

# Compreensão de Futuros Professores dos Efeitos nas Medidas de Tendência Central ao se Acrescentar Novos Dados a um Conjunto

## Prospective Teachers' Understanding of the Effects on Central Tendency Measures when Adding New Data to a Set

José António Fernandes\*

 ORCID iD 0000-0003-2015-160X

### Resumo

Neste trabalho estuda-se a compreensão de estudantes, futuros professores dos primeiros anos escolares, sobre dados que devem ser acrescentados a uma série dada para se obterem certos valores das medidas de tendência central. Para tal foi realizado um estudo quantitativo, de tipo descritivo, em que participaram 34 estudantes do 2.º ano do curso de Licenciatura em Educação Básica de uma universidade do Norte de Portugal, tendo os dados sido obtidos num contexto de avaliação formal realizada no âmbito da unidade curricular de Probabilidades e Estatística. Aqui, neste trabalho, iremos explorar apenas uma tarefa, exatamente aquela em que se questionavam os estudantes acerca dos dados a acrescentar a uma série dada de modo a se obterem valores especificados para as medidas de tendência central. Em termos dos principais resultados obtidos, salienta-se um desempenho bastante satisfatório dos estudantes em termos de respostas corretas. Contudo, essas respostas corretas, relativas aos valores a acrescentar, muitas vezes, não resultaram de uma explicação racional e compreensiva sobre a sua origem. Assim, a partir do presente estudo, destaca-se a necessidade destes estudantes, futuros professores dos primeiros anos escolares, verbalizarem e explicarem as suas ideias, aspectos que serão da maior relevância no seu futuro ofício docente. Por outro lado, de entre as medidas de tendência central (moda, mediana e média), constatou-se que os estudantes sentiram maiores dificuldades quando estava implicado um valor da média, o que pode dever-se à sua determinação única.

**Palavras-chave:** Educação Estatística. Medidas de Tendência Central. Futuros Professores. Primeiros Anos Escolares.

### Abstract

In this work, we study the understanding of students, prospective primary school teachers, about data that must be added to a given series to obtain certain values of the central tendency measures. To this end, a quantitative, descriptive study was carried out, in which 34 students from the 2nd year of the Basic Education Degree course at a university in the North of Portugal participated, and the data was obtained in a context of formal evaluation carried out in the scope of the Probability and Statistics course unit. Here, in this work, we will explore only one task, exactly the one in which students were asked about the data to be added to a given series to obtain specified values for the central tendency measures. In terms of the main results obtained, we highlighted a very satisfactory performance of students in terms of correct answers. However, these correct answers, regarding the values to be added, often did not result from a rational and comprehensive explanation of their origin. Hence, the present study highlights the need for these students, prospective primary school teachers, to verbalize and explain their ideas, aspects that will be of the greatest relevance in their future teaching profession. On the other hand, among the central tendency measures (mode, median, and mean), it was found that students experienced greater difficulties when a mean value was involved, which may be due to their unique determination.

**Keywords:** Statistics Education. Central Tendency Measures. Prospective Teachers. Primary School.

---

\* Doutor em Educação pela Universidade do Minho (UM). Professor Associado no Instituto de Educação da Universidade do Minho (UM), Braga, Portugal. E-mail: [jfernandes@ie.uminho.pt](mailto:jfernandes@ie.uminho.pt).

## 1 Introdução

Em resposta à crescente importância da Estatística, em termos sociais, individuais e científicos, nos últimos anos vem-se assistindo ao desenvolvimento do seu ensino nas escolas dos diferentes países, com maior incidência nos primeiros anos de escolaridade. No caso concreto português, em 2007, o tema de Estatística passou a constar explicitamente dos programas escolares da disciplina de Matemática dos quatro primeiros anos de escolaridade (MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO, 2007) e atualmente faz parte dos programas da disciplina de Matemática de todos os anos escolares (MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA, 2013, 2014).

Ora, o alargamento do ensino da Estatística aos primeiros anos escolares requer que os professores desse nível escolar adquiram uma formação que lhes permita realizar um ensino de qualidade. No caso destes professores, antes da inclusão da Estatística nos programas escolares, a sua formação inicial, que decorre numa instituição do ensino superior, não incluía qualquer componente de Estatística. Porém estas mudanças recentemente ocorridas no ensino da Estatística justificam a realização de estudos sobre variadas facetas do seu ensino e, particularmente, sobre o conhecimento dos futuros professores em conteúdos estatísticos relevantes.

De entre os diferentes conteúdos estatísticos, deve ser salientado que as medidas de tendência central sempre têm feito parte das ideias estatísticas fundamentais e nos dias de hoje já são ensinadas aos alunos dos primeiros anos escolares. Especificamente, em Portugal, a moda é ensinada no 3.º ano (8 anos), a média é ensinada no 5.º ano (10 anos) e a mediana no 7.º ano (12 anos) (MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA, 2013).

Estudos anteriores mostram que os futuros professores dos primeiros anos escolares revelam dificuldades em Estatística, designadamente na construção e interpretação de tabelas (FERNANDES; GONÇALVES; BARROS, 2021), na construção gráficos estatísticos (FERNANDES; FREITAS, 2019; FERNANDES, MARTINHO; GONÇALVES, 2020) e nas estatísticas de localização (FERNANDES; BARROS, 2005; FERNANDES; FREITAS, 2019) e na escolha e aplicação de métodos estatísticos (FERNANDES; BATANERO; GEA, 2019).

No presente estudo iremos aprofundar a compreensão dos estudantes, futuros professores dos primeiros anos escolares, sobre as medidas de tendência central, inquirindo-os sobre que dado ou dois dados devem ser acrescentados a uma série dada para se obterem certos valores de uma ou duas estatísticas de tendência central. Assim, nesta investigação, pretendemos saber até que ponto os estudantes são capazes de aplicar as referidas estatísticas

para determinar o dado ou os dois dados em questão. Repare-se que a determinação de tais dados não se reduz a uma utilização das definições das medidas de tendência central numa perspectiva meramente algorítmica.

Para tanto, nas próximas seções do artigo, trataremos do enquadramento teórico, da metodologia adotada no estudo, da apresentação de resultados e, por último, das principais conclusões e implicações do estudo.

## 2 Enquadramento teórico

Nesta seção analisam-se os pressupostos teóricos do estudo, destacando o marco teórico no qual se insere e as investigações prévias com ele particularmente relacionadas.

### 2.1 Marco teórico

O estudo, aqui apresentado, centra-se no conhecimento de estudantes, futuros professores dos primeiros anos escolares, para ensinar. Desde a década de 1980, com a publicação do trabalho de Shulman (1986), que se vem assistindo a um aumento crescente de investigações relativas a essa problemática, a que seguiram muitos outros trabalhos, designadamente de Godino e colaboradores (e.g., GODINO, 2002; GODINO; BATANERO, 1994; GODINO; BATANERO; FONT, 2007; GODINO; GIACOMONE; BATANERO; FONT, 2017) e de Hill, Ball e Schilling (2008).

Todos os autores referidos preconizam que o conhecimento para ensinar é um conhecimento multifacetado, que inclui o conhecimento do conteúdo, o conhecimento pedagógico do conteúdo, o conhecimento pedagógico geral e o conhecimento do currículo. No caso do conhecimento do conteúdo, Hill, Ball e Schilling (2008) distinguem três componentes: o *conhecimento comum do conteúdo*, que se refere ao conhecimento que uma pessoa qualquer mobiliza para resolver problemas matemáticos; o *conhecimento especializado do conteúdo*, que se refere ao conhecimento do professor que lhe permite planificar e desenvolver sequências de ensino; e o *conhecimento no horizonte matemático*, que se refere a conteúdos mais avançados do que os que se ensinam. No presente estudo são particularmente relevantes o conhecimento comum do conteúdo e o conhecimento no horizonte matemático.

No presente estudo iremos também basear-nos no enfoque ontossemiótico do conhecimento e instrução matemática de Godino e colaboradores (e.g., GODINO; BATANERO, 1994; GODINO; BATANERO; FONT, 2007) porque o consideramos adequado para o estudo

das questões de significado e para uma descrição mais detalhada dos objetos e processos matemáticos.

No enfoque ontossemiótico assume-se que o conhecimento, incluindo o conhecimento matemático, emerge das práticas operativas e discursivas que o sujeito realiza ao resolver uma amostra representativa de situações-problema referentes a um dado conteúdo matemático. Portanto está subjacente ao significado de uma perspectiva pragmática, subjetiva e semiótica operacionalizada através da resolução de problemas.

Ora o conhecimento para ensinar engloba várias facetas, das quais são relevantes para o presente estudo as facetas epistêmica e cognitiva. Segundo Godino, Batanero e Font (2007) e Godino *et al.* (2017), a faceta epistêmica refere-se ao conhecimento que emerge das práticas partilhadas entre os membros de uma instituição, como seja a dos professores, e a faceta cognitiva diz respeito ao conhecimento que emerge das práticas de uma pessoa particular, como seja um estudante. Assim, sendo o propósito do ensino fazer com que a faceta cognitiva coincida o máximo possível com a faceta epistêmica, esta dualidade institucional-pessoal permite avaliar em que medida o aluno compreende os objetos matemáticos em jogo (GODINO; BATANERO, 1994).

Além da dualidade institucional-pessoal, Godino, Batanero e Font (2007) identificam outras dualidades, das quais é também relevante para o presente estudo a dualidade expressão-conteúdo. Esta dualidade, relacionada com a dualidade institucional-pessoal, permite confrontar os significados dos objetos que intervêm nas funções semióticas (entendidas como correspondências estabelecidas por uma pessoa ou instituição entre um antecedente, a expressão, e um conseqüente, o conteúdo) com os significados institucionais de referência. No processo de comparação, a verificação de discrepâncias entre esses significados, ou seja, entre os significados institucional e pessoal (GODINO; BATANERO, 1994), conduz à identificação de conflitos semióticos.

Segundo o enfoque ontossemiótico (GODINO; BATANERO; FONT, 2007; GODINO *et al.*, 2017), na resolução de situações-problema, que despoletam a atividade matemática, intervêm uma variedade de objetos matemáticos primários, designadamente linguagens, conceitos, proposições, procedimentos e argumentos. Para Godino *et al.* (2017, p. 94),

O reconhecimento explícito de tais objetos e processos permite prever conflitos potenciais e efetivos de aprendizagem, avaliar as competências matemáticas dos estudantes e identificar objetos que devem ser recordados e institucionalizados nos momentos oportunos dos processos de estudo.

Finalmente, na resolução de uma situação-problema intervêm os objetos matemáticos primários, antes referidos, relacionando-se de formas diversas e constituindo as assim

designadas configurações de objetos. Tal como os objetos primários, as configurações podem também ser de tipo epistêmico (se são próprias de uma instituição) ou cognitivo (se são específicas de um estudante, no nosso caso um futuro professor) (GODINO; BATANERO; FONT, 2007).

## 2.2 Investigação prévia

São muitos os estudos que mostram que professores dos primeiros anos escolares revelam dificuldades em diversos conteúdos de Estatística Descritiva (e.g., BATANERO; GODINO; NAVAS, 1997; ESTRADA; BATANERO; FORTUNY, 2004; FERNANDES; GEA; CORREIA, 2019; GROTH; BERGNER, 2006).

Desde logo, os futuros professores dos primeiros anos escolares mostram sentir dificuldades na construção e interpretação de tabelas e gráficos estatísticos. No caso das tabelas, Fernandes, Gonçalves e Barros (2021) conduziram um estudo envolvendo 56 futuros professores dos primeiros anos escolares, em que analisaram as tabelas produzidas pelos estudantes, organizados em pequenos grupos, no âmbito da realização de trabalhos de projeto de natureza investigativa. Na construção de tabelas, verificou-se que em cerca de metade das tabelas referentes a dados de variáveis qualitativas nominais, os estudantes determinaram frequências acumuladas, portanto, não tendo em conta que só faz sentido calcular esse tipo de frequências nos casos em que é possível estabelecer nos dados uma relação de ordem. Num estudo anterior, a partir de um questionário, Fernandes, Batanero e Gea (2019) constataram que quase todos os participantes, também futuros professores dos primeiros anos escolares, determinaram frequências absolutas e/ou relativas acumuladas de uma variável qualitativa nominal.

No que respeita à leitura e interpretação das tabelas de frequências, observou-se que muitos estudantes não a efetuaram, concluindo a tarefa com a sua construção. Já aqueles que realizaram a leitura e interpretação das tabelas, antes construídas, verificou-se que, de entre os três níveis de Curcio (1989), quase todos os estudantes o fizeram ao nível de *ler os dados* ou de *ler entre os dados* (primeiros dois níveis), enquanto quase nenhuns o fizeram ao nível de *ler para além dos dados* (terceiro nível).

Quanto aos gráficos estatísticos, Fernandes, Martinho e Gonçalves (2020) verificaram que os mesmos participantes do estudo anterior recorreram a gráficos de barras (simples e múltiplas) e gráficos circulares em cerca de 80% do número total dos gráficos dos relatórios dos trabalhos de projeto. Assim, considerando que, em mais de metade dos gráficos a variável

estatística era do tipo qualitativa nominal, depreende-se que aqueles tipos de gráficos eram, em geral, adequados. Contrastando com este resultado, Fernandes e Freitas (2019) observaram numa situação distinta, envolvendo uma variável quantitativa discreta (com pouca repetição de dados), o que implica que tanto o gráfico de barras, como o gráfico circular não são adequados para representar tais dados, que mais da metade (72%) dos futuros professores dos primeiros anos escolares recorreram ao gráfico de barras para representar os dados da variável estatística. Destes dois estudos pode concluir-se que, independentemente do tipo de variável estatística, os futuros professores recorrem com muita frequência aos gráficos de barras e circular para representar dados estatísticos, o que explicaria o bom desempenho dos estudantes no primeiro estudo e o fraco desempenho no segundo.

Nos dois estudos antes referidos (FERNANDES; MARTINHO; GONÇALVES, 2020; FERNANDES; GONÇALVES; BARROS, 2021) os futuros professores tiveram que, em primeiro lugar, selecionar os tipos de tabelas e gráficos estatísticos adequados à situação em estudo, e só depois é que construíam essas tabelas ou gráficos. O mesmo aconteceu nos estudos de Fernandes, Batanero e Gea (2019) e Fernandes e Freitas (2019), nos quais se inquiriram futuros professores a partir de tarefas abertas, agora incluindo também estatísticas. Em todos estes estudos, os futuros professores não escolheram métodos estatísticos essencialmente distintos em função do tipo de variável estatística em jogo, o que realça a importância de trabalharem as relações existentes entre o tipo de variável e os métodos estatísticos a usar.

No caso dos estudos envolvendo as medidas de tendência central, que também são o foco do presente estudo, Batanero, Godino e Navas (1997) analisaram as respostas de 273 futuros professores dos primeiros anos escolares a um questionário escrito, que incluiu quatro itens sobre distintos aspectos interpretativos da média aritmética. Os resultados obtidos revelam a existência de erros conceituais e dificuldades de aplicação prática dos conhecimentos sobre as medidas de tendência central. Entre os mais frequentes, constatou-se que 40% da amostra não descartou os valores atípicos para calcular a média, 30% sobrevalorizou a dispersão dos dados e 60% não conhecia a relação entre média, mediana e moda em distribuições simétricas. Estes erros e dificuldades foram confirmadas num estudo subsequente de Estrada, Batanero e Fortuny (2004), em que participaram 387 futuros professores dos primeiros anos escolares.

Groth e Bergner (2006) investigaram a compreensão dos conceitos de média, mediana e moda por 46 futuros professores do Ensino Primário e Secundário, quando lhes foi pedido para explicar as diferenças e semelhanças entre esses conceitos estatísticos. Adotando a taxionomia SOLO (BIGGS; COLLIS, 1982), os autores distinguiram quatro níveis diferentes de compreensão dos ditos conceitos estatísticos: (a) uniestrutural, em que oito futuros

professores usavam só a definição literal dos conceitos de média, mediana e moda para obter semelhanças e diferenças entre as distintas medidas de tendência central; (b) multiestrutural, em que 21 futuros professores mostraram que as medidas de tendência central representavam mais um objeto matemático do que um simples procedimento de cálculo; (c) relacional, em que 13 dos participantes argumentaram que as estatísticas em questão não se resumiam apenas aos procedimentos, revelavam também certas características “típicas” de um conjunto particular de dados; e (d) abstrato, em que três futuros professores, indo além do conhecimento procedimental, incluíam uma discussão sobre quando uma determinada medida de posição central seria mais útil para caracterizar um certo conjunto de dados.

Acercamo-nos mais do foco do presente estudo referindo investigações envolvendo a inversão das medidas de tendência central, pois pode ser uma estratégia útil para determinar o dado ou dados a acrescentar à serie dada para produzir o valor ou valores das estatísticas pretendidas. Segundo Cai (1995), a maioria dos alunos de 12-13 anos são capazes de aplicar adequadamente o algoritmo da média, mas apenas alguns sabem inverter o procedimento, isto é, determinar valores desconhecidos para obter um valor médio dado.

No estudo de Fernandes e Barros (2005), em que participaram 37 futuros professores dos primeiros anos escolares, foram propostos quatro itens envolvendo a inversão do algoritmo da média. Globalmente, nesses itens, verificou-se que a percentagem de respostas corretas variou entre 24,3% e 48,6%, com 35,1% de média de respostas corretas por item. Analogamente, no estudo de Estrada, Batanero e Fortuny (2004) só aproximadamente 28% dos futuros professores inverteram adequadamente o algoritmo da média.

As dificuldades sentidas pelos futuros professores na inversão do algoritmo da média também foram vivenciadas por estudantes do ensino secundário obrigatório espanhol (ESO) no estudo de Batanero, Cobo e Díaz (2003), em que participaram 168 estudantes do 1.º ano do ESO (13-14 anos) e 144 estudantes do 4.º ano do ESO (16-17 anos). Nos sete itens envolvendo a inversão do algoritmo da média, verificou-se que a percentagem de respostas corretas variou entre 23% e 59%, com uma média de 44% de respostas corretas por item. Assim, conclui-se que estes estudantes tiveram um desempenho um pouco superior ao dos futuros professores.

### 3 Metodologia

Neste trabalho estuda-se a compreensão de estudantes, futuros professores dos primeiros anos escolares, sobre os efeitos produzidos nas medidas estatísticas de tendência central ao serem acrescentados novos dados aos preexistentes. Mais concretamente, pretende-se que os

estudantes determinem o dado ou dados a acrescentar a uma coleção de modo a se obterem certos valores para as medidas de tendência central.

Para avaliar a compreensão dos estudantes sobre os efeitos produzidos nas medidas de tendência central realizou-se um estudo quantitativo, de tipo descritivo, em que a seleção dos participantes foi efetuada pelo critério de conveniência. Neste tipo de estudo pretende-se fazer descrições rigorosas e efetuar inferências alicerçadas em evidência de um fenômeno educacional preexistente, ou seja, numa vertente de investigação *ex post facto* (GALL; GALL; BORG, 2003).

Participaram no estudo 34 estudantes do 2.º ano do curso de Licenciatura em Educação Básica, de uma universidade do Norte de Portugal. Estes estudantes, futuros professores dos primeiros anos escolares, tinham uma formação matemática muito diversa à entrada na universidade, que podia ser a formação matemática obtida no final do 9.º ano (último ano do ensino básico) ou adquirida em cursos do ensino secundário, como sejam cursos profissionais, cursos humanísticos e cursos científico-tecnológicos.

Os dados usados no presente estudo foram obtidos através das respostas escritas dadas pelos estudantes a um pequeno questionário de avaliação formal, que foi aplicado no âmbito da unidade curricular de Probabilidades e Estatística que os estudantes se encontravam a frequentar. A aplicação do questionário foi efetuada pelo docente da disciplina no mês de abril de 2020 e, nessa altura, já tinham sido lecionados os conteúdos nele tratados. O questionário era constituído por duas questões de Estatística, das quais estudamos aqui apenas uma, cujo enunciado é apresentado na Figura 1.

Tratando-se de um contexto de avaliação formal, em termos éticos, foi garantido o anonimato dos estudantes, especificamente quando são citados individualmente, e da instituição a que pertencem, recorrendo-se, no primeiro caso, a códigos para nomear os estudantes, como é descrito abaixo.

Sabe-se que as classificações obtidas por cinco alunos do 6.º ano, num teste de Português, numa escala de 0 a 100, foram as seguintes: 85; 75; 60; 90; 60.  
Em cada uma das alíneas seguintes deve explicar como obteve o valor ou valores pedidos.

- Qual a classificação, de um novo aluno, que se deve acrescentar às cinco dadas para que a mediana seja 77?
- Quais as classificações, de dois novos alunos, que se devem acrescentar às cinco dadas para que a única moda seja 60 e a mediana seja 85?
- Quais as classificações, de dois novos alunos, que se devem acrescentar às cinco dadas para que a mediana seja 75 e a média seja também 75?

**Figura 1** – Tarefa proposta aos estudantes  
Fonte: Elaboração do autor (2020)



Constata-se, assim, que a tarefa consta de três itens, sendo que em a) questiona-se sobre um valor a acrescentar aos dados para se obter um certo valor da mediana, em b) interroga-se sobre dois valores a acrescentar aos dados para se obter certos valores da moda e da mediana e em c) questiona-se sobre dois valores a acrescentar aos dados para se obter o mesmo valor para a mediana e média.

Por fim, em relação à análise de dados, estudaram-se as respostas apresentadas pelos estudantes relativamente à sua correção e incorreção e às ideias subjacentes a essas respostas. Seguidamente, determinaram-se frequências dos tipos de respostas (corretas e incorretas) e das ideias subjacentes a tais respostas, tendo-se usado tabelas para resumir a informação dos tipos de respostas. Adicionalmente, tendo em vista proporcionar uma melhor compreensão das respostas dos estudantes e da análise realizada, são ainda apresentados alguns exemplos de respostas dos estudantes, identificados pela letra E (abreviatura de estudante) seguida do número que lhe foi atribuído (de 1 a 34).

#### 4 Apresentação de resultados

Na tarefa proposta, dados os valores 85, 75, 60, 90 e 60, referentes às classificações obtidas por cinco alunos do 6.º ano num teste de Português, é pedido aos estudantes para indicarem um ou dois novos dados de modo a obter-se um certo valor para uma ou duas estatísticas de tendência central. Especificamente, no item a) pede-se para acrescentar uma classificação de modo a se obter o valor 77 para a mediana. Definindo a lista ordenada dos dados, 60, 60, 75, 85 e 90, e tendo em conta que ao se acrescentar o novo dado vamos ter um total de seis dados, conclui-se que a mediana é a semissoma dos dados de ordem três e quatro. Portanto, sendo  $x$  o novo dado, vem  $77 = \frac{75+x}{2} \Leftrightarrow x = 79$ . Logo, a classificação a acrescentar deve ser 79.

No item b) pede-se para acrescentar duas classificações de modo que a moda seja 60 e a mediana 85. Ao acrescentar dois dados obtém-se um total de sete dados, donde a mediana é o dado de ordem quatro da lista ordenada, que deve ser 85. Por outro lado, sendo a moda 60, e sendo única, não poderá repetir-se nenhum outro valor da lista. Logo, poderemos acrescentar dois valores diferentes, sendo qualquer deles superior a 85 e inferior a 90 ou superior a 90 e inferior ou igual a 100. Logo, as classificações a acrescentar podem ser, por exemplo, 86 e 89.

No item c) pede-se para acrescentar duas classificações de modo que a mediana seja 75 e a média seja também 75. Sendo  $x$  e  $y$  as duas novas classificações e sabendo-se que a média

deve ser 75, vem  $75 = \frac{85+75+60+90+60+x+y}{7} \Leftrightarrow x + y = 155$ . Por outro lado, ao acrescentar dois novos dados vamos ficar com sete dados, donde a mediana é o dado de ordem quatro da lista ordenada, que deve ser 75. Ordenando a lista inicial, 60, 60, 75, 85 e 90, concluímos que um dos dados deve ser inferior ou igual a 75 e o outro superior a 75. Assim, por exemplo, podemos ter  $x = 75$  e  $y = 155 - 75 = 80$ . Logo, as duas classificações a acrescentar poderão ser 75 e 80.

Seguidamente, tendo em vista compreender as respostas dadas pelos estudantes a cada item, vamos estudar os tipos de resposta e os raciocínios adotados pelos estudantes para obterem essas respostas.

#### 4.1 Tipo de respostas

Na Tabela 1, a seguir apresentada, estão registadas as frequências dos tipos de respostas (corretas e incorretas) dadas pelos estudantes bem como as não respostas.

**Tabela 1** – Frequência (em %) de estudantes nos tipos de resposta e nas não respostas

Item	Respostas		
	Corretas	Incorretas	Não respostas
a) Acrescentar um dado de modo a obter a mediana 77	29 (85)	5 (15)	—
b) Acrescentar dois dados de modo a obter a moda 60 e a mediana 85	32 (94)	2 (6)	—
c) Acrescentar dois dados de modo a obter a mediana 75 e a média também 75	20 (59)	5 (15)	9 (26)

Fonte: Elaboração do autor (2020)

Por observação da Tabela 1 constata-se que se obtiveram percentagens elevadas de respostas corretas nos itens a) e b), com mais de quatro em cada cinco estudantes a responderem corretamente, enquanto a percentagem de respostas corretas diminuiu consideravelmente no item c), com um pouco mais de um estudante em cada dois a responder corretamente.

Embora os processos matemáticos que devem ser usados na resolução dos itens não sejam únicos, isto é, o mesmo item pode ser resolvido por diferentes processos matemáticos, vamos argumentar que esses processos matemáticos poderão explicar o diferente desempenho dos estudantes nos vários itens.

No caso dos itens a) e b), em que os estudantes revelaram um melhor desempenho, deve ter-se em consideração que qualquer desses itens pode ser resolvido através de uma estratégia de tentativa e erro, que envolve processos matemáticos diversos de uma estratégia analítica. No caso do item a), o estudante pode começar por ordenar os cinco dados iniciais, arbitrar um valor

para o dado a acrescentar e, finalmente, determinar a mediana dos seis dados; caso não obtenha o valor pretendido para a mediana, o estudante poderá arbitrar outro valor e determinar novamente a mediana. Repetindo este processo, provavelmente, o estudante poderá resolver corretamente o item.

No caso do item b) a situação é semelhante. Embora neste caso o estudante tenha de acrescentar dois dados de modo a obter os valores pretendidos para a moda e mediana, isso não acarreta um aumento de complexidade à questão. Sendo a moda única, tal significa que não se poderá repetir nenhum dos outros valores e, ao acrescentar os dois dados, também diferentes, continuamos a ter um número ímpar de dados, donde a mediana será o valor central da lista ordenada, que deve ser 85. Por fim, por observação da lista ordenada inicial, verifica-se que basta acrescentar dois dados diferentes superiores a 85 e diferentes dos restantes. Diferentemente do item a), constata-se que na resolução deste item não é forçoso efetuar qualquer cálculo.

Por fim, no caso do item c), a obtenção do valor pretendido para a média (75) requer que a soma dos dois dados a acrescentar assumam um valor fixo (155), ou seja, trata-se de um valor determinado de modo único. Ora, a determinação analítica dessa soma envolve a inversão do algoritmo da média, que se tem revelado uma operação difícil para os estudantes, como se verificou nos estudos de Cai (1995) e Fernandes e Barros (2005).

Em alternativa, os estudantes podiam recorrer a uma estratégia intuitiva, decorrente da interpretação da média como valor equitativo. Assim, uma vez estabelecido o valor da mediana (75) e observando a lista inicial ordenada, concluiu-se que os dois dados a acrescentar devem ser ambos 75, um 75 e outro superior a 75 ou um inferior a 75 e outro superior a 75. Fixando um deles, por exemplo 78, e considerando que a soma total dos sete dados é  $75 \times 7 = 525$ , obtém-se o valor 77 para o outro dado a acrescentar, que não cumpre o critério da mediana ser 75. Já, fixando o valor 83, obtém-se o valor 72 para o outro dado, que cumpre o critério da mediana. Portanto, nesta abordagem, deve notar-se que esta estratégia assume uma natureza de tentativa e erro.

## 4.2 Estratégias

Vamos agora estudar as estratégias usadas pelos estudantes para obter as suas respostas em cada um dos itens, procurando também verificar em que medida foram adotadas as estratégias antes referidas.

Seguidamente, na Tabela 2, apresentam-se as frequências das estratégias subjacentes às respostas corretas dos estudantes em cada um dos três itens da tarefa.

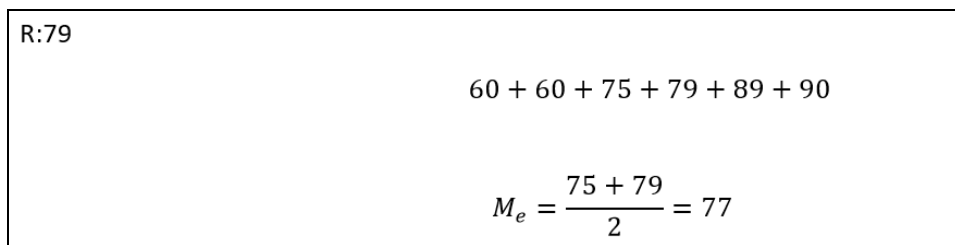
**Tabela 2** – Frequência (em %) de estudantes nas estratégias subjacentes às respostas corretas

Estratégias	Itens		
	a)	b)	c)
Acrescentar um ou dois dados e verificar o valor ou valores das estatísticas	17 (50)	11 (32)	9 (27)
Determinar um ou dois dados e verificar o valor ou valores das estatísticas	7 (20)	—	11 (32)
Acrescentar um ou dois dados com explicação	3 (9)	16 (47)	—
Acrescentar um ou dois dados sem explicação	2 (6)	5 (15)	—
Total	29 (85)	32 (94)	20 (59)

Nota: na tabela, as percentagens foram calculadas considerando o número total de estudantes que participaram no estudo, isto é, 34.

Fonte: Elaboração do autor (2020)

Observando a Tabela 2, verifica-se que a estratégia “Acrescentar um ou dois dados e verificar o valor ou valores das estatísticas” foi a mais usada na globalidade dos três itens, sendo também a mais utilizada no item a). Nesta estratégia, arbitrar um ou dois dados e verificar que eles produzem o valor ou valores das estatísticas pretendidas envolve o recurso a uma estratégia de tentativa e erro, mesmo que tal não esteja explícito. Nas Figuras 2 e 3 apresentam-se duas respostas, uma do item a) e outra do item b).



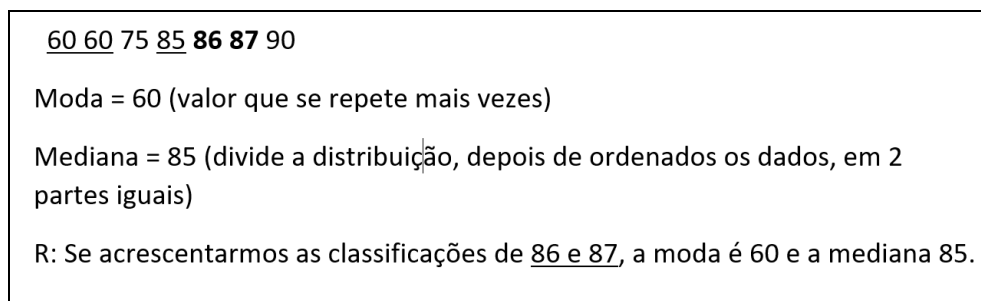
R:79

$$60 + 60 + 75 + 79 + 89 + 90$$
$$M_e = \frac{75 + 79}{2} = 77$$

**Figura 2** – Resolução do item a) pelo estudante E1

Fonte: Elaboração do autor (2020)

Na resposta do estudante E1 podemos observar que ele acrescenta o dado 79, ordena a nova lista de dados e, por fim, verifica que se obtém o valor 77 para a mediana.



60 60 75 85 **86** **87** 90

Moda = 60 (valor que se repete mais vezes)

Mediana = 85 (divide a distribuição, depois de ordenados os dados, em 2 partes iguais)

R: Se acrescentarmos as classificações de 86 e 87, a moda é 60 e a mediana 85.

**Figura 3** – Resolução do item b) pelo estudante E18

Fonte: Elaboração do autor (2020)

Já, nesta resolução, o estudante E18 acrescenta os dados 86 e 87, ordena a nova lista de

dados e, finalmente, verifica que os valores da moda e mediana coincidem com aqueles que se referem no enunciado. Salienta-se ainda que, à exceção de dois estudantes, no item b), sistematicamente os estudantes ordenaram a lista de dados, o que deverá decorrer do fato de em todos os itens estar implicada a mediana.

Já a estratégia “Determinar um ou dois dados e verificar o valor ou valores das estatísticas” foi usada apenas nos itens a) e c). A adoção desta estratégia analítica, envolvendo cálculo numérico ou algébrico, levou os estudantes a determinarem o dado ou dados pretendidos de acordo com o valor ou valores dados das estatísticas. Já no caso do item b) parece ter sido suficiente recorrer a uma estratégia ligada à tentativa e erro. Nas Figuras 4 e 5 exemplificam-se duas resoluções, uma do item a) e outra do item c).

a)  $Me = 77$

60 60 75 79 85 90

$Me = \frac{75+79}{2} = 77$

$\frac{75+x}{2} = 77$

$x = 79$

Devemos acrescentar a classificação 79

**Figura 4** – Resolução do item a) pelo estudante E30

Fonte: Elaboração do autor (2020)

Nesta resolução o estudante E30 designa o dado a acrescentar por  $x$ , considera que a mediana é a semissoma desse dado com 75, que deve ser igual a 77, obtém para  $x$  o valor 79 e, por último, verifica que, ao acrescentar o dado obtido, se obtém o valor pretendido para a mediana.

c)  $Me = 75$   
 $x = 75$

60 60 75 85 90

60 60 65 75 85 90 90

↓  
Mediana

$60 + 60 + 75 + 85 + 90 = 370$

$\frac{370 + 2x}{7} = 75$

$(\Rightarrow) 370 + 2x = 525$

$(\Rightarrow) 2x = 155$

R: Devemos acrescentar 65 e 90.

**Figura 5** – Resolução do item c) pelo estudante E29

Fonte: Elaboração do autor (2020)

O estudante E29 começa por ordenar e calcular a soma dos cinco dados iniciais e recorre à fórmula da média dos sete dados para determinar a soma dos dois dados a acrescentar. A

representação dessa soma por  $2x$  significa que os dois dados são iguais, o que não é o caso e que o próprio estudante desdiz ao considerar os dados 65 e 90. Finalmente, o estudante ordena a lista dos sete dados e indica que a mediana é 75.

Na estratégia “Acrescentar um ou dois dados com explicação” os estudantes não se limitaram a arbitrar um ou dois dados e a verificarem que satisfaziam o valor ou valores das estatísticas em questão. Nesta estratégia, os estudantes explicaram as suas respostas avançando alguma justificação para a escolha do valor ou valores indicados. Essa explicação, envolvendo uma linguagem verbal e numérica, e socorrendo-se da definição das estatísticas, foi muito referida no item b) e não foi mesmo usada no item c). Talvez o fato de não ser necessário efetuar cálculos para obter a resposta correta no item b) tenha favorecido a adoção desta estratégia. Nas Figuras 6 e 7 apresentam-se duas respostas, uma do item a) e outra do item b).

Para a mediana ser 77 devemos observar o valor médio da amostra apresentada, que corresponde ao 75. Depois, devemos ter em conta que a média desse valor (75) com um valor  $x$  deve ser 77, que corresponderá à mediana da amostra total. Sendo assim, o valor pedido é o 79, pois  $(75+79)/2=77$ .

**Figura 6** – Resolução do item a) pelo estudante E15

Fonte: Elaboração do autor (2020)

O estudante E15 na sua explicação refere a definição de mediana, explicitamente no caso dos cinco dados iniciais ( $n$  ímpar) e implicitamente no caso dos sete dados ( $n$  par). Além disso, a sua justificação não é completamente precisa, pois, quando o estudante afirma que o valor médio da amostra é 75, ele realmente está a referir-se ao valor central da amostra ordenada, que é a mediana dos cinco dados iniciais.

Para não alterar a moda de 60 nem a mediana de 85, temos de adicionar 2 números diferentes e superiores a 90, então podemos assumir quaisquer valores acima de 90 e não superiores a 100.

Sendo assim os valores podem ser: 92 93

**Figura 7** – Resolução do item b) pelo estudante E5

Fonte: Elaboração do autor (2020)

Na sua resolução, o estudante E5 refere explicitamente a não alteração da moda e implicitamente a definição da mediana de um conjunto ímpar de dados. Na justificação salienta-se o rigor que o estudante apresenta quando diz que se tem de acrescentar dois dados diferentes superiores a 90, pois dessa forma a mediana é 85 e a moda é única e igual a 60, tal como se pretende.

Finalmente, a estratégia “Acrescentar um ou dois dados sem explicação” é de todas as estratégias a menos informativa sobre as ideias mobilizadas pelos estudantes na resolução dos

itens. Esta estratégia, de que apresenta um exemplo na Figura 8, é muito limitada nas suas possibilidades explicativas e, tal como a anterior, foi usada apenas nos itens a) e b). Talvez o não ser usado no item c) se deva à dificuldade em explorar esse item através de uma estratégia de tentativa e erro.

60 60 75 **85** 90 95 100

Acrescentando um 95 e um 100 a moda é o 60 e a mediana é 85.

**Figura 8** – Resolução do item b) pelo estudante E10  
Fonte: Elaboração do autor (2020)

Na resposta do estudante E10 mostra-se o quão pouco informativo é o processo de resolução para a obtenção dos dois dados pedidos. O estudante apresenta esses dois dados, ordena a sequência dos sete dados e declara que eles produzem os valores pretendidos da moda e mediana, sem, contudo, apresentar o porquê de se tratarem realmente dos valores da moda e da mediana.

Já o número de respostas incorretas foi pequeno em qualquer dos três itens da tarefa. No item a) registou-se um total de cinco respostas incorretas, sendo que em três delas os estudantes acrescentaram o valor pretendido para a mediana (77), outro não ordenou os dados e acrescentou o dado 94 e o quinto acrescentou dois valores (71 e 79) sem mais explicação.

No item b) menos estudantes apresentaram respostas incorretas, apenas dois no total. Um desses estudantes acrescentou os dados 84 e 91, satisfazendo o critério da moda, mas não da mediana, e o outro acrescentou apenas o dado 85, quando se pedia que fossem acrescentados dois dados. Além disso, ao acrescentar o dado 85, passou-se a ter duas modas, 60 e 85.

Por fim, no item c) novamente cinco estudantes apresentaram respostas incorretas, salientando-se ainda as nove não respostas. Neste item, três estudantes acrescentaram dois dados que apenas satisfazem o critério da mediana (70 e 78, 75 e 75 e 72 e 84), um estudante, além de acrescentar os dois dados (60 e 91), também substituiu o dado 85 por 89 e o quinto usou a dimensão da amostra 8 em vez de 7 na fórmula da média.

## 5 Conclusões e implicações

Em termos do tipo de resposta, verificou-se que, na globalidade dos três itens da tarefa, a percentagem de respostas corretas variou entre o mínimo de 58% (no item c) e o máximo de 94% (no item b), e, em média, obteve-se 79% de respostas corretas por item. Conclui-se, assim, que os estudantes, futuros professores dos primeiros anos, demonstraram um bom desempenho em termos de respostas corretas.

Este bom desempenho dos estudantes excede largamente o desempenho obtido por estudantes, também futuros professores dos primeiros anos escolares, em tarefas de inversão do algoritmo da média (ESTRADA; BATANERO; FORTUNY, 2004; FERNANDES; BARROS, 2005). Esta discrepância explica-se na medida em que poucos estudantes do presente estudo recorreram à inversão do algoritmo da média e da mediana para resolverem os respectivos itens, como se revela nas estratégias por eles adotadas. Trata-se, portanto, de um resultado importante do presente estudo, seja pela novidade, seja pela sistematicidade com que foram avaliados os efeitos nas medidas de tendência central ao acrescentar dados ao conjunto inicial.

Por outro lado, para além desse bom desempenho na obtenção de respostas corretas, podemos nos questionar sobre as estratégias a que os estudantes recorreram para obter as suas respostas. Das quatro estratégias, apresentadas na secção anterior, podemos agrupá-las em dois grandes grupos. No primeiro grupo incluímos as duas estratégias: “Acrescentar um ou dois dados e verificar o valor ou valores das estatísticas” e “Acrescentar um ou dois dados sem explicação”, que se caracteriza pelo fato de, em ambas as estratégias, os estudantes simplesmente terem acrescentado um ou dois dados à série inicial sem avançarem qualquer explicação. Ora, o recurso a estas estratégias, que foi maioritário no conjunto dos itens da tarefa, indicia um raciocínio limitado ou incompleto, em que poderá ter estado presente uma estratégia de tentativa e erro. Mesmo não sendo explícito, o estudante poderá ter pensado no valor ou valores a acrescentar, com os quais seguidamente operou para confirmar os valores dados para as estatísticas envolvidas.

É a estas duas estratégias, que são largamente maioritárias no conjunto dos três itens, que se deve o bom desempenho dos estudantes em termos de respostas corretas. Já a estratégia “Acrescentar um ou dois dados e verificar o valor ou valores das estatísticas”, que também foi a mais usada, baseia-se numa abordagem algorítmica das medidas de tendência central, quando os estudantes determinam os valores das respectivas estatísticas com o propósito de os comparar com os valores dados nos enunciados. Ora, segundo a literatura (e.g., BATANERO; GODINO; GREEN; HOLMES; VALLECILLOS, 1994; CAI, 1995; CARVALHO; CÉSAR, 2001), é na abordagem algorítmica que os alunos sentem menos dificuldades no tratamento estatístico.

No segundo grupo incluímos as duas estratégias: “Determinar um ou dois dados e verificar o valor ou valores das estatísticas” e “Acrescentar um ou dois dados com explicação”, que se caracteriza pelo fato de, em ambas as estratégias, os estudantes terem avançado alguma explicação acerca do dado ou dados acrescentados à série inicial. Quando determinaram o dado ou dados requeridos, os estudantes obtiveram os mesmos recorrendo a processos analíticos, com base em cálculos numéricos e/ou algébricos, tratando-se, portanto, de uma estratégia bem



enraizada matematicamente. Já estratégia de acrescentar o dado ou dados com explicação envolveu uma justificção verbal e/ou numérica centrada, fundamentalmente, na definição das estatísticas em jogo. Entre estas duas estratégias, parece que a maior dificuldade em estabelecer os dados a partir de uma estratégia intuitiva no item c) levou mais estudantes a optarem pela estratégia analítica, enquanto no item b), sendo possível recorrer a uma estratégia intuitiva, mais estudantes optaram pela estratégia de explicação.

Portanto, a identificação das estratégias que os futuros professores dos primeiros anos escolares usaram para resolver a tarefa constitui outro resultado importante do estudo. De entre as várias estratégias, destacam-se abordagens de tentativa e erro, intuitivas, algorítmicas e analíticas. Por outro lado, estas abordagens devem ser tidas em conta no ato de ensinar e aprender, não focando a aprendizagem apenas em tarefas de tipo procedimental ou algorítmico e promovendo a transição da abordagem intuitiva para a abordagem analítica (FISCBEIN, 1987; SCHOLZ, 1987). Segundo Koparan (2021), estas diferentes abordagens, além de constituírem novas estratégias para aprender Matemática, podem contribuir para desenvolver o conhecimento e as experiências dos estudantes.

A vivência e/ou partilha da variedade de estratégias usadas pelos futuros professores no presente estudo revela-se de grande importância para o ensino, na medida em que lhes permite compreender a diversidade de estratégias a que os alunos também recorrem para resolver as tarefas com que se deparam.

Globalmente, considerando simultaneamente os tipos de respostas e as estratégias usadas, pode considerar-se que os estudantes mostraram ter um razoável conhecimento comum do conteúdo (HILL; BALL; SCHILLING, 2008), que é o mais relevante no presente estudo, e alicerçado, frequentemente, numa base mais intuitiva. Para além desse conhecimento, é desejável que os futuros professores desenvolvam o conhecimento de conteúdos mais avançados do que aqueles que ensinam, conhecimento que Hill, Ball e Schilling (2008) nomeiam de conhecimento no horizonte matemático. Este último tipo de conhecimento parece mais problemático na medida em que se esperaria uma abordagem mais analítica por parte dos estudantes.

Em conclusão, considerando a compreensão dos futuros professores dos primeiros anos escolares como sendo a parte da faceta cognitiva que coincide com a faceta epistêmica, ou seja, a parte do significado pessoal que coincide com o significado institucional (GODINO; BATANERO, 1994), conclui-se que esses estudantes revelaram uma considerável compreensão em relação aos tipos de respostas e uma menor compreensão das estratégias conceituais usadas para a obtenção dessas respostas. Logo, estes futuros professores devem aprofundar o

conhecimento e aplicação dos objetos e processos matemáticos intervenientes na resolução das situações-problema (GODINO; BATANERO; FONT, 2007), tendo em vista possibilitar-lhes uma transição de abordagens mais intuitivas para abordagens mais avançadas em termos da Matemática, ou seja, que desenvolvam, progressivamente, estratégias algorítmicas e conceituais (HIEBERT; LEFEVRE, 1986).

## Referências

BATANERO, C.; COBO, B.; DÍAZ, C. Assessing secondary school students' understanding of averages. *In: CONGRESS OF THE EUROPEAN SOCIETY FOR RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION (CERME), 3, 2003, Bellaria. Proceedings [...].* Bellaria: CERME, 2003. p. 1-9.

BATANERO, C.; GODINO, J.; NAVAS, F. Some misconceptions about averages in prospective primary teachers. *In: PEHKNONEN, E. (Ed.). 21 PME Conference: 1. University of Lahti: PME, 1997. p. 276.*

BATANERO, C.; GODINO, J. D.; GREEN, D. R.; HOLMES, P.; VALLECILLOS, A. Errors and difficulties in understanding elementary statistical concepts. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, London, v. 25, n. 4, p. 527-547, 1994.

BIGGS, J. B.; COLLIS, K. F. **Evaluating the quality of learning: The SOLO taxonomy.** New York: Academic Press, 1982.

CAI, J. Beyond the computational algorithm: student's understanding of the arithmetic average concept. *In: MEIRA, L.; CARRAHER, D. (Eds.). Proceedings of the 19th PME Conference: 3.* Recife: Universidade Federal de Pernambuco, 1995. p. 144-151.

CARVALHO, C.; CÉSAR, M. Interagir para aprender: Um caso de trabalho colaborativo em estatística. *In: SILVA, B.; ALMEIDA, L. (Orgs.). Actas do VI Congresso Galaico Português de Psicopedagogia, 2.* Braga: Centro de Estudos em Educação e Psicologia da Universidade do Minho, 2001. p. 65-80.

CURCIO, F. R. **Developing graph comprehension: elementary and middle school activities.** Reston: NCTM, 1989.

ESTRADA, A.; BATANERO, C.; FORTUNY, J. M. Un estudio de evaluación de conocimientos estadísticos en profesores en formación e implicaciones didácticas. *Educación Matemática*, Cidade do México, v. 16, p. 89-112, 2004.

FERNANDES, J. A.; BARROS, P. M. Dificuldades de futuros professores do 1.º e 2.º ciclos em estocástica. *In: CONGRESSO IBERO-AMERICANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (CIBEM), 5, 2005, Porto. Anais [...].* Porto: Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, 2005. p. 1-13.

FERNANDES, J. A.; FREITAS, A. Selection and Application of graphical and numerical statistical tools by prospective primary school teachers. *Acta Scientiae*, Canoas, v. 21, n. 6, p. 82-97, 2019.

FERNANDES, J. A.; BATANERO, C.; GEA, M. M. Escolha e aplicação de métodos estatísticos por futuros professores dos primeiros anos. *In: CONTRERAS, J. M.; GEA, M. M.; LÓPEZ-MARTÍN, M. M.; MOLINA-PORTILLO, E. (Eds.). Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística.* Granada: Universidade de Granada, 2019. p. 1-10.

FERNANDES, J. A.; GEA, M. M.; CORREIA, P. F. Conhecimento de estatística bivariada de futuros professores portugueses dos primeiros anos. **Revista Portuguesa de Educação**, Braga, v. 32, n. 2, p. 40-56, 2019.

FERNANDES, J. A.; GONÇALVES, G.; BARROS, P. M. Uso de tabelas de frequências por futuros professores na realização de trabalhos de projeto. **Uniciencia**, Heredia, v. 35, n. 1, p. 139-151, 2021.

FERNANDES, J. A.; MARTINHO, M. H.; GONÇALVES, G. Uso de gráficos estatísticos por futuros professores dos primeiros anos na realização de trabalhos de projeto. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, Londrina, v. 13, n. 4, p. 394-401, 2020.

FISCHBEIN, E. **Intuition in science and mathematics: An educational approach**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1987.

GALL, M. D.; GALL, J. P.; BORG, W. R. **Educational research: An introduction**. 7. ed. Boston: A & B Publications, 2003.

GODINO, J. D. Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble, v. 22, n. 2-3, p. 237- 284, 2002.

GODINO, J. D.; BATANERO, C. Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble, v. 14, n. 3, p. 325-355, 1994.

GODINO, J. D.; BATANERO, C.; FONT, V. The onto-semiotic approach to research in mathematics education. **ZDM - The International Journal on Mathematics Education**, Berlin, v. 39, n. 1-2, p. 127- 135, 2007.

GODINO, J. D.; GIACOMONE, B.; BATANERO, C.; FONT, V. Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. **Bolema**, Rio Claro, v. 31, n. 57, p. 90-113, 2017.

GROTH, R. E.; BERGNER, J. A. Preservice elementary teachers' conceptual and procedural knowledge of mean, median, and mode. **Mathematical Thinking and Learning**, Abingdon-on-Thames, v. 8, p. 37-63, 2006.

HIEBERT, J.; LEFEVRE, P. Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In: HIEBERT, J. (Ed.). **Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics**. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates, 1986. p. 1-27.

HILL, H. C.; BALL, D. L.; SCHILLING, S. G. Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, v. 39, n. 4, p. 372- 400, 2008.

KOPARAN, T. The impact of a game and simulation based probability learning environment on the achievement and attitudes of prospective teachers. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, London, v. 52, p. 1-19, 2021.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. **Programa de matemática do ensino básico**. Lisboa: Ministério da Educação, 2007.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA. **Programa de Matemática A – Ensino Secundário**. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência, 2014.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA. **Programa de matemática para o ensino básico**. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência, 2013.



SCHOLZ, R. W. **Cognitive strategies in stochastic thinking**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1987.

SHULMAN, L. S. Those who understand: Knowledge growth in teaching. **Educational Researcher**, Washington, v. 15, n. 2, p. 4-14, 1986.

**Submetido em 01 de Março de 2021.**  
**Aprovado em 20 de Julho de 2021.**