

Profundización en el trabajo geométrico de futuros profesores en entornos tecnológicos y de lápiz y papel

Deepening the geometric work of future teachers in technological environments and pencil and paper

Carolina **Henríquez Rivas***

 ORCID iD 0000-0002-4869-828X

Alain **Kuzniak****

 ORCID iD 0000-0001-8170-3530

Resumen

Este artículo presenta los resultados de un estudio de caso sobre el trabajo geométrico desarrollado por estudiantes en formación inicial de pedagogía en matemáticas (futuros profesores). Proponemos una tarea geométrica con uso de lápiz y papel, y una tarea en versión adaptada para ambientes tecnológicos. Los análisis se sustentan en el marco del Espacio de Trabajo Matemático (ETM), que permite profundizar en los procesos cognitivos y aspectos epistemológicos desarrollados en el trabajo. Los resultados muestran diferencias entre el ETM previsto y ETM personal de los futuros profesores participantes y el privilegio de fases de trabajo matemático específicas. Con ello, aportamos con un cuerpo de conocimiento sobre el análisis del trabajo geométrico y, con un marco teórico y metodológico que permite profundizar en el trabajo matemático de personas que resuelven tareas específicas.

Palabras clave: Geometría. Futuro Profesor. Artefactos. Visualización. Espacio de Trabajo Matemático.

Abstract

This article presents the results of a case study on the geometric work developed by prospective mathematics teachers. We first propose a geometrical task in a pencil-and-paper environment, and then its adaptation for a digital environment. The analyses are based on the framework of the Mathematical Work Space (MWS), which allows to focus on cognitive processes and epistemological aspects developed in the work. The findings show differences between the intended and the personal MWS of prospective mathematics teachers and the specific phases that they prioritize within the mathematical work. This research contributes to the enrichment of knowledge on geometric work thanks to a theoretical and methodological framework that allows an in-depth analysis of the mathematical work of individuals performing specific geometric tasks.

Keywords: Geometry. Prospective mathematics teachers. Artifacts. Visualization. Mathematical Work Space.

* Doctora en Didáctica de la Matemática, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (PUCV). Académica Facultad de Ciencias Básicas, Departamento de Matemática, Física y Estadística, Universidad Católica del Maule (UCM), Talca, Región del Maule, Chile. E-mail: chenriquezr@ucm.cl.

** PHD en Didactique des Mathématiques, Université Paris Diderot (UPD). Professeur de Laboratoire de Didactique André Revuz (Mathematics and Physics Education), Department of Mathematics, University of Paris (UP), Paris, France. E-mail: alain.kuzniak@univ-paris-diderot.fr.

1 Introducción

En un *survey* presentado sobre la investigación en educación en geometría, a partir de 2008, Sinclair *et al.* (2017) declaran siete focos principales de investigación, dentro de los que se destacan: el uso de teorías en la investigación, el rol de las tecnologías digitales, la enseñanza, el aprendizaje del proceso de prueba, entre otros. Con relación al desarrollo de teorías enfocadas en la enseñanza y aprendizaje de la geometría, los autores mencionan enfoques como la teoría cognitiva sobre la aprehensión figural de Duval (1995, 2005), la teoría Espacio de Trabajo Matemático – ETM – (KUZNIAK, 2011, 2018), entre otros.

La presente investigación está centrada en analizar el trabajo geométrico desarrollado en la formación inicial del profesorado de matemáticas, al resolver tareas en un entorno tecnológico digital y con lápiz y papel. Para el estudio del trabajo geométrico, consideramos la teoría de los ETM, cuyo objetivo es comprender y desarrollar el trabajo a través la articulación entre dos niveles: uno epistemológico y otro cognitivo (KUZNIAK, 2011), a fin de analizar la actividad matemática del individuo que resuelve problemas (KUZNIAK *et al.*, 2016b; GÓMEZ-CHACÓN *et al.*, 2016). Esta perspectiva se provee de otros marcos para desarrollar los análisis, lo que permite situar y explicitar la naturaleza del trabajo geométrico en diversos contextos educativos y, a su vez estudiar la dinámica del trabajo basado en diversas dimensiones (KUZNIAK, 2018).

Para ahondar en los procesos cognitivos que permiten estudiar cómo los conceptos y propiedades geométricas se relacionan y coordinan con las figuras, Duval (1995) introduce las nociones de aprehensión discursiva y operativa. Duval (2005) enfatiza en el proceso de visualización y los razonamientos involucrados, y caracteriza diversas formas de visualizar dependiendo del trabajo con las figuras y las actividades que se proponen a los estudiantes.

En la perspectiva del uso de tecnologías en educación matemática, Hölzl (1995) aborda el proceso de verificación en geometría dado por el uso del arrastre, y discute respecto al trabajo matemático y las dificultades implicadas. Arzarello *et al.* (2012) abordan la dimensión experimental con relación al uso de herramientas informáticas y examinan cómo esta nueva tensión dinámica regula el trabajo de los estudiantes. Drijvers *et al.* (2016) plantean la necesidad de desarrollo profesional de los docentes para la integración de las tecnologías en su enseñanza. En cuanto al rol de las tecnologías en educación en geometría, Sinclair *et al.* (2017) señalan que aún no hay suficiente investigación sobre sus efectos y declaran tareas pendientes, como la formación docente y el desarrollo profesional.

En cuanto a los trabajos desarrollados en el marco del ETM en geometría, en Chile, se encuentra el de Montoya-Delgadillo (2014) quien se centra en las rupturas en la enseñanza y aprendizaje de la demostración en la formación inicial docente. El trabajo de Henríquez-Rivas y Montoya-Delgadillo (2015) analiza el efecto de un entorno tecnológico en el trabajo geométrico de futuros profesores y propone el marco del ETM como sustento para estructurar e implementar actividades para la formación. Henríquez-Rivas y Montoya-Delgadillo (2016) exploran la articulación en geometría de los enfoques sintético y analítico con profesores de matemática de educación secundaria. En este mismo contexto, Guerrero Ortiz y Henríquez Rivas (2017) muestran una forma de abordar la enseñanza y aprendizaje de la parábola a partir de sus características sintéticas con apoyo en la tecnología. Por ello, una investigación que analiza el trabajo geométrico de estudiantes en formación inicial de profesorado contribuye a entender las divergencias y singularidades en la actividad al resolver tareas propuestas en entornos tecnológicos y de lápiz y papel, y tomar consideraciones para su enseñanza.

A partir de lo planteado anteriormente, y dada la relevancia asociada con el trabajo a nivel formativo de futuros profesores al resolver tareas con y sin uso de tecnología, nos hemos trazado como objetivo de investigación: caracterizar el trabajo matemático de tres futuros profesores al resolver dos tareas geométricas formuladas para el uso de un entorno tecnológico y otra de lápiz y papel. Esta caracterización se realiza en el contexto de la formación inicial docente de matemáticas de Educación Media. Los resultados nos permiten discutir sobre las singularidades del trabajo matemático y ofrecer orientaciones teóricas y metodológicas para los análisis en diversos contextos formativos de la educación en geometría.

2 Marco Teórico

2.1 ETM: un marco teórico y metodológico

Para el análisis del trabajo matemático consideramos el marco del *Espacio de Trabajo Matemático* (ETM), que ha sido desarrollado como un modelo para describir la naturaleza del trabajo matemático de las personas cuando se enfrentan a problemas matemáticos (KUZNIAK *et al.*, 2016a). El ETM se considera como una herramienta analítica y metodológica que permite describir, en profundidad, las singularidades del trabajo matemático del sujeto y la identificación de los caminos que emergen en el espacio de trabajo al resolver una tarea específica (KUZNIAK *et al.*, 2016b; GÓMEZ-CHACÓN *et al.*, 2016).

El ETM se articula por dos planos: epistemológico y cognitivo (KUZNIAK, 2011). El plano epistemológico, organizado de acuerdo con criterios puramente matemáticos, lo conforman tres componentes: *representamen*, *artefactos* y *referencial*. En estrecha relación con los componentes del nivel epistemológico y centrado en el sujeto, el plano cognitivo lo conforman las componentes: *visualización*, *construcción* y *prueba*. Estas componentes se articulan mediante las génesis: *semiótica*, *instrumental* y *discursiva*, para permitir situar y explicitar la naturaleza del trabajo matemático en diversos contextos educativos e institucionales. En el ETM, la investigación se basa comprender la dinámica del trabajo matemático mediante el papel de las génesis y sus interacciones (KUZNIAK, 2018).

La articulación entre representamen y visualización se produce por la génesis semiótica, sustentada en la concepción cognitiva de Duval (1995). La idea de representamen se relaciona con la noción signo de Peirce (1978), el cual se remite a un objeto matemático según distintas formas en función de las significaciones de su utilizador, llamado aquí proceso de visualización.

La articulación entre artefacto y construcción está dada por la génesis instrumental que transforma artefactos en instrumentos. Rabardel (1995) distingue artefactos materiales o sistemas simbólicos empleados como un medio para la acción. El proceso de construcción se determina por los instrumentos utilizados.

La génesis discursiva articula el proceso de prueba con el referencial. El referencial remite a elementos matemáticos (propiedades y definiciones) del dominio en juego (geometría, álgebra, probabilidad etc.), en relación con un razonamiento discursivo de prueba. Aquí intervienen los razonamientos discursivos para formular hipótesis, conjeturas, argumentaciones, enunciar contraejemplos o demostraciones, apoyados en propiedades y definiciones matemáticas (KUZNIAK *et al.*, 2016b).

Para analizar diferentes entradas al ETM y la articulación de los planos mediante las génesis especificando las componentes en juego, se utiliza la denominación *circulación* entre las componentes de los planos (MONTROYA-DELGADILLO; MENA-LORCA; MENA-LORCA, 2014; HENRÍQUEZ-RIVAS; MONTROYA-DELGADILLO, 2015, 2016).

En el ETM, la noción de *planos verticales* está dada por las interacciones entre dos génesis y sus componentes (KUZNIAK; RICHARD, 2014). El plano [Sem-Ins], se asocia con las génesis semiótica e instrumental, cuando los artefactos se usan para construir bajo ciertas condiciones, explorar representaciones o descubrir nuevas propiedades, sin un propósito de validación. El plano [Ins-Dis], se asocia con las génesis instrumental y discursiva, cuando la prueba se basa en una experimentación o exploración y emplea un artefacto, o bien en la justificación de una construcción. El plano [Sem-Dis], se asocia con las génesis semiótica y

discursiva, cuando una prueba se coordina con el proceso de visualización de objetos representados, donde puede variar el estatus del razonamiento involucrado.

La relación entre los planos, componentes y génesis, se muestra en la Figura 1.

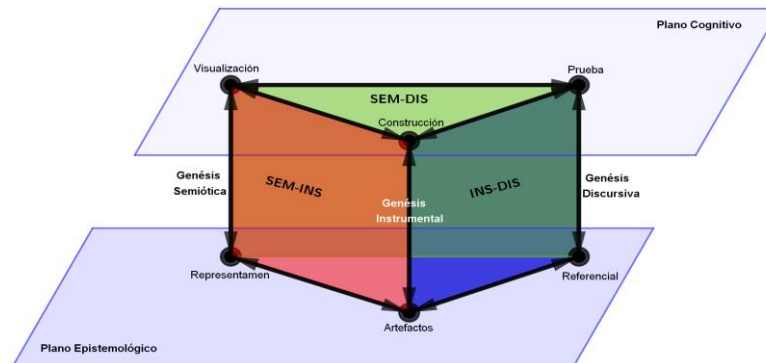


Figura 1 – Diagrama del ETM, sus planos, componentes y génesis
Fuente: elaborado por los autores, adaptado de Kuzniak y Richard (2014, p. 11)

El modelo del ETM distingue tres tipos (GÓMEZ-CHACÓN *et al.*, 2016): *ETM de referencia*, *ETM idóneo* y *ETM personal*. Esta investigación analiza el *ETM personal* de futuros profesores, que relaciona los conocimientos matemáticos utilizados por un individuo al resolver una tarea dada.

2.2 Espacio de Trabajo Geométrico (ETM_G)

El ETM_G alude al trabajo matemático focalizado en el dominio de la geometría, tomando en consideración las particularidades epistemológicas y cognitivas correspondientes (HOUEMENT; KUZNIAK, 1999, 2006; KUZNIAK, 2011; GÓMEZ-CHACÓN *et al.*, 2016). La génesis semiótica en el ETM_G se refiere a los procesos semióticos asociados al pensamiento visual que opera en geometría. Consideramos el proceso de visualización desarrollado por Duval (1999, 2005), el cual se relaciona con las actividades semióticas sobre figuras geométricas (o gráficos cartesianos) y su coordinación con razonamientos discursivos.

Duval (2016) distingue dos niveles de operaciones diferentes e independientes, que pueden funcionar según las operaciones con las figuras y cómo se movilizan sus propiedades: visualización *icónica* y visualización *no-icónica*. Estos niveles se relacionan con cuatro formas de ver: botánico, agrimensor-geómetra, constructor e inventor-artesano. La visualización icónica se caracteriza por el reconocimiento, o bien, por la comparación con un modelo tipo de formas. La visualización no-icónica se caracteriza por la introducción de trazos reorganizadores, desarrollo de secuencias de operaciones, construcción con uso de instrumentos, la descomposición heurística de una figura y la deconstrucción dimensional en

unidades figurales de un número de dimensiones inferior al de la figura inicial realizada en coordinación con la actividad discursiva (DUVAL, 2005).

Para profundizar en el uso de artefactos materiales de tipo tecnológicos (en adelante llamaremos artefacto tecnológico) examinamos la perspectiva cognitiva sobre sistemas de geometría dinámica (ARZARELLO *et al.*, 2002, 2012), la cual identifica diferentes funciones cognitivas asociados con la práctica de arrastre. Arzarello *et al.* (2002) destacan que la práctica de arrastre ofrece una retroalimentación a la fase de descubrimiento y, de esta manera, es un apoyo al proceso de prueba, y distinguen dos tipologías diferentes: *procesos ascendentes*, descrito desde el dibujo a la teoría, a fin de explorar libremente una situación, buscar regularidades, invariantes etc.; *procesos descendentes*, descrito desde la teoría hasta dibujos, a fin de validar o refutar conjeturas, para comprobar las propiedades etc.

Para profundizar en el proceso de prueba, consideramos la concepción de Balacheff (1987), quien distingue pruebas *pragmáticas* e *intelectuales*. Las pruebas pragmáticas son aquellas que recurren a la acción sobre los objetos y suponen la posibilidad de tener acceso a la realización material de una tarea para justificar afirmaciones sobre ellos. Las pruebas intelectuales son aquellas que recurren a la formulación de propiedades y relaciones entre los objetos en cuestión (BALACHEFF, 1987). Estas tipologías de prueba se diferencian en función de la naturaleza de los conocimientos que intervienen (conocimiento práctico *versus* conocimiento como objeto), así como del lenguaje (RICHARD, 2004).

3 Metodología

3.1 Características generales y selección de casos

Con el propósito de caracterizar el ETM personal de futuros profesores (FP) en formación inicial docente de matemáticas de Educación Media (12 a 17 años), cuando resuelven tareas geométricas formuladas para el uso de un entorno tecnológico digital y de lápiz y papel, proponemos un diseño de investigación cualitativa. Específicamente, para comprender cómo se realiza en trabajo geométrico, se utiliza el *estudio de caso* como estrategia de diseño de investigación (STAKE, 2007), basado en un diseño único integrado (YIN, 2009), que considera como unidades de análisis el trabajo geométrico exhibido por FP de la Carrera Pedagogía en Matemática de una universidad pública chilena. En la primera tarea participaron dieciocho FP, y en la segunda trece FP, quienes lo hicieron de forma voluntaria. Los participantes

corresponden a los estudiantes asistentes al módulo de Didáctica de las Matemáticas en cada momento de la aplicación.

Las técnicas cualitativas para la recolección de datos consideran la observación no participante, notas de campo durante las aplicaciones de tareas, las producciones escritas de los participantes y, para el uso de *software* (Geogebra), se contemplan los archivos creados por los estudiantes. En relación con los análisis de datos, usamos los criterios de la metodología basada en el ETM propuesta por Kuzniak y Nechache (2019).


Las respuestas de los participantes se organizan según tres tipos: (1) *Caso aislado*, se trata de un tipo de trabajo que apunta a la unicidad, una resolución de la tarea poco habitual y desarrollada por uno o una minoría de los participantes; (2) *Caso estándar*, es el trabajo que reúne características comunes por la mayoría de los participantes; (3) *Caso bloqueo o dificultad*, alude a la presencia de error en el trabajo o en alguna etapa del trabajo, o bien, un problema que dificulta u obstaculiza el trabajo (HENRÍQUEZ-RIVAS; MONTOYA-DELGADILLO, 2016).

Para los análisis hemos seleccionado tres FP por razones instrumentales (SIMONS, 2011), y se consideran criterios que apuntan por una parte al equilibrio y la variedad y, por otro, a la unicidad (STAKE, 2007), según los tipos de respuestas descritos. Estos casos nos permiten analizar las singularidades del trabajo geométrico. No obstante, en las respuestas es posible encontrar una combinación de tipologías.

3.2 Tareas

En cuanto a la noción de tarea en el ETM, Kuzniak (2011, p. 13) señala que “los problemas no son parte del espacio de trabajo, pero son su razón de ser y su activador”. Kuzniak *et al.* (2016b), utilizan una forma amplia y abierta para referirse a la tarea, relativo a cualquier tipo de problema matemático, con suposiciones y preguntas claramente formuladas, para resolver en un tiempo predecible. Las tareas propuestas a los FP se muestran en el Cuadro 1.

Tarea	Enunciado	Consideraciones específicas
Tarea 1 (<i>t1</i>): Uso de lápiz y papel	Probar que las rectas que unen los puntos medios de los lados sucesivos de cualquier cuadrilátero forman un paralelogramo.	El propósito es probar una propiedad de los cuadriláteros, lo que conlleva la deconstrucción dimensional de la figura inicial, agregar trazos reorganizadores, y la coordinación con razonamientos discursivos de la prueba. Esta tarea ha sido retomada de una tesis doctoral (HENRÍQUEZ-RIVAS, 2015), dada la riqueza de la información que proporciona.
Tarea 2 (<i>t2</i>): Práctica de arrastre con	Usando GeoGebra, considera ABCD un cuadrilátero cualquiera y los puntos medios de sus lados sucesivos E, F, G, H,	Se trata de una tarea abierta, que ha sido adaptado de <i>t1</i> , se basa en el <i>ejemplo elaborado</i> propuesto por Arzarello <i>et al.</i>

uso de GeoGebra	respectivamente, con el uso de la herramienta  . Arrastrar los vértices del cuadrilátero ABCD considerando <i>todas</i> sus diferentes configuraciones y responde: a) ¿Qué elementos invariantes observas en el cuadrilátero EFGH? b) ¿Qué clase de cuadrilátero se vuelve EFGH? Muestra y justifica tu respuesta.	(2002), a fin de favorecer la identificación y la validación de propiedades de cuadriláteros. Se restringen las herramientas del <i>software</i> , en particular las mediciones, para limitar un trabajo que propicie otro tipo de pruebas pragmáticas.
-----------------	--	---

Cuadro 1 – Tareas propuestas a FP y sus características

Fuente: elaborado por los autores

Las dos tareas geométricas propuestas se aplicaron en momentos distintos de un curso de Didáctica de la Matemática, en la formación inicial de profesorado. Suponemos, *a priori*, que los participantes tienen los conocimientos necesarios para poder resolver $t1$ y $t2$, pues al momento de la aplicación, todos habían realizado al menos dos cursos de geometría Euclidiana, y al menos un curso de Informática Educativa, según el plan de formación de la institución a la cual pertenecen. No existió preparación previa específica para resolver cada tarea.

3.3 Metodología de análisis basada en el ETM

Para caracterizar ETM_G de los FP según $t1$ y $t2$ propuestas, consideramos la distinción entre el trabajo previsto y la actividad producida. El estudio al trabajo posible en relación con una tarea dada, lo denominamos ETM_G previsto y, lo efectivamente realizado por los participantes, lo llamamos ETM_G personal del FP. Esto permite identificar la distancia entre lo esperado y los resultados, y la profundización de ciertas consideraciones teóricas y metodológicas en el marco del ETM, las que son analizadas con base en la metodología que a continuación presentamos.

Los análisis del ETM_G previsto y ETM_G personal del FP, contemplan dos etapas (KUZNIAK; NECHACHE, 2019): 1) *Adentro*, a fin de describir las principales acciones en la realización de la tarea y, 2) *Afuera*, a fin de obtener de manera sintética los episodios del trabajo del sujeto con base en el esquema ETM. Estas etapas se describen en el siguiente Cuadro 2.

Etapa de análisis	Criterios del análisis
Adentro	<i>Identificación de los episodios de trabajo.</i> Se identifican o reconstruyen los principales episodios de trabajo del individuo que resuelve la tarea. <i>Descripción del trabajo.</i> Se describe el trabajo de cada episodio a través de una sucesión de acciones realizadas por quien resuelve. <i>Análisis de la circulación.</i> Con base en la descripción del trabajo, se analizan e interpretan en términos de la circulación del ETM.
Afuera	<i>Descripción global del trabajo usando diagrama del ETM.</i> Se presenta de manera sintética, la progresión de la circulación del trabajo matemático realizado, mediante el uso de secuencias con

diagramas del ETM y componentes activadas. Cabe precisar que, en los esquemas presentados, el sentido de las flechas no es determinista, su uso indica las interacciones entre las componentes.

Cuadro 2 – Etapas de la metodología de análisis basada en el ETM

Fuente: elaborado por los autores

Para los análisis de la circulación en el ETM utilizamos un protocolo con descriptores relacionados de cada génesis y sus componentes respectivas (ver en Anexos Cuadro 4). A partir de estos análisis, luego identificamos los planos verticales activados.

Finalmente, destacamos que los análisis presentados contemplan la diferenciación entre los enfoques geométricos sintético y analítico, en alusión a lo planteado por Klein (1908), para quien la distinción es puramente cuantitativa, según predominen las figuras o fórmulas (respectivamente).

4 Análisis del ETM_G previsto

Para el presente estudio consideramos una estrategia para cada tarea según el ETM_G previsto, las que se centran en el enfoque sintético.

4.1 Tarea (t1) con uso de lápiz y papel

Etapa Adentro. Se identifican cinco episodios (E) de trabajo asociados a una estrategia desarrollada en el enfoque sintético. En E1, la *construcción de la configuración geométrica según las condiciones del enunciado de la tarea*, considera la conversión del enunciado a la construcción de la representación figural de un cuadrilátero ABCD y los puntos medios de sus lados: E, F, G, H, lo cual determina el cuadrilátero EFGH (Figura 2). E2 involucra el *trazado de la diagonal DB*, que añade un trazo reorganizador, la diagonal DB, el cual propicia el desarrollo del razonamiento deductivo.

En el episodio E3, se desarrolla la *prueba del paralelismo de los lados HE y GF*, considerando los triángulos ABD y AEH, los segmentos determinados por los puntos medios E y H son proporcionales y dichos triángulos tienen el ángulo común A. De esto que, los triángulos AEH y ABD son semejantes y, por el teorema recíproco del teorema de Tales, se tiene que HE// DB. Luego, considerar los triángulos CDB y CGF y los puntos medios G y F de los lados respectivos y, de manera análoga a lo anterior, se tiene que GF// DB. Por la propiedad transitiva de los números reales, se concluye que HE//GF.

El episodio E4, está dado por la *prueba del paralelismo de los lados HG y EF*, al trazar la diagonal AC en la Figura 2, se relacionan los triángulos DAC y DHG, luego, los triángulos

BCA y BFE y, análogo al episodio anterior HG//EF. Finalmente, E5 se relaciona con la *conclusión del razonamiento*, que considera los episodios anteriores y la definición de un paralelogramo, lo que permite concluir que el cuadrilátero EFGH es un paralelogramo.

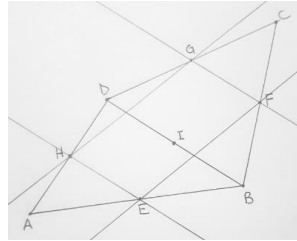


Figura 2 – Representación figural del trabajo geométrico
Fuente: elaborado por los autores

El análisis de la circulación, en E1 se representan los objetos geométricos del enunciado en el registro figural, con o sin uso de artefactos materiales. La construcción de esta figura inicial activa el plano [Sem-Ins]. En E2, el trabajo figural demandado sobre la base del proceso de visualización, modificaciones a la figura inicial por el uso de un trazo reorganizador, lo que exige considerar los elementos de un cuadrilátero en la componente referencial y, luego, su uso como un artefacto simbólico, lo cual involucra el plano [Sem-Ins]. Hasta aquí, la circulación del ETM está dada por: [Sem-Ins]→Visualización→Referencial→[Sem-Ins].

En E3, el énfasis en el ETM está en la coordinación entre el trabajo semiótico (figural) con el proceso de visualización, en coordinación con los razonamientos discursivos de la prueba deductiva. Esto conlleva la deconstrucción dimensional de la figura en sus unidades figurales, en igual y menor dimensión. Este episodio requiere de la componente referencial en el empleo de teoremas y definición a modo de artefactos simbólicos, como un teorema de semejanza de triángulos, definición de semejanza, teorema sobre ángulos correspondientes, la noción de paralelismo, lo cual involucra la interacción: Artefacto→[Sem-Dis]. La conclusión de este episodio de trabajo contempla el uso de una propiedad del referencial (transitividad de la relación de igualdad) y el plano [Sem-Dis], que involucra las interacciones entre las componentes del plano vertical, es decir: Referencial→[Sem-Dis].

E4 considera una dinámica similar de trabajo a los episodios anteriores. El trabajo podría explicitar (o no) nuevamente el trabajo geométrico, pues se desarrolla por analogía al trabajo anterior. Este episodio considera (de manera explícita o implícita) la circulación: [Sem-Ins]→Visualización→Referencial→[Sem-Ins]→Artefacto→[Sem-Dis]. Finalmente, en E5 es preciso evocar desde el referencial, la definición de paralelogramo para completar el razonamiento discursivo esperado, centrado en desarrollar un razonamiento lógico-deductivo.

Etapa Afuera. Descripción global del trabajo usando diagrama del ETM (Figura 3).

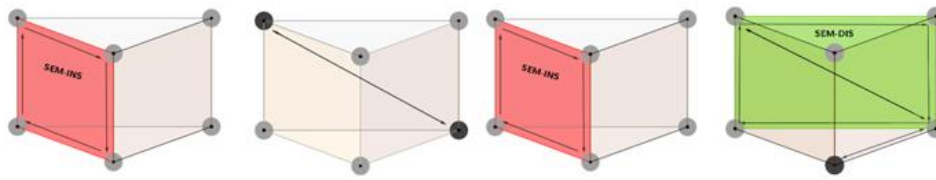


Figura 3 – Descripción global del ETM_G previsto según los episodios
Fuente: elaborado por los autores

A modo de conclusión sobre el ETM_G previsto en *t1*, el trabajo relaciona los procesos de visualización no-icónica en la forma inventor-artesano, uso de artefactos simbólicos y prueba intelectual, basada sobre la reconfiguración de la figura inicial dada por la introducción de la diagonal y la coordinación de razonamientos discursivos en la deconstrucción dimensional de las figuras.

4.2 Tarea (*t2*) con uso de tecnología

Etapa Adentro. Se identifican cuatro episodios de trabajo. En E1, se realiza la *construcción de una figura inicial según condiciones dadas y la práctica de arrastre*, es decir, inicialmente se construye el cuadrilátero ABCD, los puntos medios con la herramienta señalada en el enunciado y el cuadrilátero EFGH. La práctica de arrastre permite obtener diversas versiones de la configuración inicial. La *búsqueda de invariantes con práctica de arrastre*, se desarrolla en E2, basado en la exploración de la figura por medio del arrastre de los vértices del cuadrilátero, se distingue por la búsqueda de invariantes en el cuadrilátero con el uso de herramientas del *software*, lo que se demanda en la pregunta a). E3 está dado por la *producción de conjeturas*, de la pregunta b). Por último, en E4 se realiza una *justificación* basada en propiedades de los cuadriláteros, tales como, la medida de ángulos y/o lados opuestos de un paralelogramo (u otras), lo que se observa en la Figura 4.

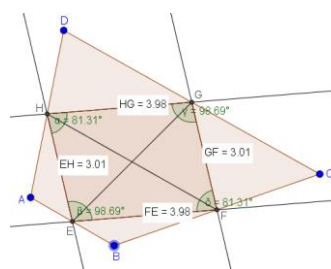


Figura 4 – Exploración de la figura inicial
Fuente: elaborado por los autores

Cabe señalar que, en los análisis de la circulación llamaremos *visualización dinámica* al proceso de visualización cuando es mediado por el uso artefactos que propician la práctica de arrastre. En E1, la construcción de la figura inicial con uso de las herramientas del *software*,

favorece los procesos de instrumentalización e instrumentación (RABARDEL, 1995). La práctica de arrastre permite determinar diferentes configuraciones de la figura inicial, lo que interrelaciona el proceso de visualización dinámica y el uso del artefacto material de tipo tecnológico. Este episodio activa el plano [Sem-Ins]. En E2, la visualización dinámica se desarrolla por la práctica de arrastre con la exploración de elementos invariantes del paralelogramo. Esto implica un proceso cognitivo ascendente, que involucra la interrelación entre las componentes del plano [Sem-Ins] y el referencial (por las propiedades).

El tercer episodio involucra procesos cognitivos descendentes, dados por el uso del *software* en el arrastre y la producción de una conjetura con relación a cierta propiedad del cuadrilátero EFGH, lo que conlleva la activación del plano [Ins-Dis]. Finalmente, en E4, la justificación implica la interrelación entre el proceso de visualización dinámica y el razonamiento discursivo de la prueba, lo que activa el plano [Sem-Dis].

Etapa Afuera. Descripción global del trabajo usando diagrama del ETM (Figura 5).

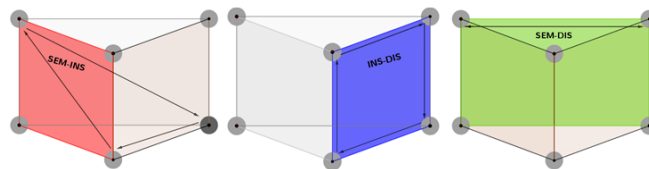


Figura 5 – Descripción global del ETM_G previsto según los episodios
Fuente: elaborado por los autores

Al concluir sobre el ETM_G previsto en t_2 , destacamos que en este trabajo se propicia la visualización dinámica por la práctica de arrastre que favorece la activación de los tres planos verticales del ETM. Asimismo, la activación de procesos ascendentes y descendentes en el trabajo geométrico y el uso del artefacto tecnológico.

5 Resultados

A continuación, presentamos los resultados por tarea en términos de las tipologías de respuestas y la caracterización de tres casos, basados en las etapas de análisis sustentadas en el ETM.

5.1 Tarea (t_1) de lápiz y papel

La tarea fue desarrollada por dieciocho FP. De estos, nueve corresponden al tipo estándar (seis en el enfoque sintético y tres en el enfoque analítico), quienes muestran un trabajo asociado a un cuadrilátero particular (paralelogramo). Dos casos del tipo aislado, el primero

presenta una solución válida en el enfoque geométrico analítico, y el segundo, se trata de un trabajo de prueba sin palabras, en el enfoque sintético. Por último, siete FP responden bajo la tipología dificultad (seis emplean métodos sintéticos y uno analítico), quienes desarrollaron un trabajo incompleto apoyado en la percepción visual, sin dar una solución válida.

Presentamos dos casos, para analizar y diferenciar las singularidades del ETM_G personal, caso aislado por FP1, y caso estándar por FP2.

Análisis de ETM_G personal de FP1: Etapa Adentro. Se identifican dos episodios de trabajo en el enfoque sintético. En E1, FP1 representa el *dibujo de una figura a mano alzada*, basado en la configuración descrita en el enunciado. El trabajo no involucra otros registros de representaciones semióticas ni uso de artefactos en la construcción de las figuras. En E2, realiza una *prueba con cuatro tipos de cuadriláteros particulares*, tres paralelogramos con medidas de lados distintas y un trapecio (o trapezoide) y, en los tres primeros casos, relaciona los lados opuestos de los paralelogramos. Este trabajo se desarrolla empleando solamente el registro de las figuras (Figura 6).

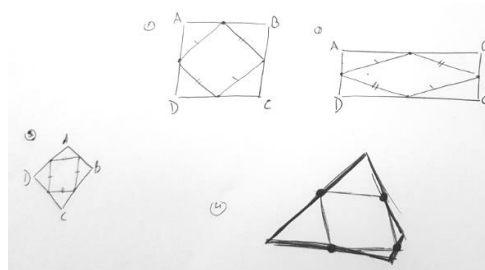


Figura 6 – Cuatro tipos de cuadriláteros representados por FP1.
Fuente: elaborado por FP1

En el análisis de la circulación, en E1, el trabajo considera, únicamente, la activación de la génesis figural, basada en el proceso de visualización icónica, por las características y cualidades visuales de la figura inicial. Luego, en E2, la prueba se realiza sobre la base de un conjunto de figuras como un medio de razonamiento gráfico, sin una redacción discursiva. En concreto, se relaciona el proceso de visualización en el registro figural y la validación mediante una forma de prueba discursivo-gráfica (RICHARD, 2004), donde FP1 establece una relación de congruencia entre los lados opuestos del paralelogramo, lo que activa el plano [Sem-Dis]. Así, se destaca una actividad matemática para cuatro cuadriláteros particulares.

Etapa Afuera. Descripción global del trabajo usando diagrama del ETM (Figura 7).

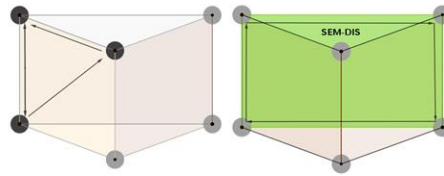


Figura 7 – Descripción global del ETM_G personal de FP1 en E1 y E2
Fuente: elaborado por los autores

Para concluir, el trabajo de FP1 involucra únicamente un registro de representación semiótica (las figuras), la prueba se realiza sobre la exploración de cuatro figuras iniciales, con intención discursiva de una prueba, pero sin palabras (RICHARD *et al.*, 2016), y no emplea artefactos materiales en la construcción de estas figuras.

Análisis de ETM_G personal de FP2: Etapa Adentro. Se identifican dos episodios de trabajo. En E1, FP2 realiza la *construcción de dos representaciones figurales particulares* con base en métodos sintéticos. En el trabajo con las figuras asume que estas tienen ángulos interiores rectos. No justifica la construcción ni elección inicial de las figuras. En E2, desarrolla una *prueba incompleta con base en la observación*, en la cual FP2 identifica el cuadrilátero $efgh$ determinado por los puntos medios, luego, prueba la congruencia de dos triángulos (de manera errónea en uno de los pasos), con un teorema de congruencia de triángulos, y usa implícitamente una propiedad de las diagonales del paralelogramo (se bisecan entre sí). Es decir, asume que el cuadrilátero $efgh$ es un paralelogramo (Figura 8). Finalmente, la conclusión no valida del todo lo que la prueba demanda, pues faltan pasos en el razonamiento lógico-deductivo.

<p>Al unir e, f, g, h se forma otro cuadrilátero, pero ¿es un paralelogramo? Defino el pto O como el punto de intersección entre las rectas eg y hf formando así triángulos.</p> $\Delta eof \cong \Delta fog = \begin{cases} \overline{eo} = \overline{og} \\ \angle eof = \angle gof \\ \overline{fo} = \overline{oh} \end{cases} \quad \text{LAL.}$ <p>de manera análoga $\Delta eoh \cong \Delta goh$ $\therefore e f g h$ es un paralelogramo.</p>	<p>Al unir e, f, g, h se forma otro cuadrilátero, pero ¿es un paralelogramo? Defino el punto O como el punto de intersección entre las rectas eg y hf formando así triángulos.</p> $\Delta eof \cong \Delta fog = \begin{cases} \overline{eo} = \overline{og} \\ \angle eof = \angle gof \\ \overline{fo} = \overline{oh} \end{cases} \quad \text{LAL}$ <p>De manera análoga $\Delta eoh \cong \Delta goh$ $\therefore e f g h$ es un paralelogramo.</p>

Figura 8 – Producción de FP2 en E1 y E2
Fuente: elaborado por FP2

En el análisis de la circulación en E1, se caracteriza inicialmente por la construcción de las figuras con uso de una regla. Luego, al unir los puntos medios de los lados se determinan

triángulos que permiten la deconstrucción de la figura inicial. En este episodio se activa el plano [Sem-Ins] y la componente referencial por las cualidades del paralelogramo. En E2, el trabajo implica la deconstrucción dimensional de la figura (2D/2D a 1D/2D¹), el referencial y la generación de una organización deductiva. Un elemento del referencial (definición de rombo) no es explícita en el razonamiento deductivo, pero es utilizado a partir de lo que se deconstruye y lo que se reconoce en una de las figuras. Se destaca la activación del plano [Sem-Dis] en la coordinación con la visualización y los pasos de razonamiento discursivo, y [Sem-Ins] en el uso de un teorema de congruencia de triángulos como artefacto simbólico para la prueba. La conclusión de la prueba se basa en la visualización icónica de la forma botánico.

Etapa Afuera. Descripción global del trabajo usando diagrama del ETM (Figura 9).

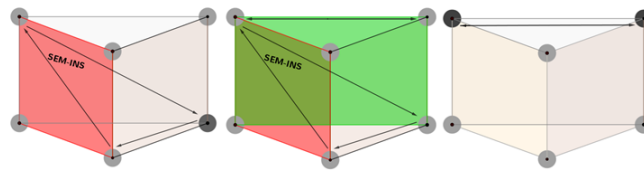


Figura 9 – Descripción global del ETM_G personal de FP2 en E1 y E2
Fuente: elaborado por los autores

Finalmente, el ETM_G personal de FP2 está más cercano al trabajo esperado, pues el razonamiento discursivo se coordina con la visualización de las figuras representadas; sin embargo, la intención de realizar una prueba intelectual se apoya en lo que se ve y reconoce de las figuras. Es decir, la visualización transita entre el nivel icónico y no icónico, y utiliza un artefacto material para representar las figuras.

5.2 Tarea (t2) con uso de un entorno tecnológico

La tarea fue desarrollada por trece FP. En el caso estándar se encuentran diez FP, quienes basan el trabajo en la visión de los objetos representados con apoyo del *software*. Las diferencias se asocian con los razonamientos discursivos y uso de la herramienta tecnológica. La mayoría presentan dificultades en la justificación coordinada con el proceso de visualización, lo cual se podría clasificar como casos estándar con dificultad. Otros dos FP responden bajo el tipo bloqueo, dando una interpretación incorrecta del enunciado y de la conversión de éste al registro figural o gráfico. Finalmente, un caso aislado, quien considera el potencial dinámico y ciertas particularidades asociadas con los razonamientos de la prueba.

¹ Para Duval (2005), una configuración nD/2D corresponde a las representaciones (0D, 1D, 2D, 3D) producidas en el plano (papel, pantalla de ordenador).

De la totalidad de participantes en la solución de t_2 , seleccionamos el caso aislado, FP3, quien exhibe un trabajo único vinculado con la tarea abierta.

Análisis de ETM_G personal de FP3: Etapa Adentro. Se identifican tres episodios de trabajo. En E1, FP3 realiza la *construcción inicial de una configuración dinámica*, el cuadrilátero ACBD, basada en las hipótesis de la tarea, luego, utiliza una herramienta de GeoGebra, para mover uno de los vértices. Esta construcción es realizada de modo que dicho vértice es un objeto dinámico que transforma la configuración inicial (Figura 10). En E2, FP3 realiza la *exploración de la configuración*, dada por la trayectoria del vértice dinámico (D). FP3 utiliza la herramienta *Mostrar objeto*, que permite ver la trayectoria que sigue el vértice dinámico. La trayectoria del vértice dinámico considera vistas del cuadrilátero convexo y cóncavo. Por último, en E3, FP3 *descubre propiedades invariantes* y *desarrolla una validación*, con empleo de herramientas que permiten medir ángulos y áreas de figuras. La validación no enfatiza en razonamientos discursivos de la prueba.

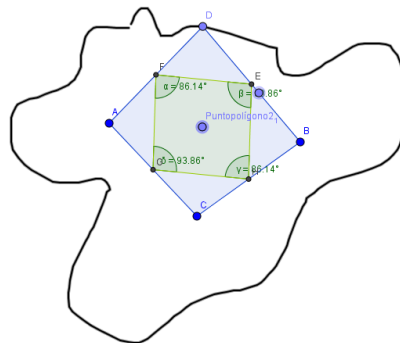


Figura 10 – Trayectoria del vértice D por FP3
Fuente: elaborado por FP3

En el análisis de la circulación en E1, el trabajo exhibido por FP3 realiza la conversión de los objetos geométricos del enunciado desde lenguaje natural al registro figural. La construcción de los objetos geométricos se realiza con el uso de un *software* y sus herramientas. Un vértice dinámico permite determinar diferentes configuraciones de la figura inicial. En este episodio se activa el plano [Sem-Ins]. Luego, en E2, la exploración se coordina con la visualización dinámica de nuevas configuraciones. Esto implica el proceso cognitivo ascendente, que involucra la interrelación entre las componentes del plano [Sem-Ins]. En E3, el trabajo implica procesos ascendentes relacionados con el plano [Sem-Ins] en relación con la componente referencial, dada por las propiedades invariantes que son verificadas empíricamente. Luego, FP3 muestra una intención de prueba sobre la base del potencial dinámico del *software*. En esta validación visual o prueba sin palabras, se relacionan las componentes que articulan las génesis figural y discursiva, lo que activa el plano [Sem-Dis].

Etapa Afuera. Descripción global del trabajo usando diagrama del ETM (Figura 11).

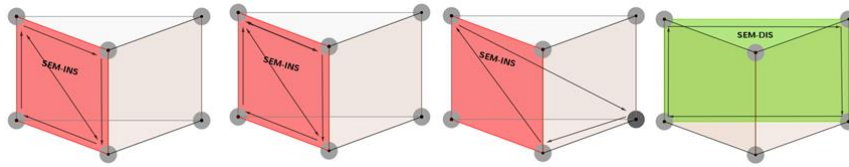


Figura 11 – Descripción global del ETM_G personal de FP3 en E1, E2 y E3
Fuente: elaborado por los autores

Finalmente, el ETM_G personal de FP3 privilegia el plano [Sem-Ins], dado por la construcción inicial y la exploración de la configuración al usar el artefacto tecnológico. Para probar se apoya en una validación basada en lo que se observa y la visualización dinámica.

6 Discusión y conclusiones

Esta investigación se basa en la experimentación de dos tareas (*t1* y *t2*) desarrolladas en entornos diferentes, una con uso de lápiz y papel y, una tarea abierta adaptada para uso de un software geométrico. El Cuadro 3 resume los análisis basados en el ETM para *t1* y *t2*.

Tarea y ETM		Tipificación de la caracterización del trabajo geométrico	
		Episodio (E)	Síntesis de análisis global en el ETM
Tarea 1	ETM _G previsto	E1: construcción de la configuración geométrica según enunciado; E2: trazado de la diagonal DB (añade un trazo reorganizador); E3 y E4: prueba del paralelismo de dos lados; E5: conclusión del razonamiento.	
	ETM _G personal FP1	E1: dibujo de una figura a mano alzada; E2: prueba con cuatro tipos de cuadriláteros particulares.	
	ETM _G personal FP2	E1: construcción de dos representaciones figurales particulares; E2: prueba incompleta con base en la observación.	
Tarea 2	ETM _G previsto	E1: construcción de una figura inicial (diversas versiones) según condiciones dadas y la práctica de arrastre; E2: búsqueda de invariantes con práctica de arrastre (pregunta a); E3: producción de conjeturas (pregunta b); E4: justificación.	
	ETM _G personal FP3	E1: construcción inicial de una configuración dinámica; E2: exploración de la configuración; E3: descubre propiedades invariantes y desarrolla una validación.	

Cuadro 3 – Resumen de los análisis basados en el ETM
Fuente: elaborado por los autores

Como se observa en el análisis al ETM_G previsto, planteamos dos tareas complementarias que privilegian el proceso de visualización y la construcción de configuraciones geométricas en coordinación con razonamientos discursivos para la validación. *T1* requiere crear una estrategia que involucra el proceso de visualización no icónica de la forma

inventor-artesano, lo que demanda la construcción de una figura inicial, añadir un trazo suplementario, deconstrucción dimensional de las configuraciones geométricas en unidades figurales de igual y menor dimensión en coordinación con razonamientos discursivos para la prueba. Luego, *t2* siendo más guiada, requiere un manejo de herramientas digitales e involucra el proceso de visualización basado en la práctica de arrastre, que llamamos visualización dinámica, e implica procesos cognitivos para explorar libremente en la búsqueda de invariantes, validar o refutar conjeturas para comprobar las propiedades, lo que a su vez favorece la justificación mediada por el uso de tecnología.

De acuerdo a las evidencias de los análisis del ETM_G personal de FP1, FP2, FP3, si bien la génesis discursiva es activada, el proceso de visualización en coordinación con los razonamientos discursivos escritos, no parecen ser parte fundamental en el ETM_G de los casos exhibidos. Resaltamos que, en *t1* se evidencian limitaciones en el ETM_G personal de los casos analizados, en cuanto al desarrollo de los procesos de prueba intelectual y visualización no icónica que estaba previsto, donde el trabajo de tipo inventor-artesano no es un proceso privilegiado por los participantes. Es decir, en el ETM_G personal de FP1 y FP2, predomina la imagen prototípica de las figuras y casos particulares para desarrollar la tarea, lo cual es una dificultad al momento de la coordinación con un razonamiento para probar.

En el caso aislado por FP1, el proceso de prueba discursivo-gráfico se realiza sobre un conjunto de figuras, sin una expansión discursiva, constituido por un ordenamiento visual y secuencial de figuras y se destaca un tipo de prueba sin palabras. En el caso estándar por FP2, el dibujo de dos figuras iniciales y, luego, la deconstrucción dimensional para la generación de la organización deductiva, donde destaca la coordinación de la visualización icónica con pasos de razonamiento discursivo y uso de un teorema como artefacto simbólico para la prueba.

En *t2* resaltamos el caso aislado por FP3, quien considera una estrategia dinámica no prevista, dada por el uso de herramientas del *software* para construir y explorar una configuración, y para medir y comprobar una propiedad de los paralelogramos. La mayoría de los participantes desarrollan un débil trabajo que activa razonamientos discursivos (escritos) de la prueba, también, se suman las dificultades en cuanto al uso del *software* y su potencial como una herramienta de geometría dinámica. En FP3, la visualización dinámica y la prueba discursivo-gráfica son los procesos más considerados, donde el trabajo se basa en la experimentación como medio de validación y los razonamientos discursivos plantean dificultades, dando pie a un énfasis en el plano activado [Sem-Ins].

Al observar el Cuadro 3, tanto en *t1* como *t2* se evidencian diferencias entre el ETM_G previsto y el ETM_G personal de los FP, especialmente con relación a la génesis discursiva, el

proceso de prueba, y la coordinación de estas componentes con las otras del ETM. Esto nos permite concluir que se trata de un asunto complejo y consideramos que se puede atender en futuras investigaciones, especialmente, en la formación de profesores de matemáticas. Específicamente, se podría ahondar en el análisis de diversas circulaciones en el ETM para una misma tarea, o bien el tránsito entre *paradigmas geométricos* (KUZNIAK, 2011) en relación con tareas específicas (como las que aquí presentamos).

En términos generales, consideramos que un estudio basado en la metodología de análisis presentada, puede ayudar a detectar dificultades y a abordar la investigación a partir del diseño y la resolución de tareas específicas e intencionadas. Así, es posible identificar la distancia entre el trabajo previsto y el efectivo realizado por cada FP. En particular, se puede propiciar el diseño e implementación de tareas que demanden procesos de visualización no icónica de la forma inventor-artesano (DUVAL, 2016), y visualización dinámica, que plantean los dos procesos cognitivos ascendentes y descendentes (ARZARELLO *et al.*, 2002), asociados con la práctica de arrastre. De los resultados de la investigación, consideramos que el uso del marco del ETM, como herramienta teórica y metodológica puede contribuir en este sentido.

Asimismo, consideramos la relevancia y potencial del proceso de visualización en la perspectiva del ETM. En este trabajo nos centramos en la deconstrucción dimensional de las figuras en $t1$, y hemos propuesto $t2$ como una tarea abierta que favorece los procesos cognitivos ascendentes y descendentes, dados por la práctica de arrastre. Este tipo de tareas nos ha permitido comprender el trabajo que involucran diversas formas de visualizar con y sin uso de tecnología, lo que implica la articulación con diversas componentes y circulaciones del ETM. Esto nos plantea una dimensión de estudio para el diseño e implementación de tareas en el ETM, por ejemplo, vinculadas con la prueba discursivo-gráfica (RICHARD, 2004) y la visualización dinámica caracterizadas en este estudio.

Proyectamos otras investigaciones que pueden propiciar circulaciones entre las componentes del ETM para tareas específicas, intencionadas y apropiadas al contexto. Por ejemplo, considerar estudios basados en el diseño de tareas que involucren procesos de visualización no icónica y dinámica, para el desarrollo de circulaciones en el ETM. Resaltamos que la práctica de arrastre y los procesos ascendentes y descendentes que esta favorece, implican la oportunidad de diversas y variadas interrelaciones entre componentes del ETM, lo cual podría ser profundizado con base en esta perspectiva teórica y metodológica.

Finalmente, los análisis, desde la perspectiva del ETM, permiten ahondar en la caracterización al trabajo matemático que propone un individuo; en esta investigación, lejos de plantear una comparación entre los trabajos, aportamos con una perspectiva complementaria a

las desarrolladas en otras investigaciones (MONTROYA-DELGADILLO, 2014; HENRÍQUEZ-RIVAS; MONTROYA-DELGADILLO, 2015, 2016; KUZNIAK *et al.*, 2016a) y que nos permite comprender el trabajo matemático que desarrollan individuos, e identificar dificultades y errores en su trabajo.

Referencias

ARZARELLO, F.; OLIVERO, F.; PAOLA, D.; ROBUTTI, O. A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments. **ZDM Mathematics Education**, Alemania, v. 34, n. 3, p. 66-72, 2002.

ARZARELLO, F.; BARTOLINI BUSSI, M. G.; LUN LEUNG, A. Y.; MARIOTTI, M. A.; STEVENSON, I. Experimental approaches to theoretical thinking: Artefacts and proofs. *In*: HANNA, G.; DE VILLIERS, M. (Eds.). **Proof and proving in mathematics education**. New York: Springer, 2012. p. 97-146.

BALACHEFF, N. Processus de preuve et situations de validation. **Educational Studies in Mathematics**, Netherlands, v. 18, n. 2, p. 147-176, 1987.

DRIJVERS, P.; BALL, L.; BARZEL, B.; KATHLEEN HEID, M.; CAO, Y.; MASCHIETTO, M. **Uses of technology in lower secondary mathematics education: A concise topical survey**. Switzerland: Springer, 2016.

DUVAL, R. **Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels**. Editions scientifiques européennes. Berne: Peter Lang, 1995.

DUVAL, R. Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. *In*: HITT, F.; SANTOS, M. (Eds.). **Proceedings of the 21st North American PME conference**. Cuernavaca: Editora, v. 1, n. 21, 1999. p. 3-26.

DUVAL, R. Les Conditions Cognitives de l'apprentissage de la géométrie: Développement de la Visualisation, Différenciation des Raisonnements et Coordination de leurs Fonctionnements. **Annales de Didactique et de Sciences Cognitives**, Strasbourg, v. 10, p. 5-53, 2005.

DUVAL, R. Las condiciones cognitivas del aprendizaje de la geometría. Desarrollo de la visualización, diferenciaciones de los razonamientos, coordinación de sus funcionamientos. *In*: DUVAL, R.; SÁENZ-LUDLOW, A. (Eds.). **Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas**. Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas, 2016. p. 13-60.

GUERRERO ORTIZ, C.; HENRÍQUEZ RIVAS, C. El Espacio de Trabajo Matemático en el Estudio de Propiedades Sintéticas y Analíticas de la Parábola. *In*: GÓMEZ-CHACÓN, I. *et al.* (Ed.). **Mathematical Working Space: fifth ETM Symposium**. Florina: University of Western Macedonia, 2017. p. 425-440.

GÓMEZ-CHACÓN, I.; KUZNIAK, A.; VIVIER, L. El rol del profesor desde la perspectiva de los Espacios de Trabajo Matemático. **Bolema**, v. 30, n. 54, p. 1-22, 2016.

HENRÍQUEZ-RIVAS, C. **El trabajo geométrico de profesores en el tránsito de la geometría sintética a la analítica en el nivel secundario**. 2015. Tesis (Doctorado en Didáctica de la Matemática) – Instituto de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Valparaíso, 2015.

HENRÍQUEZ-RIVAS, C.; MONTOYA-DELGADILLO, E. Espacios de trabajo geométrico sintético y analítico de profesores y su práctica en el aula. **Enseñanza de las Ciencias**, v. 33, n. 2, p. 51-70, 2015.

HENRÍQUEZ-RIVAS, C.; MONTOYA-DELGADILLO, E. El Trabajo Matemático de Profesores en el tránsito de la Geometría Sintética a la Analítica en el Liceo. **Bolema**, v. 30, n. 54, p. 45-66, 2016.

HÖLZL, R. Between drawing and figure. *In*: SUTHERLAND, R.; MASON, J. (Eds.). **Exploiting mental imagery with computers in mathematical education**. Berlin: Springer, 1995. p. 117-124.

HOUEMENT, C.; KUZNIAK, A. Un exemple de cadre conceptuel pour de l'enseignement de la géométrie en formation des maîtres. **Educational Studies in Mathematics**, v. 40, p. 283-312, 1999.

HOUEMENT, C.; KUZNIAK, A. Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. **Annales de Didactique et de Sciences Cognitives**, v. 11, p. 175-193, 2006.

KLEIN, F. **Matemática elemental desde un punto de vista superior**: Geometría vol. 2. Traducido por R. Fontanilla. Madrid: Biblioteca Matemática, 1908.

KUZNIAK, A. L'Espace de Travail Mathématique et ses Genèses. **Annales de Didactique et de Sciences Cognitives**, v. 16, p. 9-24, 2011.

KUZNIAK, A. Thinking about the Teaching of Geometry through the Lens of the Theory of Geometric Working Spaces. *In*: HERBST, P. *et al.* (Ed.). **International Perspectives on the Teaching and Learning of Geometry in Secondary Schools, ICME-13 Monographs**. Springer, 2018. p. 5-21.

KUZNIAK, A.; NECHACHE, A. Une méthodologie pour analyser le travail personnel d'étudiants dans la théorie des Espaces de Travail Mathématique. *In*: MONTOYA DELGADILLO, E. *et al.* (Ed.). **Sexto Simposio sobre el Trabajo Matemático**. Valparaíso: PUCV, 2019. p. 61-80.

KUZNIAK, A.; NECHACHE, A.; DROUHARD, J. P. Understanding the development of mathematical work in the context of the classroom. **ZDM Mathematics Education**, v. 48, p. 861-874, 2016a.

KUZNIAK, A.; RICHARD, P. Spaces for Mathematical Work. Viewpoints and perspectives. **Relime**, v. 17, n. 4-I, p. 5-15, 2014.

KUZNIAK, A.; TANGUAY, D.; ELIA, I. Mathematical Working Spaces in schooling: an introduction. **ZDM Mathematics Education**, v. 48, p. 721-737, 2016b.

MONTOYA-DELGADILLO, E. El proceso de prueba en el espacio de trabajo geométrico: profesores en formación inicial. **Enseñanza de las Ciencias**, Barcelona, v. 32, n. 3, p. 227-247, 2014.

MONTOYA-DELGADILLO, E.; MENA-LORCA, A.; MENA-LORCA, J. Circulaciones y génesis en el espacio de trabajo matemático. **Relime**, Ciudad de México, v. 17, n. 4-I, p. 181-197, 2014.

PEIRCE, C. **Ecrits sur le signe**. Paris: Seuil, 1978.

RABARDEL, P. **Les hommes et les technologies**: Une approche cognitive des instruments contemporains. Paris: Armand Colin, 1995.

RICHARD, P. **Raisonnement et stratégies de preuve dans l'enseignement des mathématiques**. Berne: Peter Lang, 2004.



RICHARD, P.; OLLER-MARCÉN, A.; MEAVILLA-SEGUÍ, V. The concept of proof in the light of mathematical work. **ZDM Mathematics Education**, Alemania, v. 48, p. 843–859, 2016.

SINCLAIR, N.; BARTOLINI BUSSI, M.; DE VILLIERS, M.; JONES, K.; KORTENKAMP, U.; LEUNG, A.; OWENS, K. Geometry Education, Including the Use of New Technologies: A Survey of Recent Research. *In*: KAISER, G. (Ed.). **Proceedings of the 13th international congress on mathematical education**. Cham: Springer, 2017. p. 277-287.

STAKE, R. **Investigación con estudio de casos**. 4. ed. Madrid: Ediciones Morata, 2007.

SIMONS, H. **El estudio de caso: Teoría y práctica**. Traducido por Roc Filella Escolà. Madrid: Ediciones Morata, 2011.

YIN, R. K. **Case study research: Design and methods**. 4 ed. Thousand Oaks: SAGE Publications INC, 2009.

Submetido em 05 de Maio de 2020.
Aprovado em 27 de Abril de 2021.

Anexos

Génesis	Componentes	Descriptor
Génesis semiótica	Representamen	Relaciona objetos matemáticos y sus elementos significantes.
	Visualización	Dos niveles de identificación visual de objetos (visualización icónica, visualización no icónica) que se asocian con formas distintas de ver (botánico, agrimensor-geómetra, constructor, inventor-artesano). Adicionalmente, considera la visualización dinámica asociada con el uso de <i>software</i> y su potencial dinámico.
Génesis instrumental	Artefacto	Utiliza artefactos de tipo material (tradicional, tecnológico) o un sistema simbólico.
	Construcción	Se basa en las acciones desencadenadas por los artefactos utilizados y las técnicas de uso asociadas.
Génesis discursiva	Referencial	Utiliza definiciones o propiedades.
	Prueba	El razonamiento discursivo se basa en una prueba (pragmática, intelectual). Adicionalmente, considera pruebas sin palabras.

Cuadro 4 – Protocolo para el análisis de la circulación en el ETM

Fuente: elaborado por los autores