ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a08

Interface Didática entre Modelagem Matemática e Semiótica

Didactic Interface between Mathematical Modeling and Semiotics

Lourdes Maria Werle de **Almeida***

ORCID iD 0000-0001-8952-1176

Karina Alessandra pessoa da **Silva****

ORCID iD 0000-0002-1766-137X

Dirceu dos Santos **Brito*****

ORCID iD 0000-0001-8185-3264

Resumo

Este artigo propõe uma discussão relativa à abordagem de conteúdos da Matemática em atividades de Modelagem explorando a interlocução com a Semiótica, de modo que se vislumbra uma interface entre Modelagem Matemática e Semiótica. A construção dessa interface é mediada pela análise dirigida ao desenvolvimento de duas atividades, sendo uma delas desenvolvida por alunos do Ensino Superior e a outra por alunos da Educação Básica. Por um lado, essa interface se vincula à situação epistemológica particular dos objetos matemáticos que só se tornam presentes por meio de signos. Por outro lado, a Modelagem Matemática tem características de uma organização pedagógica que não se desvincula de uma variabilidade de signos e de uma eminente atividade semiótica. Neste sentido, a Modelagem Matemática, seja alinhada com a corrente científico humanista, seja em sintonia com a corrente pragmática, pode ser um meio para o enfrentamento dos problemas que Bruno D'Amore caracteriza como *puramente didáticos*. Assim, o artigo propõe uma perspectiva *didático-semiótica* para a Modelagem Matemática que implica em considerar que, na sala de aula, sua relação com a aprendizagem não se desvincula de uma interface em que signos, de diferentes naturezas e provenientes de diferentes sistemas semióticos, se articulam para resolver um problema cuja origem não é, em geral, a própria Matemática.

Palavras-chave: Modelagem Matemática. Semiótica. Aprendizagem. Interface.

Abstract

This article proposes a discussion on the approach of Mathematics contents in mathematical modeling activities exploring the interlocution with semiotics, so that an interface between mathematical modeling and semiotics is glimpsed. The construction of this interface is mediated by the analysis aimed at the development of two modeling activities, one being developed by Higher Education students and the other by Basic Education students. On the one hand, this interface is linked to the epistemological situation of mathematical objects that only become present through signs. On the other hand, mathematical modeling has characteristics of a pedagogical organization that is not disconnected from a variability of signs and an eminent semiotic activity. In this sense, mathematical modeling, whether in line with the humanist scientific current or in line with the pragmatic current, can be a means of facing the problems that Bruno D'Amore characterizes as *purely didactic*. Thus, the article proposes a *didactic-semiotic* perspective for mathematical modeling that implies considering that, in the classroom, its relationship with

* Doutora em Engenharia de Produção pela Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). Docente da Universidade Estadual de Londrina (UEL), Londrina, Paraná, Brasil. E-mail: lourdes@uel.br.

** Doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL). Docente da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Londrina, Paraná, Brasil. E-mail: karinapessoa@gmail.com.

*** Doutor em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL). Professor da Secretaria de Estado da Educação (SEED), Londrina, Paraná, Brasil. E-mail: dirbrito@gmail.com.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a08

learning is not disconnected from an interface in which signs, of different natures and coming from different semiotics systems, are articulate to solve a problem whose origin is not, in general, Mathematics itself.

Keywords: Mathematical Modeling. Semiotics. Learning. Interface.

1 Uma incursão em aspectos relativos à Matemática e como ela pode ser aprendida

Discussões relativas à aprendizagem têm se orientado por diferentes bases epistemológicas e filosóficas. Segundo Cunha (2007), o significado etimológico do verbo *aprender* tem origem do latim *apprehendere*, que diz respeito ao significado de apoderar-se, tomar posse, agarrar algo e mantê-lo preso junto a si. No latim, entretanto, *apprehendere* remete tanto à ação de agarrar as coisas com as mãos quanto à de *agarrá-las com a mente*, de modo que aprender, na sua origem etimológica, incorpora os significados de aprender com o corpo ou com a mente. Aprender com a mente, ou aprender intelectualmente como se poderia dizer, equivale a conhecer algo mediante a apreensão do significado daquilo que está sendo aprendido.

Relativamente à aprendizagem em Matemática, D'Amore (2007) pondera que as condições que podem determinar a aprendizagem estão vinculadas às práticas pedagógicas da sala de aula. Considerando a aprendizagem como um conjunto de modificações de comportamento decorrentes de uma situação na sala de aula envolvendo professor e alunos, ela se associa à gestão de diferentes representações, ao uso de diferentes linguagens e a um repertório de manifestações e argumentações relativas a um determinado conteúdo em Matemática (D'AMORE, 2007).

Todavia, o que é aprendido em Matemática, conforme sugerem Radford, Schubring e Seeger (2008), refere-se a objetos de natureza simbólica e cujo acesso se dá por signos que se colocam no lugar desses objetos. Signo, segundo Peirce (2005), é tudo aquilo que representa alguma coisa para alguém em um determinado contexto. Assim, signos têm caráter representativo e visam tornar presente, estar no lugar de algo, sem, entretanto, ser esse próprio algo. Portanto, conforme aponta Santaella (2008), o signo tem um papel de mediador entre algo não diretamente acessível e um intérprete.

A mediação por signos entre objetos matemáticos e os alunos (intérpretes) remete a uma perspectiva semiótica para o ensino e a aprendizagem da Matemática nos diferentes contextos educacionais. Duval (2011), neste sentido, pondera que os problemas específicos que os alunos enfrentam em relação à aprendizagem da Matemática "têm sua origem também na situação epistemológica particular do conhecimento matemático e não somente na questão da organização pedagógica das atividades na sala de aula" (DUVAL, 2011, p. 11).

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a08

Otte e Barros (2015) propõem uma discussão relativa à necessidade da transição de uma interpretação ontológica para uma interpretação semiótica da Matemática. Particularmente, os autores sugerem uma reflexão sobre a questão: em que sentido os objetos matemáticos existem? Relativamente a essa questão, os autores argumentam que, se, por um lado, a operação com os conceitos abstratos em Matemática foi considerada inadequada e incerta, por outro lado, os signos têm a função semiótica de torná-los presentes em nossa experiência sem, entretanto, fazer reivindicações existenciais, como pondera Peirce (2005).

Hoffmann (2006) aponta que a atividade matemática, seja na sala de aula ou fora dela, é realizada por meio da construção, transformação e interpretação de signos. Assim, considerar a aprendizagem em Matemática sob uma perspectiva semiótica implica em dirigir a atenção para os signos como meios de pensamento, de raciocínio, de significação, conforme sugerem D'Amore, Pinilla e Iori (2015). Nesta perspectiva semiótica a aprendizagem diz respeito ao desenvolvimento da competência do aluno para se expressar por meio de *representações*[1] apropriadas. O termo *apropriadas*, segundo Hoffmann (2006), não se refere apenas ao uso de representações convencionadas no âmbito da Matemática, mas, sobretudo ao entendimento de relações entre estas representações e o objeto matemático representado.

Nessa linha de pensamento, Santi e Sbaragli (2008) se referem ao processo adaptativo com que os alunos precisam lidar para aprender determinado conteúdo em Matemática, considerando que as relações entre objetos e signos que funcionaram bem em uma situação poderão ser ampliadas ou revistas em outra.

Esta problemática pode gerar o que Erlwanger (1975) caracteriza como *misconcepções.* Uma misconcepção, para esse autor, é entendida como um conceito equivocado e, conforme afirma Nesher (1987, p, 35), a "noção de misconcepção denota uma linha de pensamento que causa erros resultantes de uma premissa incorreta". Para Erlwanger (1975), uma misconcepção é uma estrutura do conhecimento que pode ser ativada em uma variedade de situações e pode ser resistente a mudanças, podendo até competir com o conhecimento correto relativamente a algum conteúdo específico. Por exemplo, ao ser introduzida a regra de derivada de uma função polinomial $f(x)=x^n$ $(n\neq 0)$ como sendo $f'(x) = n.x^{n-1}$, alguns alunos passam a usar que se $f(x)=x^x$ então $f'(x) = x.x^{x-1}$, o que é um equívoco.

D'Amore (2007) sugere que desfazer uma misconcepção é um passo que os alunos

[1] Para Peirce (2005), representar algo é uma função do signo de modo que esse autor caracteriza assim a relação entre signo e representação: quando se deseja distinguir entre aquilo que representa (representar no sentido de estar no lugar do objeto) e o meio usado para ter acesso àquilo que se representa, pode-se denominar o primeiro de 'signo' e o último de 'representação'. Ou seja, aquilo que está no lugar do objeto é o signo; aquilo que usamos para ter acesso ao signo que está no lugar do objeto é a representação.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a08

podem dar apoiados em uma organização pedagógica que inclui situações didáticas que lhes permitem aprender. Assim, para o caso da derivada, por exemplo, o professor precisa estruturar uma nova situação para a sala de aula para que este equívoco seja transponível e a derivada da função $f(x) = g(x)^{h(x)}$, que inclui o caso da função $f(x)=x^x$, seja aprendida.

Neste contexto ganha destaque uma organização pedagógica que inclui situações didáticas que proporcionem a produção, a ação e a interpretação de signos e representações que oportunizem ao aluno lidar com o objeto matemático em diferentes situações e ultrapassar possíveis misconcepções.

No presente artigo dirigimos nossa atenção às possibilidades viabilizadas por atividades de Modelagem Matemática para a produção e interpretação de uma variabilidade de signos e representações visando a interpretação ou a investigação de uma situação da realidade. Neste sentido, conforme defendem Brito e Almeida (2021), atividades de Modelagem Matemática podem intermediar a aprendizagem, favorecendo condições para sua ocorrência. Particularmente, o objetivo do artigo consiste em discutir como alguns conceitos da Matemática podem ser abordados na sala de aula em atividades de Modelagem, explorando a interlocução com a Semiótica, de modo que se pode-se construir uma interface entre Modelagem Matemática e Semiótica. A construção dessa interface é mediada pela análise dirigida ao desenvolvimento de duas atividades de Modelagem Matemática.

2 Modelagem Matemática

Em termos gerais, a Modelagem Matemática se refere à obtenção de uma solução para um problema identificado em uma situação da realidade e inclui a construção e validação de um modelo matemático (ALMEIDA, 2018; BLUM, 2015; ARAUJO, 2021; MEYER, 2020; POLLAK, 2015, entre outros).

A construção e o uso de modelos - modelos matemáticos – para explicar, entender, interpretar ou fazer previsões para situações da realidade usando Matemática é, portanto, elemento central em atividades de Modelagem Matemática. Um atributo inerente a um modelo matemático é que ele, de alguma maneira, articula elementos de dois domínios que, de modo geral, têm linguagens distintas: o domínio da situação da realidade (R) e o domínio da Matemática (M). A articulação desses domínios não é um processo automático, mas é realizada por alguém, um modelador (no âmbito da área de Educação Matemática é um professor, um aluno ou um grupo de alunos), que seleciona aspectos do domínio R e do domínio M e os articula por meio de um ato intencional, que aqui denotamos por A.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a08

Considerando os elementos dos dois domínios bem como o ato intencional, ao modelo matemático se associa uma tripla (R, A, M), como indicam Niss e Blum (2020) e Niss (2012). Segundo estes autores, a definição de um modelo matemático se completa com a caracterização dessa tripla. Neste sentido, o modelo matemático, para além de uma estrutura matemática (como uma função ou uma equação, por exemplo) é um modelo de algo reconhecido no domínio da realidade e é construído usando elementos do domínio da Matemática.

Há, entretanto, diferentes possibilidades para o modelo matemático (R, A, M) assim definido, considerando que escolhas e decisões do modelador selecionam os elementos de R e de M. Este processo de ações e de escolhas é o que Niss e Blum (2020) caracterizam a Modelagem Matemática particular de cada indivíduo ou grupo.

No contexto da sala de aula, as ações dos alunos em atividades de modelagem têm relação com o que eles aprendem por meio dessas atividades. Kaiser (2020) e Wess *et al.* (2021) sugerem que as reflexões em relação ao que se aprende com essas atividades podem se categorizar em duas correntes: (a) aquela em que o foco é a formação matemática dos alunos que vai acontecendo na medida em que eles desenvolvem habilidades para criar ou interpretar relações entre Matemática e realidade, denominada *científica humanista,* e vem respaldada no pensamento de Hans Freudenthal; (b) aquela em que se dá ênfase às habilidades dos alunos para usar a Matemática na proposição e resolução de problemas da realidade e é reconhecida como corrente *pragmática,* tendo suas origens nas argumentações de Henry Pollak. Todavia, é preciso reconhecer que, embora no desenvolvimento de atividades de Modelagem possa se dar mais ênfase a um aspecto do que a outro, é indissociável a aprendizagem relativa à Matemática e àquela relativa à sua aplicação em um problema da realidade.

Swan, *et al.* (2007) sugerem que a construção de modelos matemáticos favorece a aprendizagem da Matemática porque demanda o uso de diferentes tipos de representações e estimula a comunicação entre os estudantes com essas representações.

Almeida e Silva (2017) apresentam um estudo em que aquilo que os alunos aprenderam em uma atividade de Modelagem Matemática decorreu do processo de semiose (a ação dos signos) e se deu mediante a articulação de elementos da situação da realidade com conteúdos da Matemática. Seguindo esta linha de investigação, no presente artigo construímos uma interface entre Semiótica e atividades de Modelagem Matemática.

3 Sobre Semiótica e o uso de signos na Educação Matemática

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a08

De modo geral, a Semiótica é associada à doutrina geral que trata dos signos. No decorrer do tempo os focos da Semiótica passaram da conceitualização e da natureza do signo para a investigação da sua função no pensamento e na interação humana.

Para Eco (2003), signo é um substituto significante de algo e, conforme afirma Santaella (2008, p. 8),

> [...] signo pode ser qualquer coisa de qualquer espécie (uma palavra, um livro, uma biblioteca, um grito, uma pintura, um museu, uma pessoa, uma mancha de tinta, um vídeo etc.) que representa outra coisa chamada de objeto do signo, e que produz um efeito interpretativo em uma mente real ou potencial.

Peirce (2005) reconhece o signo como uma unidade triádica e indissociável composta por três elementos: um representamen (a parte *material* do signo), um objeto (aquilo a que o representamen remete), interpretante (algum significado que decorre da relação entre objeto e representamen). Whitson (1997), em sua prerrogativa conhecida como *cognição como processo semiótico,* ilustra este reconhecimento de signo pelo exemplo: objeto *–previsão de chuva*; representamen *–os dados meteorológicos* (barômetro indicando queda da pressão do ar); interpretante – *levar guarda-chuva ao sair*. O interpretante, levar guarda-chuva ao sair, é resultado da significação de um intérprete (aquele que vai sair com o guarda-chuva) para os dados meteorológicos que indicam chuva.

No âmbito da Matemática, historicamente Galileu Galilei (1564-1642), e mais recentemente David Hilbert (1862-1943), embora com concepções distintas, delinearam aproximações entre a semiótica e a Matemática. No decorrer do tempo, todavia, embora os aspectos essenciais da teoria semiótica não variem, é lhes acrescentada outra ordem de considerações, de modo que o foco passa a ser o uso dos signos e o comportamento semiótico. Conforme afirma Steinbring (2006), os signos usados no contexto da Matemática podem ser vistos como meios para codificar, comunicar e viabilizar a expressão e a representação dos objetos matemáticos.

Radford, Schubring e Seeger (2008) reconhecem que a Educação Matemática é uma das áreas em que as repercussões da Semiótica têm grande relevância. De fato, ensinar e aprender Matemática são processos subordinados a sistemas de simbolização, abstração e generalização que envolvem aspectos culturais, sociais e cognitivos.

Segundo Ernest (2006), abordar o ensino e a aprendizagem da Matemática numa perspectiva semiótica é uma iniciativa promissora por meio da qual se busca compreender signos e suas regras de produção. A produção e manipulação de signos de naturezas diversas viabilizam aos alunos novas interpretações do que conhecem sem abrir mão do que já estava previamente em sua estrutura cognitiva, mas os leva a reconhecer os objetos matemáticos em

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a08

diferentes sistemas semióticos. Ainda para Ernest (2006, p. 69), um sistema semiótico é caracterizado a partir de três aspectos:

> Primeiro, há um conjunto de signos, cada um dos quais, possivelmente, possa ser pronunciado, falado, escrito, desenhado ou codificado eletronicamente [...]. Segundo, existe um conjunto de regras de produção de signos, para produzir ou proferir signos atômicos (únicos) e moleculares (compostos) [...]. Terceiro, há um conjunto de relações entre os signos e seus significados incorporados em uma estrutura de significado subjacente.

Várias pesquisas têm se endereçado à uma análise semiótica das ações dos alunos no âmbito de aulas de Matemática (PANERO; ARZARELLO; SABENA, 2016; ALMEIDA e SILVA, 2015, entre outros). Resultados indicam que a aprendizagem, quando associada à produção e ação de diferentes signos, pode se constituir relativamente a uma variedade de representações e significados do objeto matemático e, como sugerem D'Amore, Pinilla e Iori (2015), ela tem natureza semiótica.

Entretanto, para Eco (2003), por exemplo, a rede de significações requerida para que ocorra a aprendizagem, pode ser bastante variada e complexa, considerando diferentes sistemas semióticos que podem ser ativados nas situações didáticas da sala de aula. No caso da Matemática, é preciso considerar que diferentes facetas do significado de um objeto precisam se articular para a construção cognitiva do aluno em relação a esse objeto ao invés de considerar a univocidade que o signo (representamem) pode expressar (D'AMORE; PINILLA; IORI, 2015).

4 Modelagem Matemática e Semiótica: a configuração de uma interface

Para discutir como alguns conceitos da Matemática podem ser abordados na sala de aula em atividades de Modelagem e evidenciar como a interlocução com a Semiótica pode favorecer a discussão e a aprendizagem de alguns conceitos da Matemática na sala de aula em atividades de Modelagem Matemática, referimo-nos a dois cenários didáticos relativos ao desenvolvimento de duas atividades de Modelagem por grupos distintos de alunos em aulas ministradas pelos autores do presente artigo, sendo uma no Ensino Superior e outra na Educação Básica.

Para a nossa interpretação das ações e assertivas dos alunos, usamos dados que foram coletados no decorrer do desenvolvimento dessas atividades fazendo gravações das aulas que incluem diálogos entre alunos e professor, bem como as informações que constam em relatórios das atividades entregues pelos alunos.

A nossa análise segue encaminhamentos de uma pesquisa qualitativa de modo que a

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a08

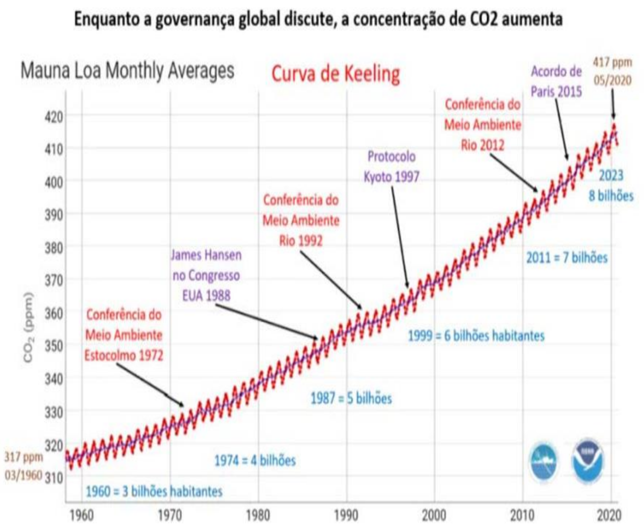
interpretação dos autores em relação aos dados coletados é descritiva. A análise que conduz a essa interpretação se fundamenta no quadro teórico relativamente à Modelagem Matemática e à Semiótica com a finalidade de elucidar o que os dados indicam em relação ao pesquisado.

4.1 Cenário 1: Revisitando conceitos e ultrapassando uma misconcepção

Este cenário refere-se a duas aulas da disciplina de Modelagem Matemática na Perspectiva da Educação Matemática para alunos do quarto ano de um curso de Licenciatura em Matemática. Nestas aulas deu-se o desenvolvimento de uma atividade de Modelagem com a temática *A temperatura da terra: o aquecimento global.* Este tema foi sugerido aos alunos pela professora e as aulas, devido às restrições impostas pela pandemia do Covid -19, foram realizadas em encontros virtuais usando o *Google Meet* no segundo semestre do ano de 2020.

O interesse inicial dessa temática se deu a partir de uma reportagem de televisão em que, numa discussão sobre as situações climáticas ambientais, foi informado que, à medida que o mundo parava para combater a pandemia do Covid-19, houveram relatos de melhoria na qualidade do ar em alguns locais. Uma discussão com os alunos sobre essa situação da realidade considerou, entre outros aspectos, aqueles ilustrados na Figura 1.

Os dados mais recentes da Administração Nacional Oceânica e Atmosférica dos Estados Unidos (NOAA) mostram que os níveis globais de dióxido de carbono (CO_2) estão aumentando acentuadamente. Em abril de 2020, a concentração média de CO_2 na atmosfera era de 416,21 partes por milhão (ppm), a mais alta desde o início das medições, que começaram em 1958, no Havaí, muito embora inúmeros tratados no decorrer dos anos tenham se destinado a discutir i impor medidas de contenção da produção de CO_2 conforme indica a figura.



Informações do Painel Intergovernamental sobre Mudanças Climáticas (IPCC), previsto para 2021-22:

- ✓ O mundo provavelmente excederá 1,5º C entre 2026 e 2042 em cenários onde as emissões não são reduzidas rapidamente, com uma estimativa central em 2031;
- ✓ O limite 2º C provavelmente será excedido entre 2034 e **2052 no cenário de emissões mais altas.**
- ✓ Em um cenário de mitigação modesta – onde as emissões permanecem próximas aos níveis atuais – o limite 2º C seria excedido entre 2038 e 2072, com uma mediana em 2052.

Um dos maiores efeitos da alta concentração de CO_2 é o aumento da temperatura global

Figura 1- As informações sobre a situação da realidade
Fonte: Construído pelos autores (2021).

A discussão com os alunos conduziu a uma estruturação para a definição do problema:

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a08

Qual será a temperatura média global no ano de 2052? A partir desse problema, teve início a matematização dessa situação visando obter uma resposta a partir dos dados. O desenvolvimento da atividade se deu conforme indica a Figura 2.

A temperatura da terra: o aquecimento global

Situação da realidade

Uma reportagem de televisão relativa às situação climática sugere que no ano de combate à pandemia do Covid-19 houve melhoria na qualidade do ar. Entretanto, os dados não confirmam isso e um dos maiores efeitos do CO_2 na atmosfera é o aumento da temperatura global.

Premissa: Existe relação entre a concentração de CO_2 e a temperatura global.
Informação: O limite de 2° C provavelmente será excedido entre 2034 e 2052 no cenário das emissões altas.
Hipótese usada para definir o problema: Vamos considerar que o limite de 450 ppm na concentração vai ocorrer por volta do ano de 2052.
Problema: Qual será a temperatura global no ano de 2052?

Variáveis
T: Temperatura média global (°C);
i: Intervalos de tempo (5 anos)

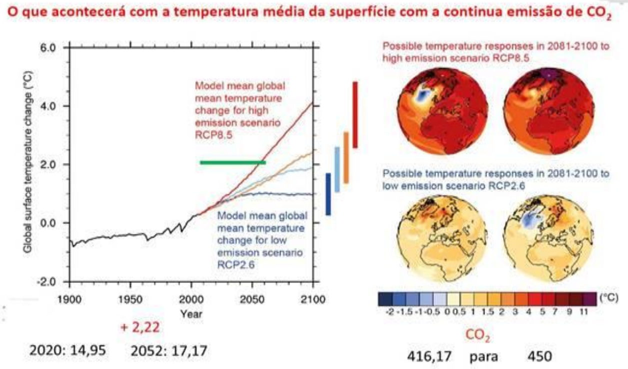
Informação sobre as temperaturas

Periodo	i	T(i)	Periodo	i	T(i)
1965-1969	0	13,914	1995-1999	6	14,476
1970-1974	1	14,002	2000-2004	7	14,582
1975-1979	2	14,026	2005-2009	8	14,79
1980-1984	3	14,254	2010-2014	9	14,89
1985-1989	4	14,274	2015-2019	10	14,99
1990-1994	5	14,316			

Matematização
a) A sequência de temperaturas no decorrer do tempo é uma sequência monótona.
Hipótese: Essa sequência é limitada.

Construção do modelo matemático
Usar o método de Ford-Walford para determinar o valor de estabilidade das temperaturas. (Estabilidade decorre da condição de que a sequência de temperaturas é uma sequência de Cauchy ($T_{i+1} \cong T_i$).

Interpretação dos resultados e validação
Temperatura global em 2020: 14,95 °C;
Temperatura global em 2052: 17, 17 °C
Um aumento de, aproximadamente 2,2 °C



Modelo obtido

$T(t)=17,34-3,4578\,e^{-0,0412(t-1978)}$
para $t \geq 1978$

Resposta para o problema: Qual será a temperatura global no ano de 2052?

$T(2052)=17,34-3,4578\,e^{-0,0412(2052-1978)}$

Temperatura global da terra será de, aproximadamente, 17,17 °C

Validação do resultado
O modelo obtido pode ser considerado válido para a previsão da temperatura global nas próximas décadas em um cenário sem redução de CO_2

Figura 2- A atividade de Modelagem Matemática desenvolvida pelos alunos
Fonte: Construído pelos autores (2021)

A Modelagem Matemática dessa situação da realidade promoveu e, ao mesmo tempo foi mediada, por duas discussões particularmente interessantes que detalhamos nas duas seções a seguir.

4.1.1 A matematização da situação e o conceito de sequência limitada

A matematização da temperatura global se baseia numa hipótese fundamental usada nessa situação: a temperatura global não será infinitamente grande. Se as temperaturas médias da terra (indicadas na tabela que está na Figura 2) formam uma sequência, como ela se relaciona com essa hipótese?

A sequência que deveria ser estudada para proporcionar a obtenção de uma solução para o problema "*Qual será a temperatura global no ano de 2052?*" é o objeto matemático que precisa ser apreendido pelos alunos. Ou seja, como lidar com a sequência de temperaturas (13,914, 14,002 , 14,026 , 14,254 , 14,274 , 14,316 , 14,476 , 14,582 , 14,79 , 14,89 , 14,99, ...)

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a08

para determinar a temperatura global no ano de 2052? A discussão dessa questão conduziu à identificação de um ponto importante em torno do qual os alunos demonstrariam o que podemos referir como uma misconcepção: o que é uma sequência limitada?

Uma discussão com os alunos encaminhada pela professora revela que, pelo menos alguns alunos, tinham conceito equivocado do que é uma sequência limitada, conforme indica transcrição de parte da aula:

> *P: Então a sequência das temperaturas é uma sequência limitada. Certo, mas o que é uma sequência limitada?*
> *A1: Sequência limitada é a que tem limite, professora!*
> *P: É isso, turma?*
> *A2: Sim, se a sequência é limitada então ela tem limite, sim professora.*
> *P: É isso mesmo?*
> *A1: Sim, professora, foi o que a gente já estudou em outra disciplina*
> (Audio-visual da aula transmitida via *Google Meet*, 2021).

Este diálogo gerou uma intervenção da professora que, sem interferir na matematização da situação da realidade, foi fundamental para que esses alunos sinalizassem que a ideia equivocada de que sequência limitada é aquela que tem limite foi ultrapassada. De fato, a definição de sequência limitada é: Uma sequência (x_n) de números reais é limitada se existem a e b dois números reais tais que $a \leq x_n \leq b$ para todo número n natural. Isto quer dizer que todos os termos da sequência pertencem ao intervalo $[a,b]$ (LIMA, 1982).

A professora apresentou aos alunos a definição de sequência limitada e o exemplo $(x_n)=(-1)^n$ e solicitou que usassem outras representações para essa sequência. Os alunos então compartilharam na tela o que haviam feito, incluindo representações como aquelas contidas na Figura 3.

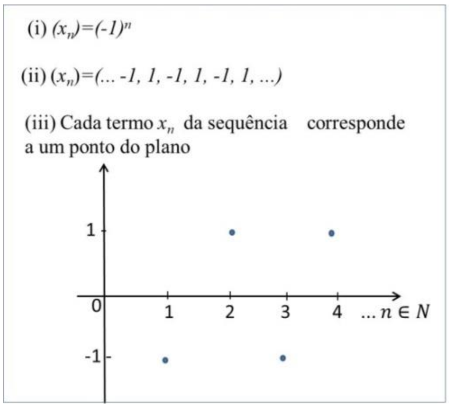


Figura 3 – Diferentes representações da sequência
Fonte: Dados da pesquisa (2021).

A partir dessas representações, um diálogo foi direcionado pela professora para que os alunos percebessem o seu equívoco conceitual.

> *P: Vejam essa sequência turma $(x_n)=(-1)^n$. Ela é uma sequência limitada?*
> *Vários alunos responderam: Sim, professora!*

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a08

P: Por quê?
A2: Porque da pra achar a e b como pede na definição que a senhora apresentou.
P: Certo. Quais podem ser a e b, por exemplo?
A3: Ah, acho que dá pra pegar a=-1,5 e b=1,5, não dá?
Vários alunos responderam: Dá sim, né professora?
P: Isso, a e b atendem à condição de $a \leq x_n \leq b$ *para todo número n natural. Vejam na representação de vocês, por exemplo, (Figura 3).*
P: Mas agora a minha pergunta para vocês é: essa sequência tem limite? O que significa uma sequência ter limite? Qual é a definição de limite de uma sequência de números reais?
A1: Ter limite não é ser limitada né?
A2: Professora, acho que tem que falar que é sequência convergente, não é, se ela tem limite?
P: Muito bem, mas o que é limite de uma sequência?
(Audio-visual da aula transmitida via Google Meet, 2021).

Em seguida, parte da aula foi destinada à definição de limite de uma sequência e, por consequência, sequência convergente. Os alunos então produziram representações para sequência limitada e sequência convergente conforme ilustra a Figura 4.

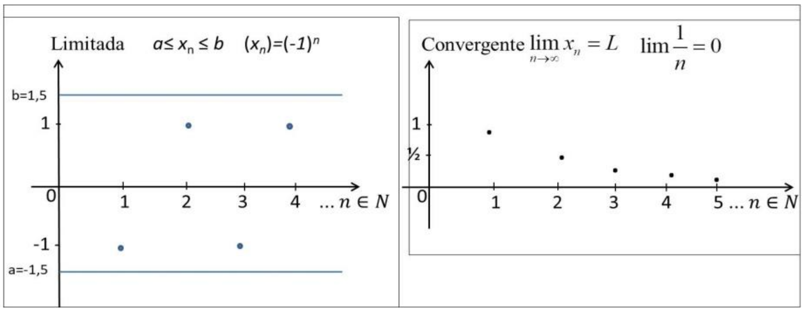


Figura 4 - Sequência convergente e sequência limitada
Fonte: Dados da pesquisa (2021).

Para retomar à problemática da situação da realidade em estudo, entretanto, era preciso retomar a definição de sequência limitada e identificar porque uma sequência limitada pode não ser convergente. Com esta finalidade foi apresentado o teorema “Toda sequência monótona e limitada é convergente.” (LIMA, 1982, p. 86).[2]

O entendimento de que a sequência do exemplo $(x_n)=(-1)^n$, sendo uma sequência limitada não é uma sequência convergente e, como o conceito de sequência convergente seria útil na matematização da situação da realidade em estudo, parece ter acontecido no decorrer de um diálogo entre professora e alunos.

P: Pessoal, vejam, então ficou claro que a sequência $(x_n)=(-1)^n$ *é limitada, certo?*
Vários alunos responderam: Sim
P: Mas ela é convergente? Sim ou não? Por quê?
A2: Professora, ela não é convergente, e eu acho que é porque ela não é monótona.
A4: Ela é limitada, mas não é convergente. Agora, porque ela não é convergente, eu sei dizer, mas acho que não lembro como mostra.
P: Isso, muito bem! A sequência é limitada, mas não é convergente e isso podemos mostrar

[2] É preciso observar que o teorema garante que se uma sequência é monótona e limitada, então ela é convergente. Entretanto, existem sequências que são limitadas e não são monótonas, mas são convergentes. Um exemplo clássico é $\frac{(-1)^n}{n}$.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a08

usando outro teorema.
[...]
P: Muito bem, então o que precisamos concluir aqui é que sequência limitada não é mesma coisa que sequência convergente. Também, que existem sequências que são limitadas, mas não são convergentes, ou seja, não possuem limite. Portanto, sequência limitada não é aquela que tem limite. Sequência que tem limite é chamada convergente, beleza?
Alguns alunos respondem afirmativamente com um sinal de positivo no chat!
P: Bem agora vamos voltar então a nossa situação. Temos uma sequência de temperaturas, certo?
A4: Temos as temperaturas nos diferentes anos.
A2: Essa é monótona professora.
P: Isso mesmo, ela é crescente. Mas e daí, ela é limitada?
(Audiovisual da aula transmitida via *Google Meet*, 2021).

O que se evidencia nessas discussões é um entendimento equivocado da palavra *limitada* no estudo de sequências. Ou seja, um representámem (a palavra *limitada*) com significados (interpretantes) distintos. Se fora do contexto da Matemática a palavra limitada é associada à existência de um limite, na Matemática o significado é sutilmente distinto: sequência limitada ($a \leq x_n \leq b$) tem um significado distinto de sequência convergente (que tem um limite $\lim_{n\to\infty} x_n = L$). Ter limite e ser limitada não são coisas equivalentes em Matemática. Ter *limitantes* (superior ou inferior), como é requerido de uma sequência dita *limitada*, não é equivalente a *ter um limite*, que é característica de uma sequência *convergente*. A representação (iii) dos alunos (Figura 3) indica o que significa sequência limitada, mas não esclarece o que é sequência convergente. Na representação da Figura 4, entretanto, parece se esclarecer para os alunos o significado de cada palavra.

Destacar esses aspectos semióticos foi relevante para favorecer a aprendizagem dos alunos e colaborou para que ultrapassassem a misconcepção gerada pelo uso de uma palavra em diferentes situações.

Considerando que, na situação da sequência das temperaturas globais, *ser limitada* é uma hipótese assumida, foi dado continuidade ao desenvolvimento da atividade de Modelagem Matemática conforme indica a Figura 2.

4.1.2 A construção do modelo matemático e o significado de sequência de Cauchy

Para a construção do modelo matemático visando determinar a temperatura global no ano de 2052[3], a hipótese de que se trata de uma sequência limitada de temperaturas, leva ao uso de dois resultados fundamentais necessários para determinar essa temperatura: (1) Toda

[3] Este é o ano em que, segundo as informações obtidas sobre a situação, a concentração de CO_2 atingirá seu limite máximo se mantidas as condições de emissão de gases (Figura 2).

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a08

sequência monótona e limitada é convergente; (2) Toda sequência de números reais que é convergente (no conjunto dos números reais) é também uma sequência de Cauchy.

Embora os alunos já tivessem tido contato com esses conceitos em outra disciplina do curso, deparar-se com o uso do conceito de sequência de Cauchy na atividade de Modelagem Matemática parecia algo não esperado por eles, conforme indica transcrição de parte da aula:

> *P: Pessoal, então vejam: se a sequência de temperaturas é limitada, então podemos encontrar um limitante (superior) que nesse caso refere-se ao valor de estabilidade da temperatura global. Para isso nós vamos usar o método de Ford-Walford.*
> *A1: Nós não estudamos esse método não, professora.*
> *P: Exatamente, é isso que vamos fazer agora! O que significa um valor de estabilidade das temperaturas?*
> *[...]*
> *P: Usando a notação da sequência de temperaturas, nós podemos escrever que a partir de um determinado ano i temos* $T_{i+1} \approx T_i$ *. Por quê?*
> *A2: A sequência é convergente né? Mas isso que a senhora falou é o quê?*
> *P: Eis a pergunta! Podemos dizer que vale* $T_{i+1} \approx T_i$*?*
> *Vários alunos: Ahmm!!*
> *P: Vocês entenderam que, na medida em que a temperatura se aproxima do valor de estabilidade, a diferença entre as temperaturas de um ano para outro fica menor? Mas, como podemos ter certeza de que isso acontece para essa sequência de temperaturas?*
> *A3, A2: Não sei mesmo, professora!*
> *P: Mas vocês lembram que estudaram sequência de Cauchy? O que é isso?*
> *A2: Acho que nós estudamos, mas não lembro bem. Dá pra usar isso aqui?*
> *P: Então vamos fazer assim: deixo 10min para vocês recorrerem aí ao seu material ou mesmo à internet para lembrar o que é sequência de Cauchy*
> (Audiovisual da aula transmitida via *Google Meet*, 2021).

No seguimento da aula era preciso formalizar duas informações: (1) a definição de sequência de Cauchy (Uma sequência (T_i) é uma sequência de Cauchy se, dado $\varepsilon > 0$, existe i_o um número natural, tal que se $m,n > i_o$ então $|T_m - T_n| < \varepsilon$); (2) o uso do teorema: Toda sequência convergente (no conjunto de números reais) é de Cauchy (LIMA, 1982).

O diálogo com os alunos então foi retomado:

> *P: Qual a relação da sequência de Cauchy com o nosso problema?*
> *A3: Ah, professora, nunca vimos isso em uma aplicação. É esse negócio de uma temperatura ficar perto da outra? (*O aluno parece se referir a $T_{i+1} \approx T_i$*).*
> *A4: E esse o significado então de ponto de estabilidade, dá para saber que ele existe porque a sequência é de Cauchy por causa do teorema que a senhora mostrou*
> (Audiovisual da aula transmitida via *Google Meet*, 2021).

Esse diálogo foi o meio pelo qual os alunos passaram a entender que, dada a sequência de temperaturas (T_i), a existência de um ponto de estabilidade é descrita pela condição $T_{i+1} \approx T_i$ para i suficientemente grande, de modo que esse valor de estabilidade T^* é dado pela condição $T_{i+1} \approx T_i \approx T^*$. Essa condição, portanto, passa a dar significado para a definição de sequência de Cauchy. Os sistemas semióticos que abrangem o conceito de sequência, de proximidade de termos da sequência e de convergência de uma sequência se ampliaram para esses alunos. A

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a08

relação entre o signo $|T_m - T_n| < \varepsilon$, já reconhecido pelos alunos, foi associada nesta atividade de Modelagem com uma sequência de temperaturas em que a diferença entre elas nos diferentes anos foi representada por $T_{i+1} \approx T_i \approx T^*$. Neste sentido, a manipulação desses signos associados a um mesmo objeto proporcionou novas interpretações.

O modelo matemático (R, A, M), neste caso dado por $T(t) = 17{,}34 - 3{,}4578\, e^{-0{,}0412(t-1978)}$ para $t \geq 1978$, representa como a situação da temperatura global e a Matemática foram intencionalmente articulados nessa atividade de Modelagem. Ao modelo também se associa uma representação em outro sistema semiótico (Figura 5) em que, o significado de *valor de estabilidade da temperatura* dá significado ao conceito de assíntota, também já conhecido pelos alunos de contextos de aprendizagem relativos às disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral. Assim, nesta atividade a gestão de diferentes representações para sequência de Cauchy, bem como o seu uso fora de um contexto puramente matemático favoreceu a apreensão do seu significado.

Figura 5- Uma representação do modelo construído
Fonte: Dados da Pesquisa (2021).

4.2 Cenário 2: A visualização geométrica em uma atividade de Modelagem Matemática

Os dados para este cenário foram obtidos do desenvolvimento de uma atividade de Modelagem Matemática por duas turmas do 9º ano do Ensino Fundamental com 35 alunos em cada turma no decorrer de 5 aulas de 50 minutos ministradas por um dos autores do presente artigo. Em cada aula os alunos foram organizados em pequenos grupos e orientados a investigar a situação, sugerida pelo professor, relativa aos tipos de amarração de cadarço de um tênis.

Nesta situação, o que se visa é determinar um percurso de comprimento mínimo em que o fio do cadarço, começando do primeiro furo de um lado, deve percorrer todos os outros furos

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a08

uma única vez, saindo no primeiro furo do outro lado. Usamos a hipótese simplificadora de que o calçado tem duas linhas paralelas verticais com seis furos distribuídos com igual distância. Além disso, vamos considerar três tipos de amarrações de cadarço expressos na Figura 6, caracterizados em Prentice (2012), e chamados de método americano, europeu e sapataria. Assim, determinar qual das três amarrações gasta menos cadarço significa explicar qual faz o menor percurso para ir de A até L, passando uma única vez por todos os outros furos.

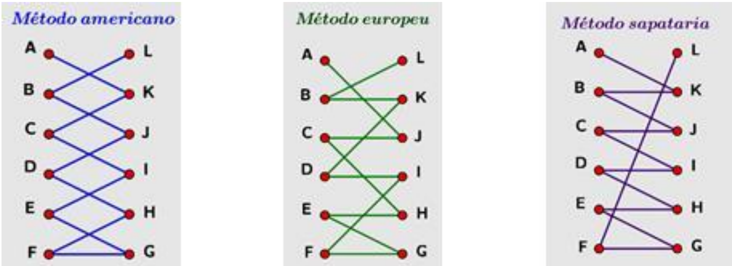


Figura 6- Representação de três métodos para amarrar cadarços
Fonte: Adaptado PRENTICE, 2012.

Uma forma de encaminhamento para a matematização dessa situação consiste em empregar transformações geométricas, refletindo a amarração do cadarço numa malha pontilhada. Como no nosso caso consideramos seis pares de furos, a malha tem seis linhas horizontais e doze linhas verticais de pontos que representam os orifícios do calçado por onde passa o cadarço. A distância entre as linhas verticais refere-se à distância entre os pares de furos do calçado e, aquela entre as linhas horizontais, à distância entre os furos de um mesmo lado. As duas primeiras linhas verticais correspondem ao percurso original do cadarço na amarração. A segunda e a terceira linha vertical correspondem à primeira reflexão, a terceira e a quarta linha vertical correspondem à segunda reflexão e assim por diante, como ilustra a Figura 7 considerando o método americano.

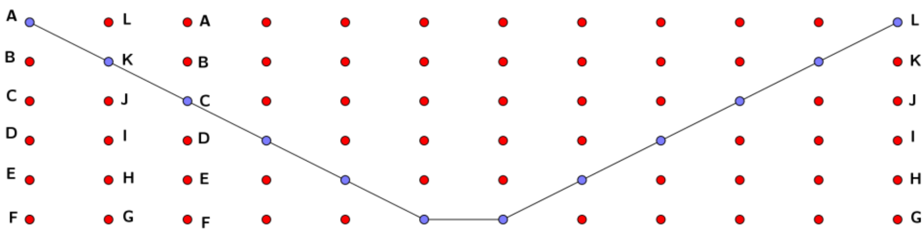


Figura 7- Malha de pontos que representam os furos do calçado
Fonte: Dados da pesquisa (2018).

Construindo simulações de percursos nesta malha é possível comparar os três métodos. Particularmente, comparando os percursos do método europeu e do americano, excluindo os segmentos da amarração que coincidem, sobram quatro triângulos congruentes entre si. Os dois lados de cada triângulo correspondem ao percurso pelo método europeu (A, J, C e C, H, D) e um lado pelo método americano (A, K, C e C, I, D) (Figura 8). Assim, usando a chamada

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a08

desigualdade triangular[4] conclui-se que o percurso do método americano é sempre menor que o do método europeu. De fato, usando *d*(*x*,*y*) como sendo a distância entre *x* e *y*, para os pontos da malha da Figura 8 e os lados dos triângulos construídos nessa malha, temos: o comprimento do cadarço pelo método americano é d(A, C) +d(C,D). Já pelo método europeu o comprimento do cadarço é [d(A,J) +d(J,C) +d(C,A) +d(H,D)]. Pela desigualdade triangular, d(A,C) < d(A,J) +d(J,C) e também d(C,D) < d(C,A) +d(H,D).

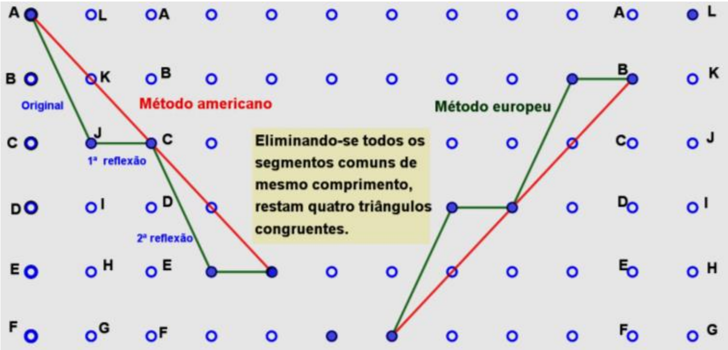


Figura 8 - Triângulos obtidos eliminando os segmentos coincidentes
Fonte: Dados da pesquisa (2018).

4.2.1 A interlocução da Modelagem com a Semiótica identificada nas ações dos alunos

Na sala de aula com os alunos a atividade se iniciou com a leitura de um texto (PRENTICE, 2012) que apresenta os três métodos de amarração do cadarço (europeu, americano e sapataria). A partir de uma explicação do professor relativamente à construção da malha pontilhada e do significado do teorema relativo à desigualdade triangular, os alunos, reunidos em grupos, iniciaram o trabalho de busca de uma resposta para o problema: Qual método de amarração utiliza menor extensão de cadarço?

Dirigimos nosso processo analítico para o uso de signos e suas representações semióticas na construção de uma resposta para esse problema. Particularmente, no presente artigo selecionamos três momentos específicos do desenvolvimento da atividade de Modelagem realizado por um grupo, buscando caracterizar, em cada momento, como e quais representações semióticas foram ativadas e como se vinculam à obtenção de uma resposta para o problema. A escolha para apresentar esses momentos decorre da identificação de que para os alunos desse grupo a apreensão de conceitos de Geometria, que proporcionaram a construção de uma resposta para o problema, parece seguir três estágios em que as representações associadas a diferentes sistemas semióticos foram se sofisticando. A seguir descrevemos esses

[4] Propriedade geométrica que estabelece que: A soma dos comprimentos de dois lados de um triângulo sempre excede o comprimento do terceiro lado, a menos que os três lados estejam alinhados.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a08

três momentos.

4.2.2 A compreensão do problema revelada em um sistema semiótico verbal e gestual

Referimo-nos aqui ao momento em que os alunos do grupo utilizaram uma imagem impressa em uma folha de papel A4 para buscar a explicação de qual método de amarração economiza mais cadarço (Figura 9). O momento registra uma conversa em que uma aluna do grupo recorre a recursos semióticos verbais, gestuais, pictóricos ali disponíveis para explicar ao professor porque um método é mais econômico do que outro.


Figura 9 - O entedimento do problema expresso em um sitema semiótico particular
Fonte: Dados da pesquisa (2018).

> *Aluna: Ela dá menos voltas, ó.* (indicando com o dedo a amarração que gasta menos cadarço ilustrada na Figura 9). *Aí sobra mais cadarço.*
> *Professor: E em qual sobra menos cadarço?*
> *Aluna: É essa aqui* (referindo-se ao percurso pelo método europeu).
> *Professor: E por que você acha que ela gasta mais cadarço?*
> *Aluna: É porque ela faz bastante voltas, ó. Ela faz bastante ziguezague, ó. Ela vai prá lá, ela volta, ela passa por baixo, ó. Entendeu?* (indicando no desenho da Figura 9 o modo como a amarração gasta mais cadarço)
> (Transcrição da gravação da aula)

Esse momento revela uma identificação e uma exploração ingênua do problema em que se dá a observação e a descrição informal de cada método de amarração. Isso remete a um estágio inicial do processo de visualização geométrica, pois o que caracteriza a ação da aluna é o uso de uma descrição puramente verbal e gestual para explicar a minimalidade de um percurso em relação a outro num método de amarração. O uso, por exemplo, da expressão *ziguezague* para indicar que o método que realiza mais idas e voltas *gasta mais cadarço* é um modo de abordar o problema num sistema semiótico que nada tem a ver com a simbolização matemática. Esse momento, portanto, se caracteriza pela ausência de representações incluídas em um sistema semiótico-geométrico.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a08

4.2.3 A elaboração de uma imagem esquematizada para resolver o problema

Efetuadas as medidas e apresentada uma explicação para a questão de interesse, os alunos foram convidados a fazer simplificações e a construir um modelo que simule o percurso do cadarço em cada método. Utilizando as medidas já obtidas, construíram, em uma malha de pontos, uma representação plana do percurso do cadarço em cada método (Figura 10). O momento que aqui descrevemos indica como os alunos desse grupo analisaram o percurso de cada método de amarração na representação feita na malha. A conversa com um aluno revela que ele mobiliza elementos semióticos da imagem esquematizada (Figura 10) para explicar por que um método é mais econômico do que o outro.

Figura 10 - O uso de uma representação – a malha de pontos- para buscar a solução do problema
Fonte: Dados da pesquisa (2018)

> *Professor: Ah! O que você chama de curvinhass são esses ângulos formados aqui? Então quanto mais ângulos, mais longo é o comprimento da amarração, é isso?*
> *Aluno: É, eu acho que sim, porque o mais curto é o que tem menos..*
> *Professor: Quantos desses ângulos têm no método americano?*
> *Aluno: São dois, não são? Porque vem... vem... e vem assim na diagonal, depois tem esse pedacinho aqui na horizontal e volta na diagonal até o fim. Então são dois só, mesmo.* (acompanhando sua fala com gestos apontando no desenho da Figura 10).
> *Professor: E os outros dois métodos, têm quantos desses ângulos cada um?*
> *Aluno:* [...] (conta os ângulos no desenhos da Figura 10). *O europeu tem 10 e o da sapataria também tem dez.*
> *Professor: Então isso não vale, tá vendo?*
> *Aluno:Mas assim, por causa dos ângulos, o método europeu não segue em linha reta, vai formando triângulos, ó. Enquanto o americano vai direto, nesse lado aqui, ó, do triângulo, o método europeu vai por dois lados que esse ângulo, aqui, ó. (*empregando as palavras reta, direto, triângulo, lados e ângulo para descrever os gestos de apontar e movimentar a mão para indicar a direção do percurso do cadarço).
> (Transcrição da gravação da aula)

Nesse momento os alunos utilizaram uma imagem esquematizada para entender e explicar o problema de modo que ela lhes permitiu expor o problema verbalmente com a ajuda de gestos que também fazem referência às ideias geométricas subjacentes ao problema. Ele identifica, por exemplo, que o percurso com mais ângulos e que forma mais triângulos *gasta mais cadarço* e utiliza termos como *diagonal, horizontal* e *vertical*, sinalizando um entendimento associado a uma representação em sistema semiótico que já inclui informações matemáticas. Concluímos que esse momento constitui um estágio intermediário e se caracteriza

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a08

pelo uso de representações que sinalizam uma transição, uma transferência de informações, da comunicação puramente verbal e gestual para a visualização de propriedades geométricas.

4.2.4 Uma construção que viabiliza a visualização geométrica para a solução do problema

A partir da análise dos percursos dos cadarços na malha de pontos, os alunos passaram para a atividade de *matematização* propriamente dita do problema, iniciando a investigação por meio de métodos experimentais e analíticos para a obtenção do percurso de comprimento mínimo usando linguagem matemática. O método experimental, nesse caso, consistiu em efetuar as medidas dos segmentos na malha e relacioná-las aos ângulos que esses segmentos formam entre si. Já o método analítico consiste em eliminar os segmentos coincidentes e reorganizar os restantes com o objetivo de compará-los, construindo triângulos. Nesse caso, os alunos utilizaram a propriedade geométrica da desigualdade triangular para justificar por que um método de amarração é mais econômico do que outro. O momento aqui apresentado registra a interpretação da solução e uma explicação de um aluno para o professor do porquê o método americano gasta menos cadarço na amarração do tênis usando as imagens mostradas na Figura 11.

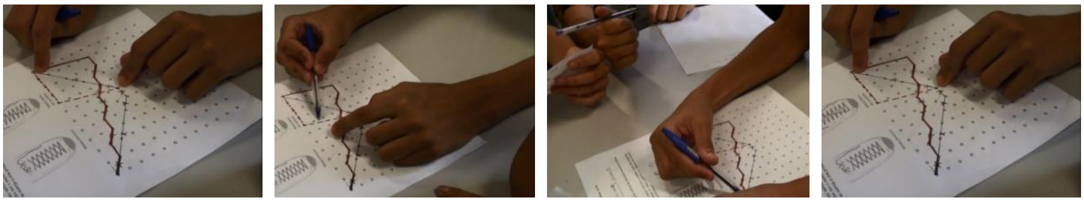


Figura 11- Um aluno explica a minimalidade do método americano utilizando a desigualdade triangular
Fonte: Dados da Pesquisa (2018)

> *Professor: E por que usando o método europeu o percurso é maior?*
> *Aluno: Porque esses dois lados (*mostrando para a imagem da Figura 10*) que é o método europeu... somando os dois fica maior do que o lado do método americano.*
> *Aluno: E também o método americano é menor porque sempre a reta é o caminho mais curto.*
> *Professor: É, mas explica isso aí com seu desenho.*
> *Aluno: É porque essa reta aqui é o percurso que..., é o tamanho da linha... da amarração americana como se estivesse estendida assim... e essa linha outra é a amarração do europeu como se estivesse estendida. Então dá prá ver que esse é maior* (indicando com o dedo e com a caneta o suas afirmativas no desenho da Figura 11).
> (Transcrição da gravação da aula)

Os dados indicam que, nesse momento, os alunos utilizaram explicitamente representações de signos que estão no lugar de objetos matemáticos, como triângulos, e medidas de lados, visualizando uma propriedade que extrai uma informação do problema em estudo. Ou seja, o que se dá nesse momento é uma visualização geométrica da desigualdade triangular e

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a08

que mobiliza representações próprias de um sistema semiótico que inclui signos e conceitos matemáticos.

A análise destes três momentos relativos a ações dos alunos na atividade de Modelagem Matemática sinaliza que a amarração do cadarço de um tênis realizada de modo a restar mais ou menos cadarço para o laço viabilizou aos alunos realizar transformações de representações semióticas. Ou seja, nessa atividade, a construção da resposta para o problema passou pela construção e mobilização de representações, incluindo a construção de imagens esquematizadas do problema da realidade que permitiram a transição de uma descrição verbal, gestual ou pictórica para uma visualização geométrica, em que a exploração de propriedades, conceitos e de um teorema (a desigualdade triangular) ativou um sistema semiótico próprio de um contexto matemático.

5 Considerações finais

A análise da abordagem de conteúdos matemáticos em atividades de Modelagem Matemática explorando a interlocução com a semiótica nos leva a caracterizar uma interface didática entre Modelagem e Semiótica. Por um lado, essa interface se vincula à situação epistemológica particular dos objetos matemáticos que só se tornam presentes por meio de signos. Por outro lado, a Modelagem Matemática tem características de uma organização pedagógica que não se desvincula de uma variabilidade de signos e de uma eminente atividade semiótica.

Se a aprendizagem se manifesta por modos de expressão, como sugere D'Amore (2007), o que os alunos expressam na ativação e no uso de signos e representações diversificadas relativamente aos conteúdos matemáticos que emergiram nas atividades de Modelagem Matemática são sinais de apreensão conceitual e procedimental.

No Cenário 1, o significado de sequência de Cauchy como aquela que satisfaz a condição $|T_m-T_n| < \mathcal{E}$ para $m, n > i_0$ e como isso se associa à construção da solução para o problema da temperatura global, foi sendo explorado por meio de diferentes representações e interpretações que, embora não reivindicassem a *existência* de uma sequência de Cauchy, possibilitaram aos alunos usá-la e associá-la a um *fato real*. Ao mesmo tempo em que esse fato real – a temperatura média da terra no decorrer do tempo – subsidiou a significação de sequência de Cauchy, o uso desse conceito foi essencial para que uma solução para o problema fosse construída.

Também no Cenário 1, o processo adaptativo requerido dos alunos para lidar com um

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a08

objeto matemático em situações distintas, referido por Santi e Sbaragli (2008), foi requerido dos alunos na atividade de Modelagem Matemática para superar uma misconcepção em relação ao significado de sequência limitada. Neste caso, aprender a diferença entre sequência limitada e sequência convergente foi um processo que se configurou na medida em que os alunos olharam e lidaram com diferentes representações de sequências. *Desfazer* um pensamento decorrente de uma premissa incorreta de que a sequência limitada é sempre aquela que tem limite, sem usar adequadamente teoremas que estabelecem as condições adequadas para isso, foi consequência da atividade semiótica dos alunos proporcionada pela Modelagem Matemática de uma situação da realidade.

A natureza semiótica da aprendizagem em Matemática, sugerida por D'Amore, Pinilla e Iori (2015), se evidenciou na atividade de Modelagem Matemática relativa ao Cenário 2. Neste caso, a resolução do problema geométrico de minimizar um percurso (o trajeto do cadarço de um calçado) foi acontecendo por meio de signos e representações em diferentes sistemas semióticos, de modo que se caracterizaram três estágios relativos ao uso de signos e sua associação com a construção da solução para o problema: uso de signos de um sistema gestual e verbal para encaminhar uma solução; o uso de representações que sinalizam uma transição da comunicação puramente verbal e gestual para a visualização de propriedades geométricas associadas à solução; e, por fim, o uso de um sistema simbólico formal próprio de um contexto matemático para propor uma solução para o problema.

Assim, as atividades de Modelagem Matemática nos dois cenários proporcionaram a ativação de diferentes facetas do significado de conceitos matemáticos de modo que o que pode ter sido aprendido pelos alunos decorreu da intervenção e da utilização de signos. Ou seja, como sugere Duval (2011), a aprendizagem é sempre semiótica e aprender conceitos, algoritmos, estratégias e argumentos não é independente de lidar com uma diversidade de situações em que aquilo que precisa ser aprendido se torna presente. Neste sentido, a Modelagem Matemática, seja alinhada com a corrente científico humanista, seja em sintonia com a corrente pragmática, pode ser um meio para o enfrentamento dos problemas que D'Amore (2007) caracteriza como *puramente didáticos* que precisam ser enfrentados.

Caracterizamos, portanto, uma perspectiva *didático-semiótica* para a Modelagem Matemática que implica em considerar que, na sala de aula, sua relação com a aprendizagem não se desvincula de uma interface em que signos, de diferentes naturezas e provenientes de diferentes sistemas semióticos, se articulam para resolver um problema cuja origem não é, em geral, a própria Matemática.

A caracterização dessa perspectiva *didático-semiótica* por um lado, se apoia em

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a08

D’Amore (2007), ao sugerir que algo pode ser *didático* se o ensino é objeto de interesse e, inspirados em Wenger (1998), podemos dizer que o ensino precisa ser estruturado de modo a provocar aprendizagem. Por outro lado, em atividades de Modelagem Matemática, esta aprendizagem está vinculada à investigação de situações da realidade, que, embora agregue aspectos cognitivos, sociais e culturais e que extrapolam o domínio da Matemática, não é independente da manipulação e da produção de signos que se dá no interior de diferentes sistemas semióticos. De fato, o modelo matemático constituído pela tripla (R, A, M) não tem significado por si só, mas seu significado para alguém (um aluno ou um professor, por exemplo) se constitui relativamente a uma situação da realidade e é resultado de uma atividade semiótica. Assim, atividades de Modelagem Matemática na sala de aula sob esta perspectiva podem fomentar condições para a aprendizagem levando em consideração a natureza epistemológica do que precisa ser aprendido.

Referências

ALMEIDA, L. M. W. Considerations on the use of mathematics in modeling activities. **ZDM**, v. 50, n.1, p. 19–30, 2018.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. A. P. A Ação dos Signos e o Conhecimento dos Alunos em Atividades de Modelagem Matemática. **Bolema**, Rio Claro, v. 31, n. 57, p. 202-219, 2017.

ARAUJO, J. L. Um estudo sobre planos de atividades de modelagem matemática. **REnCiMa**, São Paulo. v. 12, n. 2, p. 1-25, 2021.

BLUM, W. Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do? *In*: CHO, S. J. (ed.). **The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education**: Intellectual and Attitudinal Changes. New York: Springer, 2015. p. 73–96.

BRITO, D. S.; ALMEIDA, L. M. W. Práticas de modelagem matemática e dimensões da aprendizagem da geometria. **Revista Actualidades Investigativas en Educación,** San Pedro, v. 21, n. 1, p. 1-29, 2021.

CUNHA, A. G. **Dicionário etimológico da língua portuguesa**. 3 ed. Rio de Janeiro: Lexikon, 2007.

D’AMORE, B.; PINILLA, M. I. F.; IORI, M. **Primeiros elementos de semiótica**: sua presença e sua importância no processo de ensino-aprendizagem da matemática. São Paulo: Editora da Livraria da Física, 2015. 184p.

D’AMORE, B. **Elementos de didática da matemática**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007.

DUVAL, R. **Ver e ensinar a Matemática de outra forma**: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representação semióticas. São Paulo: PROEM, 2011. 160p.

ECO, H. **Tratado geral de semiótica**. São Paulo: Perspectiva, 2003.

ERLWANGER, S. H. Case studies of childrenn’s conceptions of mathematics. **Journal of Children’s Mathematical Behaviour,** v.1, n. 3, p.157-283, 1975.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a08

ERNEST, P. A semiotic perspective of mathematical activity: The case of number. **Educational Studies in Mathematics**, v. 61, p. 67 – 101, 2006.

HOFFMANN, M. H. G. What is a “semiotic perspective”, and what could it be? Some comments on the contributions to this special issue. **Educational Studies in Mathematics**, v. 61, p. 279-291, 2006.

KAISER, G. Mathematical Modelling and Applications in Education. *In*: LERMAN, S. (ed.). **Encyclopedia of Mathematics Education**. Londres: Springer, 2020. p. 553-561.

LIMA, E. L. **Curso de Análise**. Rio de Janeiro: IMPA, 1982.

MEYER, J. F. A Modelagem Matemática: O desafio de se ‘fazer’ a Matemática da necessidade. **Com a Palavra o Professor**, Vitória da Conquista, v.5, n.11, p. 140-149, 2020.

NESHER, P. Towards an instructional theory: The role of learners’ misconceptions for the learning of mathematics. **For the Learning of Mathematics**, v. 7, n. 3 p. 33-39, 1987.

NISS, M.; BLUM, W. **The Learning and Teaching of Mathematical Modelling**. London: Routledge, 2020.

NISS, M. Models and modelling in mathematics education. **European Mathematica Society. Newsletter**, v. 86, p. 49-52, 2012.

OTTE, M. F.; BARROS, L. G. X. What is Mathematics, Really? Who Wants to Know?. **Bolema**, Rio Claro, v. 29, n. 52, p. 756-772, ago. 2015.

PANERO, M.; ARZARELLO, F.; SABENA, C. The Mathematical Work with the Derivative of a Function: Teachers’ Practices with the Idea of “Generic”. **Bolema**, Rio Claro v. 30, n. 54, p. 265–286, 2016.

PEIRCE, C. S. **Semiótica**. 3. ed. São Paulo: Perspectiva, 2005. 340 p.

POLLAK, H. O. The Place of Mathematical Modelling in the System of Mathematics Education: Perspective and Prospect. *In*: STILLMAN, G.; BLUM, W.; BIEMBENGUT, M. S. (ed.). **Mathematical Modelling in Education Research and Practice**: cultural, social and cognitive influences. New York: Springer, 2015. p. 265-276.

PRENTICE, W. **Fisioterapia na prática esportiva**: Uma abordagem baseada em competências. 14. ed. Porto Alegre: AMGH, 2012.

RADFORD, L.; SCHUBRING, G.; SEEGER, F. The ubiquitousness of signs. *In*: RADFORD, L.; SCHUBRING, G.; SEEGER, F. (org.). **Semiotics in Mathematics Education**: Epistemology, History, Classroom, and Culture. Netherlands: Sense Publishers, 2008. p. 7-10.

SANTI, G.; SBARAGLI, S. Misconceptions and semiotic: a comparision. *In:* Conference of Five Cities: Nicosia, Bologna, Palermo, Locarno. Nicosia: Univ. of Cyprus. **Proceedings of Conference of Five Cities: Nicosia, Bologna, Palermo, Locarno**. Nicosia. 2008. p. 57-72.

SANTAELLA, L. **A Teoria Geral dos Signos**: como as linguagens significam as coisas. 2. reimpr. da 1. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2008. 154 p.

STEINBRING, H. What makes a sign a Mathematical Sign?: an epistemological perspective on mathematical interaction. **Educational Studies in Mathematics**, v. 61, p. 133-162, 2006.

SWAN, M.; TURNER, R.; YOON, C.; MULLER, E. The roles of modelling in learning mathematics.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a08

In: BLUM, W.; GALBRAITH, P.; NISS, M. (ed.). **Modelling and applications in mathematics education**: The 14th ICMI Study . New York: Springer, 2007. p. 275-284.

WESS, R.; SILLER, H. S; KLOCK, H; GREEFRATH, G. **Measuring professional Competence for the Teaching of Mathematical Modelling**: a test instrument. 2021. DOI: https://doi.org/ 10.1007/978-3-030-78071-5.

WENGER, E. **Communities of practice**: Learning, meaning an identity. Cambridge: Cambridge University Press, 1998.

WHITSON, J.A. Cognition as semiotic process: from situaded mediation to critical reflective transcendence. *In*: KIRSHNER, D; WHITSON, J. A (ed.). **Situaded cognition**: social, semiotic and psychological perspectives. Mahweh: Lawrence Erlbaun Associates, 1997.

Submetido em 23 de Agosto de 2021.
Aprovado em 10 de Dezembro de 2021.