

Errores en la Resolución de Ecuaciones Trigonométricas: un Estudio Exploratorio con Estudiantes de Primer Año de Ingeniería

Errors in Solving Trigonometric Equations: An Exploratory Study with First-Year Engineering Students

Teresa Castro*

 ORCID iD 0000-0002-7136-4659

Andrea Cárcamo**

 ORCID iD 0000-0001-5782-3479

Resumen

Este trabajo exploratorio tiene por objetivo identificar y clasificar los errores que cometen un grupo de sesenta estudiantes de primer año de ingeniería cuando resuelven tareas asociadas a ecuaciones trigonométricas. Para ello, el instrumento de recogida de datos fue un cuestionario escrito, que estaba conformado por tres tareas vinculadas a la resolución de ecuaciones trigonométricas. Los resultados muestran que los errores de los estudiantes están asociados a: a) el uso de falsas identidades trigonométricas o definiciones deformadas, b) la utilización de imágenes incorrectas de funciones trigonométricas para ángulos conocidos, c) el manejo inadecuado de propiedades algebraicas y d) la representación errónea del conjunto solución de una ecuación trigonométrica.

Palabras clave: Ecuaciones trigonométricas. Errores. Estudiantes universitarios. Enseñanza de trigonometría

Abstract

This exploratory work aims to identify and classify the errors made by a group of sixty first-year engineering students when solving tasks related to trigonometric equations. For this purpose, the data collection instrument was a written questionnaire consisting of three tasks concerning the resolution of trigonometric equations. The results show that students' errors are associated with: a) the use of false trigonometric identities or deformed definitions, b) the use of incorrect images of trigonometric functions for known angles, c) the inappropriate use of algebraic properties and, d) the wrong representation of the solution set of a trigonometric equation.

Keywords: Trigonometric equations. Errors. University students. Teaching on trigonometry.

1 Introducción

* Estudiante del Programa de Doctorado en Educación de la Universidad Autónoma de Barcelona (UAB), Barcelona, España y Académica del Centro de Docencia de Ciencias Básicas para Ingeniería de la Universidad Austral de Chile (UACH), Valdivia, Chile. E-mail: teresa.castro@uach.cl.

** Doctora en Educación de la Universidad Autónoma de Barcelona (UAB). Académica del Centro de Docencia de Ciencias Básicas para Ingeniería de la Universidad Austral de Chile (UACH), Valdivia, Chile. E-mail: andrea.carcamo@uach.cl

El análisis de errores ha sido motivo de estudio en el ámbito de la Didáctica de la Matemática. Riccomini (2005) señala que los profesores, al no tener información sobre los patrones de errores que cometen los estudiantes, centran la enseñanza en la aplicación de reglas, habilidades y estrategias irrelevantes o conceptos que los estudiantes ya han aprendido y no están relacionados con sus errores.

Con relación a las líneas de investigación vinculadas al estudio de los errores, Rico (1995) distingue cuatro tipos de estudios no excluyentes: relativos al análisis de los errores y causas que los producen o elementos que los explican; relacionados al tratamiento curricular de los errores en matemática; referente a qué es conveniente que aprendan los profesores en formación en relación con los errores que cometen los estudiantes; de carácter técnico, que incluya algún programa estadístico para contrastar las hipótesis en los análisis de los errores. Nuestro estudio exploratorio corresponde al primer tipo (relativos al análisis de los errores y causas que los producen o elementos que los explican), ya que está enfocado en identificar los errores de los estudiantes cuando resuelven tareas que involucran ecuaciones trigonométricas y sus posibles causas. Lo anterior con la finalidad de evitar que futuros estudiantes cometan estos errores al resolver tareas que contemplan ecuaciones trigonométricas.

Recientemente, Rohimah y Prabawanto (2019) estudian las dificultades de los estudiantes de secundaria para resolver ecuaciones trigonométricas. Ellos identifican los errores, principalmente, en la factorización de ecuaciones trigonométricas de forma cuadrática, y evidencian que los estudiantes no dominan la trigonometría básica para resolver ecuaciones trigonométricas. Al mismo tiempo, Fahrudin y Pramudya (2019) investigan los errores cometidos por los estudiantes de secundaria cuando resuelven ecuaciones trigonométricas. Estos autores concluyen que estos errores ocurren porque los estudiantes: no comprenden el concepto de período (o ángulos trigonométricos en varios cuadrantes), olvidan valores trigonométricos en ángulos especiales (o notables), o no son lo suficientemente cuidadosos al hacer o resolver las tareas.

En nuestra revisión de la literatura, no hemos encontrado estudios sobre errores que cometen los estudiantes universitarios cuando resuelven tareas que involucran ecuaciones trigonométricas. Por esta razón, detectamos la necesidad de investigar estos y, además, porque los estudiantes, cuando estudian trigonometría, tradicionalmente, presentan bajos niveles de rendimiento, a pesar de corresponder a unos de los primeros tópicos que relaciona el álgebra, la geometría y el razonamiento gráfico (WEBER, 2005).

Desde este contexto, nos hemos propuesto como objetivo identificar y clasificar los errores frecuentes que cometen estudiantes de primer año de ingeniería cuando resuelven tareas

que involucran ecuaciones trigonométricas. En concreto, con este estudio pretendemos proporcionar información sobre los errores vinculados en la resolución de tareas que involucran ecuaciones trigonométricas, que permitan adoptar decisiones de enseñanza informadas para subsanarlos.

2 Marco teórico

El marco teórico de este estudio exploratorio son las tipologías de errores que consideramos relevantes en el ámbito de la Educación Matemática. Estas tipologías son las de Radatz (1979), Movshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987) y Socas (1997), que servirán como insumo para analizar los errores que cometen los estudiantes al resolver tareas que involucran ecuaciones trigonométricas.

Radatz (1979) clasifica los errores mediante categorías generales de análisis errores. Estos errores son debidos a:

- Dificultades del lenguaje: son los errores que se derivan del uso inadecuado o erróneo de los símbolos y términos matemáticos.
- Dificultades para obtener información espacial: este error se genera de las representaciones inadecuadas de situaciones matemáticas.
- Aprendizajes deficientes de destrezas y conceptos previos: esta categoría abarca todas las deficiencias sobre contenidos y procedimientos específicos para la realización de una tarea matemática.
- Asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento: se relacionan con la inflexibilidad del pensamiento para adaptarse a situaciones nuevas.
- Aplicación de reglas o estrategias irrelevantes: se refiere a los errores que surgen por aplicar una estrategia en áreas de contenidos diferentes.

Movshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987) hacen una clasificación empírica de los errores, y determinan seis categorías descriptivas para clasificarlos. Estas categorías son:

- Datos mal utilizados: errores que se producen por alguna discrepancia entre los datos y el tratamiento que le da el estudiante.
- Interpretación incorrecta del lenguaje: errores debidos a una interpretación incorrecta de lenguaje simbólico a otro lenguaje simbólico diferente.
- Inferencias no válidas lógicamente: errores que tienen que ver con fallas en el razonamiento y no se deben al contenido específico.

- Teoremas o definiciones deformados: errores que se producen por distorsión de una regla, teorema o definición,
- Falta de verificación en la solución: errores que se presentan cuando cada paso en la realización de la tarea es correcto, pero el resultado final no es la solución de la tarea planteada.
- Errores técnicos: errores de cálculo.

Por su parte, Socas (1997) reflexiona sobre tres ejes que podrían explicar el origen del error. Estos son:

- Los obstáculos, como un conocimiento adquirido.
- La ausencia de sentido, en concreto, errores del álgebra que tienen su origen en la aritmética, errores de procedimiento y de lenguaje algebraico.
- Las actitudes afectivas y emocionales debidas a la falta de concentración, olvidos o bloqueos.

3 Metodología

Este estudio, se enmarca en una metodología de tipo cualitativa, con carácter exploratorio y descriptivo (MAXWELL, 1992) cuyo fin es identificar y clasificar los errores que cometen los estudiantes de primer año de ingeniería cuando resuelven tareas que involucran ecuaciones trigonométricas.

3.1 Participantes

Los participantes fueron sesenta estudiantes de primer año de ingeniería que cursaban la asignatura de geometría. En adelante, estos participantes se llamarán, correlativamente, E_1, E_2 hasta E_60. Ellos ya habían estudiado los tópicos asociados a trigonometría, tales como: ángulos y sus mediciones, ángulo en posición normal, función circular, definiciones de las funciones seno y coseno, definición de otras funciones trigonométricas, propiedades de las funciones trigonométricas, relaciones trigonométricas en el triángulo rectángulo, definición de identidad trigonométrica, identidades básicas, suma de ángulos, ángulos dobles, ángulos medios, y ecuaciones trigonométricas.

3.2 Instrumento

El instrumento de recogida de datos correspondió a un cuestionario escrito, que tenía como objetivo conocer los errores que cometen los estudiantes de primer año de ingeniería cuando resuelven ecuaciones trigonométricas. Este cuestionario estuvo conformado por tres tareas (Figura 1), que se seleccionaron teniendo presente las investigaciones previas sobre ecuaciones trigonométricas. Los participantes de este estudio tuvieron 60 minutos para resolver, de forma escrita, este cuestionario.

1. Determine si en ángulo $x = \frac{\pi}{3}$ es solución de la ecuación:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin(x) + \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

2. Determine todos los elementos del conjunto restricción que están en $[0, 2\pi[$ de la siguiente ecuación:

$$\frac{\sin(x)}{2\cos(2x) - 1} = 2.$$

3. Resuelva la siguiente ecuación trigonométrica en $[0, 2\pi[$.

$$\cos(2x) - 3\cos(x) + 2 = 0.$$

1. Determine si en ángulo $x = \frac{\pi}{3}$ es solución de la ecuación:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin(x) + \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

2. Determine todos los elementos del conjunto restricción que están en $[0, 2\pi[$ de la siguiente ecuación:

$$\frac{\sin(x)}{2\cos(2x) - 1} = 2.$$

3. Resuelva la siguiente ecuación trigonométrica en $[0, 2\pi[$.

$$\cos(2x) - 3\cos(x) + 2 = 0.$$

Figura 1 – Cuestionario con las tareas que involucran ecuaciones trigonométricas
Fuente: elaborada por los autores

3.3 Análisis de datos

Para el procedimiento de análisis de datos, hemos seguido cuatro pasos. En el primer paso, en una planilla, transcribimos las respuestas escritas de los estudiantes acerca de las tres tareas del cuestionario. En el segundo paso, clasificamos las respuestas escritas, de cada tarea del cuestionario, como correctas, erróneas u omitidas (Tabla 1).

Tabla 1 – Tipo de respuesta escrita entregada por los estudiantes a cada tarea del cuestionario

Frecuencia	Respuestas								
	Tarea 1			Tarea 2			Tarea 3		
	Correcta	Errónea	Omitida	Correcta	Errónea	Omitida	Correcta	Errónea	Omitida
Absoluta	23	35	2	13	32	15	25	23	12
Porcentual	38.3%	58.3%	3.3%	21.6%	53.3%	25%	41.6%	38.3%	20%

Fuente: elaborada por los autores

En el tercer paso de análisis de datos, identificamos los errores cometidos por los estudiantes en la resolución del cuestionario. Finalmente, en el cuarto paso, clasificamos los errores sobre ecuaciones trigonométricas, que se identificaron en el tercer paso, a través de las categorías que emergieron. Para ello, cada investigador agrupó los errores. Después, el equipo de investigación consensuó la clasificación de errores y observó si esta tenía relación con las tipologías de errores de Radatz (1979), Socas (1997) y Movshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987).

4 Resultados

En el análisis de los datos recopilados, identificamos cuatro tipos de errores que cometen los estudiantes cuando resuelven tareas que involucran ecuaciones trigonométricas: (1) el uso de falsas identidades trigonométricas o definiciones deformadas, (2) la utilización de imágenes incorrectas de funciones trigonométricas para ángulos conocidos, (3) el manejo inadecuado de propiedades algebraicas y (4) la representación errónea del conjunto solución de una ecuación trigonométrica. Estos tipos de errores se evidenciaron en, al menos, dos tareas del cuestionario. En la Figura 2, se observa el porcentaje en que se manifestaron los cuatro tipos de errores en cada tarea del cuestionario. El error que presenta mayor frecuencia es el vinculado al uso de falsas identidades trigonométricas o definiciones deformadas.

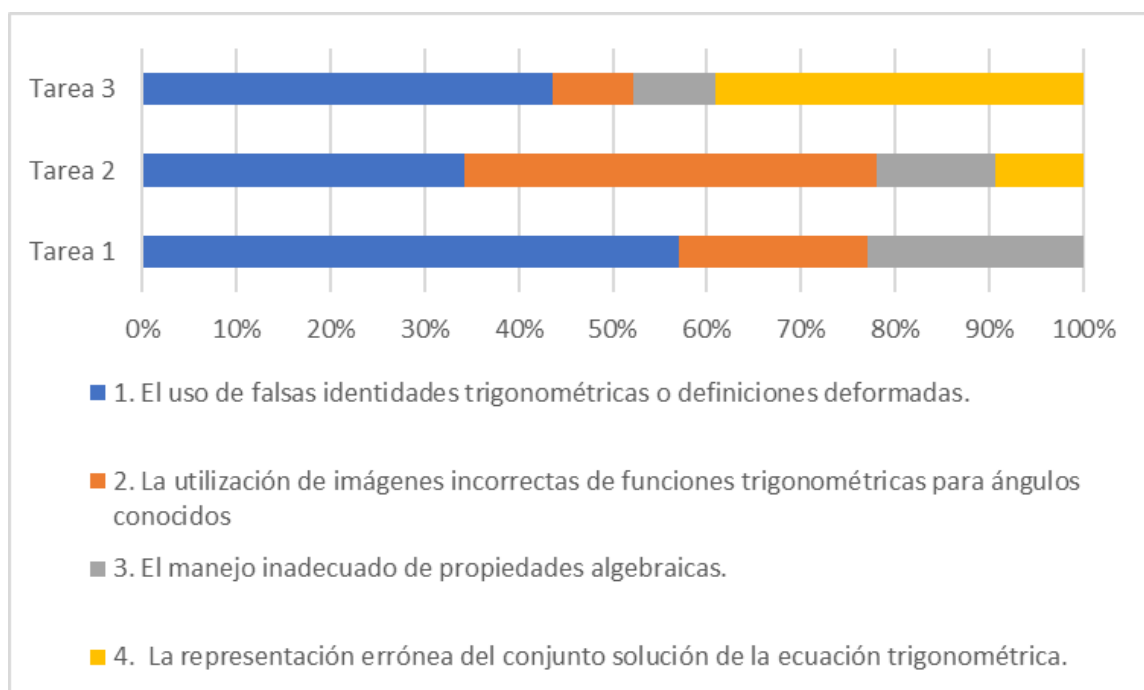


Figura 2 – Gráfico porcentual de los errores encontrados en cada tarea del cuestionario

Fuente: elaborada por los autores

En el Cuadro 1, se muestran los indicadores que dieron origen a la clasificación de errores cometidos por los estudiantes, de este estudio, cuando resuelven tareas que involucran ecuaciones trigonométricas.

Error manifestado por los estudiantes	Indicador del error
1. El uso de falsas identidades trigonométricas o definiciones deformadas.	<ul style="list-style-type: none"> • Uso erróneo de las identidades trigonométricas. • Uso de identidades trigonométricas inexistente. • Uso de la definición de ángulos dobles de manera errada.
2. La utilización de imágenes incorrectas de funciones trigonométricas para ángulos conocidos	<ul style="list-style-type: none"> • Evalúan de manera incorrecta las imágenes de las funciones trigonométricas en ángulos conocidos, tales como: $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$ y $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$.
3. El manejo inadecuado de propiedades algebraicas.	<ul style="list-style-type: none"> • Suman fracciones de manera errónea. • Simplifican de manera incorrecta expresiones algebraicas. • Asocian de manera incorrecta expresiones algebraicas.
4. La representación errónea del conjunto solución de la ecuación trigonométrica.	<ul style="list-style-type: none"> • No representan el conjunto solución de las ecuaciones trigonométricas involucradas en las tareas. • Escriben como conjunto solución solo el ángulo principal y no todas las soluciones existentes de la ecuación trigonométrica.

Cuadro 1 - Clasificación de los errores asociados a tareas que involucran ecuaciones trigonométricas y descripción de los indicadores de estos

Fuente: elaborado por los autores

A continuación, describimos y ejemplificamos los cuatro tipos de errores que emergieron de este estudio

4.1 El uso de falsas identidades trigonométricas o definiciones deformadas

Varios estudiantes, en las resoluciones de las ecuaciones, utilizan falsas identidades trigonométricas o definiciones deformadas. Por ejemplo, el estudiante E_9 (ver Figura 3, primera fila) en la tarea 1, se observa que reemplaza $x = \frac{\pi}{3}$ de manera correcta. Sin embargo, usa la definición de suma de ángulos de manera deformada: $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$ y $\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Este error lleva a que este estudiante conteste, de manera errónea, a la tarea planteada.

Por otra parte, el estudiante E_19 (ver Figura 3, segunda fila), en su resolución de la tarea 2, se ve que hace un planteamiento correcto al hacer el denominador distinto de cero para averiguar las restricciones de la ecuación trigonométrica. Aunque, de su desarrollo se infiere que usa la identidad falsa $\cos^2(x) - \sin^2(x) = 1$, por lo que obtiene una contradicción.

En tanto, el estudiante E_54 (ver Figura 3, tercera fila), en la tarea 3, utiliza para su resolución la igualdad $\cos(2x) = 2 \cos^2(x) + 1$. Esto es una definición deformada, ya que lo

correcto es $\cos(2x) = 2 \cos^2(x) - 1$. Este error hace que este estudiante no logre hallar la respuesta correcta a la tarea planteada, respondiendo que la tarea no tiene resultado para el conjunto de los números reales.

Tarea 1:

Determine si el ángulo $x = \frac{\pi}{3}$ es solución de la ecuación $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin x + \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$

Resolución del estudiante E_9

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right) &= \frac{1}{2} \\ \left[\sin\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{3}\right] - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \left[\cos\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{2}\right] &= \frac{1}{2} \\ \left[1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right] - \frac{\sqrt{3}}{2} + \left[\frac{1}{2} - 0\right] &= \frac{1}{2} \\ 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} &= \frac{1}{2} \\ 1 - \sqrt{3} + \frac{1}{2} &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Tarea 2.

Determine todos los elementos del conjunto restricción que están en $[0, 2\pi[$ de la siguiente ecuación:

$$\frac{1 + \sin x}{2 \cos(2x) - 1} = 2$$

Resolución del estudiante E_19

$$2 \cos(2x) - 1 \neq 0$$

$$\cos(2x) \neq \frac{1}{2}$$

$$\cos^2(x) - \sin^2(x) \neq \frac{1}{2}$$

$$1 \neq \frac{1}{2}$$

Tarea 3

Resuelva la siguiente ecuación trigonométrica entre $[0, 2\pi[$:

$$\cos(2x) - 3 \cos(x) + 2 = 0$$

Resolución del estudiante E_54

$$\begin{aligned} \cos(2x) - 3\cos(x) + 2 &= 0 \\ 2\cos^2(x) + 1 - 3\cos(x) + 2 &= 0 \\ 2u^2 - 3u + 3 &= 0 \\ \frac{9 \pm \sqrt{9 - 24}}{4} & \\ \text{No tiene soluci3n en } \mathbb{R} & \end{aligned}$$

Figura 3 – Ejemplos del error que se refiere a el uso de falsas identidades trigonom3tricas o definiciones deformadas

Fuente: elaborada por los autores

4.2 La utilizaci3n de im3genes incorrectas de funciones trigonom3tricas para 3ngulos conocidos

Algunos estudiantes muestran, en su resoluci3n del cuestionario, el uso de im3genes incorrectas de las funciones trigonom3tricas que corresponden a 3ngulos conocidos. Por ejemplo, el estudiante E_34 (ver Figura 4, primera fila), en su resoluci3n de la tarea 1, se observa que reemplaza $x = \frac{\pi}{3}$ y luego, utiliza la co-funci3n $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ adecuadamente. Sin embargo, a continuaci3n, escribe una imagen incorrecta de la funci3n trigonom3trica seno para el 3ngulo $\frac{\pi}{3}$, ya que reemplaza $\sin\frac{\pi}{3}$ por $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Este estudiante no responde a la pregunta planteada.

En tanto, el estudiante E_6 (ver Figura 4, segunda fila), en su resoluci3n de la tarea 2, se ve que utiliza una imagen incorrecta de la funci3n trigonom3trica coseno para el 3ngulo $\frac{\pi}{2}$ porque en su desarrollo considera que $\cos\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}$. Este error, conduce a este estudiante a una respuesta err3nea.

Por otra parte, el estudiante E_12 (ver Figura 4, tercera fila), en su resoluci3n de la tarea 3, se observa que inicia el desarrollo de la ecuaci3n trigonom3trica $\cos(2x) - 3\cos(x) + 2 = 0$, utilizando de manera correcta el coseno del 3ngulo doble, reemplazando $\cos(2x)$ por $2\cos^2(x) - 1$. Luego, se infiere que identifica una ecuaci3n de segundo grado, pues escribe un cambio de variable donde hace $\cos x = u$. A continuaci3n, desarrolla la ecuaci3n de segundo grado y obtiene dos ecuaciones: $\cos x = 1 \vee \cos x = -\frac{1}{2}$.

Sin embargo, el estudiante E_12, al momento de anotar el conjunto solución de la ecuación trigonométrica, utiliza una imagen incorrecta de la función trigonométrica coseno para el ángulo π porque considera $\cos(\pi) = 1$, lo cual es un error. Esto hace que su respuesta a la ecuación trigonométrica planteada no sea la correcta.

Tarea 1:

Determine si el ángulo $x = \frac{\pi}{3}$ es solución de la ecuación $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin x + \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$

Resolución del estudiante E_34

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin x + \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) &= \frac{1}{2} \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right) &= \frac{1}{2} \\ \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right) &= \frac{1}{2} \\ \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{3} + \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right) &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Tarea 2.

Determine todos los elementos del conjunto restricción que están en $[0, 2\pi[$ de la siguiente ecuación:

$$\frac{1 + \sin x}{2 \cos(2x) - 1} = 2$$

Resolución del estudiante E_6

$$\begin{aligned}2 \cos(2x) - 1 &\neq 0 \\ \cos(2x) &\neq \frac{1}{2} \\ 2x &\neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee 2x \neq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \\ x &\neq \frac{\pi}{4} + k\pi \vee x \neq \frac{3\pi}{4} + k\pi \\ G_r &= \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right\}\end{aligned}$$

Tarea 3

Resuelva la siguiente ecuación trigonométrica entre $[0, 2\pi[$:

$$\cos(2x) - 3 \cos(x) + 2 = 0$$

Resolución del estudiante E_12

$$\begin{aligned} \cos(2x) - 3\cos(x) + 2 &= 0 \\ 2\cos^2(x) - 3\cos(x) + 1 &= 0 \\ 2u^2 - 3u + 1 &= 0 \\ \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} & \\ \cos x = 1 \quad \checkmark \quad \cos x = -\frac{1}{2} & \\ S = \left\{ 0, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3} \right\} & \end{aligned}$$

Figura 4 – Ejemplos del error que se refiere a la utilización de imágenes incorrectas de funciones trigonométricas para ángulos conocidos
Fuente: elaborada por los autores

4.3 El manejo inadecuado de propiedades algebraicas

Es recurrente encontrar, en la resolución de los estudiantes a las tareas del cuestionario, el manejo inadecuado de propiedades algebraicas. Por ejemplo, el estudiante E_3 (ver Figura 5, primera fila), en su resolución a la tarea 1, se observa que reemplaza $x = \frac{\pi}{3}$, de manera correcta. Sin embargo, en el paso siguiente queda de manifiesto que este estudiante hace un manejo inadecuado de propiedades algebraicas primero al reemplazar $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$ por $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$ lo cual no es correcto, y luego $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$ por $2\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

A su vez, el estudiante E_21 (ver Figura 5, segunda fila), en su resolución de la tarea 2, al momento de despejar la variable x de la ecuación: $2x \neq \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$ comete un error algebraico, ya que solo multiplica $\frac{1}{2}2k\pi$ y no $\frac{1}{2}\frac{5\pi}{3}$. Así, obtiene $x \neq \frac{5\pi}{3} + k\pi$, en lugar de $\neq \frac{5\pi}{6} + k\pi$.

En tanto, el estudiante E_14 (ver Figura 5, tercera fila), en su resolución de la tarea 3, desarrolla de manera correcta el coseno del ángulo doble, pero considera que $2\cos^2(x) - 3\cos(x)$ es igual a $-\cos(x)$ lo que deja de manifiesto un error algebraico al no considerar que una de las funciones coseno está al cuadrado. Este error lleva al estudiante a dar una respuesta errónea a la tarea propuesta.

Tarea 1:

Determine si el ángulo $x = \frac{\pi}{3}$ es solución de la ecuación $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin x + \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$

Resolución del estudiante E_3

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin x + \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) &= \frac{1}{2} \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right) &= \frac{1}{2} \\ \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin\frac{\pi}{3} + \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right) &= \frac{1}{2} \\ 2 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Tarea 2.

Determine todos los elementos del conjunto restricción que están en $[0, 2\pi[$ de la siguiente ecuación:

$$\frac{1 + \sin x}{2 \cos(2x) - 1} = 2$$

Resolución del estudiante E_21

$$\begin{aligned} \frac{1 + \sin x}{2 \cos(2x) - 1} & \\ 2 \cos(2x) - 1 &\neq 0 \\ \cos(2x) &\neq \frac{1}{2} \\ 2x &\neq \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee 2x \neq \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \\ x &\neq \frac{\pi}{6} + k\pi \vee x \neq \frac{5\pi}{6} + k\pi \\ Cr &= \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right\} \end{aligned}$$

Tarea 3

Resuelva la siguiente ecuación trigonométrica entre $[0, 2\pi[$:

$$\cos(2x) - 3 \cos(x) + 2 = 0$$

Resolución del estudiante E_14

$$\begin{aligned} \cos(2x) - 3 \cos(x) + 2 &= 0 \\ 2 \cos^2 x - 3 \cos(x) + 1 &= 0 \\ -\cos(x) &= -1 \\ \cos(x) &= 1 \\ x &= 0. \end{aligned}$$

Figura 5 – Ejemplos del error que se refiere a el manejo inadecuado de propiedades algebraicas
Fuente: elaborada por los autores

4.4 Representación errónea del conjunto solución de una ecuación trigonométrica

Algunos estudiantes presentan, en su resolución del cuestionario, una representación errónea del conjunto solución de la ecuación trigonométrica. Por ejemplo, el estudiante E_45 (ver Figura 6, primera fila), en su resolución de la tarea 2, se puede observar que el conjunto solución no está correcto, ya que el estudiante encuentra la solución a la ecuación solo en el primer cuadrante, dejando el conjunto solución incompleto.

Por otra parte, el estudiante E_51 (ver Figura 6, segunda fila), en su resolución de la tarea 3, desarrolla de manera correcta la ecuación trigonométrica planteada, pues halla las soluciones correspondientes. Sin embargo, al momento de escribir el conjunto solución, el solo considera dos de las cuatro respuestas, es decir, no escribe de manera correcta el conjunto solución, dejando una respuesta incompleta.

Tarea 2.

Determine todos los elementos del conjunto restricción que están en $[0, 2\pi[$ de la siguiente ecuación:

$$\frac{1 + \sin x}{2 \cos(2x) - 1} = 2$$

Resolución del estudiante E_45

$$\begin{aligned}
 2 \cos(2x) - 1 &= 0 \\
 \cos(2x) &= \frac{1}{2} \\
 2x &= \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\
 x &= \frac{\pi}{6} + k\pi \\
 S &= \left\{ \frac{\pi}{6} \right\}
 \end{aligned}$$

Tarea 3

Resuelva la siguiente ecuación trigonométrica entre $[0, 2\pi[$:

$$\cos(2x) - 3 \cos(x) + 2 = 0$$

Resolución del estudiante E_51

$$\begin{aligned}
 \cos(2x) - 3\cos(x) + 2 &= 0 \\
 \cos(2x) - 3\cos(x) + 2 &= 0 \\
 2\cos^2(x) - 1 - 3\cos(x) + 2 &= 0 \\
 (2\cos(x) - 1)(\cos(x) - 1) &= 0 \\
 \cos(x) = \frac{1}{2} \vee \cos(x) = 1 & \\
 x = \frac{\pi}{3} \vee x = \frac{5\pi}{3} \vee x = 0 \vee x = 2\pi & \\
 S = \left\{ 0, \frac{\pi}{3} \right\} &
 \end{aligned}$$

Figura 6 – Ejemplos del error en la representación errónea del conjunto solución de una ecuación trigonométrica

Fuente: elaborada por los autores Fuente: elaborada por los autores

El Cuadro 2 presenta la relación entre la clasificación de errores obtenidos en este estudio y las clasificaciones de errores de Radatz (1979), Socas (1997) y Movshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987). En este Cuadro, podemos observar que los errores encontrados en este estudio se vinculan, mayoritariamente, con la clasificación de Movshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987).

Error encontrado	Movshovitz <i>et al.</i> (1987)	Socas (1997)	Radatz (1979)
1. El uso de falsas identidades trigonométricas o definiciones deformadas.	* Errores debidos a inferencias no válidas lógicamente. * Errores debidos al uso de teoremas o definiciones deformados. * Los errores como resultado de las concepciones alternativas de los alumnos.	* Errores que tienen su origen en la ausencia de sentido.	* Errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos.
2. La utilización de imágenes incorrectas de funciones trigonométricas para ángulos conocidos.	* Errores debidos a datos mal utilizados. * Errores debidos a la falta de verificación en la solución.		* Errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos.
	* Errores técnicos: errores de cálculo, de procedimiento en algoritmos básicos.		
3. El manejo inadecuado de propiedades algebraicas.	* Errores que provienen de los hábitos escolares o de una mala interpretación de las expectativas. * Errores ligados a las operaciones intelectuales implicadas.	* Errores que tienen su origen en un obstáculo.	* Errores debidos a la dificultad del lenguaje. * Errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes.
4. La representación errónea del conjunto solución de la ecuación trigonométrica.	* Errores debidos a la falta de verificación en la solución.		* Errores debidos a la dificultad del lenguaje.

Cuadro 2 - Errores obtenidos en este estudio en relación con las diferentes clasificaciones
Fuente: elaborado por los autores

5 Conclusiones

En este estudio exploratorio, identificamos cuatro tipos de errores que cometen estudiantes universitarios cuando resuelven tareas que involucran ecuaciones trigonométricas. Estos son: (1) el uso de falsas identidades trigonométricas o definiciones deformadas, (2) la utilización de imágenes incorrectas de funciones trigonométricas para ángulos conocidos, (3) el manejo inadecuado de propiedades algebraicas y (4) la representación errónea del conjunto solución de una ecuación trigonométrica.

Consideramos que los errores identificados en este estudio son debidos, principalmente, a la falta de conocimientos previos que se necesitan para resolver adecuadamente tareas que involucran ecuaciones trigonométricas. Sin embargo, estos conocimientos previos no solo son relacionados directamente con el contenido de ecuaciones trigonométricas (identidades trigonométricas, imágenes de funciones trigonométricas para ángulos conocidos, representación del conjunto solución de una ecuación trigonométrica) sino que, también, vinculados a propiedades algebraicas y de algunos conjuntos numéricos (reales, racionales y enteros), como se observa en las diferentes resoluciones de los estudiantes. Además, coincidimos con Rohimah y Prabawanto (2019) en que los estudiantes no dominan la trigonometría básica para resolver ecuaciones trigonométricas y, al igual que los estudiantes de secundaria de Fahrudin y Pramudya (2019), los estudiantes universitarios de nuestro estudio olvidan valores trigonométricos de ángulos especiales.

Los resultados de este estudio dan evidencia de lo importante que es efectuar una evaluación diagnóstica al estudiante que va a iniciar la construcción de ecuaciones trigonométricas, con la finalidad de constatar que tiene los conocimientos previos necesarios para este contenido y, de esta forma, evitar que cometa los errores identificados en este estudio.

Por otra parte, se requiere reflexionar sobre cómo enseñar las identidades trigonométricas de forma que los estudiantes no creen identidades que no existen, y de cómo enseñar la representación del conjunto solución de una ecuación trigonométrica de manera que los estudiantes comprendan los elementos que tiene ese conjunto.

Los hallazgos encontrados en este estudio, pretendemos que sean un insumo tanto para planificar clases como para construir trayectorias hipotéticas de aprendizaje (SIMON, 1995) sobre ecuaciones trigonométricas en el nivel universitario.

Agradecimientos

Este trabajo, ha recibido el apoyo del proyecto Fondecyt N°11190284 y se ha realizado en el Programa de Doctorado en Educación de la Universidad Autónoma de Barcelona, España.

Referencias

FAHRUDIN, D.; PRAMUDYA, I. Profile of students' errors in trigonometry equations. **Journal of Physics: Conference Series**, Bristol, v. 1188, n. 1, p. 012-044, 2019.

MAXWELL, J. A. Understanding and validity in qualitative research, **Harvard Educational Review**, Cambridge, v. 62, n. 3, p. 279 -301, 1992.



- MOVSHOVITZ-HADAR, N.; ZASLAVSKY, O.; INBAR, S. An empirical classification model for errors in high school mathematics. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, v. 18 n. 1, p. 3-14, 1987.
- RADATZ, H. Error analysis in mathematics education. **Journal for Research in mathematics Education**, Reston, v. 10, n. 3, p. 163-172, 1979.
- RICCOMINI, P. J. Identification and remediation of systematic error patterns in subtraction. **Learning Disability Quarterly**, Londres, v. 28, n. 3, p. 233-242, 2005.
- RICO, L. Errores en el aprendizaje de las Matemáticas. En: KILPATRICK, J.; RICO, L.; GÓMEZ, P. (Orgs.). **Educación Matemática**. Ciudad de México: Grupo Editorial Iberoamérica, 1995. p. 69-108.
- ROHIMAH, S M; PRABAWANTO, S. Student's difficulty identification in completing the problem of equation and trigonometry identities. **International Journal of Trends in Mathematics Education Research**, Lhokseumawe, v. 2, n. 1, p. 34-36, 2019.
- SIMON, M. A. Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, v. 26, n. 2, p. 114-145, 1995.
- SOCAS, M. Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria. En: Rico, L. (Ed). **La educación matemática en la enseñanza secundaria**. Barcelona: ICE/Horsori, 1997. p.124-154.
- WEBER, K. Student's understanding of trigonometric functions. **Mathematics Education Research Journal**, Australasia, v. 102, n. 2, p. 144-147, 2005.

Submetido em 22 de Novembro de 2021.
Aprovado em 06 de Agosto de 2022.