. 25-34, nov. 2003.

GASCÓN, J. Efectos del "autismo temático" sobre el estudio de la Geometría en Secundaria. Parte II. La clasificación de los cuadriláteros convexos. **Suma. Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas**, Granada, n. 45, p. 41-52, feb. 2004.

GODINO, J. D. Categorías de análisis de los conocimientos del Profesor de Matemáticas. **Unión**, San Cristóbal de La Laguna, n. 20, p. 13-31, dic. 2009.

GÓMEZ, P. **Desarrollo del Conocimiento Didáctico en un Plan de Formación Inicial de Profesores de Matemáticas de Secundaria**. 2007. 680 f. Tesis (Doctorado en Matemáticas) – Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, Granada, 2007.

HILL, H. C.; BALL, D. L.; SCHLLING, S. G. Unpacking pedagogical content knowledge of students. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, v. 39, n. 4, p. 372-400, July 2008.

KLEIN, F. **Matemática elemental desde un punto de vista superior**. Traducción al español de Jesús Fernández. Madrid: Nivola, 1908/2006.

LEBESGUE, H. **La medida de magnitudes**. México, D.F.: Limusa, 1915/1995.

LICERA, R.M.; BASTAN, M.; BOSCH, M.; GASCON, J. La construcción del número real y el problema de la medida de magnitudes continuas en la enseñanza secundaria. In: BOSCH, M.; GASCÓN, J.; RUIZ OLARRÍA, A.; ARTAUD, M.; BRONNER, A.; CHEVALLARD, Y.; CIRADE, G.; LADAGE, C.; LARGUIER, M. (Ed.). **Un panorama de la TAD**. Barcelona: CRM Documents, 2011. p. 695-718.

LLINARES, S.; VALLS, J.; ROIG, A. Aprendizaje y diseño de entornos de aprendizaje basado en videos en los programas de formación de profesores de matemáticas. **Educación matemática**, México, v. 20, n. 3, p. 31-54. dic. 2008.

PINO-FAN, L.; GODINO, J. D.; FONT, V. Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 13, n. 1, p. 141-178, ene. 2011.

RIBEIRO, C. M.; CARRILLO, J.; MONTEIRO, R. Desarrollo profesional de una maestra de primaria. Discutiendo un modelo de representación del desarrollo profesional. In: MORENO, M. M.; ESTRADA, A.; CARRILLO, J.; SIERRA, T. A. (Ed.). **Investigación en Educación Matemática XIV**. Lleida: SEIEM, 2010. p. 511-522.

RUIZ-MUNZÓN, N. **La introducción del álgebra elemental y su desarrollo hacia la modelización funcional**. 2010. 407 f. Tesis (Doctorado en Matemáticas) – Facultat de Ciències, Universitat Autònoma de Barcelona, Barcelona, 2010. (vols.1 y 2)

RUIZ OLARRÍA, A.; SIERRA DELGADO, T. A. La formación matemático-didáctica del profesorado de secundaria. In: BOSCH, M.; GASCÓN, J.; RUIZ OLARRÍA, A.; ARTAUD, M.; BRONNER, A.; CHEVALLARD, Y.; CIRADE, G.; LADAGE, C.; LARGUIER, M. (Ed.). **Un panorama de la TAD**. Barcelona: CRM Documents, 2011. p. 465-483.

SHULMAN, L. S. Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. **Harvard Educational Review**, Harvard, v. 57, n. 1, p. 1-22, Apr. 1987.

SIERRA, T. A. **Lo matemático en el diseño y análisis de organizaciones didácticas. Los sistemas de numeración y la medida de magnitudes**. 2006. 472 f. Tesis (Doctorado en Matemáticas) – Facultad de Educación. Universidad Complutense de Madrid. Madrid. 2006.

SIERRA, T. A.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. Interrelación entre lo matemático y lo didáctico en la reconstrucción escolar de los sistemas de numeración. In: RUIZ-HIGUERAS, L.; ESTEPA, A.; GARCÍA, F. J. (Ed.). **Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico**. Jaén: Publicaciones de la Universidad de Jaén, 2007. p. 359-381.

SIERRA DELGADO T. A.; BOSCH CASABÓ, M.; GASCÓN PÉREZ, J. La formación matemático-didáctica del maestro de Educación Infantil: el caso de «cómo enseñar a contar». **Revista de Educación**, Madrid, v. 357, p. 231-256, 2011.

WHITNEY, H. The mathematics of physical quantities. Part II: Quantity Structures and Dimensional Analysis. **American Mathematical Monthly**, Menasha, v. 75, n. 3, p. 227-256, Mar. 1968.

Submetido em Abril de 2013.
Aprovado em Agosto de 2013.