ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n77a17

Pensamiento funcional de estudiantes de tercero de primaria: un estudio bajo el enfoque del early algebra

Third graders' functional thinking: an early algebra study

Esperanza **López Centella** *

ORCID iD 0000-0003-3490-5134

Resumen

En este trabajo se explora, de forma cualitativa, cómo estudiantes de tercer curso de educación primaria (ocho, nueve años) abordan cuestiones sobre un problema de generalización que involucra una relación funcional (*i(m)=3m+2*) presentada pictóricamente. Bajo el uso de la Teoría Fundamentada se examinan las estrategias, relaciones y representaciones empleadas por once estudiantes a través del análisis de sus producciones escritas en respuesta a una tarea en formato papel. Los resultados obtenidos muestran la variedad y el uso combinado de estrategias de los estudiantes, así como de las relaciones de covariación y correspondencia, ocasionalmente asociadas a un razonamiento proporcional que da cuenta de una *ilusión de linealidad*. Asimismo, se observa particularización y generalización contextual en respuesta a una cuestión general. Se percibe la influencia de aspectos geométricos de la representación pictórica que presenta la relación funcional en la resolución de los estudiantes. Se manifiesta la importancia del contexto del problema, de las relaciones numéricas entre cantidades involucradas, del tamaño de las cantidades y de su carácter determinado e indeterminado para promover el pensamiento funcional. Como consecuencia del estudio se derivan implicaciones en el diseño de tareas para este fin en los primeros cursos.

Palabras clave: Pensamiento funcional. Estrategias. Representaciones. Educación Primaria. *Early algebra*.

Abstract

This paper qualitatively explores how third-year primary school students (8-9 years old) approach questions about a generalization problem that involves a pictorially presented functional relationship (*i(m)=3m+2*). Using the Grounded Theory, the strategies, relationships, and representations used by 11 students are examined through the analysis of their written productions in response to a paper-based task. The results obtained show the variety and combined use of strategies by students as well as the use of covariation and correspondence relationships, occasionally, under a proportional reasoning that accounts for an *illusion of linearity*. Likewise, particularization and contextual generalization are observed when it comes to answering a general question. We can see the influence of geometric aspects of the pictorial representation that presents the functional relationship in the students' resolutions. The importance of the problem context, of the numerical relations between the quantities involved, of their size, and of their determinate/indeterminate character to promote functional thinking is manifested. As a consequence of the study, implications are derived in the design of tasks to this end in the first grades.

Keywords: Functional thinking. Strategies. Representation systems. Primary education. Early algebra.

1 Introducción

* Doctora por la Universidad de Granada, la Universidad de Cádiz, la Universidad de Málaga, la Universidad de Almería y la Universidad de Jaén. Profesora Contratada Doctora, Departamento de Didáctica de la Matemática, Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Granada. Granada, España. E-mail: esperanza@ugr.es.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n77a17

El *early algebra* puede entenderse como un enfoque particular para la enseñanza y el aprendizaje temprano de las matemáticas, como una propuesta curricular que enfatiza el pensamiento algebraico desde las primeras etapas. Entre sus objetivos no está adelantar el álgebra formal del currículo de matemáticas a la educación infantil y primaria, sino emprender la actividad algebraica de forma significativa y accesible para los escolares (CARRAHER; SCHLIEMANN; SCHWARTZ, 2008) y promover su capacidad para usarla con sentido a través de situaciones de aprendizaje basadas en contextos familiares para ellos. En este sentido, uno de los principales fines del *early algebra* es favorecer la transición de los números, entendidos como entidades particulares, a patrones numéricos y regularidades mediante un ejercicio de abstracción. Esto incluye la generalización de operaciones aritméticas como funciones (CASTRO; RICO; CASTRO, 1995).

Desde una perspectiva curricular, según lo establecido en *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2000, p. 37), al término de la etapa de educación primaria el alumnado debe ser capaz de (1) comprender patrones, relaciones y funciones; (2) representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas usando símbolos algebraicos; (3) usar modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas; (4) analizar el cambio en varios contextos. En línea con estas expectativas de aprendizaje, es notable y creciente el número de países (e.g. Australia, Canadá, China, Chile, Corea, España, Estados Unidos, Japón, Portugal etc.) que contempla actividad algebraica y aspectos del pensamiento funcional en el área de conocimiento de matemáticas de sus currículos oficiales de educación primaria (ACARA, 2015; DGE, 2018; MEFP, 2022; MINEDUC, 2012; MOE, 2020).

En relación con esto, surgen, de manera natural, interrogantes sobre el tipo y el diseño de cuestiones destinadas a trabajar y promover el pensamiento algebraico. Desde una perspectiva investigadora, conocer en detalle las producciones espontáneas de escolares al enfrentarse por primera vez a cuestiones que involucran relaciones funcionales permite, por un lado, establecer puntos de partida en el trabajo de la actividad algebraica con ellos y, por otro, tomar conciencia sobre sus enfoques al ser expuestos a esta e identificar posibles errores.

La información derivada de dicha investigación resulta de gran valor para el diseño de este tipo de cuestiones. En este contexto, en el presente estudio adoptamos una aproximación funcional al *early algebra* (CARRAHER; SCHLIEMANN, 2007; SMITH, 2008), situando las relaciones funcionales en el centro de los problemas empleados para promover y analizar la actividad algebraica de escolares sin experiencia previa al respecto. Focalizamos nuestra atención en el análisis de sus estrategias, de las representaciones que emplean y de las relaciones entre cantidades que perciben, así como en la detección de aspectos relevantes en el diseño de

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n77a17

estos problemas, con el fin de inspirar y orientar prácticas docentes que incluyan actividad algebraica en estos niveles (DIAS-MORETTI; PEREIRA DAS VIRGENS; OLIVEIRA-ROMEIRO, 2021; MESCOUTO; LUCENA; BARBOSA, 2021; VERGEL; ROJAS, 2018).

2 Marco conceptual y antecedentes

En el presente trabajo concebimos el *pensamiento funcional* según la propuesta de Smith (2008, p. 143), como el "pensamiento representacional que se enfoca en la relación entre dos (o más) cantidades variables, específicamente los tipos de pensamiento que llevan de relaciones específicas (casos individuales) a generalizaciones de esa relación [entre cantidades]". Este autor propone tres modos de analizar patrones y relaciones: (1) *recurrencia*, que implica encontrar una variación dentro de una secuencia de valores; (2) *covariación*, basado en el análisis de cómo dos cantidades varían simultáneamente y mantienen ese cambio como parte explícita y dinámica de la descripción de una función (e.g., *cuando x aumenta en uno, y aumenta en tres*); (3) *correspondencia*, basado en la identificación de una correlación entre variables (e.g., *y es 3 veces x más 2*).

En su estudio, Stephens *et al*. (2012) reportaron que estudiantes de tercero a quinto de primaria fueron capaces de sofisticar su análisis de las relaciones funcionales transitando de la recurrencia a la covariación y la correspondencia a medida que avanzaba el experimento de enseñanza del que fueron partícipes. En contraste con este y otros trabajos similares (MORALES *et al*., 2018; STEPHENS *et al*., 2012), que se identifican metodológicamente como experimentos de enseñanza, en nuestro estudio tratamos de explorar esta situación sin intencionada mediación didáctica en el método, a modo de tabula rasa.

De acuerdo con las evidencias de investigaciones empíricas al respecto (e.g., BLANTON; KAPUT, 2005; MERINO; CAÑADAS; MOLINA, 2013), para explorar el pensamiento funcional de escolares empleamos *problemas de generalización lineal*: "cuestiones que requieren a los estudiantes observar y usar un patrón lineal de la forma $f(n)=an+b$ con $b\neq0$" (STACEY, 1989, p. 1). Warren y Cooper (2006) observaron que alumnos de nueve y diez años de edad identificaron relaciones como la recurrencia y la correspondencia y fueron capaces de generalizar al abordar este tipo de problemas.

En línea con las ideas expresadas por Hiebert y Carpenter (1992, p. 137), en este trabajo entendemos las *representaciones* como "un producto del propio proceso del acto para capturar un concepto o relación matemática de alguna manera". Concretamente, nos centramos en las *representaciones externas*, aquellas que refieren a "objetos visibles o registros que expresan los

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n77a17

puntos de vista de los estudiantes sobre una realidad particular". Merino, Cañadas y Molina (2013) observaron que la mayoría de estudiantes de quinto de primaria, participantes en su estudio, utilizó representaciones múltiples al abordar cuestiones sobre una relación funcional presentada pictóricamente, siendo predominante la representación verbal combinada con la pictórica o la numérica, y dejando de utilizarse la pictórica a medida que los estudiantes avanzaban en las cuestiones.

La representación algebraica formal, destacada entre los aspectos asociados al pensamiento algebraico, se relaciona con el simbolismo y la generalización. Radford (2003) señala que la *generalización algebraica* de un patrón se basa en reconocer lo común en elementos de una secuencia, de modo que se pueda construir expresiones de elementos de la secuencia que quedan más allá del campo perceptivo. Para caracterizar la generalización, Radford (2003) define tres niveles.

La *generalización factual* es una generalización de acciones (numéricas) en forma de esquema operacional que queda ligado a lo concreto. El adjetivo factual trata de sugerir que las variables aparecen de forma tácita en las fórmulas, ejemplificadas en números específicos o *hechos* en forma de una regla concreta (RADFORD, 2018).

La *generalización contextual* generaliza no solo las acciones numéricas sino, también, los objetos de las acciones; va más allá del ámbito de elementos concretos y se ocupa de objetos genéricos que no pueden ser percibidos por los sentidos. Las fórmulas se expresan a nivel más general; las variables y su relación se vuelven explícitas y se las menciona a través de elementos contextuales (e.g., deícticos lingüísticos espaciales) (RADFORD, 2018).

Por último, la *generalización simbólica* aborda el proceso de *desubjetivación* que impone el funcionamiento del lenguaje algebraico, representando en general todos los elementos del patrón o la sucesión en cuestión.

Adoptamos la noción de *estrategia* en el sentido de Rico (1997, p. 31), como un "procedimiento o regla de acción que permite obtener una conclusión o responder a una cuestión haciendo uso de relaciones y conceptos, generales o específicos de una determinada estructura conceptual". En un problema de generalización basado en la función $c(p)=p+5$, Morales *et al*. (2018) reconocieron cuatro tipos de estrategias empleadas por estudiantes de primero de primaria: la respuesta directa, el conteo, la generalización y la operatoria, identificando esta última como predominante.

Asimismo, concebimos una *tarea matemática escolar* como "una propuesta que solicita la actividad del alumno en relación con las matemáticas y que el profesor planifica como oferta intencional para el aprendizaje o como instrumento para evaluación del aprendizaje"

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n77a17

(MORENO; RAMÍREZ, 2016, p. 244). Nótense las diferencias semánticas entre tarea y problema de generalización en este trabajo. Con tarea referimos al instrumento didáctico (formulación – información proporcionada y demandada, representaciones empleadas – enunciado, metas de aprendizaje etc.) que presenta y pregunta acerca de un problema, mientras que con problema de generalización referimos a la situación problemática en sí.

Distintas investigaciones han revelado la relevancia de ciertos aspectos en el diseño de tareas sobre problemas de generalización. Warren y Cooper (2006) confirmaron que el orden de los datos numéricos en las tablas de funciones importa en la detección de relaciones funcionales por parte de estudiantes. Asimismo, a través de su estudio empírico sobre pensamiento funcional, Tanışlı (2011) detectó que el orden creciente en que se mostraban los datos en las tablas de funciones de las tareas de su intervención favoreció relaciones menos sólidas como la recurrencia.

3 Objetivos de investigación

Este trabajo forma parte de un proyecto de investigación más amplio, destinado al estudio cualitativo del pensamiento funcional de alumnado de educación primaria. En el contexto de un problema de generalización contextualizado basado en la función $i(m)=3m+2$, presentado a estudiantes de tercero de primaria, establecemos los siguientes objetivos de investigación: (1) identificar y describir las estrategias de resolución y las representaciones empleadas por tales estudiantes; (2) reconocer y describir las relaciones entre variables y las reglas funcionales usadas por ellos; (3) detectar aspectos relevantes para el diseño de tareas dirigidas a promover el pensamiento funcional de estudiantes de este nivel educativo.

4 Metodología

Realizamos un estudio de investigación cualitativo y descriptivo mediante una intervención de aula con los participantes y el instrumento descritos a continuación.

4.1 Participantes

Un grupo de clase de once estudiantes de tercero de primaria (ocho, nueve años) de un Colegio Público de Educación Infantil y Primaria urbano localizado en la ciudad de Córdoba (España) participó en el estudio. Este grupo fue seleccionado de manera intencional, con base

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n77a17

en sus características (curso, número reducido de estudiantes, actitud participativa de los mismos) y el interés mostrado por su maestro de matemáticas en el presente estudio.

En general, los participantes poseían los conocimientos y habilidades matemáticas contempladas en el currículo escolar español vigente en el tiempo de desarrollo de la fase de intervención del estudio (MECD, 2014). No habían recibido instrucción en el aula sobre relaciones funcionales y tampoco tenían experiencia previa con el tipo de tareas utilizadas en la intervención. Desde su educación infantil habían estado trabajando el cálculo a través de métodos Abiertos Basados en Números (CERDÁ *et al*., 2018) y la mayoría contaba con buenas habilidades de cálculo. En el tiempo de desarrollo del estudio eran capaces de realizar operaciones aritméticas con números relativamente grandes (e.g., 48×25, 998×7) mediante cálculo mental en tan solo unos segundos, lo que les entusiasmaba y motivaba notablemente.

4.2 Instrumento y desarrollo de las sesiones

La intervención en el aula se llevó a cabo en el horario regular de clase de Matemáticas, durante el segundo trimestre de los tres de un curso escolar español. Constó de tres sesiones de trabajo de 90 minutos cada una. En general, el desarrollo de cada sesión se estructuró como sigue: (1) exposición oral de un problema de generalización al grupo de clase por parte de la investigadora con el apoyo de representaciones en la pizarra, ejemplificaciones, cuestiones etc.; (2) trabajo interactivo con el grupo de clase sobre casos particulares del problema; (3) trabajo individual de los participantes en sus hojas de tarea, sin recibir información externa sobre la corrección de sus respuestas o la idoneidad de sus estrategias; (4) puesta en común sin validación o institucionalización del conocimiento: los estudiantes compartían a voluntad con el grupo de clase cómo habían respondido a las cuestiones.

El maestro de matemáticas del grupo también estuvo presente en cada una de las sesiones de trabajo. En la primera sesión, los participantes trabajaron sobre una tarea basada en la relación funcional entre la cantidad de golosinas compradas (c) en una determinada tienda y la cantidad de golosinas obtenidas (o), incluyendo esta última una cantidad fija de golosinas (adicional a las compradas) de regalo por parte de la tienda. Esta tarea presentaba tablas de datos de estas dos variables correspondientes a distintas tiendas (funciones $o_1(c)=c+1$; $o_2(c)=c+2$; $o_3(c)=2c$) y planteaba cuestiones al respecto (e.g., identificar el número de golosinas regaladas por cada tienda en una compra).

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n77a17

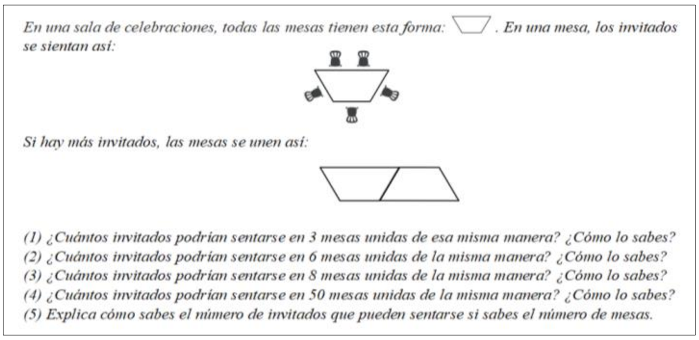


Figura 1 – Enunciado del problema de generalización
Fuente: elaboración propia (adaptado de BLANTON, 2008).

La Figura 1 muestra la tarea del problema de generalización (adaptado del trabajo de BLANTON, 2008) propuesto a los estudiantes en la segunda sesión, cuyas producciones escritas analizamos en este artículo. Además de aspectos aritméticos y algebraicos compartidos con tareas del resto de sesiones, esta incluye aspectos geométricos, lo que motivó el análisis detallado de los datos recogidos sobre ella.

Otras adaptaciones del problema son empleadas en los trabajos de López Centella (2019), Merino, Cañadas y Molina (2013) y Papadopoulos *et al*. (2020), entre otros. A continuación se indican las variables de tarea consideradas en la versión empleada en este trabajo.

• Sistema de representación. Para el planteamiento de la relación funcional se optó por una *representación pictórica* basada en un ejemplo genérico ilustrado por la disposición de los invitados en torno a una mesa (*caso unidad*) y por la unión de dos mesas.

• Tamaño de las cantidades. Se incluyeron tres cuestiones sobre *casos cercanos* de la relación funcional: valores entre 1 y 10 de la variable considerada independiente; y una cuestión sobre un *caso lejano*: valor relativamente mayor y alejado de los anteriores (50).

• Orden de aparición de las cantidades: se decidió ordenar las cuestiones según un *orden creciente* de los valores de la variable involucrada en ellas.

• Determinación/indeterminación de las cantidades: se incluyeron cuatro cuestiones basadas en valores determinados de una variable, y una cuestión solicitando explicación del procedimiento seguido para conocer a partir de un valor indeterminado de esta variable el valor de la otra.

En la fase (4) de la intervanción de la segunda sesión los participantes trabajaron sobre esta tarea. Las fases previas (1), (2) y (3) se basaron en la relación funcional $i(m)=2m$. Dicha relación fue ilustrada a través de una mesa cuadrada con un invitado a cada lado de la mesa. Tras los comentarios e interacciones sobre esta (más simple) situación, el problema de la Figura 1 fue presentado a los participantes sin mediación adicional de manera intencionada.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n77a17

4.3 Análisis de datos

Las fuentes de información empleadas en el estudio comprenden las hojas de trabajo recogidas de los estudiantes participantes y las notas de campo de hechos considerados relevantes por el equipo investigador durante el desarrollo de las sesiones. Como unidades de análisis se identifican cada una de sus respuestas a las cuestiones de la tarea de la Figura 1. La primera fase del análisis de datos consistió en múltiples y exhaustivas revisiones de las producciones escritas de los participantes. En la segunda fase, con base en la Teoría Fundamentada (CORBIN; STRAUSS, 1990) y en trabajos de investigación relacionados (e.g. MORALES *et al.*, 2018), se estableció un sistema de categorías de estrategias y de representaciones.

En relación con las estrategias, consideramos las siguientes: (1) recursiva, cuando el estudiante obtiene su respuesta sobre un caso a partir de su respuesta sobre otro anterior y una regularidad detectada entre casos; (2) operacional, basada en la realización de operaciones aritméticas mediante cálculo mental o cálculo registrado por escrito; (3) conteo de dibujos, en la que el estudiante obtiene y justifica su respuesta a una pregunta por medio del recuento de dibujos que para ello realiza; (4) particularización, si se alude a un caso particular como respuesta a una pregunta general; (5) linealización, cuando en su razonamiento el estudiante usa implícita o explícitamente la propiedad $f(ax)=af(x)$ (donde f representa una función, x su variable y a un escalar), con independencia de que f satisfaga o no dicha propiedad.

Adicionalmente, analizamos si los estudiantes evidencian indicios de generalización en sus procesos de resolución del problema y, en su caso, el tipo de generalización.

En cuanto a las representaciones, distinguimos: (1) numérica, (2) verbal y (3) pictórica. En lo que refiere a la pictórica, examinamos si ambos elementos – las mesas y los invitados – solo uno o ninguno de ellos fueron representados; la corrección del número de invitados representados por mesa (en su caso) y la precisión de la forma de las mesas representadas en la producción de cada estudiante. Por razones de privacidad, en nuestro análisis de datos y en la presentación de resultados, los nombres de los participantes se han reemplazado por las etiquetas E1, E2,…, E11 y las cuestiones del problema de la Figura 1 se han codificado como C1, C2, C3, C4 y C5 según su orden de aparición en el enunciado.

5 Resultados y discusión

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n77a17

En primer lugar, es importante señalar que los estudiantes no estaban familiarizados con la forma del trapecio. Tras presentarles el problema, su maestro de Matemáticas confirmó que aún no la habían estudiado en clase. Trabajar con esta figura fue un desafío para muchos.

5.1 Representaciones

Todos los estudiantes emplearon representaciones numéricas y verbales en sus respuestas. La mayoría evidenció ser capaz de explicar por medio de un sistema de representación verbal la forma en que obtuvo sus respuestas, aunque solo las descripciones de cuatro de ellos se corresponden con la relación funcional en juego. La Tabla 1 informa sobre sus representaciones pictóricas: nueve de los once estudiantes realizaron dibujos auxiliares, aunque cinco de ellos no representaron correctamente el número de invitados por mesa.

Tabla 1 – Características de las representaciones pictóricas de los estudiantes

	Incluye dibujo de mesas	Incluye dibujo de invitados	Nº invitados por mesa	Forma de mesa
E1	✓	✓	✗	✗
E2	✓	✗	NA	✓
E3	✓	✓	✗	✓
E4	✓	✓	✗	✗
E5	✓	✓	✗	✗
E6	✓	✓	✓	✗
E7	✗	✗	NA	NA
E8	✗	✗	NA	NA
E9	✓	✗	NA	✗
E10	✓	✓	✗	✓
E11	✓	✓	✓	✓

NA: No aplica; ✓: Sí/Correcto; ✗: No/Incorrecto

Fuente: elaboración propia.

Encontraron dificultad para representar hileras de mesas con forma de trapecio unidas tal y como se muestra en la tarea (Figura 1). Varios alumnos representaron las mesas con formas similares a romboides, rectángulos o cuadrados (Figuras 2, 3 y 4).

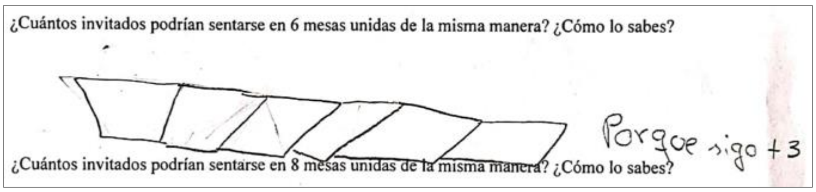
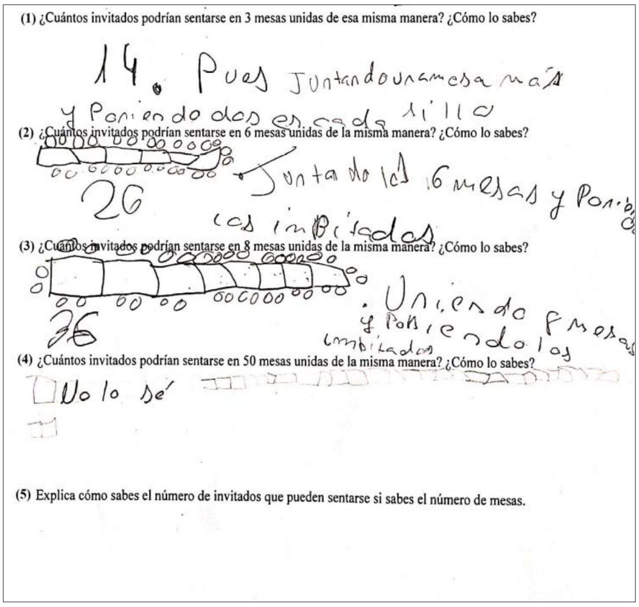


Figura 2 – Representación de hilera de mesas

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n77a17

Fuente: producción escrita de la estudiante E9.


(1) ¿Cuántos invitados podrían sentarse en 3 mesas unidas de esa misma manera? ¿Cómo lo sabes?

14. Pues juntandounamesa más y Poniendo dos en cada silla

(2) ¿Cuántos invitados podrían sentarse en 6 mesas unidas de la misma manera? ¿Cómo lo sabes?

26 Juntando las 6 mesas y Poniendo los invitados

(3) ¿Cuántos invitados podrían sentarse en 8 mesas unidas de la misma manera? ¿Cómo lo sabes?

26 Uniendo 8 mesas y Poniendo los invitados

(4) ¿Cuántos invitados podrían sentarse en 50 mesas unidas de la misma manera? ¿Cómo lo sabes?

No lo sé

(5) Explica cómo sabes el número de invitados que pueden sentarse si sabes el número de mesas.

Figura 3 – Representación de hilera de mesas e invitados
Fuente: producción escrita de la estudiante E5.

En algunos casos, esto condicionó el número de invitados que representaron por mesa, ya que tendieron a dibujar el mismo número de invitados en cada lado debido a la similar longitud de dichos lados en sus dibujos, lo que tuvo un impacto en sus respuestas (Figura 3). No obstante, esto también se observó en la producción de algún estudiante que sí había representado adecuadamente la forma de trapecio: en aquellos lados de las mesas que en su dibujo lucían lo suficientemente largos para ubicar a dos invitados, así lo hizo, con independencia del lado de la mesa de que se tratara (ver, por ejemplo, el lado inferior de la tercera mesa en la primera hilera de mesas en la Figura 5).

Por otro lado, las observaciones de algunos participantes (*Porque arriba y abajo puede haber dos sillas y arriba y abajo puede haber 1 silla*, Estudiante E6, 2019) evidencian su entendimiento de la situación, lo que favoreció respuestas consistentes con su concepción de la relación funcional pese a la inexactitud de la forma de las mesas de sus dibujos (Figura 4).

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n77a17

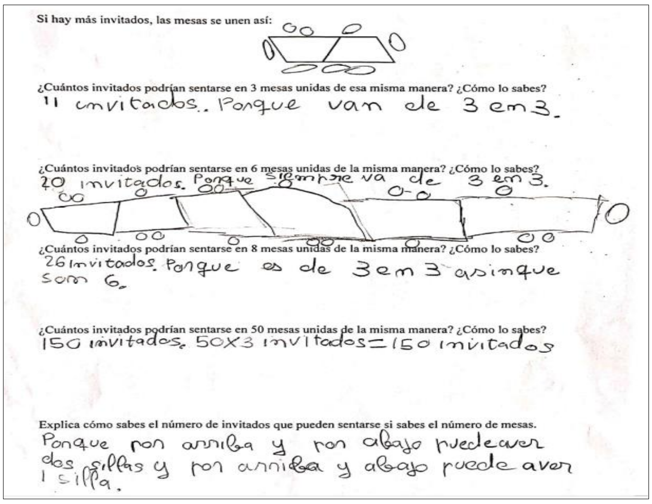


Figura 4 – Explicación
Fuente: producción escrita del estudiante E6.

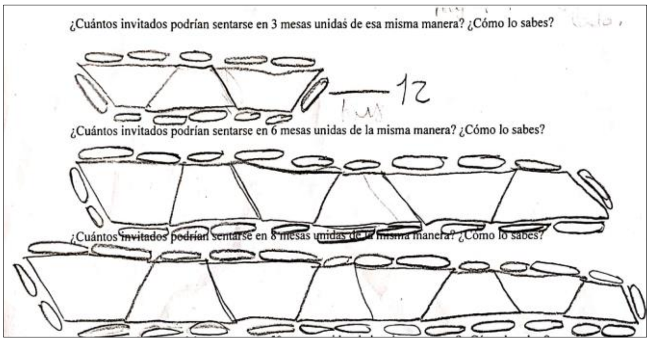


Figura 5 – Representación de hilera de mesas e invitados
Fuente: producción escrita del estudiante E10.

Esto pone de relieve diferentes usos de las representaciones pictóricas, por parte de los estudiantes, en sus producciones: algunos basaron sus respuestas en lo que fueron capaces de ver y descubrir a través de sus dibujos, mientras que otros los usaron como un apoyo visual, de carácter auxiliar y secundario, a lo que por otros medios ya habían conceptualizado.

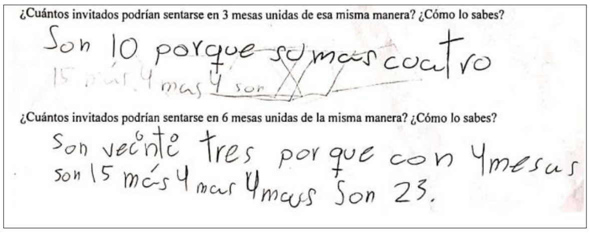
Por otro lado, los errores en las representaciones pictóricas de algunos participantes se vieron reflejados en los números que manejaron en sus razonamientos, pero en general no les impidieron percibir la existencia de una relación entre las variables número de mesas y número de invitados (que de hecho usaron para la obtención de sus respuestas).

A continuación, ejemplificamos actuaciones de los estudiantes. Tanto en imagen como en texto, sus respuestas se reproducen tal y como fueron producidas originalmente, incluyendo faltas de ortografía e inconsistencias gramaticales en su caso.

5.2 Relación de covariación

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n77a17

Aunque comete errores numéricos, la estudiante E1 manifiesta pensamiento covariacional en sus respuestas a las primeras preguntas, como muestra la Figura 6.


¿Cuántos invitados podrían sentarse en 3 mesas unidas de esa misma manera? ¿Cómo lo sabes?

Son 10 porque sumas cuatro
15 más 4 mas 4 son

¿Cuántos invitados podrían sentarse en 6 mesas unidas de la misma manera? ¿Cómo lo sabes?

Son veinte tres porque con 4mesas son 15 más 4 mas 4mas Son 23.

Figura 6 – Covariación
Fuente: producción escrita de la estudiante E1.

En su resolución, E1 identifica que cada mesa adicional permite acomodar a cuatro invitados más, como refleja en C1. Para obtener el número de invitados que podrían sentarse en seis mesas, parte de que en cuatro mesas podrían sentarse quince invitados y a 15 suma 4 dos veces. Así, E1 refleja en la variable número de invitados el cambio que considera correspondiente al aumento en dos unidades (de 4 a 6) de la variable número de mesas.

El estudiante E7 también evidencia pensamiento covariacional en su producción escrita (Figura 7):

> *(C1): 11 porque siempre se suma 3.*
> *(C2): 22 porque si tres son 11 el doble es 6 entonces serán 22.*
> *(C3): 28. Porque 6 son 22 le sumo 6 son 28.*
> *(C4):165 porque en 10 hay 33 y 50 es 5 veces 33* (Estudiante E7, 2019).

Este estudiante parece percibir el aumento en 3 unidades de la variable número de invitados por cada aumento en una unidad de la variable número de mesas. Así, en la cuestión C1 sobre el número de invitados en tres mesas suma 3 a los ocho invitados de dos mesas, obteniendo once como respuesta. Siguiendo esto, en C3, y bajo su consideración de que en seis mesas pueden sentarse 22 invitados, suma 6 (2·3) a 22 para obtener el número de invitados que pueden sentarse en ocho mesas. Curiosamente, al abordar las cuestiones C2 y C4 el estudiante percibe otras relaciones y se vale de ellas para dar sus respuestas. En particular, establece una relación multiplicativa del doble entre el dato provisto en la C1 (tres mesas) y el provisto en la C2 (seis mesas), proporcionando como respuesta a la C2 el doble (22 invitados) de su respuesta a la C1 (once invitados). Seguidamente, en la C4, vuelve a establecer una relación multiplicativa: detecta 5 como razón entre 50 y 10 y, apoyándose en su consideración de que *en 10* [mesas] *hay 33* [invitados], multiplica 33 por 5 para obtener 165 invitados como respuesta al número de invitados que podrían sentarse en cincuenta mesas.

En ambos casos anteriores, E1 y E7 obtienen sus respuestas identificando un cambio en la cantidad de mesas y aplicando el cambio que consideran correspondiente a este en la cantidad de invitados de acuerdo con sus propios razonamientos y observaciones.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n77a17

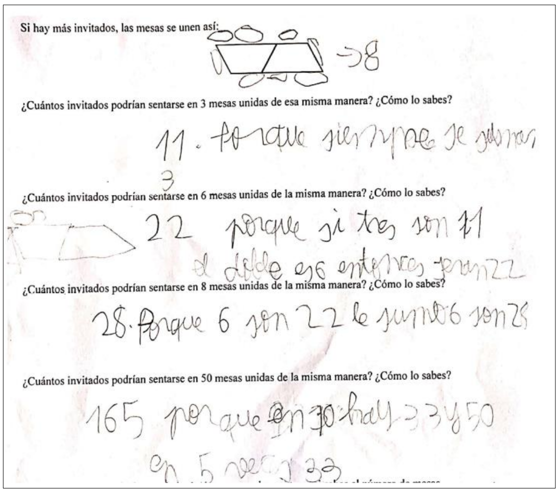


Figura 7 – Covariación
Fuente: producción escrita del estudiante E7.

5.3 Relación de correspondencia

Las estudiantes E2 y E9 usan una relación de correspondencia para responder a la cuestión C4 que involucra un caso lejano (Figura 8). Seguidamente, en la C5 tratan de describir verbalmente la regla funcional asociada. Sus descripciones dan cuenta de una generalización que, pese a la elipsis de lo indeterminado (la variable no se menciona explícitamente en ellas, aparentemente por ser sobreentendida) catalogamos de contextual, pues generalizan acciones numéricas y van más allá del ámbito de números específicos.

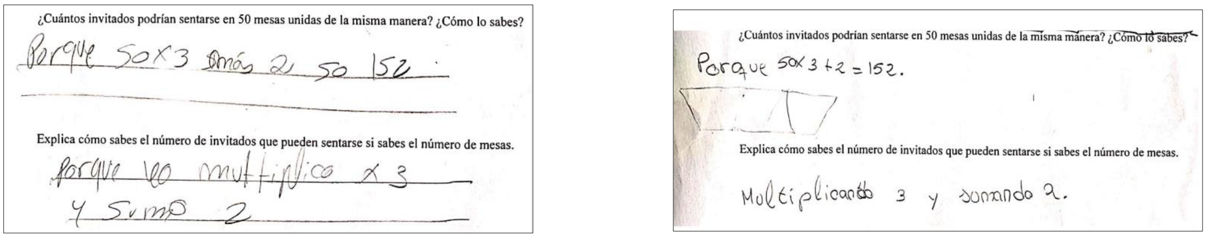
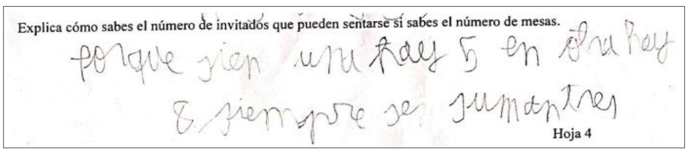


Figura 8 – Correspondencia y generalización
Fuente: producciones escritas de las estudiantes E2 (izquierda) y E9 (derecha).

5.4 Estrategia de particularización

El estudiante E7 trata de responder a la cuestión general C5 por medio de un caso particular (Figura 9):

Porque si en una hay 5 en otra hay 8 siempre se suman tres (Estudiante E7, 2019).



ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n77a17

Figura 9 – Estrategia de particularización
Fuente: producción escrita del estudiante E7.

5.5 Estrategia de conteo de dibujos

Sus dibujos y explicaciones verbales dan cuenta de la estrategia de conteo de dibujos empleada por E5 (anterior Figura 3):

> *(C1) 14. Pues juntando una mesa más y poniendo dos en cada silla.*
> *(C2) 26. Juntando las 6 mesas y poniendo a los imbitados.*
> *(C3) 36. Uniendo 8 mesas y poniendo los imbitados.*
> *(C4) No lo sé* (Estudiante E5, 2019).

En cada respuesta, la cantidad indicada coincide con el número de formas circulares dibujadas como representación de los invitados. Debido a la fuerte dependencia de sus respuestas respecto de estas representaciones, la cuestión C4 sobre el caso lejano estuvo fuera de su alcance y la C5 fue dejada en blanco. El estudiante E3 exhibió una actuación similar.

5.6 Estrategia de linealización

Tras dar como respuestas quince, treinta, cuarenta y 250 invitados, respectivamente, a las cuestiones C1, C2, C3 y C4, el estudiante E8 brinda la siguiente explicación en la C5 (Figura 10, izquierda):

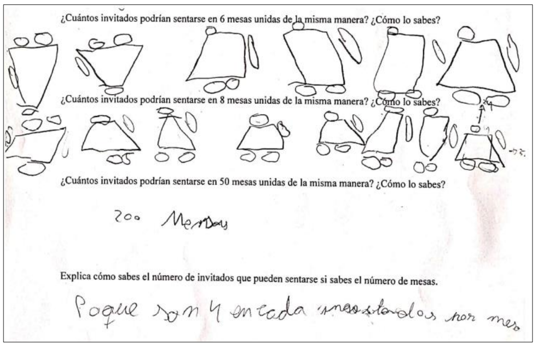
> *Porque en una mesa se sientan 5 invitados, en 8 mesas 40. Lo hago multiplicando* (Estudiante E8, 2019).

Este alumno (E8) consideró el caso unidad como referencia de una relación de proporcionalidad, empleando una estrategia de linealización en todas sus respuestas (usó $i(a\ 1) = a\ i(1)$ para cada número a indicado en las cuestiones, considerando $i(1)=5$).

Por su parte, el estudiante E7 también empleó una estrategia de linealización en varias de sus respuestas, usando en su razonamiento lo siguiente: $i(6) = i(2\cdot3) = 2\ i(3) = 2\cdot11 = 22$ e $i(50) = i(5\cdot10) = 5\ i(10) = 5\cdot33$ (anterior Figura 7).

En la misma línea, E4 evidenció un razonamiento basado en una regla de proporcionalidad, considerando cuatro invitados por mesa. Dibujó todas las mesas separadas y cuatro invitados en cada una (Figura 10, izquierda). En contraste con la producción de E8 (Figura 10, derecha), E4 se percata de que no todos los lados de las mesas pueden acomodar un invitado cuando se trata de varias mesas. Sin embargo, ignora que, en general, no es suficiente descontar un solo invitado de cada mesa.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n77a17



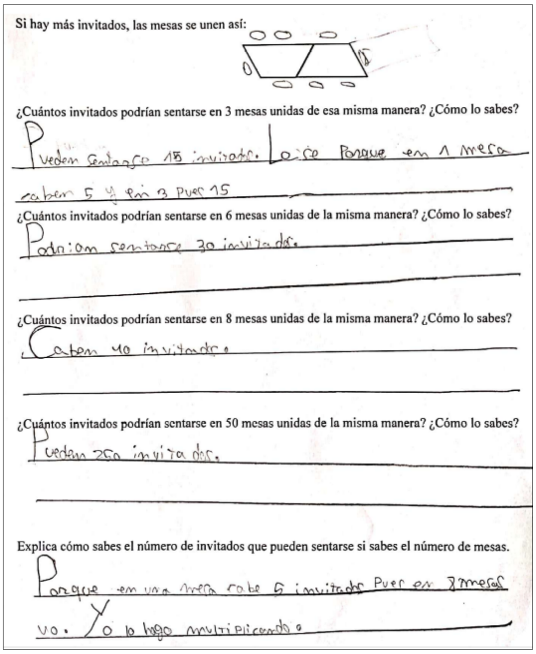


Figura 10 – Estrategia de linealización
Fuente: producciones escritas de los estudiantes E4 (izquierda) y E8 (derecha).

5.7 Estrategia recursiva

El estudiante E6 (anterior Figura 4) respondió así a la C1:

11 invitados, porque va de tres en tres (Estudiante E6, 2019).

notando que, con cada mesa adicional, se pueden sentar tres invitados más. Con la ayuda de dibujos de casos particulares anteriores (una, dos y seis mesas) en los que estaban representados los dos invitados de los extremos, obtuvo respuestas correctas a las primeras cuestiones aplicando recursividad basada en la suma de 3 unidades. Esta estrategia no le resultó operativa para el caso lejano (cincuenta mesas, sin datos de casos cercanos anteriores) y E6 operó sobre el número de mesas dado. De sus respuestas anteriores infirió que multiplicar el número de mesas por 3 daría el número total de invitados, olvidando los dos invitados sentados en los extremos:

150 invitados. 50×3 invitados = 150 invitados (Estudiante, E6, 2019).

5.8 Estrategia operacional

En su actuación, nueve de los participantes efectuaron operaciones aritméticas (suma, multiplicación, o suma y multiplicación) para responder a algunas de las cuestiones (ver, por ejemplo, las Figuras de la 6 a la 9).

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n77a17

Las Tablas 2 y 3 resumen las estrategias e indicios de generalización (de tipo contextual en los cuatro casos que ha sido detectada) en las producciones de los estudiantes, y las reglas y relaciones que subyacen a sus respuestas. Con carácter general, se ha considerado que un participante emplea una estrategia, regla o relación si hace uso de esta en al menos una de sus respuestas.

Tabla 2 – Estrategias de los estudiantes y generalización

	Recursiva	**Operacional** +	×	+ y ×	**Conteo de dibujos**	**Particularización**	**Linealización**	**Generalización**
E1	✓	✓		✓	✓			✓
E2				✓	✓			✓
E3	✓				✓	✓		
E4			✓		✓	✓	✓	
E5					✓			
E6	✓	✓	✓		✓		✓	
E7	✓	✓	✓			✓	✓	
E8			✓			✓	✓	
E9	✓	✓		✓				✓
E10				✓	✓			✓
E11	✓	✓			✓			

Fuente: elaboración propia.

Tabla 3 – Reglas y relaciones usadas por los estudiantes

	Reglas			**Relaciones**	
	C1-C3	**C4**	**C5**	**Correspondencia**	**Covariación**
E1	*i(m)=i(j) +* $\sum_{k=j+1(j<m)}^{m} 4$	*i(m)=3m+2*	*i(m)=3m+2*	✓	✓
E2		*i(m)=3m+2*	*i(m)=3m+2*	✓	
E3	*i(m)=i(m-1)+3*				
E4	*i(m)=4m*	*i(m)=4m*		✓	
E5					
E6	*i(m)=i(m-1)+3*	*i(m)=3m*		✓	✓
E7	*i(m)=i(m-1)+3* *i(m)=m/n i(n), n<m*	*i(m)=m/n i(n), n<m*			✓
E8	*i(m)=5m*	*i(m)=5m*		✓	
E9	*i(m)=i(m-1)+3*	*i(m)=3m+2*	*i(m)=3m+2*	✓	
E10			*i(m)=3m+2*	✓	

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n77a17

E11	*i(m)=i(m-1)+3*	*i(m)=i(m-1)+3*	✔

Nota. Las variables *i* y *m* representan el número de invitados y el número de mesas respectivamente. Los estudiantes E1, E2, E9, E10 y E11 proporcionaron expresiones verbales de sus reglas; las demás fueron expresadas por el equipo investigador a partir del análisis de las respuestas de los estudiantes.

Fuente: elaboración propia.

6 Conclusiones

6.1 Sobre las estrategias y representaciones empleadas por los estudiantes

Con frecuencia, los estudiantes involucraron más de una estrategia en sus respuestas. En general, utilizaron estrategias operacionales, de conteo de dibujos y recursiva en las cuestiones de casos cercanos. Los estudiantes contaban con experiencia y habilidades numéricas para los cálculos, por lo que el hecho de usar conteo de dibujos junto con las estrategias operacionales parece estar más relacionado con su necesidad de disponer de un apoyo visual en sus razonamientos.

El uso de la estrategia recursiva por parte de algunos estudiantes podría relacionarse con el hecho de que el enunciado de la tarea involucra tres casos particulares consecutivos (una, dos – implícitamente – y tres mesas). Otros estudios en los que se ha evitado el uso de números consecutivos en las cuestiones del problema de generalización en cuestión destacan la ausencia de relaciones como la recurrencia (e.g. MORALES *et al*., 2018).

Algunos participantes tendieron a representar tantos invitados como, aparentemente, podían ubicar en cada lado de las mesas de sus dibujos, ignorando la configuración mostrada en el enunciado del problema. Esto alteró las cantidades y condicionó su percepción de la relación entre ellas. Asimismo, las transformaciones geométricas o consideraciones sobre la forma de trapecio de la mesa para una adecuada representación de las mesas unidas en hilera supusieron un reto para algunos estudiantes.

6.2 Sobre las reglas, relaciones y generalización manifestadas por los estudiantes

En las producciones escritas de los estudiantes se identifica el uso de las relaciones de correspondencia y covariación. Esto coincide con los hallazgos de los trabajos de Stephens *et al*. (2012), Tanışlı (2011) y Morales *et al.* (2018). En contraste con estos estudios, basados en experimentos de enseñanza, el aquí presentado no incluyó la enseñanza como parte del diseño metodológico, que se dirigió, en todo caso, a explorar las producciones espontáneas de

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n77a17

alumnado sin experiencia anterior en actividad de carácter algebraico y sin validación didáctica a lo largo de la intervención. Bajo esta circunstancia, este resultado contribuye significativamente al conocimiento de la capacidad y predisposición de los niños para el pensamiento funcional e invita a realizar estudios a mayor escala para conocer su alcance.

No obstante, cabe destacar cierta tendencia al razonamiento proporcional en su análisis de las relaciones entre cantidades en una ilusión de linealidad de la función afín del problema. En efecto, el uso que los estudiantes hicieron de la covariación y la correspondencia no llevó a todos ellos a relaciones funcionales en concordancia con los datos del problema. Las principales fuentes de errores fueron: por un lado, no tener en cuenta (especialmente en el caso lejano) los invitados sentados en los extremos de cualquier hilera de mesas; por otro, aplicar una regla de proporcionalidad tomando como referencia el caso unidad u otro caso. En otro orden de cosas, la regla general descrita por algunos estudiantes en la cuestión general C5 no se corresponde con respuestas que proporcionaron a cuestiones anteriores.

Cuatro de los participantes consiguieron identificar correctamente la relación funcional involucrada en el problema, evidenciando una generalización considerada contextual (*multiplicar por tres y sumar dos).* Sin embargo, la mera recursividad en que otros basaron sus respuestas pudo haber obstaculizado esta identificación, en línea con lo observado por Moss y McNab (2011). En todo caso, en nuestro estudio hay quien, tras usar la estrategia recursiva junto con la covariación en las primeras respuestas, transita hacia la correspondencia y logra generalizar (e.g., participante E1, Tablas 2 y 3). Esta transición también fue observada en estudios relacionados en varios participantes según avanzaba el experimento de enseñanza del que eran partícipes (STEPHENS *et al*., 2012).

6.3 Implicaciones para el diseño de tareas dirigidas a promover el pensamiento funcional

Las situaciones que, al parecer, motivaron el uso de razonamiento proporcional en las respuestas de los estudiantes, fueron principalmente tres: (1) percibir una razón entre las cantidades de dos cuestiones (véase E7 en la Figura 7); (2) conceptualizar desde el inicio un número fijo de invitados por mesa y utilizarlo como caso unidad y referente para cálculos posteriores (E4 y E8 en la Figura 10); (3) inferir la multiplicación de la variable independiente por un número n a partir de la suma recursiva de n (a respuestas anteriores) en la obtención de respuestas (E6 en la Figura 4).

Para tratar de prevenir o evitar estas situaciones en la iniciación del alumnado en el pensamiento funcional, se sugiere lo siguiente en el diseño de tareas preliminares destinadas a este fin: (1) involucrar números primos como cantidades en las cuestiones; (2) emplear problemas ambientados en situaciones donde las constantes a y $b \neq 0$ de la función $f(x)=ax+b$ difieran más notablemente en su fenomenología. En la función $i(m)=3m+2$ del problema de generalización presentado en el estudio, las constantes 3 y 2 representan invitados que únicamente difieren en la posición que ocupan en la hilera de mesas: sus fenómenos asociados son muy similares.

En cambio, considérese por ejemplo la (matemáticamente equivalente) función $c(v)=3v+2$, donde $c(v)$ denota el coste total de la visita a un parque de atracciones según el número v de viajes pagados, costando 3 € cada viaje, y 2 € el pase de acceso al parque, que se paga una sola vez. En esta función la aparentemente más clara diferencia de los fenómenos asociados a dichas constantes podría facilitar que ambos fueran tenidos en cuenta en cada cálculo a partir del contexto, evitando el olvido del término independiente o su fusión en un falso *todo* con la otra constante.

A la vista de los resultados, también cobra gran importancia la forma de las representaciones pictóricas por medio de las cuales se ilustra la relación funcional del problema de generalización. En este sentido, en su iniciación a la actividad algebraica sería recomendable elegir una forma sencilla y familiar para los estudiantes, a fin de favorecer la concentración de sus esfuerzos en la identificación de la relación funcional. Asimismo, el tamaño de los números y la indeterminación de la cantidad en cuestiones sobre casos lejanos e indeterminados se revelan como aspectos relevantes que incentivaron la búsqueda de nuevas estrategias a quienes usaron la recursividad en las primeras cuestiones sobre casos cercanos y determinados. Junto con las pautas metodológicas propuestas por otros autores (e.g., MESCOUTO; LUCENA; BARBOSA, 2021; VERGEL; ROJAS, 2018), estas engrosan las indicaciones para el diseño e implementación de tareas dirigidas a promover el pensamiento funcional.

Agradecimientos

La autora del trabajo expresa su gratitud al grupo FQM-193 "Pensamiento Numérico. Didáctica de la Matemática" (financiado por la Junta de Andalucía), del que es miembro, y al profesorado y alumnado del colegio participante en el estudio por su amable colaboración.

Referencias

AUSTRALIAN CURRICULUM, ASSESSMENT AND REPORTING AUTHORITY – ACARA. **The Australian Curriculum**: Mathematics. Camberra: ACARA, 2015.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n77a17

BLANTON, M. L. Functional thinking in the elementary grades. **Algebra and the elementary classroom.** Transforming thinking to practice. Portsmouth: Heinemann, 2008.

BLANTON, M. L.; KAPUT, J. J. Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, v. 36, n. 5, p. 412-446, 2005.

CARRAHER, D. W.; SCHLIEMANN, A. D. Early algebra and algebraic reasoning. *In:* LESTER, F. (ed.), **Second handbook of research on mathematics teaching and learning.** Reston: NCTM, 2007. p. 669-705.

CARRAHER, D. W.; SCHLIEMANN, A. D.; SCHWARTZ, J. L. Early algebra is not the same as algebra early. *In:* KAPUT, J. J.; CARRAHER, D. W.; BLANTON, M. L. (eds.). **Algebra in the early grades**. Nueva York: Lawrence Erlbaum Associates, 2008. p. 235-272.

CASTRO, E.; RICO, L.; CASTRO, E. **Estructuras aritméticas elementales y su modelización**. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica, 1995.

CERDÁ, G.; ARAGÓN, E.; PÉREZ, C.; NAVARRO, J. I.; AGUILAR, M. The Open Algorithm Based on Numbers (ABN) Method: An effective instructional approach to domain-specific precursors of arithmetic development. **Frontiers in Psychology**, v. 9, n. 1811, p. 1-12, 2018. DOI: 10.3389/fpsyg.2018.01811

CORBIN, J.; STRAUSS, A. Grounded theory research: procedures, canons, and evaluative criteria. **Qualitative Sociology**, local de publicación, v. 13, n. 1, p. 3-21, 1990. Disponible en: https://doi.org/10.1007/BF00988593. Acceso en: 15 oct 2023.

DIAS-MORETTI, V.; PEREIRA DAS VIRGENS, W.; OLIVEIRA-ROMEIRO, I. de. Generalização teórica e o desenvolvimento do pensamento algébrico: contribuições para a formação de professores dos anos iniciais. **Bolema**, Río Claro, v. 35, n. 71, p. 1457-1477, dic. 2021. Disponible en: https://doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a11. Acceso en: 14 ago 2023.

DIREÇÃO-GERAL DA EDUCAÇÃO – DGE. Aprendizagens Essenciais - 1.º, 2.º e 3.º Ciclos do Ensino Básico I Matemática. Lisboa: Direção-Geral da Educação, 2018. Disponible en: http://www.dge.mec.pt/matematica. Acceso en: 14 ago 2023.

HIEBERT, J.; CARPENTER, T. Learning and teaching with understanding. *In:* GROUWS, D. A. (ed.), **Handbook of research on mathematics teaching & learning.** New York: Macmillan, 1992. p. 65-97.

LÓPEZ CENTELLA, E. Functional thinking of third grade students: a study from early algebra framework. *In*: NOVOTNÁ; MORAOVÁ, H. **Opportunities in Learning and Teaching Elementary Mathematics**. Prague: Charles University, 2019. p. 251-261.

MERINO, E.; CAÑADAS, M. C.; MOLINA, M. Uso de representaciones y patrones por alumnos de quinto de educación primaria en una tarea de generalización. Edma 0-6: **Educación Matemática en la Infancia**, Valladolid, v. 2, n. 1, p. 24-40, 2013.

MESCOUTO, J. B.; LUCENA, I. C. R. de; BARBOSA, E. Tarefas exploratório-investigativas de ensino-aprendizagem-avaliação para o desenvolvimento do pensamento algébrico. **Educação Matemática Debate**, Montes Claros, v. 5, n. 11, p. 1-22, 2021.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN, CULTURA Y DEPORTE DE ESPAÑA – MECD. **Orden ECD/686/2014**, de 23 de abril de 2014. Por la que se establece el currículo de la Educación Primaria. Madrid: MECD, 2014.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n77a17

MINISTERIO DE EDUCACIÓN DE CHILE – MINEDUC. **Bases curriculares.** Educación básica. Matemática. Santiago de Chile: Unidad de Currículum y Evaluación, 2012.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y FORMACIÓN PROFESIONAL DE ESPAÑA – MEFP. **Real Decreto 157,** de 1 de marzo de 2022. Por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. Madrid: MEFP, 2022.

MINISTRY OF EDUCATION OF SINGAPORE – MOE. **Mathematics Syllabuses. Primary One to Six**. MOE, 2020.

MORALES, R.; CAÑADAS, M. C.; BRIZUELA, B. M.; GÓMEZ, P. Relaciones funcionales y estrategias de alumnos de primero de Educación Primaria en un contexto funcional, **Enseñanza de las Ciencias**, 36(3), p. 59-78, 2018. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2472

MORENO, A.; RAMÍREZ, R. Variables y funciones de las tareas matemáticas. En L. Rico y A. Moreno (Coords.), **Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria**. Madrid: Editorial Pirámide, 2016. p. 243-258. http://hdl.handle.net/10481/64701

MOSS, J.; MCNAB, S. L. An approach to geometric and numeric patterning that fosters second grade students' reasoning and generalizing about functions and co-variation. En CAI, J.; KNUTH, E. (Eds.), Early algebraization. **Advances in Mathematics Education**. Nueva York: Springer, 2011. p. 278-302.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS – NCTM. **Principles and Standards for School Mathematics**. Reston: NCTM, 2000.

PAPADOPOULOS, I.; JIROTKOVÁ, D.; SLEZÁKOVÁ, J.; LÓPEZ CENTELLA, E. Current changes in primary education: The issue of "different" in a mathematics primary school classroom, **Pedagogika –** Journal of Educational Sciences, Prague, v. 70, n. 4, p. 483-508, 2020.

RADFORD, L. Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to studens' types of generalization. **Mathematical Thinking and Learning,** v. 5, n. 1, p. 37-70, 2003.

RADFORD, L. The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school. *In:* KIERAN, C. (ed.), **Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds:** The global evolution of an emerging field of research and practice. Nueva York: Springer, 2018. p. 3-25.

RICO, L. Consideraciones sobre el currículo de matemáticas para educación secundaria. En: RICO, L. (coord.), **La educación matemática en la enseñanza secundaria**. Madrid: Horsori, 1997. p. 15-59.

SMITH, E. Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. *In*: KAPUT, J. J.; CARRAHER, D. W.; BLANTON, M. L. (eds.), **Algebra in the early grades.** Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates, 2008. p. 133-163.

STACEY, K. Finding and using patterns in linear generalising problems, **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 20, n. 2, p. 147-164, may1989. Disponible en: https://doi.org/10.1007/BF00579460. Acceso en: 15 oct 2023.

STEPHENS, A.; ISLER, I.; MARUM, T.; BLANTON, M. L.; KNUTH, E.; GARDINER, A. From recursive pattern to correspondence rule: Developing students' abilities to engage in functional thinking. *In:* Proceedings of the CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PME, 34., 2012, Kalamazoo. Kalamazoo: Michigan University, 2012. p. 1-8. http://algebra.wceruw.org/documents/PMENA_2012.pdf

TANIŞLI, D. Functional thinking ways in relation to linear function tables of elementary school

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n77a17

students. **The Journal of Mathematical Behavior**, Amsterdam, v. 30, n. 3, p. 206-223, 2011.

VERGEL, R.; ROJAS, P. **Álgebra escolar y pensamiento algebraico:** aportes para el trabajo en el aula. Bogotá: UD, 2018.

WARREN, E.; COOPER, T. Using repeating patterns to explore functional thinking. **Australian Primary Mathematics Classroom**, Norwood Payneham, v. 1, n. 1, p. 9-14, 2006.

Submetido em 30 de Março de 2022.
Aprovado em 24 de Maio de 2023.