

Sucesiones matemáticas en el currículo de México en secundaria

Mathematical sequences in the Mexican curriculum in middle school

Karina Nuñez-Gutierrez*

 ORCID iD 0000-0001-7441-2719

Guadalupe Cabañas-Sánchez**

 ORCID iD 0000-0002-2471-0440

Resumen

En este artículo se identificaron y relacionaron los significados de las sucesiones matemáticas en los números naturales a través de su estructura conceptual, representaciones y modos de uso en el currículo mexicano de matemáticas de secundaria y en catorce libros de texto utilizados para la enseñanza y aprendizaje de las sucesiones en este nivel escolar. Para ello, se realizó un análisis didáctico enfocado en la dimensión de contenido matemático (RICO *et al.*, 2008; RICO, 2012; RICO, MORENO, 2016). Los resultados evidencian que en México el tema de sucesiones matemáticas se aborda desde la básica primaria hasta la secundaria y las propuestas de enseñanza abordan el uso de múltiples representaciones y aplicaciones en otras disciplinas. Los significados de las sucesiones matemáticas examinados en el currículo mexicano y en los catorce libros analizados son: conceptual, procedimental, representacional y contextual.

Palabras clave: Análisis de contenido. Sucesiones. Currículo. Libro de texto. Educación Secundaria.

Abstract

In this article, the meanings of mathematical sequences in natural numbers were examined through their conceptual structure, representations, and modes of use in the middle school mathematics curriculum in Mexico and in fourteen textbooks used for teaching and learning mathematical sequences in this school level. For this purpose, we carried out a didactic analysis focused on the dimension of mathematical content (RICO *et al.*, 2008; RICO, 2012; RICO, MORENO, 2016). The results show that, in Mexico, the topic of mathematical sequences is addressed from elementary to middle school and the teaching proposals address the use of multiple representations and applications in other disciplines. The meanings of the mathematical sequences examined in the Mexican curriculum are conceptual, procedural, representational, and contextual.

Keywords: Content Analysis. Sequences. Curriculum. Textbook. Middle School.

1 Introducción

Las sucesiones en los números naturales es un tema importante en la enseñanza y

* Candidata a Doctora en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa por la Universidad Autónoma de Guerrero (UAGro), Chilpancingo, Guerrero, México. E-mail: kgutierrez@uagro.mx.

** Doctora en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa por el Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (CIEA/IPN). Profesora e investigadora de tiempo completo en la Universidad Autónoma de Guerrero (UAGro), Chilpancingo, Guerrero, México. E-mail: gcabanass@uagro.mx.

aprendizaje de las matemáticas, porque implica el desarrollo de habilidades o competencias como la conjeturación, generalización, argumentación, validación, visualización, entre otras, según lo recomendado por el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000). De acuerdo con algunos documentos curriculares, las nociones de sucesiones se enseñan, explícita o implícitamente, desde los primeros años escolares de los estudiantes, contribuyendo en el aprendizaje de la generalización algebraica en básica secundaria (JONES, 2011).

A nivel universitario, se establecen múltiples conexiones con otros temas matemáticos como las funciones, series y límites (ARTIGUE, 1995; SIERPINSKA, 1990) y existe una amplia gama de aplicaciones en distintas disciplinas, por ejemplo, en física, biología, economía, medicina y otras (JONES, 2011). Sin embargo, existen estudios enfocados en el razonamiento, la comprensión y la generalización de patrones, donde se evidencian que los estudiantes y profesores manifiestan dificultades para resolver situaciones matemáticas que involucran a las sucesiones (MANFREDA; SLAPAR; HODNIK, 2012; RIVERA; BECKER, 2007; SOSA; APARICIO; CABAÑAS-SÁNCHEZ, 2019; WILKIE, 2021).

Otras investigaciones se han orientado en el estudio de las sucesiones desde el currículo y libros de textos escolares, desarrolladas en países como España (RICO; CASTRO; ROMERO, 1996; CAÑADAS; CASTRO, 2007); Inglaterra (JONES, 2011); Irlanda (SULLIVAN; BREEN; O'SHEA, 2013); Venezuela (RAMÍREZ *et al.*, 2015) y Colombia (ACOSTA *et al.*, 2018). En este sentido, las investigaciones reconocen la relevancia del uso de las herramientas didácticas utilizadas por el profesor de matemáticas como el currículo escolar y los libros de textos (BURGOS *et al.*, 2020; CASTILLO; BURGOS, 2022), que fundamentan y direccionan el proceso educativo (HERNÁNDEZ; ZAMORA; LUPIÁÑEZ, 2020) y permiten entender de forma indirecta las prácticas docentes y el aprendizaje de los estudiantes (VARGAS; FERNÁNDEZ-PLAZA; RUIZ-HIDALGO, 2020).

Particularmente, se ha reportado que las sucesiones en los números naturales se conceptualizan en dos nociones: la de un conjunto ordenado y la de un proceso infinito, donde cada término de la sucesión tiene un término siguiente. También se ha registrado que el objetivo de las sucesiones es determinar nuevos términos relacionados con los términos iniciales conocidos de la sucesión, para establecer relaciones entre ellos y en el hallazgo de nuevos términos, para este fin, se pueden aplicar estrategias recursivas o funcionales, donde las recursivas consisten en hallar los siguientes números desde la diferencia entre ellos y la funcional, en construir una regla general de correspondencia que relacione el número de posición con el término de la sucesión (RICO; CASTRO; ROMERO, 1996). En relación con la construcción de la regla general de una sucesión matemática, se han reportado dificultades en

estudiantes y profesores, porque han centrado su atención en el comportamiento de recurrencia o recursividad más que en el de correspondencia (KREBS, 2005).

La investigación de la sucesión matemática en los números naturales basado en el análisis del currículo escolar y libros de texto de matemáticas en México ha sido escasa, la mayoría de los estudios se han interesado por otros temas como el pensamiento algebraico temprano (CABAÑAS-SÁNCHEZ; SALAZAR; NOLASCO-HESQUIO, 2017), los números naturales (MORALES-GARCÍA; NAVARRO-SANDOVAL, 2022), problemas aditivos (RODRÍGUEZ-NIETO *et al.*, 2019), conceptualización de la pendiente (DOLORES-FLORES; RIVERA-LÓPEZ; MOORE-RUSSO, 2020), la derivada (HERNÁNDEZ; ZAMORA; LUPIÁÑEZ, 2020) y medidas de tendencia central (DÍAZ-LEVICOY; MORALES-GARCÍA; RODRÍGUEZ-ALVEAL, 2020).

De ahí el objetivo de esta investigación, que consiste en identificar y relacionar los significados de las sucesiones matemáticas en los números naturales a través de su estructura conceptual, representaciones y modos de uso en el currículo de matemáticas de secundaria en México y en catorce libros de textos utilizados para la enseñanza y aprendizaje de este contenido matemático.

2 Marco Conceptual

El análisis del contenido matemático escolar permite establecer y organizar los significados de un tema de matemáticas por medio de su estructura conceptual, sistemas de representación y modos de uso. Estos componentes evidencian la multiplicidad de significados que se le puede atribuir a los conceptos matemáticos escolares, que se derivan de la noción de un organizador curricular (RICO, 1997) cuyo desarrollo e implicaciones se analizan mediante componentes propios del análisis didáctico que favorecen su estudio.

Este análisis considera tres organizadores curriculares: la estructura conceptual, sistemas de representación y sentido y modos de uso (FERNÁNDEZ-PLAZA, 2016) (ver Cuadro 1).

Organizador Curricular				
Estructura Conceptual			Sistemas de representación	Sentido y Modos de uso
<i>Campo conceptual</i> 1. Hechos 2. Conceptos 3. Estructuras matemáticas	<i>Campo procedimental</i> 1. Destrezas 2. Razonamientos 3. Estrategias	<i>Campo Actitudinal</i> Emociones Normas Valores	Numérico Tabular Algebraico Gráfico Verbal	Términos Contextos Fenómenos Situaciones

Cuadro 1- Análisis del Contenido Matemático Escolar

Fuente: Fernández-Plaza (2016).

2.1 Estructura Conceptual

Para el análisis de los significados del contenido matemático en esta investigación, se fundamenta en el campo conceptual y procedimental. En el campo conceptual, los conceptos son redes estructuradas de hechos, que a su vez se relacionan y organizan, para dar lugar a estructuras conceptuales (FERNÁNDEZ-PLAZA, 2016). Se consideran tres niveles: hechos, conceptos y estructuras conceptuales. En el campo procedimental se consideran las operaciones, propiedades y métodos matemáticos, sus modos de procesamiento y el conocimiento que sustentan (FERNÁNDEZ-PLAZA, 2016).

2.2 Sistemas de representación

En matemáticas, las representaciones son notaciones simbólicas, gráficas o expresiones verbales que nombran conceptos y procedimientos matemáticos, organizados según sus características, propiedades y relaciones en diferentes sistemas de representación (LUPIAÑEZ, 2016). Un sistema se conforma por un conjunto estructurado de notaciones, símbolos y gráficos con una serie de reglas y convenios, para expresar características y propiedades de un concepto matemático (LUPIAÑEZ, 2016). Los sistemas de representación pueden ser: gráfico, verbal, algebraico, tabular, numérico, pictórico, algebraico, entre otros.

2.3 Sentido y modos de uso

El sentido de un contenido matemático hace referencia a las distintas formas de entender, expresar y usar un concepto, y constituyen su significado conjuntamente (RUIZ-HIDALGO, 2016). Estas formas de entender y utilizar el contenido matemático se pueden identificar de tres maneras diferentes: a través de los distintos términos y modos de uso cotidianos, en los contextos matemáticos que da respuesta el concepto y determinan para qué se usa y en las situaciones o escenarios en los que tiene aplicación y se trabaja el contenido matemático.

3 Metodología

Es una investigación cualitativa (COHEN; MANION; MORRISON, 2018) basada en una de las dimensiones de la propuesta teórica-metodológica del análisis didáctico propuesto en Rico y Moreno (2016) conocida como *Análisis de Contenido Matemático*. El contenido de interés es la sucesión matemática en los números naturales. La fuente de datos para el análisis se obtuvo de los sitios *web* de la Secretaría de Educación Pública de México (SEP) que son los documentos curriculares oficiales de matemáticas de secundaria (SEP, 2017) y catorce libros de textos de matemáticas aprobados por la SEP, los cuales garantizan que sus contenidos se ajustan a los planes y programa de estudios establecidos para este nivel escolar.

La investigación se desarrolló en tres fases: 1) Revisión de los documentos curriculares y libros de textos de matemáticas de secundaria en México; 2) Selección de los libros de textos que aborden el tema de sucesiones matemáticas en los números naturales en primero, segundo y tercero de secundaria (ver Tabla 1); 3) Análisis de Contenido Matemático basado en las categorías de estructura conceptual, sistemas de representación y modos de uso, enfocado en las sucesiones matemáticas en los números naturales.

Tabla 1 – Libros de textos analizados por cada grado de secundaria.

Grado de secundaria	Editoriales	Cantidad de libros de textos analizados	Cantidad de tareas sobre sucesiones
Primero	Larousse, Santillana, SM e Innovat	5	36
Segundo	Fernández editores, Larousse, SM, Innovat y Esfinge	6	58
Tercero	SM, Esfinge y Correo del Maestro	3	31
Total		14	125

Fuente: elaborada por el autor.

Para el análisis de contenido, en cada libro de texto se identificó qué secciones del libro se aborda las sucesiones matemáticas, luego se analizó la estructura conceptual sobre este contenido matemático y las tareas que se proponen en cada libro, posteriormente se identificaron qué sistemas de representación se utilizan y los modos de usos que se proponen (ver Figura 1). Esta información, se organizó y sistematizó en tablas para registrar todo lo relacionado con el contenido matemático de interés.

Para formalizar > 8. Reúnete con un compañero y realicen una lectura comentada del siguiente texto. En caso de que haya algo que no comprendan, no duden en preguntarle a su profesor para que les ayude a aclararlo.

Una sucesión es una lista de figuras o números que siguen una regla. La **sucesión** donde la diferencia entre un término y el siguiente es una constante se llama sucesión con **progresión aritmética**. A cada elemento de la sucesión se le llama **término**. Por ejemplo:

Sucesión de figuras: Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3 Fig. 4

Sucesión de números (palillos): 3 5 7 9

La forma de una sucesión con progresión aritmética está dada por la expresión: $an + b$, donde a es la diferencia entre términos consecutivos, n representa cualquier término de la sucesión, y b es la cantidad que se suma o se resta. Para determinar la regla general de la sucesión: 4, 7, 10, 13, 16, 19,...

- Primero se determina el valor de a) calculando la diferencia entre términos consecutivos, por ejemplo, $a = 7 - 4 = 3$.
- Para determinar el valor de b es necesario sustituir los valores que ya se conocen en la forma $an + b$, donde n se sustituye por cualquier valor conocido (en este caso tomamos uno, cuyo valor es cuatro) y finalmente se despeja b . Así tenemos que:

$$3(1) + b = 4, \text{ donde } b = 4 - 3 = 1$$

- La regla general de la sucesión es: $3n + 1$
- Comprobando la regla, por ejemplo, para $n = 4$, resulta: $3(4) + 1 = 13$. Como se puede notar, 13 ocupa el término cuatro de la sucesión.

Ponlo en práctica > 9. Resuelvan el siguiente problema. El siguiente esquema representa una máquina en la cual se introducen los números que corresponden con la posición de los términos de una sucesión, y la máquina los procesa y saca el número que les corresponde.

a) Anota qué números saldrán de la máquina al introducir los primeros términos.

Entra \rightarrow Sale \rightarrow 1,

b) ¿Qué números salen de la máquina si se introducen los términos 50, 100, 500 y 1 000 de la sucesión?

Modos de uso

Sistema de representación pictórica

Sistema de representación numérica

Sistema de representación simbólica o algebraica

Figura 1 – Ejemplo de análisis sobre las sucesiones en el libro de texto de matemáticas de primer grado
Fuente: Martínez y Mohar (2018, p.186).

4 Resultados

4.1 Las sucesiones en el currículo de México

En México, el plan y programas de estudio 2017 de Matemáticas para básica secundaria (SEP, 2017) establecen los propósitos, enfoque pedagógico, organizadores curriculares y aprendizajes esperados, aunque existen consideraciones del antiguo plan y programas de estudios 2011 (SEP, 2011) en los procesos de enseñanza de tercer grado de secundaria, los cuales están articulados con los libros de texto. Los organizadores curriculares se distribuyen en tres ejes temáticos: número, álgebra y variación; forma, espacio y medida y análisis de datos. El contenido matemático escolar de las sucesiones, se ubica en el eje del número, álgebra y variación con el tema patrones, figuras geométricas y expresiones equivalentes. Se estudian en los tres años escolares de secundaria, a través de patrones de tipo numérico y figural, con el fin de promover habilidades de construcción, formulación y obtención de la regla general de la sucesión (ver Cuadro 2).

Grado	Aprendizaje esperado	Orientaciones didácticas
Primero	<ul style="list-style-type: none"> • Formula expresiones algebraicas de primer grado a partir de sucesiones y las utiliza para analizar propiedades de la sucesión que representan. 	<p><i>De la primaria a la secundaria: el paso a la simbolización algebraica:</i> se avanza en el estudio de las sucesiones dando paso a la descripción de las regularidades por medio de una expresión algebraica.</p> <p><i>Formulación y uso de expresiones algebraicas:</i> respecto a las sucesiones, las literales se introducen para representar números generales y en este grado se plantean y resuelven problemas de sucesiones cuyas expresiones algebraicas tienen la forma $ax + b$.</p> <p><i>Uso de TIC:</i> la hoja de cálculo favorece el trabajo con el análisis de relaciones entre expresiones algebraicas de sucesiones de números.</p>
Segundo	<ul style="list-style-type: none"> • Verifica algebraicamente la equivalencia de expresiones de primer grado, formuladas a partir de sucesiones. • Formula expresiones de primer grado para representar propiedades (perímetros) de figuras geométricas y verifica equivalencia de expresiones, tanto algebraica como geométricamente (análisis de las figuras). 	<p><i>Hacia la equivalencia de expresiones algebraicas:</i> verifiquen la equivalencia de expresiones, cuando estas representen la regla de una misma sucesión. Para este fin es recomendable recuperar ejemplos tratados en el primer grado (u otros parecidos) y explicar la equivalencia con base en el hecho de que las distintas expresiones algebraicas representan la misma sucesión.</p> <p><i>Figuras geométricas y equivalencia de expresiones:</i> el cálculo del área y el perímetro de figuras, usando literales para representar las dimensiones, permite relacionar la representación geométrica con la algebraica proporcionando un terreno fértil para ensayar, conjeturar y validar las múltiples representaciones algebraicas de una misma situación y establecer su equivalencia.</p>
Tercero	<ul style="list-style-type: none"> • Formula expresiones de segundo grado para representar propiedades del área de figuras geométricas y verifica la equivalencia de expresiones, tanto algebraica como geométricamente. • Diferencia las expresiones algebraicas de las funciones y de las ecuaciones. 	<ul style="list-style-type: none"> • Algunos problemas de cálculo de áreas de figuras constituyen un campo fértil para obtener expresiones algebraicas y determinar su equivalencia. • A partir de la discusión de la equivalencia de las expresiones algebraicas, es conveniente tratar aspectos importantes de la representación simbólica de las literales que surgen en el proceso del establecimiento de la equivalencia, como la multiplicación y la factorización de expresiones algebraicas y la simplificación de términos semejantes. • En este grado es importante establecer la equivalencia de las fórmulas para el cálculo del área de figuras geométricas como el triángulo, el rombo, el trapecio y los polígonos regulares. Es un momento apropiado para enfatizar la jerarquía de operaciones.

Cuadro 2 – Programa de Matemáticas de Estudios 2017. Educación Básica Secundaria. Matemáticas
Fuente: elaborado por el autor.

4.2 Campo conceptual

La identificación de los *hechos* es realizada por medio de cuatro subcategorías de análisis: términos, notaciones, convenios y resultados, sobre las sucesiones. Los términos son las palabras que se utilizan para denominar los objetos, relaciones y operaciones; las notaciones son los símbolos que expresan propiedades, relaciones y operaciones y los convenios son los acuerdos de uso frecuente, explícitos o tácitos (FERNÁNDEZ-PLAZA, 2016).

En México, las sucesiones se estudian desde el primer año de secundaria, expresadas por medio del lenguaje común. Se reconoce que una sucesión es una lista de figuras o números que siguen una regla, cuyo comportamiento regular es asociado con un patrón. Además, las sucesiones pueden ser una progresión aritmética o geométrica, según su comportamiento. En segundo año, la regla general de una sucesión es una expresión para representar o calcular el número que está en lugar de n , de tipo lineal. En tercer año, se estudian las representaciones figurales y algebraicas de sucesiones cuadráticas como ecuaciones de segundo grado de forma general. A continuación, se detallan los términos, notaciones, convenios y resultados de las sucesiones en relación con los hechos (ver Cuadro 3).

Primer año	Segundo año	Tercer año
Términos		
Sucesión. Expresión general/fórmulas/reglas. Conjunto ordenado. Progresión. Progresión aritmética. Progresión geométrica. Patrón. Diferencia. Término general y particular.	Sucesión. Regla general algebraicas/expresiones algebraicas. Sucesiones numéricas. Patrón. Progresiones aritméticas. Término. Diferencia.	Expresión algebraica. Ecuación de segundo grado o cuadráticas. Término. Consecutivos. Incremento. Regularidades. Constante. Área. Binomios. Variables.
Notaciones		
d (diferencia) a_n (término general) $a_n = a_1 + (n - 1) * d$ (término general) $a_n = a_k + (n - k) * d$ (cualquier término) $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ n (posición del término) a_k (término)	a_k (término) a_1 (primer término de la sucesión) n (posición del elemento) a_n (número de elementos) $a_n = a_1 + (n - 1) * d$ (sucesión aritmética)	$y = ax^2 + bx + c$ (sucesión cuadrática) a, b, c coeficientes Binomios: $a(a + b) = a^2 + ab$ $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ $(a + b)(a + c) = a^2 + (b + c)a + bc$
Convenios		

Patrones numéricos y geométricos. Visualización. Tabulación. n – ésimo término, la letra “ n ” representa cualquier número natural. Expresiones algebraicas de primer grado.	n – ésimo término. Tabulación. Equivalencia de expresiones algebraicas de primer grado. Manipulaciones algebraicas convenientes	Tabulación. Representación gráfica. Equivalencia de expresiones algebraicas cuadráticas.
Resultados		
La sucesión donde la <i>diferencia</i> entre un término y el siguiente es una constante.	La sucesión aritmética obtiene todos sus términos sumando al anterior un número fijo llamado <i>diferencia</i> , excepto al primer término.	En las sucesiones cuadráticas el aumento en una de las variables no es proporcional al aumento de la otra variable.

Cuadro 3 – Hechos de las sucesiones en secundaria

Fuente: elaborado por el autor.

La identificación de los *conceptos* se caracteriza por la abstracción y generalización de las sucesiones. Los conceptos se expresan por comprensión o extensión, que establecen una clase o conjunto de objetos (FERNÁNDEZ-PLAZA, 2016). En el Cuadro 4 se presentan los conceptos identificados en el currículo escolar de México sobre las sucesiones. En secundaria, se define una sucesión como un conjunto ordenado de objetos que suceden unos de otros, según un criterio determinado. Cuando la primera diferencia entre los términos de una sucesión aritmética es constante, la sucesión es lineal. Si la segunda diferencia es constante, la sucesión es cuadrática.

Primer año	Segundo año	Tercer año
Conceptos		
Sucesión numérica	Sucesión Sucesión aritmética Sucesión lineal	Sucesión cuadrática

Cuadro 4 – Conceptos de las sucesiones en secundaria

Fuente: elaborado por el autor.

La identificación de las *estructuras* se ubica en el tercer nivel de complejidad, porque están asociados con los conceptos formales, transformaciones, operaciones y propiedades de las sucesiones (ver Cuadro 5). Cabe resaltar, que estas estructuras no se exponen explícitamente en los planes, programas de estudios y libros de texto de matemáticas en secundaria. Para ello, se retoman de CAÑADAS (2007) y NUÑEZ-GUTIERREZ (2018).

Estructuras
Definición de sucesión en los números naturales, $\varphi(n) = n$, para todo $n \in \mathbb{N}$ Término general de una sucesión $\{a_n\}$. Finitud $\{F_n\}_{n=k}^{\infty}$ (infinita) Acotación. Recurrencia. Convergencia. Progresiones aritméticas de orden superior: $a_n = c_0x^p + c_1x^{p-1} + \dots + c_{p-1}x + c_p$ Diferencias finitas: $\Delta u_0 = u_1 - u_0, \Delta u_1 = u_2 - u_1, \dots, \Delta u_n = u_n - u_{n-1}, u_{n+1} - u_n, \dots$

Cuadro 5 – Estructuras conceptuales de las sucesiones

Fuente: elaborado por el autor.

Desde las matemáticas, se presentan dos tipos de definiciones sobre la sucesión: intuitiva y formal. La primera hace referencia a una lista ordenada de elementos $a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \dots, a_n$. Cada elemento a_k se denomina *término k-ésimo*, donde k es el *subíndice* o *índice*. La segunda define a la sucesión de números naturales, como una función cuyo dominio es el conjunto de los números naturales y su rango es el conjunto de los reales. En los números reales, una sucesión $\{a_n\}$ es una función $S: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ de una variable n donde $\text{dom } \{S\} = \mathbb{N}$; es decir, a cada $n \in \mathbb{N}$, le corresponde un número real, a_n es el término n-ésimo o general de la sucesión. Las sucesiones cumplen con propiedades que permiten clasificarlas y diferenciarlas según: finitud, acotación, monotonía, recurrencia y convergencia.

En particular, las progresiones son casos especiales de sucesiones. Una progresión es una sucesión numérica que cumple con ciertas condiciones con respecto al valor entre un término y el siguiente. Una progresión aritmética es una sucesión infinita numérica donde cualquier término (distinto del primero) se obtiene sumando un número fijo al anterior. Se expresa a tal sucesión como: a_1, a_2, a_3, \dots . Las propiedades específicas de este tipo de sucesiones, progresiones aritméticas de orden 1 y 2 en los números naturales son (ver Cuadro 6):

Propiedades	Características
Monotonía	Estrictamente creciente
Finitud	Infinita
Acotación	No acotada
Convergencia	Divergente
Recurrencia	De orden 2 o 3

Cuadro 6 – Propiedades de las progresiones aritméticas de orden 1 y 2
Fuente: elaborado por el autor.

4.3 Campo procedimental

Según Fernández-Plaza (2016), se constituye de las operaciones, propiedades y métodos matemáticos, modos de procesamiento y el conocimiento que sustentan. En particular, se consideran tres niveles y son relacionados con las sucesiones desde el currículo escolar y los libros de texto mexicanos en secundaria: *destrezas*, *razonamientos* y *estrategias* (ver Cuadro 7). Las *destrezas* son el procesamiento secuenciado de contenidos básicos a través del uso de convenio y manipulación de las notaciones correspondientes sobre las sucesiones matemáticas. El *razonamiento* implica el procesamiento de inferencias lógicas evidenciadas con el contenido matemático en estudio. Las *estrategias* refieren al procesamiento de conceptos y la conexión

de razonamientos con una o varias estructuras en relación con las sucesiones.

Primer año	Segundo año	Tercer año
Destrezas		
Representar algebraicamente la regla general de una sucesión con constante aditiva a partir del lugar que ocupa un término de la sucesión.	Representar mediante expresiones algebraicas equivalentes la regla de sucesiones aritméticas.	Representar algebraicamente expresiones de segundo grado para representar propiedades del área de figuras geométricas
Razonamiento		
Razonamiento Matemático (inductivo, deductivo y analógico): Análisis de figuras como terreno útil para la formulación de conjeturas o hipótesis y su validación. Determinar el término k-ésimo de la sucesión. Determinar expresiones algebraicas de las sucesiones de figuras o numéricas. Validar las expresiones algebraicas en casos conocidos de la sucesión.		
Estrategias		
Arreglos geométricos y descomposición de figuras. Organización de tablas. Recurrencia.		

Cuadro 7 – Campo procedimental para las sucesiones en México

Fuente: elaborada por el autor.

Mapas Conceptuales

Para resumir y extraer la información (síntesis) sobre la estructura conceptual de las sucesiones de los números naturales desde las matemáticas y el currículo mexicano, se construyen mapas conceptuales, que son herramientas que compendian e integran los conocimientos acerca de un determinado contenido y sus relaciones. En el mapa conceptual de la Figura 2, se agrupa la información identificada sobre la estructura conceptual de las sucesiones en el currículo de México, el cual incluye la definición, propiedades, tipología (progresiones) y términos.

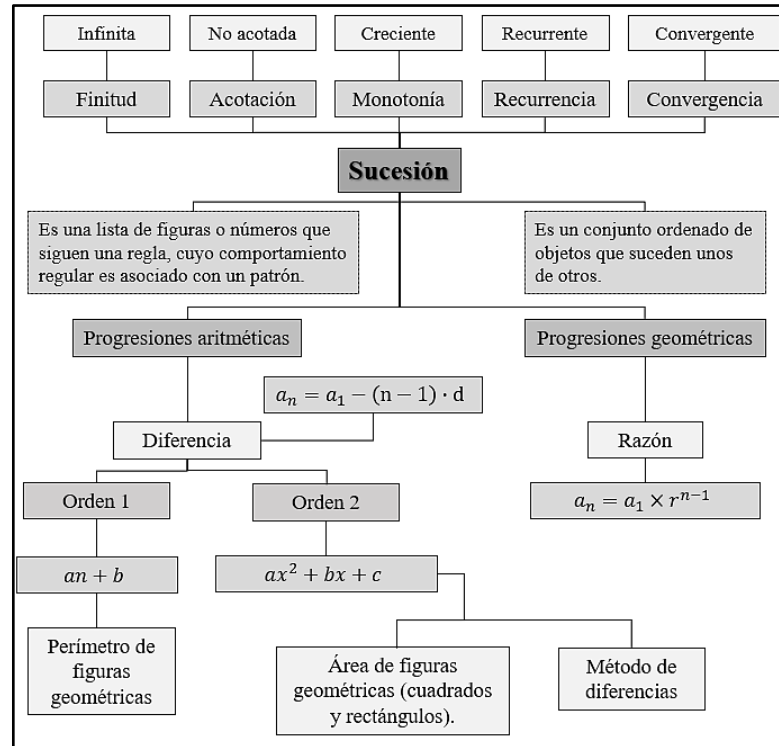


Figura 2 – Mapa conceptual sobre las sucesiones en el currículo mexicano de secundaria
Fuente: elaborada por el autor.

4.4 Sistemas de representación

Las características y propiedades de las sucesiones de números naturales son expresadas en distintas representaciones. Se identificaron cinco registros o sistemas de representaciones de las sucesiones: gráfico, verbal, numérico, pictórico o figural, tabular y algebraico (ver Figura 3).

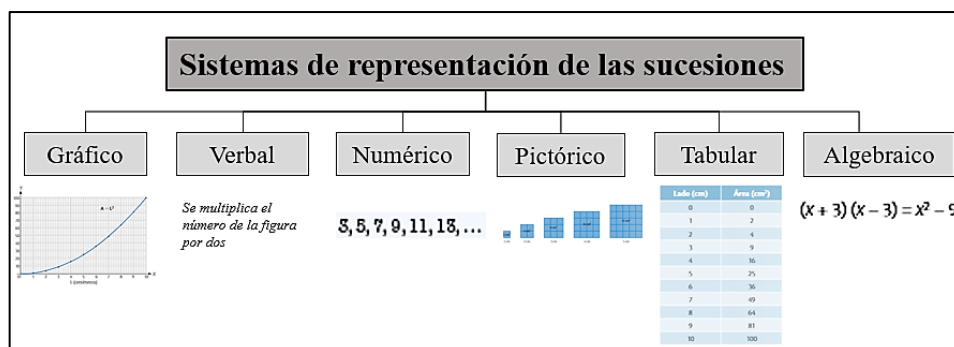


Figura 3 – Sistemas de representación de sucesiones en el currículo mexicano
Fuente: elaborada por el autor.

Desde la literatura especializada, se ha reportado que el uso de múltiples representaciones sobre un tema matemático, como las sucesiones en los números naturales, permite a los estudiantes analizar y relacionar ideas matemáticas de múltiples formas, dan muestras evidentes del desarrollo de su competencia matemática y de su consolidación y, por

consecuencia, mejoran su rendimiento en matemáticas y su habilidad para resolver problemas. (LUPIAÑEZ, 2016). Por tal motivo, es importante profundizar en cómo el currículo de matemáticas aborda las sucesiones desde sus representaciones.

En el primer año, las representaciones usadas con mayor frecuencia son: el numérico, numérico y tabular; en segundo año: numérico, pictórico y algebraico y en tercer año: el algebraico, pictórico y verbal (ver Tabla 2). En este sentido, se reconoce que uno de los sistemas de representación que se utiliza con mayor frecuencia en los tres grados es el pictórico y algebraico. A continuación, se presentan ejemplos sobre cada sistema de representación.

Tabla 2 – Sistemas de representación en los libros de texto de secundaria

Grado	Gráfico	Verbal	Numérico	Pictórico	Tabular	Algebraico
Primero	0	8	26	56	26	12
Segundo	0	4	23	28	18	58
Tercero	7	6	0	21	5	31

Fuente: elaborada por el autor.

El sistema de representación numérico de las sucesiones, identificados en los libros de texto de secundaria en México, son representados a través de secuencias de números ordenados (ver Figura 4), estos números se reconocen como casos particulares o términos k-ésimo de una sucesión. Desde este sistema, por lo general se les demanda a los estudiantes continuar la sucesión con los términos cercanos.

a) Analicen las siguientes sucesiones completándolas hasta el séptimo término:

- 3, 9, 15, 21, _____, _____, _____...
- 2, 8, 14, 20, _____, _____, _____...
- 4, 10, 16, 22, _____, _____, _____...
- 15, 19, 23, 27, _____, _____, _____...
- 21, 32, 43, 54, _____, _____, _____...
- 8, 15, 22, 29, _____, _____, _____...

Figura 4 – Sistemas de representación numérico en primer año de Secundaria

Fuente: Hernández y Jiménez (2018, p.120).

El sistema de representación algebraico se reconoció como el término general de las sucesiones representado por medio de expresiones algebraicas de forma polinómica o recurrente. Por ejemplo, el término general de una sucesión lineal es expresado: $a_n = a_1 + (n - 1) * d$ (ver Figura 5).

La expresión general para determinar cualquier término de una progresión aritmética es

$$a_n = a_1 + d(n - 1)$$

donde

- a_n = término de la sucesión,
- a_1 = primer término de la sucesión,
- d = diferencia entre dos términos de la sucesión,
- n = número del término de la sucesión que se busca.

Figura 5 – Sistemas de representación algebraico en segundo año de secundaria
Fuente: González y Castañeda (2019, p.182).

El sistema de representación verbal es relacionado con el lenguaje matemático académico (CAÑADAS, 2007). Por ejemplo, la expresión algebraica de la forma $3x - 9$, equivale en una representación verbal a *multiplica el número por 3 y al resultado le restas 9* (ver Figura 6). Cabe resaltar, que, en los libros de texto en México, la representación verbal lo utilizan de manera sinónima a lenguaje común.

- De la regla: "Multiplica el número por 3 y al resultado le restas 9, la expresión algebraica es: $3n - 9$, o bien, $3a - 9$. Pero como corresponde a una sucesión, se debe expresar como $3n - 9$, donde n es el **enésimo** término. Los términos de una sucesión se simbolizan con la letra T seguida del orden de éste; por ejemplo, el segundo término: T_2 o el vigésimo cuarto: T_{24} . Para determinar T_{11} de $3n - 9$, se sustituye n por el 11:

$$3(11) - 9 = 33 - 9 = 24$$

$$T_{11} = 24$$

Figura 6 – Sistemas de representación verbal en primer año de secundaria
Fuente: Hernández y Jiménez (2018, p.182).

En la representación gráfica de las sucesiones, se utilizan los planos cartesianos admitido como medio gráfico estándar o convencional. Para ello, se considera que el término k -ésimo corresponde a la ordenada y la posición que ocupa, a la abscisa. Por ejemplo, la representación gráfica de una sucesión cuadrática de la forma x^2 en los números naturales es parte de una curva de la parábola (ver Figura 7).

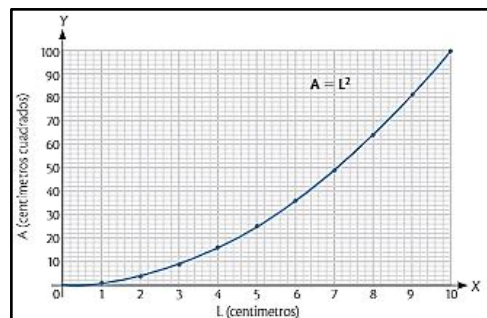


Figura 7 – Sistemas de representación gráfico en tercer año de secundaria
Fuente: Villaseñor, García y Hernández (2021, p.94).

El sistema de representación pictórico de las sucesiones es representado por medio de objetos configurados reconocidos patrones figurales o geométricos, los cuales son estructurados en relación con la posición que ocupan y los términos k -ésimo, representando el comportamiento regular de la sucesión. La mayoría de las representaciones para la enseñanza de las sucesiones en secundaria (México) utilizan configuraciones de gráficos como figuras geométricas, estrellas, configuraciones puntuales, entre otras (ver Figura 8). La investigación ha reportado que los contextos que involucran patrones figurales promueven habilidades matemáticas como el razonamiento, generalización, visualización, entre otras, porque sus

arreglos o configuraciones de objetos pueden ser visualizadas e interpretadas de distintas formas, además, involucra la coordinación de habilidades inferenciales perceptivas y simbólicas, favoreciendo la construcción de diferentes reglas generales (NUÑEZ-GUTIERREZ; CABAÑAS-SÁNCHEZ, 2020).

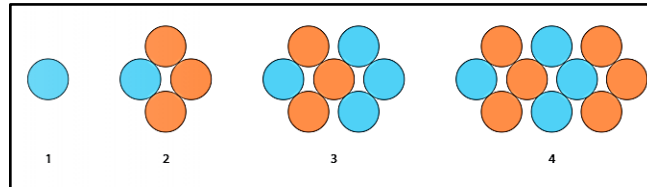


Figura 8 – Sistemas de representación pictórico en primer año de secundaria
Fuente: Martínez y Mohar (2018, p. 193).

Es oportuno mencionar que los libros de texto hacen uso de múltiples sistemas de representación sobre una sucesión y demandan a los estudiantes realizar conversiones o traducciones de una representación a otra (LUPIAÑEZ, 2016), en relación con una misma sucesión. Por ejemplo, en la Figura 9, una sucesión de la forma L^2 , se representa en el sistema pictórico, numérico, gráfico, tabular y algebraico. Además, se enfatiza la relación con otros conceptos matemáticos como el área de un cuadrado y variación.

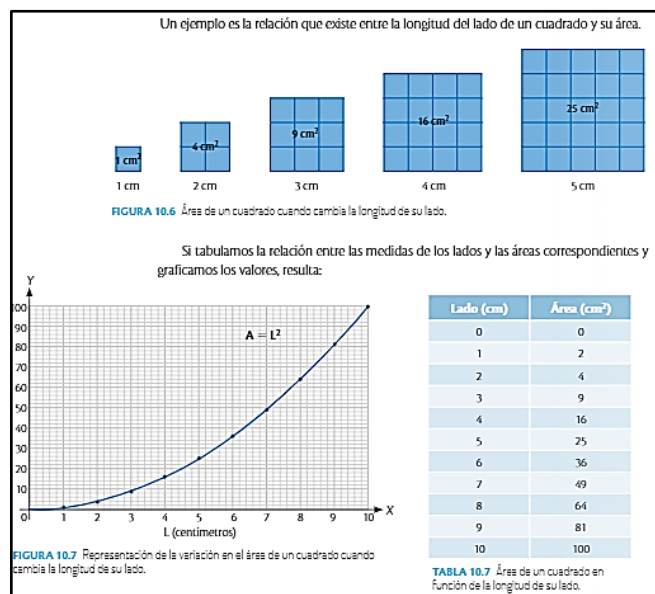


Figura 9 – Múltiples representaciones de la sucesión de la forma L^2
Fuente: Villaseñor, García y Hernández (2021, p.94).

4.5 Sentido y modos de usos

El sentido y modos de usos de las sucesiones en el currículo de México predominan en el contexto figural y en la resolución de situaciones problemas desde la biología y física.

Contexto figural

En el contexto figural se destaca el uso de las representaciones de las sucesiones a través de patrones figurales en el que se establecen relaciones de correspondencia entre los objetos (variable dependiente) y la posición, etapa o figura que ocupan (variable independiente). En este sentido, se identificaron dos formas de presentar el contexto figural según los objetos:

1) Un objeto en la variable dependiente y la figura o posición que ocupa como variable independiente, por ejemplo, palillos, estrellas y pentágonos (ver Figura 10). La demanda de estas tareas consiste en construir la regla general de la sucesión que representa el comportamiento del objeto según corresponda.

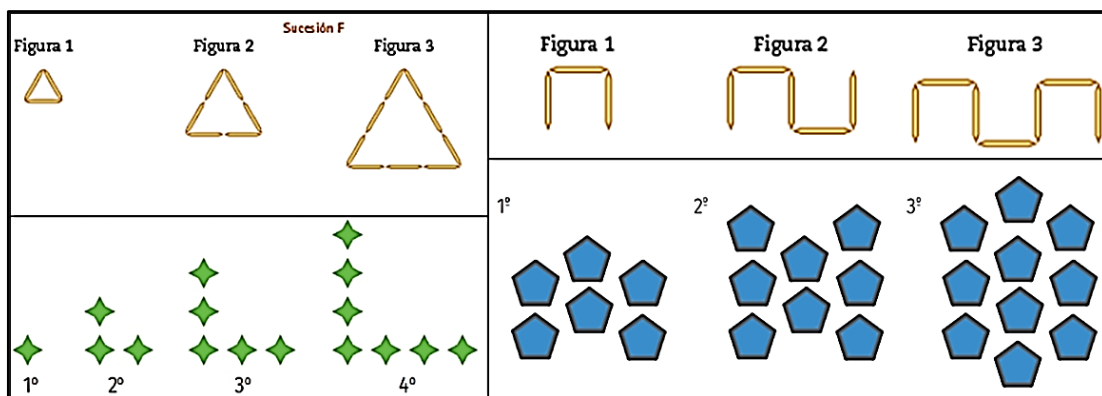


Figura 10 – Contexto figural de las sucesiones con un solo objeto

Fuente: Block, García y Balbuena (2018, p.112, 116); Hernández y Jiménez (2018, p. 116, 226).

2) Dos o más objetos en la variable dependiente y la figura o posición que ocupa como variable independiente (ver Figura 11). Estos objetos están bien configurados y representan cada uno el comportamiento de una sucesión, en relación con el objeto y la posición o número de figura que ocupan. Por ejemplo, en una secuencia pueden estar en la misma figura rombos, trapecios y triángulos y en conjunto conforman una misma figura. Cada polígono, tiene un comportamiento regular distinto en relación con el número de figura.

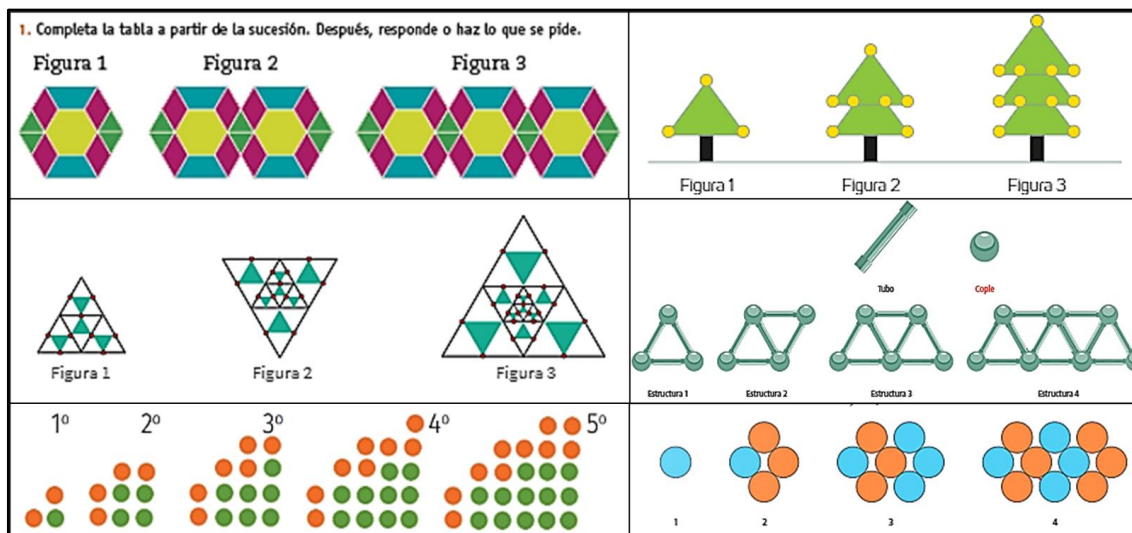


Figura 11 – Contexto figural de las sucesiones con varios objetos

Fuente: Block; García; Balbuena (2018, p. 117); Trigueros *et al.*, (2018, p. 141); Hernández; Jiménez (2018, p. 117); Martínez y Carrasco (2018, p. 146), Martínez y Mohar (2018, p.184, 193).


Biología

De acuerdo con lo evidenciado en los libros de texto, las sucesiones se presentan en la naturaleza a través de fenómenos que siguen una regla de repetición o recurrencia, las cuales siguen un patrón o regularidad (ver Figura 12).


Figura 12 – Sucesiones en la biología

Fuente: Martínez y Mohar (2018, p. 182).

Se reconoce que el contexto de la biología permite el planteamiento de situaciones problemas que vinculan las sucesiones matemáticas en los números naturales a través de patrones de recurrencia o repetición los cuales se pueden representar a través de modelos matemáticos. En este contexto se identificaron situaciones que demandan la construcción de reglas generales que representen sucesiones, apoyados de otros sistemas de representaciones de acuerdo con las tareas que proponen en los libros de texto (ver Figura 13).



Las abejas construyen sus panales con celdas hexagonales. Esta forma les permite aprovechar mejor el espacio y contar con cavidades que no tienen picos ni salientes que las puedan lastimar.

Se pueden unir dos hexágonos compartiendo una arista, de manera que la figura resultante tiene 10 lados. El tercer hexágono que se construya, debe compartir dos aristas con los anteriores para formar una figura con 12 lados.

Sigamos aumentando hexágonos de manera que cada nuevo hexágono que se dibuje comparta dos aristas con los que ya están en la figura.

a) Dibujen en su cuaderno la figura 4. No importa cómo acomoden el hexágono nuevo, mientras garanticen que comparta dos aristas con los que ya están dibujados.

b) Completen la tabla.


Figura	4	5	6	7	11	12
Lados						

c) A partir de cómo aumenta el número de lados entre una figura y la siguiente, obtengan una expresión algebraica para encontrar el número de lados de la figura número k .


d) Verifiquen que su expresión algebraica da como resultado el número correcto de lados de las figuras 1, 2, 3 y 4.

e) Usen la expresión algebraica para determinar cuántos lados hay en las siguientes figuras.
 Figura 20: _____ Figura 35: _____ Figura 60: _____

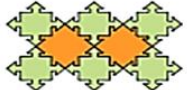
1. Ya sea en la naturaleza o en el arte, es común observar en los acontecimientos de nuestro alrededor regularidades o patrones. Una manera de representarlos es mediante las sucesiones de números o figuras, como en el siguiente ejemplo:



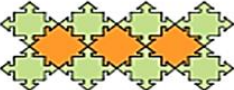
1




2



3



4

a) ¿Cuántas figuras del tipo  debe tener el diseño 10? Argumenten su respuesta.

b) ¿Cómo se forma cada figura a partir de la anterior?

Figura 13 – Situaciones problemas de sucesiones en biología
 Fuente: Martínez y Carrasco (2018, p. 153), Martínez y Mohar (2018, p. 183).

Física

Se identificó que uno de los contextos donde se evidencia las sucesiones es en la física y es vinculado con la relación de correspondencia entre distancia y tiempo para las sucesiones de tipo lineal (ver Figura 14). Para el análisis de esta relación, se apoyan de tablas de valores de doble entrada y demandan la construcción de la regla general que represente el comportamiento de la sucesión a través de expresiones algebraicas.

<p>Marta está entrenando para una carrera de 5 kilómetros. El primer día corre 2 kilómetros y cada semana aumenta 250 metros a su recorrido.</p> <p>Completa la tabla en la que se registra la distancia que recorrió Marta en los primeros días de su entrenamiento.</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr style="background-color: #e91e63; color: white;"> <th>Semana</th> <th>1</th> <th>2</th> <th>3</th> <th>4</th> <th>5</th> <th>6</th> <th>7</th> <th>8</th> <th>9</th> <th>10</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="background-color: #e91e63; color: white;">Metros recorridos</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table> <p>a. Describe cómo aumentan las cantidades en la tabla. _____</p> <p>b. ¿En qué semana del entrenamiento Marta empieza a correr 5 kilómetros? _____</p> <p>c. Escribe una expresión que enuncie los metros recorridos por Marta en la semana n-ésima de su entrenamiento. _____</p> <p>d. ¿Funciona tu expresión? Utilízala para las semanas uno y diez del entrenamiento. _____</p>	Semana	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Metros recorridos											<p>Sandra, la mejor amiga de Marta, también va a participar en la competencia. Ella decidió aumentar 250 metros cada semana a su entrenamiento, como su amiga, pero ella empezará trotando 3 kilómetros.</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr style="background-color: #e91e63; color: white;"> <th>Semana</th> <th>1</th> <th>2</th> <th>3</th> <th>4</th> <th>5</th> <th>6</th> <th>7</th> <th>8</th> <th>9</th> <th>10</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="background-color: #e91e63; color: white;">Metros recorridos</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table> <p>a. Escribe una expresión que muestre los metros recorridos por Sandra en cada semana de su entrenamiento. Utiliza n para denotar el número de semana y verifica si tu expresión funciona. _____</p> <p>b. Compara los entrenamientos de Marta, Rubén y Sandra. Escribe en qué se parecen y en qué son diferentes. _____</p>	Semana	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Metros recorridos										
Semana	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10																																			
Metros recorridos																																													
Semana	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10																																			
Metros recorridos																																													

Figura 14 – Situaciones problemas de sucesiones en física
 Fuente: Trigueros *et al.*, (2018, p. 196, 197).

5 Discusión y consideraciones finales

Esta investigación se interesó por identificar y relacionar los significados de las sucesiones matemáticas en los números naturales a través de su estructura conceptual, representaciones y modos de uso desde el currículo mexicano de matemáticas y libros de texto de secundaria. Para esto, establecer los significados de la sucesión se requiere contemplarlo en la totalidad de las nociones básicas que lo constituyen, junto con los símbolos, procedimientos y propiedades que los hacen operativos; también, depende de sus sentidos y modos de uso (FERNÁNDEZ-PLAZA, 2016).

Con base en el análisis del contenido matemático, se identificaron cuatro significados de las sucesiones: conceptual, procedimental, representacional y contextual (ver Figura 15).

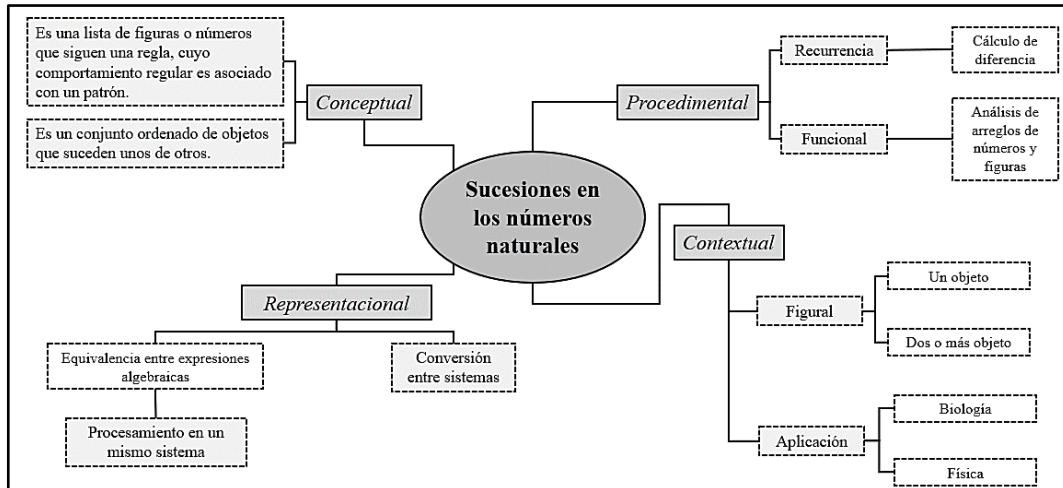


Figura 15 – Significados de la sucesión matemática en el currículo mexicano de secundaria
Fuente: elaboración propia.

- 1) *Significado conceptual*, en el que, desde su estructura, las sucesiones son reconocidas como a) una lista de figuras o números que siguen una regla, cuyo comportamiento regular es asociado con un patrón o, b) un conjunto ordenado de objetos que suceden unos de otros, según un criterio determinado.
- 2) *Significado procedimental*, asociado con la identificación de la relación de recurrencia y correspondencia de la sucesión. Para la recurrencia, se promueve calcular las diferencias entre los términos de la sucesión para determinar su incremento y completar nuevos términos de la sucesión. En el de correspondencia, se evidencia el análisis de las figuras o números como terreno útil para establecer una relación entre el término k -ésimo y la posición que ocupa dentro de la sucesión, con el fin de formular conjeturas o hipótesis a través de la construcción del término general o expresión algebraica de la sucesión, la cual puede ser de tipo lineal o cuadrática y validar estas conjeturas, a través de la comparación entre expresiones algebraicas en sus equivalencias.
- 3) *Significado representacional*, se fundamenta en los seis sistemas de representación de la sucesión como verbal, numérico, pictórico, tabular, algebraico y gráfico. Siendo el numérico, pictórico y algebraico los más utilizados en los libros de texto. En este componente se destacan acciones como el procesamiento, por ejemplo, la equivalencia entre expresiones algebraicas de las sucesiones (algebraica a algebraica) y la conversión entre sistemas de representación, desde lo pictórico a lo numérico y a su vez a lo algebraico.
- 4) *Significado contextual*, enfocado en el uso las sucesiones desde lo figural y otras disciplinas como la biología y la física. En el contexto figural se destacan dos formas

de representar las sucesiones en el que se vinculan los objetos que hacen parte del patrón figural, los cuales son configuraciones de objetos bien estructuradas que facilitan la visualización, el análisis y la interpretación de las sucesiones en representaciones pictóricas. Además, se promueve el conteo y la descomposición estratégica de las figuras para identificar y representar en distintos sistemas el comportamiento de la sucesión (ver Figura 16).

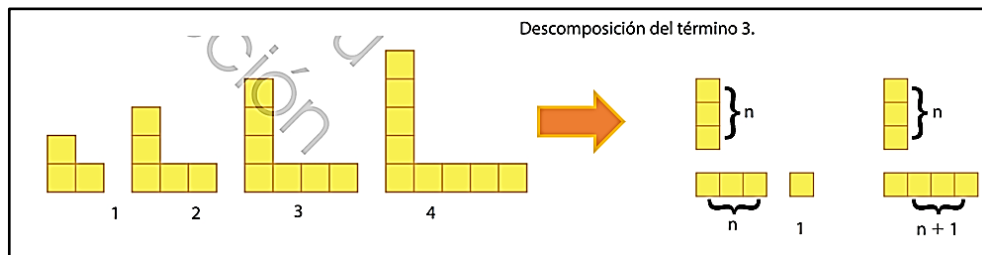


Figura 16 – Descomposición estratégica de una sucesión desde su representación figural
Fuente: Xique (2018, p. 158).

En relación con los reportes de la investigación sobre el análisis de contenido acerca de las sucesiones matemáticas en otros países, se identifican aspectos que coinciden con este estudio, por ejemplo, reconocer a la sucesión como un conjunto de ordenado y de procesos infinitos (RICO; CASTRO; ROMERO, 1996) y potenciar su significado desde la correspondencia y no solo a través de relaciones de recurrencia (KREBS, 2005), aprovechando la pluralidad de los sistemas de representación de las sucesiones.

Por otra parte, los hallazgos de esta investigación evidencian que la transición de enseñanza y aprendizaje de las sucesiones en México, se apoyan en las múltiples representaciones del contenido matemático y son conectados con su estructura matemática, procedimental y resolución de situaciones problemas. En este sentido, el currículo escolar mexicano y los libros de texto plantean iniciar con la exploración de las sucesiones desde lo numérico, figural y tabular para, luego, avanzar hacia la representación algebraica en el marco de las sucesiones lineales y, finalmente, en la representación algebraica de sucesiones cuadráticas. En este proceso, se avanza en la formalidad del concepto de sucesión en los números naturales. Sin embargo, es importante que esta información que se registra en el currículo escolar mexicano sea evidente en la práctica docente y se sugiere aprovechar otros sistemas de representación como los materiales manipulables y las herramientas tecnológicas matemáticas.

Por último, se reconoce que la propuesta para el análisis de contenido (RICO; MORENO, 2016) empleada en esta investigación, permitió delimitar, precisar y sistematizar las especificades sobre las sucesiones matemáticas en relación con la diversidad de sus

significados, desde el currículo escolar mexicano en Educación Secundaria. Esta información sintetizada proporciona la estructura interna de la matemática escolar en los libros de texto, los cuales son utilizados para los procesos de enseñanza y aprendizaje de las sucesiones matemáticas y puede ser útil para los profesores de matemáticas en secundaria. Sin embargo, una de las limitaciones de este estudio consiste en que el análisis se realizó bajo un solo lente teórico-metodológico y, posiblemente, este tema matemático puede ser analizado desde otras perspectivas teóricas. Además, los materiales analizados son específicos en un contexto determinado.

Referencias

- ACOSTA, A.; CUERVO, O.; PINZÓN, M.; SALAMANCA, S. **Progresión aritmética**. Bogotá: Universidad de los Andes, 2018. Disponible en: http://funes.uniandes.edu.co/9561/1/G1_DocumentoBase_ProgresionAritmetica.pdf. Acceso en: 3 ago. 2022.
- ARTIGUE, M. La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En: GÓMEZ, P. (ed.). **Ingeniería didáctica en educación matemática**. México: Grupo Editorial Iberoamericano, 1995. p. 97-140.
- BLOCK, D.; GARCÍA, S.; BALBUENA, H. **Matemáticas 1**. México: SM, 2018.
- BURGOS, M.; CASTILLO, M. J.; BELTRÁN-PELLICER, P.; GIACOMONE, B.; GODINO, J. D. Análisis didáctico de una lección sobre proporcionalidad en un libro de texto de primaria con herramientas del enfoque ontosemiótico. **Bolema**, Río Claro, v. 34, n. 66, p. 40-68, jan./abr. 2020.
- CABAÑAS-SÁNCHEZ, G.; SALAZAR, V.; NOLASCO-HESQUIO, H. Tareas que potencian el desarrollo del pensamiento algebraico temprano en libros de texto de matemáticas de primaria. En: AKÉ, L.; CUEVAS-ROMO, J. (Eds.). **Pensamiento algebraico en México desde diferentes enfoques**. San Luis Potosí: Universidad Autónoma de San Luis Potosí, 2017. p. 13-35.
- CAÑADAS, M.C. **Descripción y caracterización del razonamiento inductivo utilizado por estudiantes de educación secundaria al resolver tareas relacionadas con sucesiones lineales y cuadráticas**. 2007. 663. Tesis (Doctorado en Didáctica de la Matemática) – Universidad de Granada, Granada, 2007.
- CAÑADAS, M.C; CASTRO, E. A proposal of categorisation for analysing inductive reasoning. **PNA**, Granada, v. 1, n. 2, p. 69-81, 2007.
- CASTILLO, M. J.; BURGOS, M. Reflexiones de futuros maestros sobre la idoneidad didáctica y modo de uso de una lección de libro de texto. **Bolema**, Río Claro, v. 36, n. 72, p. 555-579, jan./abr. 2022.
- COHEN, L.; MANION, L.; MORRISON, L. **Research methods in education**. Londres: Routledge, 2018.
- DÍAZ-LEVICOY, D.; MORALES-GARCÍA, L.; RODRÍGUEZ-ALVEAL, F. Las medidas de tendencia central en libros de texto de educación primaria en México. **Revista Paradigma**, Maracay, v. 41, [s.n.], p. 706-721, jun. 2020.

- DOLORES-FLORES, C.; RIVERA-LÓPEZ, M. I.; MOORE-RUSSO, D. Conceptualizations of slope in Mexican intended curriculum. **School Science and Mathematics**, v. 120, n. (2), p. 104-115, 2020.
- FERNÁNDEZ-PLAZA, J. Análisis del Contenido. *En*: RICO, L.; MORENO, A. (eds.). **Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria**. Granada: Pirámide, 2016. p. 103-117.
- GONZÁLEZ, R.; CASTAÑEDA, A. **Matemáticas 2**. México: SM, 2019.
- HERNÁNDEZ, J. M.; JIMÉNEZ, L. **Matemáticas 1**. México: Larouse, 2018.
- HERNÁNDEZ, J.; ZAMORA, R.; LUPIAÑEZ, J.L. Estudio comparativo de los significados y expectativas del currículo oficial. **PNA**, Granada, v. 14, n. 4, p. 241-69, 2020.
- JONES, K. The topic of sequences and series in the curriculum and textbooks for schools in England: a way to link number, algebra and geometry. *En*: INTERNATIONAL CONFERENCE ON SCHOOL MATHEMATICS TEXTBOOKS, 1., 2011, Shanghai. **Proceedings...** Shanghai: East China Normal University, 2011. p. 1-8. Disponible en: http://math.ecnu.edu.cn/academia/icsmt/programme_booklet1.pdf. Acceso en: 3 ago. 2022.
- KREBS, A. S. Take time for action: Studying students' reasoning in writing generalizations. **Mathematics Teaching in the Middle School**, Oxford, v. 10, n. 6, p. 284-287, 2005.
- LUPIAÑEZ, J.L. Sistemas de representación. *En*: RICO, L.; MORENO, A. (eds.). **Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria**. Granada: Pirámide, 2016. p. 119-137.
- MANFREDA, V.; SLAPAR, M.; HODNIK, T. Comparison of competences in inductive reasoning between primary teachers' students and mathematics teachers' students. *En*: MAJ-TATSIS, B.; TATSIS, K. (eds.). **Generalization in mathematics at all educational levels**. Rzeszów: Wydawnictwo Uniwersytetu Rzeszowskiego, 2012. p. 299-331.
- MARTÍNEZ, M.; MOHAR, F. D. **Matemáticas 1**. México: Innovat, 2018.
- MARTÍNEZ, P.; CARRASCO, G. **Matemáticas 1**. México: Santillana, 2018.
- MORALES-GARCÍA, L.; NAVARRO-SANDOVAL, C. Idoneidad epistémica del significado de número natural en libros de texto mexicanos. **Bolema**, Río Claro, v. 35, n. 1, p. 1338-1368, dec. 2022.
- NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS - NCTM. **Principles and standards for school mathematics**. Reston: NCTM, 2000.
- NUÑEZ-GUTIERREZ, K. **Razonamiento inductivo en profesores de Matemáticas al resolver tareas de generalización con sucesiones cuadráticas**. 2018.138. Tesis (Maestría en Ciencias Área Matemática Educativa) – Universidad Autónoma de Guerrero, Guerrero, 2018.
- NUÑEZ-GUTIERREZ, K.; CABAÑAS-SÁNCHEZ, G. Inductive reasoning in mathematics teachers when resolving generalization tasks. *En*: SACRISTÁN, A.I.; CORTÉS-ZAVALA, J.C.; RUIZ-ARIAS, P.M. (Eds.). **MATHEMATICS EDUCATION ACROSS CULTURES: PROCEEDINGS OF THE 42ND MEETING OF THE NORTH AMERICAN CHAPTER OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION**. **Proceedings...** México: Cinvestav/AMIUTEM/PME-NA, 2020. p. 790-802.
- RAMÍREZ, K.; ZAMBRANO, M.; IGLESIAS, M.; MARACAY, U. P. E. L. Sucesiones y Series en el Libro de Matemática de 4to Año de la Colección Bicentenario. *En*: PAREDES, Z.; SANOJA, J. (eds.). **Memorias de VIII Jornadas de Investigación del Departamento de Matemática y VII Jornadas**

de Investigación en Educación Matemática. Maracay: CEINEM-NT/Ediciones SIP, 2015. p. 470-494.

RICO, L. Los organizadores del currículo de matemáticas. *En*: RICO, L.; CASTRO, E.; CASTRO, E.; CORIAT, M.; MARÍN, A.; PUIG, L.; SIERRA, M.; SOCAS, M. M. (Eds.). **LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA EN LA ENSEÑANZA SECUNDARIA.** Madrid: ice - Horsori, 1997. p. 39-59.

RICO, L. Aproximación a la Investigación en Didáctica de la Matemática. **Avances de Investigación en Educación Matemática**, Madrid, v. 1, [s.n.], p. 39-63, 2012.

RICO, L.; CASTRO, E.; ROMERO, I. The role of representation systems in the learning of numerical structures. *En*: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP OF PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 20., 1996, Valencia. **Proceedings...** Valencia: PME, 1996, v. 1, p. 87-102. Disponible en: <http://funes.uniandes.edu.co/473/1/RicoL96-43.PDF>. Acceso en: 3 ago. 2022.

RICO, L.; MARÍN, A.; LUPIÁÑEZ, J. L.; GÓMEZ, P. Planificación de las Matemáticas Escolares en Secundaria. El caso de los números naturales. **Revista SUMA**, Badalona, [s.v.], n. 58, p. 7-23, ene. 2008.

RICO, L.; MORENO, A. **Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria.** España: Pirámide, 2016.

RIVERA, F. D.; BECKER, J. R. Abduction–induction (generalization) processes of elementary majors on figural patterns in algebra. **The Journal of Mathematical Behavior**, Amsterdam, v. 26, n. 2, p. 140-155, 2007.

RODRÍGUEZ-NIETO, C. A.; NAVARRO, C.; CASTRO, A. N.; GARCÍA-GONZÁLEZ, M. D. S. Estructuras semánticas de problemas aditivos de enunciado verbal en libros de texto mexicanos. **Educación matemática**, Ciudad de México, v. 31, n. 2, p. 75-104, 2019.

RUÍZ-HIDALGO; J.F. Sentido y modos de uso de un concepto. *En*: RICO, L.; MORENO, A. (eds.). **Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria.** Granada: Pirámide, 2016. p. 139-151.

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA - SEP. **Plan de estudios 2011.** Ciudad de México: SEP, 2011.

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA - SEP. **Aprendizaje clave para la Educación Integral:** Plan y programa de estudio para la Educación Básica. Ciudad de México: SEP, 2017

SIERPINSKA, A. Some remarks on understanding in mathematics. **For the learning of mathematics**, Montreal, v. 10, n. 3, p. 24-41. 1990.

SOSA, L.; APARICIO, E.; CABAÑAS-SÁNCHEZ, G. Characterization of inductive reasoning in middle school mathematics teachers in a generalization task. **International Electronic Journal of Mathematics Education**, Londres, v. 14, n. (3), p. 563–581, 2019.

SULLIVAN, B.; BREEN, S.; O'SHEA. We never did this: A framework for measuring novelty of tasks in Mathematics textbooks. *In*: CONFERENCE ON RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION, 5., 2007, Dublin. **Proceedings...** Dublin: St. Patrick's College Drumcondra, 2007. p. 284-295. Disponible en: <https://mural.maynoothuniversity.ie/6974/1/AOS-we-never-did-this.pdf>. Acceso en: 3 ago. 2022.

TRIGUEROS, M.; DOLORES, M.; TWIGGY, I.; SCHULMAISTER, M.. **Matemáticas 1.** México: Santillana, 2018.



VARGAS, M. F.; FERNÁNDEZ-PLAZA, J. A.; RUIZ-HIDALGO, J. F. Significado de derivada en las tareas de los libros de 1° de Bachillerato. **Bolema**, Río Claro, v. 34, n. 1, p. 911-933, dec. 2020.

VILLASEÑOR, R., GARCÍA, V.; HERNÁNDEZ, J. **Matemáticas 3**. México: Esfinge, 2021.

WILKIE, K. J. Investigating students' attention to covariation features of their constructed graphs in a figural pattern generalisation context. **International Journal of Science and Mathematics Education**, Taiwán, v. 18, n. 2, p. 315-336, 2021.

XIQUE, J. **Matemáticas 2**. México: Larousse, 2018.

Submetido em 03 de Agosto de 2022.

Aprovado em 25 de Março de 2023.