ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a220187

ARTÍCULO

Lenguaje Algebraicamente Significativo en el Aprendizaje del Álgebra Universitaria

Language Algebraically Significant in the learning of university algebra

Andrés A. **González R.**[*]

ORCID iD 0000-0003-0815-1279

Fredy Enrique **González**[**]

ORCID iD 0000-0002-8079-3826

Resumen

El objetivo de este artículo es presentar aspectos del lenguaje, natural y algebraico, activados por futuros profesores de matemática durante el aprendizaje del álgebra lineal, develados a partir de una investigación cualitativa. Revelamos la existencia del Lenguaje Algebraicamente Significativo compuesto por la Lectura Algebraicamente Significativa, que constituye un tipo de lectura de los textos con contenido algebraico en la cual a los símbolos le son atribuidos ricos significados, contextuales y precisos; y por la Expresión Oral Algebraicamente Significativa referida a la comunicación efectiva de ideas algebraicas mediante la lengua hablada. Algunas de las teorías implicadas son: Registros de Representación Semiótica (Duval, 1995); el papel de las metáforas en las Matemáticas (Lakoff; Núñez, 2000) y la teoría de la Objetivación (Radford, 2010a).

Palabras clave: Formación Inicial de Profesores de Matemática. Pensamiento Algebraico. Lenguaje Algebraicamente Significativo, LAS.

Resumo

O objetivo deste artigo é apresentar aspectos da linguagem natural e algébrica, ativados por futuros professores de matemática durante a aprendizagem da álgebra linear, revelados a partir de uma investigação qualitativa. Revelamos a existência de Linguagem Algebricamente Significativa, composta por Leitura Algebricamente Significativa, que constitui um tipo de leitura de textos com conteúdo algébrico, em que os símbolos recebem significados ricos, contextuais e precisos; Expressão Oral e significativa algebricamente refere-se à comunicação eficaz de ideias algébricas através da linguagem falada. Algumas das teorias envolvidas são: Registros de Representação Semiótica (Duval, 1995); o papel de metáforas em matemática (Lakoff; Nunez, 2000) e a teoria da objetificação (Radford, 2010).

Palavras chave: Formação Inicial de Professores em Matemática. Pensamento Algébrico. Linguagem Algébrica Significativa. LAS.

[*] Doctor en Educación por la Universidad Central de Venezuela, Caracas). Profesor titular del Departamento de Matemática de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Maracay, Venezuela. E-mail: agorondell@gmail.com
[**] Doctor en Educación por la Universidad de Carabobo, Valencia, Venezuela. Profesor Visitante del Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Departamento de Educação Matemática (DEEMA) de la Universidad Federal de Ouro Preto, Minas Gerais, Brasil. E-mail: fredygonzalezdem@gmail.com

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a220187

1 Introducción-Problema

Pimm (2002, p. 75) es quien afirma que, para muchos estudiantes “la clase de matemática es, en gran medida, pasiva y auditiva, sentándose a escuchar al profesor mientras este habla sobre triángulos, multiplicación de decimales o manipulaciones algebraicas”. Superar esta forma tradicional de enseñar matemática se hace cada vez más perentorio, habida cuenta del avance y el impacto que las TIC´s contemporáneas tienen sobre el aprendizaje de las personas (Salazar; Caballero; Panduro-Ramírez, 2021).

En nuestra experiencia administrando cursos de álgebra para futuros profesores de matemática (EPPM) en una universidad pública formadora de docentes, hemos observado tanto sus dificultades para comprender conceptos y procesos algebraicos específicos, como un inadecuado manejo de su simbolismo. Particularmente, en relación con el aprendizaje del àlgebra, autores como Ramos, Guifarro y Casas (2021, p. 21) afirman que “estas dificultades son de diferente naturaleza, se refuerzan y conectan en redes complejas que se concretan en la práctica como obstáculos y se manifiestan en los alumnos en forma de errores”. Se presume que esto se asocia con una visión, por parte de los estudiantes, de que el Álgebra es muy compleja y, por ende, la rechazan.

Algunos estudios muestran que, en su formación inicial, los profesores que van a enseñar matemática, no reciben una preparación adecuada para enseñar los contenidos de Álgebra, (Jungbluth; Silveira; Grando, 2022). Por su parte, Palma *et al*, 2022), señalan que:

> Los profesores de matemáticas han transmitido a los alumnos una idea incompleta del significado del álgebra considerándola como la manipulación de símbolos con actividades de simplificación de expresiones algebraicas o de resolución de ecuaciones o inecuaciones. Claro está que estas actividades son fundamentales y constituyen las raíces históricas del álgebra, pero el álgebra es más que manipular símbolos (Palma *et al*., 2022, p. 8302).

Apreciamos en estos procederes didácticos, el escaso o nulo provecho que se hace del lenguaje algebraico, particularmente del oral; este modo de desarrollar las prácticas de enseñanza y aprendizaje del Álgebra contribuye a invisiblizar el período retórico de su desarrollo (Nesselmann, 1842). Además de eso, el docente pierde la oportunidad de:

> […] escuchar ideas potencialmente ricas en aquello que dicen o escriben los alumnos y ayudar a los estudiantes a participar de la actividad del aula, de manera productiva, en la construcción del sentido de aquello que se está trabajando en clase (Pérez; Piquet, 2022, p. 390).

Siendo asi, resulta necesario entender que el quehacer algebraico debe ir mucho más allá “da manipulação de regras e símbolos, exigindo-se um trabalho que favoreça o desenvolvimento do pensamento algébrico.” (Oliveira, 2022, p. 29) y, por tanto, como

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a220187

Cervantes; Jiménez-Blanco; Matínez-Solano (2022) afirman, la matemática debe ser vista como:

> […] un lenguaje que sirve para mediar la actividad social compleja, por lo que la competencia matemática es la capacidad de un individuo para identificar y comprender la presencia de las matemáticas en el mundo, para hacer juicios fundados, utilizar y relacionarse con las matemáticas de manera que satisfaga las necesidades de dicho individuo como ciudadano preocupado y reflexivo (Cervantes; Jiménez-Blanco; Martínez-Solano, 2022, p. 79).

Este vínculo entre lenguaje y álgebra (Pimm, 2002) no es utilizado a favor de su enseñanza ni de su aprendizaje, los estudiantes no *hablan algebraicamente,* no emplean el lenguaje oral natural para referirse a los objetos (para Drohuard (2009) es todo aquello que se usa, se trabaja, se estudia cuando uno "hace matemática") y procesos algebraicos, en su lugar más bien prevalece la *cultura del silencio*, ya que no se procura la verbalización para desarrollar dichos procesos, por el contrario se hace un sostenido énfasis en la escritura.

En la construcción de conceptos, además de las fases manipulativa, ideográfica y simbólica (González, 2005), se encuentra la fase verbal, en esta "el matemático, profesional o aprendiz, *lenguajea*, en un sentido maturaniano, es decir, habla acerca de aquellos asuntos de los que se ha dado cuenta durante la fase de manipulación" (González, 2005, p. 39).

Sin embargo, Pimm (2002, p. 48) llama la atención sobre "el desequilibrio existente en las clases de matemáticas entre las matemáticas habladas y las escritas". De acuerdo con este autor "se aprecia una clara tendencia en los profesores a asumir la responsabilidad y, por tanto, el control sobre los intercambios verbales en clase con el consiguiente apremio para rellenar los silencios (p. 82). En términos prácticos, esto significa que es el docente quien lidera en el aula la expresión verbal de los contenidos matemáticos. Aún más, en aquellos casos en que se hace presente la oralidad, se corre el riesgo de hacerlo mediante una lectura literal de los símbolos donde no existe la transferencia conceptual, lo que la hace vacía de significados y totalmente ineficaz.

En consecuencia, existe un claro énfasis en el registro escrito muy próximo a la dependencia. Tal subordinación al simbolismo hace vulnerables a los estudiantes a los efectos asociados a la sinonimia, la polisemia y otras características propias del modo escrito matemático; además que potencia en ellos la creencia de que símbolo y objeto matemático son intercambiables, pues los perciben equivalentes. En el caso del álgebra lineal universitaria, toda esta descripción se agrava pues se trata de un contexto caracterizado por una extraordinaria dinámica y riqueza simbólica.

El desarrollo evolutivo del Álgebra, desde lo que es aceptado como su período histórico fundacional hasta la compleja rama de las Matemáticas como se le conoce en la actualidad,

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a220187

conlleva interesantes elementos caracterizadores que pueden aprovecharse con fines didácticos en los diversos niveles educativos. En este progreso, el lenguaje, tanto el natural como el simbólico, ha estado implicado; por ello, creemos que constituye un elemento que debe ser suficientemente explorado en la enseñanza del Álgebra, tanto escolar como universitaria.

A tenor de lo descrito, relacionado con la formación inicial de profesores de matemática y el lenguaje nos planteamos la pregunta que guiará el estudio:

Interrogante de la Investigación: ¿cuáles son los aspectos del lenguaje que activan los estudiantes en el aprendizaje de los objetos algebraicos propios de la formación inicial del profesor de matemática?

En función de la interrogante formulada, nos trazamos el siguiente *objetivo específico:* Develar los aspectos del lenguaje, tanto natural como algebraico, activados por los futuros profesores de matemática durante el aprendizaje del álgebra universitaria.

2 Coordenadas teóricas y conceptuales de referencia

En torno al papel del lenguaje en la construcción de conocimientos, es valioso tomar en cuenta la afirmación de Wittgenstein (1998) de que los límites de nuestro mundo están definidos por los límites de nuestro lenguaje. Por su parte, el lenguaje algebraico ha sido estudiado por autores como Freudenthal (2001); mientras que la interrelación entre ambos lenguajes forma parte del interés de autores como Pimm (2002); Rojano (1994) y Papini (2003). En el caso de Pimm (2002), afirma que la matemática es un lenguaje en coincidencia con los interaccionistas simbólicos (también con Skovsmose, 1999). En cuanto a la relación entre pensamiento y lenguaje en álgebra, Sbaiz y Druck (2021) aseguran que:

> A álgebra é importante na formação matemática dos estudantes, tanto por desenvolver um tipo especial de pensamento, como pela construção de uma linguagem simbólica. Essa composição de linguagem contribui para a matemática e para as áreas do conhecimento que se amparam nessa mesma maneira de se comunicar. O domínio e o entendimento dos símbolos utilizados na álgebra fazem parte da matemática como ciência. Esta linguagem possibilita o estabelecimento de uma comunicação universal desse conhecimento, mas para que isso aconteça, é necessário compreendê-la (Sbaiz; Druck, 2021, p. 182).

Con respecto a la naturaleza de la matemática, Lakoff y Núñez (2000) retoman el problema filosófico-ontológico acerca de su ser. Muchos son los filósofos que se han dedicado a cavilar las antiguas preguntas: ¿acaso las matemáticas existen en alguna parte del Universo? De ser así, entonces, la labor del matemático, en primera instancia, es acceder a ellas mediante complejos mecanismos humanos de captación y descubrimiento. O ¿las matemáticas son una creación de la mente humana? Si así fuese, entonces, se trata de una obra producto de la

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a220187

imaginación.

Estos dos autores vuelven sobre dichas preguntas y le dan respuestas desde una perspectiva cognitiva de la ciencia. Lo novedoso de su aporte estriba en la naturaleza empírica de sus afirmaciones, dicho con sus palabras se trata de una demostración, por primera vez, de que los humanos nacen con una base innata de aritmética. De tal manera que los logros en las matemáticas se deben a una maravillosa obra de creación. Según su punto de vista, la naturaleza de las matemáticas hay que buscarla en las ideas de las personas, no en las demostraciones formales, axiomas y definiciones ni en mundos trascendentes platónicos.

Estas ideas surgen de los mecanismos cognitivos y corporales de las personas. Por razones de tipo evolutivo, todos los seres humanos desarrollamos los mismos mecanismos cognitivos de los que surgen las ideas matemáticas. Debido a su origen común, las ideas matemáticas no son arbitrarias, no son producidas por convenciones completamente sociales y culturales, aunque reconocen que los aspectos sociales e históricos juegan papeles importantes en la formación y desarrollo de estas ideas.

La metáfora es un concepto importante en el desarrollo de la teoría de estos autores, ya que permite aprender un concepto en términos de otro (Lakoff; Johnson, 1980); en las matemáticas distinguen dos tipos: (a) *grounding metáforas*, son las que tienen su dominio de partida dentro de las matemáticas, pero su dominio de llegada fuera de ellas. Por ejemplo, *un espacio vectorial es una caja/paquete de cosas*, *un producto interno es una máquina*, *los puntos son objetos* etc.; y, (b) *linking metáforas*, tienen su dominio de partida y de llegada en las mismas matemáticas. Por ejemplo, *los números reales son los puntos de una recta*, *un operador lineal en un espacio finito dimensional es una matriz cuadrada*, *el espacio R^2 es el mismo espacio R^{2x1}*” (el par ordenado se interpreta como una matriz columna) etc. Nótese que, en este segundo tipo, la metáfora se sustenta sobre el concepto de isomorfismo, tan importante en el tratamiento de propiedades algebraicas.

Desde el punto de vista cognitivo, Arana y González (2006, p. 227) proponen la noción de *Enriquecimiento Conceptual Progresivo* para caracterizar el establecimiento de vínculos operativos recursivos entre distintos modelos mentales, progresivamente complejos, en torno al aprendizaje de un concepto. Estos autores señalan que “el encadenamiento de estos procesos incide en un cambio progresivo de la imagen del concepto que se enriquece cada vez más tanto desde el punto de vista de los atributos estructurales como funcionales”. Esto permite aumentar las habilidades del estudiante para operar sobre sus representaciones, incrementando, así, su capacidad explicativa en términos de abstracciones.

También, en el desarrollo de estos procesos están involucrados elementos de índole

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a220187

lingüístico. Al respecto, Lakoff y Johnson (1980, p. 47) señalan que “las expresiones lingüísticas son recipientes para los significados, supone que las palabras y las sentencias tienen significados en sí mismas independiente de cualquier objeto o hablante”.

Además, en la construcción de los conceptos matemáticos lo representacional juega, también, un papel que no puede obviarse, por ello subscribimos las siguientes proposiciones de Duval (2006): (a) la actividad matemática se realiza necesariamente en un contexto de representación, y (b) es muy importante que los estudiantes sean capaces de reconocer el mismo objeto matemático en otros contextos de representación y usarlos. Esto último es coherente con el hecho de que en matemáticas los signos no son prioritarios para presentar objetos, sino para sustituirlos por otros (Radford, 2010; Duval, 1995).

Adicionalmente, tomamos en cuenta que un concepto se entiende mejor en el conjunto de las relaciones dinámicas que lo ligan con otros conceptos, en los problemas en los que se aplica, y en los procedimientos y estrategias que se elaboran para resolver esos problemas (Radford, 1995). Concebimos el concepto como la representación lingüística de una idea abstracta que capacita al que la posee para clasificar objetos o eventos y para decidir si dichos objetos son ejemplos o no ejemplos de la idea abstracta en cuestión (González, 2005).

En relación con el buen desempeño del simbolismo algebraico, coincidimos con Puig (2003) cuando afirma que los símbolos matemáticos adquieren importancia a la luz de sus relaciones con el lenguaje natural. Para este autor, en esta conjunción ocurre una sinergia sígnica que propicia la generación de significados, por ello “lo que hay que calificar de matemático es el sistema y no los signos, porque es el sistema el responsable del significado de los textos” (Puig, 2003, p. 181); en consecuencia, para referirse a estos vínculos, dicho autor emplea el concepto de Sistema Matemático de Signos (SMS).

En resumen, cuando un estudiante intenta aprender, directamente, leyendo un libro de álgebra, debe disponer de unas competencias cognitivas y lingüísticas que le permitan interpretar el SMS pues, en dicha lectura, debe entrelazar armoniosamente el lenguaje algebraico y el lenguaje natural para comprender los conceptos que lee, y al interpretarlos debe ser capaz de plantear relaciones con otros conceptos a fin de ir esclaceriéndolos gradualmente. En este avance, dada la riqueza simbólica del álgebra, se enfrentará con una variedad de representaciones de tales conceptos y de los propios objetos por lo cual debe manejar conscientemente estos cambios de representación para lograr establecer, no solamente los conceptos, sino también la naturaleza de los objetos, así como sus propiedades. Este proceso se beneficia si, además, el estudiante se ve expuesto a hablar de esos conceptos y objetos que aprende ya que de acuerdo con Pimm (2002): (a) expresar en voz alta ayuda a los alumnos a

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a220187

aclarar y organizar sus pensamientos, y (b) al hablar, los pensamientos se exteriorizan notablemente, lo que permite que el propio hablante acceda a los mismos con mayor rapidez, así como la exposición de ellos a las observaciones de los demás.

Por lo tanto, tratamos de resaltar que el proceso de aprendizaje de los conceptos, particularmente del álgebra lineal universitaria, está indisolublemente ligado a procesos cognitivos y lingüísticos que ocurren simultáneamente, de manera arbitaria, confusa y no predecibles, con lo cual reafirmamos que la relación entre lenguaje y cognición es un asunto de extremada complejidad; en consecuencia, este vínculo siempre será una ventana abierta para el desarrollo de investigaciones. En el caso del lenguaje, Pimm (2002), ha propuesto las Matemáticas como un lenguaje, y en esta metáfora sobresale el papel del lenguaje oral, el cual forma parte de la evolución del álgebra (Nesselmann, 1842), por lo que estas matemáticas habladas no son un tema ajeno. También, entendemos que las elaboraciones mentales que se hacen de los conceptos del álgebra lineal son progresivamente complejos, y en este sentido, desde las ciencias cognitivas, modelos como el propuesto por Arana y González (2006) coadyuvan a estudiar tales construcciones.

3 Metodología

El contexto de esta investigación fue un curso de Álgebra Lineal desarrollado en un entrorno de aprendizaje mediado tecnológicamente (González R., 2017). Por tanto, constituye un estudio de caso (Jiménez-Chaves, 2012) en el cual participaron los alumnos (Estudiantes para Profesor de Matemática, EPPM) inscritos en dicho curso, dictado en una universidad pública latinoamericana dedicada a la formación de docentes para la educación secundaria. Este curso contempló dos instancias; una, presencial, consistente en clases en las que el profesor, quien al mismo tiempo fungía como investigador, desarrollaba el contenido matemático del curso en la forma habitual (exposición dialogada, explicaciones, realización guiada de ejercicios, resolución de problemas). La segunda instancia de interacción, no presencial y asincrónica, se dio mediante el diseño de actividades en la plataforma *Moodle*, usando varios de sus recursos, como *chats*, foros y otras facilidades. Además, se propició la comunicación vía correo electrónico.

En cuanto a las técnicas, para la instancia presencial se utilizó la Observación Participante (Kawulich, 2005) mientras que se usó la Mediación Contemplativa del Docente (González R.; González, 2014) para la instancia no presencial.

Como instrumentos fueron utilizados: la prueba EVAPAL (González R.; González,

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a220187

2011), los foros, el Diario del Docente y los Diarios de Clase escritos por los alumnos. Estos eran notas personales de los participantes, relacionadas con cualquier aspecto que ellos consideraran en el contexto de su aprendizaje del álgebra universitaria, sus pensamientos, reflexiones, sentimientos y emociones. Se podía realizar en cualquier soporte, pero una manera de incentivar su permanencia en el aula virtual era a través de la opción Diario que esta provee, debía ser actualizado semanalmente en función de las clases dadas. El análisis del contenido de estos cuadernos permitió reconstruir la línea del tiempo (cronogénesis, Llanos; Otero, 2015) del curso.

Al comienzo del período académico los estudiantes fueron instruidos para la elaboración de un Diario, a continuación, se muestran las orientaciones explícitas que se les dieron para su confección:

> *En este Diario siéntete en total libertad de expresar tus pensamientos, reflexiones, sentimientos y emociones en el contexto del aprendizaje del Álgebra, todo lo que te aconteció a nivel cognitivo y subjetivo resultará importante, sin embargo, a modo de sugerencia, puedes tomar en cuenta para guiarte: uso e interpretación de los símbolos matemáticos, razonamiento algebraico (abstracción) uso del lenguaje oral, escrito y gráfico; empleo de metáforas y analogías, resolución de problemas, etc.* [Orientaciones dadas por el profesor-facilitador del curso a los estudiantes].

Se trataba de tener a la mano una mirada del proceso de enseñanza y aprendizaje del álgebra universitaria desde la perspectiva de los participantes con la expresa intención de acumular evidencias relativas al punto de vista de ellos acerca de los conceptos, objetos y procesos algebraicos manejados en el curso, sobre la base de sus reflexiones en cuanto a sus vivencias experienciadas (González, 1998).

3.1. Procedimiento

En trabajos anteriores ya hemos dado a conocer los resultados obtenidos a partir de la prueba EVAPAL (González R.; González, 2011), y de los *chats* (González R.; González, 2014). En el presente reporte se rinde cuenta de los hallazgos derivados del análisis de los Diarios de Clase elaborados por los estudiantes, en cuya selección, organización y análisis se aplicaron criterios semejantes a los usados por González (1998) y Villegas y González (2005). A continuación, será descrito el procedimiento implementado para organizar y preparar el análisis del contenido de los Diarios de Clase, lo cual es fundamental para reconstruir la Línea del Tiempo (Cronogénesis) del estudio.

3.1.1 Organización y disposición del contenido de los Diarios

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a220187

Una vez culminada la fase de recolección de información se procedió a la *Selección de los Diarios de Clase* elaborados por los estudiantes; teniendo en cuenta los siguientes criterios: (a) Características estructurales de los Diarios: mediante la revisión preliminar de los Diarios se detectó que los elaborados por los estudiantes del turno de la mañana estaban mejor estructurados y más completos que los correspondientes al turno de la tarde; (b) Aspecto cuantitativo: en la sección del turno de la mañana se recibieron treinta (30) Diarios, mientras que de la sección de la tarde se recogieron veintidós (22). Adicionalmente, se tomaron en cuenta los siguientes factores externos: (c) Factor climático. En la mañana las clases eran los días martes de siete a nueve, y los viernes de siete a diez; con una temperatura ambiental muy agradable de aproximadamente 21° C, caracterizada, además, por una brisa matutina suave y fresca. Incluso lo relacionado con la contaminación sónica no se presenta en esos bloques de horario de trabajo; (d) Ambiente institucional general. En las primeras horas de la mañana eran casi inexistentes los conflictos de tipo político, laboral y estudiantil. En el turno de la tarde fueron más frecuentes los disturbios que se produjeron con distintos niveles de agresividad en las inmediaciones del campus universitario. Como puede notarse en estas dos últimas consideraciones, el aspecto ambiental e institucional significó un panorama favorable para el desarrollo del curso en el turno de la mañana.

Por los anteriores argumentos decidimos considerar solamente los Diarios elaborados por los estudiantes del turno de la mañana, así fueron seleccionados treinta (30) de un total de cincuenta y dos (52) Diarios.

3.1.2 Procedimiento Analítico

3.1.2.1 Organización del Corpus de Información

Para realizar el análisis, los Diarios seleccionados fueron sometidos a las siguientes acciones:

1. Lectura preliminar para adquirir una visión panorámica global de su contenido.
2. Reescritura con el editor de texto *Word* para facilitar el uso de las herramientas propias de los editores de texto.
3. Corrección de errores ortográficos detectados en los textos escritos por algunos alunos.
4. Adopción de un diseño uniforme (tipo y tamaño de letra, paginación etc.), pero conservando la integridad del contenido del Diario.

5. Organización de un libro que integra todos los Diarios, cuyo índice los registra con un código de la forma siguiente: DN°-XY (en esta codificación los números van desde uno (1) hasta treinta (30) y fueron asignados al azar, mientras que las letras son las iniciales del nombre y apellido del autor de cada Diario, esto permitió identificarlos inequívocamente).
6. Inserción de comentarios, a partir del proceso de lectura y relectura de cada Diario, de comentarios relativo a cualquier aspecto que resultase significativo para los investigadores.
7. Identificación de aspectos descriptivos generales de cada Diario: Código, Turno, Número de Páginas, Estructura y Observaciones.

3.1.2.2 Integración Matricial de todos los Diarios

Para obtener una visión global de toda la información contenida en los diários, se construyó una matriz de orden 30x42. En cada fila colocamos los treinta Diarios correspondientes, ordenados de forma ascendente, en las columnas colocamos los números de cada clase desde el número uno (1) hasta la cuarenta y dos (42), contabilizando todos los martes y viernes a partir del 14 de octubre (primera clase) hasta el último día que aparece reseñado (viernes 06 de marzo).

3.1.2.3 Revisión de todos los Diarios

Fue realizada una revisión minuciosa de cada Diario (Figura 1).

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a220187

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C9	C10	C11	C14	C15	C17	C28	C29	C30	C31	C32	C33	C34	C35	C37	C38	C40	C41	C42	Total reseñas
D1																										
D2																										
D3			x	x	x	x	x	X	x	X	X	x	x	x	x	x	x	x	x	X	X	x	X	x		22
D9																										
D10			x	x	x	x	x	X	x	X	X	x	x	x	x	x	x		x	X		x	X			19
D11				x	x	x	x	X	x		x		x	x	x	x		x								12
D14																										
D15				x	x	x	x	X	x	X	x	x	x	x	x	x	x	x	x							16
D17								X	x																	2
D18						x	x	X	x	X	x	x	x	x	x					X		x	X	x		14
D19				x	x	x	x	X	x		x		x	x	x											10
D20				x	x	x	x	X	x	X	x	x	x	x		x								x	x	14
D21				x				X		X																3
D22				x	x	x	x	X	x	X	x	x	x	x	x	x		x	x	X						16
D24				x	x	x	x	X	x	X	x	x	x	x	x	x				X						14
D25	x	x	x	x	x	x	x				x		x	x	x			x	x	X						14
D27	x	x								X			x			x			x							6
D28				x	x	x	x	X	x	X	x	x	x	x	x	x	x	x	x	X	X	x				19
D29			x			x	x	X	x	X		x	x	x	x			x	x							12
D30		x	x	x		x	x	X	x				x	x	x	x										11
D31			x	x	x	x	x	X	x	X	x	x	x	x	x				x	X		x	X			17
D34		x	x			x	x	X	x	X	x		x	x	x	x	x	x	x							15
D36			x	x	x																					3
D37																										
D38			x	x	x	x	x	X	x	X	x	x	x	x	x	x	x	x	x	X	X	x	X	x	x	23
D39		x	x	x	x	x	x	X	x		x	x	x	x	x			x	x	X		x				17
D40				x	x	x	x	X	x		x	x	x													9
D49			x		x	x	x	X	x		x	x	x	x	x	x			x							13
D50																										
D52																										
	2	5	11	17	16	19	19	20	19	14	17	14	20	18	17	13	6	10	13	10	3	7	5	4	2	

Figura 1 - Cuantificación de las reseñas de las clases por Diario
Fuente: Datos de la Investigación.

Si el autor de un diario hacía referencia a una determinada clase era marcada con una equis (X) la celda que resulta de la intersección de la fila del Diario con la columna de la clase correspondiente. Este proceso terminó cuando se agotaron los Diarios. En el Gráfico 1, fueron omitidas las columnas correspondientes a las clases números 7, 8, 12,13, 16, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 36 y 39 debido a diversos eventos, algunos internos, tales como, realización de evaluaciones o bien externos como vacaciones, elecciones nacionales, entre otros. Las filas correspondientes a los Diarios D1, D2, D37, D50 y D52 están vacías pues de acuerdo con el análisis preliminar de sus contenidos, descrito en el Gráfico 1, la información arrojada resultó insuficiente, razón por la cual fue decidido no considerarlos.

3.1.2.4 Caracterización de las clases reportadas en los Diarios

Fue establecida una caracterización preliminar de cada clase, para ello procedimos a leer todos los Diarios que hacían referencia a una classe determinada. El proceso consistía en fijar una columna de la Matriz y rastrear cada una de sus filas para tener acceso a los Diarios correspondientes. Una vez detectado el número del Diario que la describía, lo ubicábamos en

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a220187

el libro y lo leíamos tratando de identificar los episodios y las acciones referidas a los momentos de entrada, desarrollo y salida (es decir, se trató de un proceso de captación de regularidades y patrones lo cual es una actividad propia del pensamiento algebraico) de la respectiva clase. Si alguna frase, afirmación, o cualquier idea del autor resultaba significativa para los investigadores, se accedía al documento digital correspondiente y se copiaba la frase textual. Una vez agotada la lectura y la revisión se repetía el proceso con el siguiente Diario hasta completar el último de la columna fijada. Luego, continuábamos con la siguiente columna para la descripción de la próxima clase.

3.1.2.5 Revisión de las discrepancias sobre las clases identificadas en los Diarios

Para subsanar las discrepancias en cuanto a las circunstancias relacionadas con la precisión temporal de algún hecho particular, durante el desarrollo de la fase de campo de esta investigación (las sesiones de trabajo en el Curso), procedimos a una revisión de todos los Diarios, y tomando en cuenta un criterio de tipo frecuencial decidimos en torno a su fecha de acaecimiento.

4 Reconstrucción de la Cronogénesis del trabajo de campo

Tomando en consideración que todo lo que acontece tiene lugar en una dimensión temporal, asumimos la necesidad de reconstruir la Cronogénesis (descripción pormenorizada de todo lo acontecido entre la primera y última clase) del trabajo de campo, es decir, la trayectoria del Curso (correspondiente a la sección selecionada) a lo largo del tiempo. Para ello, se usó una estrategia similar a la puesta en práctica por González (1998) en la cual se aplicaron las siguientes herramientas analíticas: (a) línea del tiempo; (b) esquema reconstructivo del discurso del aula. Así fue como se pudo detectar que el trabajo de campo quedó dividido en cuatro (4) fases definidas por los momentos destinados a las evaluaciones ya que cada una de ellas marcó un hito en el devenir del Curso.

La línea del tiempo constituye un resumen de los aspectos más resaltantes acontecidos en cada una de las clases; ella permite detectar regularidades y semejanzas las cuales, luego de un proceso de comparación continua (como lo entienden Glaser; Strauss, 1967) fueron formalizadas mediante el establecimiento de episodios comunes que generalizan la descripción de los momentos de cada una de las clases: introducción, desarrollo y cierre. Con base en la definición de estos episodios fue diseñado el esquema reconstructivo del discurso del aula

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a220187

(Cuadro 1). Finalmente, usando las dos herramientas analíticas antes indicadas se logró la reconstrucción retrospectiva de las cuarenta y dos (42) clases, esclareciendo, así, la Cronogénesis del curso.

Introducción	
Episodio	**Descripción**
1.1 Preparación del ambiente afectivo	Saludos, palabras motivacionales, comentarios generales
1.2 Revisión de responsabilidades	Recordatorio de tareas
1.3 Preparación logística	Verificación de las herramientas de trabajo: (a) Presencial: libros que facilita el docente, algunos solicitados por los estudiantes, otros suministrados para fotocopiar una sección o tema específico; suministro de material ad-hoc elaborado por el docente (b) Virtual: balance de lo acontecido en el aula virtual.
Desarrollo	
2.1 Empalme teórico pertinente y táctico	Retomar aspectos claves de la clase anterior para abordar la nueva clase, puede ser un ejemplo, una pregunta formulada (docente o estudiante), un problema, una definición o un teorema. O, cualquier contenido previo de cualquier área.
2.2 Refinamiento del lenguaje	Ajuste del lenguaje oral y escrito: se hace tomando en cuenta las participaciones, tanto teóricas en las intervenciones orales de los estudiantes en las discusiones de los contenidos; así como sus aportaciones prácticas en el pizarrón. También se consideran aquí las distintas reflexiones acerca de los símbolos que se emplean en álgebra, destacando su naturaleza mediadora e instrumental; enfatizando su diferencia con el objeto algebraico. Se emplea el recurso de analizar lo que *se dice sin decir* y lo que *no se dice diciendo*, es decir el estudio de lo implícito, explícito y lo subyacente del discurso específico (es decir el discurso presente en la teoría que se discute). Tiene que ver con la precisión de las definiciones (buenas definiciones); manejo de las condiciones necesarias y suficientes de un teorema (en algunos casos está la presencia de una hipótesis general y una específica).
2.3 Resolución de problemas y ejercicios	Planteados directamente por el docente, y otros aportados por los estudiantes. O, luego de una evaluación escrita. En algunos casos los resuelve el docente en interacción constante con los estudiantes; en otros son los mismos estudiantes que solicitan expresamente la intervención.
2.4 Discusión, análisis y reflexión teórica	Exposición de los contenidos directamente por del docente, mediante escritos en el pizarrón, o lectura de un material por el docente y/o algún estudiante. Exposición de demostraciones.
2.5 Incertidumbre inducida	Preguntas o comentarios cuya naturaleza requieren una reflexión profunda. Se pone en duda la teoría mediante aparentes vacíos en ella, ejemplos que parecen negarla. Se crea una atmósfera de silencio, de cavilación. Se incluye, aquí, el debilitamiento de condiciones de un teorema o de una definición mediante preguntas como: qué pasa si…? (cambiando, quitando o poniendo una condición).
2.6 Planteamiento de metáforas	Metáforas orales y gráficas relacionadas con el contenido que se discute. O, luego de la incertidumbre inducida.
2.7 Consulta y despeje de dudas	Luego de una exposición directa o de la resolución de un problema o ejercicio. O, luego de un período de incertidumbre inducida.
Cierre	
3.1 Balance teórico y práctico	Resumen estratégico de lo dicho por el docente y por los estudiantes, selección de especie de *palabras claves.*
3.2 Gestión del Curso	Repaso del desarrollo del plan de evaluación, los lapsos temporales del período académico.
3.3 Asignación de	Asignación de lecturas, problemas y/o ejercicios.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a220187

responsabilidades	
3.4 Puesta en perspectiva	Palabras: de aliento, de ánimo y de despedida.

Cuadro 1 - Esquema reconstructivo del discurso del aula
Fuente: elaboración propia con datos de la investigación.

La Cronogénesis consiste en la reconstrucción de los episodios acaecidos durante los diferentes momentos de cada una de las clases, acompañada de reflexiones, inferencias, anotaciones, especulaciones, y comentarios interpretativos del investigador. A continuación, se muestra el extracto de la cronogénesis del curso, correspondiente a la Clase N° 3, llevada a cabo el día martes, 21 de octubre.

Clase N° 3: día martes, 21 de octubre

Esta clase la describen once diarios[1], con este número se observa un incremento notable en la cantidad de reportes en relación con la clase anterior. A continuación, se describe su estructura:

Introducción

4.1. Episodio de preparación del ambiente afectivo

Es la segunda semana del período académico y aún a esta clase asisten nuevos estudiantes, es decir aquellos que no lo hicieron en las primeras dos sesiones.

> *El profesor comienza dando los buenos días, posteriormente procede a comenzar la clase. Antes que todo, realiza un breve comentario acerca de las asignaciones que tenemos que hacer por Internet para ubicar a los estudiantes que no vinieron la semana pasada* (MA, 2015).

4.2 Episodio de revisión de responsabilidades: ampliación de los detalles del trabajo mediado por internet

> *Explica que hay que enviarle un mensaje a su correo, anotándolo en la pizarra; agorondell@hotmail.com, para darle algunas recomendaciones y opiniones de como esperamos que sea enfocada la materia; también nos comenta como es el proceso de inscripción en el salón virtual* (MA, 2015).

Después de saludar, el docente nuevamente informa que se va a realizar un trabajo empleando la red internet, escribe su dirección de correo electrónico para que los estudiantes, en un plazo relativamente breve, le escriban y así obtengan todas las direcciones del grupo, una vez hecho esto el docente les enviará el Programa del Curso. Esto significó un cambio de estrategia para impulsar la obtención de sugerencias, puesto que en las anteriores clases se

[1] Estos Diarios son los identificados con los números: 3, 10, 25, 29, 30, 31, 34, 36, 38, 39 y 49.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a220187

facilitó el documento físico del Programa a fin de que los estudiantes sacaran copias y procedieran a su revisión, en esta ocasión se indicó que se facilitaría en formato digital y así insistir en la realización de la tarea.

Por otra parte, se señaló que el uso del Salón Virtual requería dos pasos previos individuales: (1) registrarse en la plataforma *Moodle* y (2) matricularse en el Curso. Se indicó que, una vez que todos hubiesen cumplido con el primer paso, se les entregaría una clave con la que se podrían inscribir. Las instrucciones para efectuar el registro se escribieron en el pizarrón: (1) ingresar al sitio en internet de la UPEL (www.upel.edu.ve); (2) seleccionar la opción Salón virtual; (3) seleccionar la opción Entrar; (4) digitalizar un nombre de usuario y una clave; (5) llenar el formulario que se le presentaba; y, (6) confirmar la subscripción a la plataforma a través del correo introducido. Además, se describían las interfaces a través de dibujos.

Desarrollo

4.3 Episodio de empalme teórico pertinente y táctico: repaso de conceptos fundamentales

> *Hoy 21/10/2008 en la clase de Álgebra Lineal, dada por Profesor Andrés González se comenzó definiendo un Espacio vectorial, dimensión, base, cuando un conjunto es linealmente dependiente e independiente y además de dar ejemplos. Como repaso de la asignatura (recordatorio)* (AH, 2015).

Se trata de un recordatorio breve que toma en cuenta la discusión de la clase anterior y, así, se busca establecer una base sobre la cual comenzar a desarrollar la definición de producto interno.

4.4 Episodio de discusión, análisis y reflexión teórica: el Producto Interno (P.I)

El docente desarrolla el contenido a partir de de la organización de los estudiantes por grupos para discutir la definición de producto interno basada en la copia de un libro que previamente se había facilitado:

> *El profesor propuso colocarnos en grupo para poder leer la guía y discutir en nosotros mismos, luego realizar la discusión en grupo* (EG, 2015) .

En relación con la dinámica puesta en práctica en esta parte de la clase:

> *La clase se fue desenvolviendo de modo que todos formamos parte de ella* (MA, 2015).

Sin embargo, existen comentarios divergentes como los de YC:

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a220187

En cuanto a las clases ya prácticas del contenido propiamente dicho al inicio muy bueno todo porque nos fue induciendo poco a poco con ejemplos muy puntuales en el contenido, además de ir refrescando la memoria con respecto al contenido de las álgebras vistas anteriormente, pero después me pareció y aun pienso así; que va muy rápido, que yo por pena o por sentirme intimidada con su persona, además de las experiencias pasadas con usted en otras oportunidades con otras materias, estoy segura que muchos compañeros al igual que yo preferimos callar antes de preguntar algo que le pueda parecer una tontería y avergonzarnos delante de todo el grupo (YC, 2015).

Esta opinión es importante, considerando los propósitos investigativos en el que se insertó el desarrollo de este curso, pues de forma sincera se pone de manifiesto expresamente la inhibición que por diversas razones produce el docente en la estudiante. Esto reafirma la estrategia motivacional que se manejó desde el principio.

4.5 Episodio de refinamiento del lenguaje

Por otra parte:

El profesor dio un comentario muy importante…. el producto interno sobre un espacio vectorial se puede interpretar como función de dos variables y nos pidió que revisáramos las propiedades con la función $\Phi: V \times V \rightarrow F$ (KT, 2015).

Ante esta variación notacional, JR manifiesta:

Sentí que viajaba por las nubes porque no estaba entendiendo nada, ya que si aun no había podido asimilar bien la definición dada al principio mucho menos comprendería esta última (JR, 2015).

Esta opinión está motivada por el cambio en la simbolización del producto interno, en este caso el estudiante cree que se trata de otra definición de P.I, es decir, expresa una dificultad para operar con las diferentes denotaciones de un mismo objeto algebraico. Más adelante este mismo estudiante expresa:

Había una noción acerca de lo que era un Producto Interno (el usual) y jamás imaginé que existían otros, por lo tanto esta nueva información causó un desbarajuste en lo que ya conocía, tanto que al principio utilicé el punto que usualmente se utiliza para denotar al mismo en vez de la barra (/) (JR, 2015).

Este cambio notacional, en ocasiones, tiene repercusiones conceptuales y prácticas. U ejemplo lo tenemos a través del problema: *demostrar que la suma de dos productos internos sobre V es un producto interno sobre V*, para poder resolverlo es necesario entender el P.I como función de dos variables con lo cual adquiere sentido la operación de adición, pues se trata de la suma usual de dos funciones en un contexto de espacio vectorial.

Cuando JR lo entendió dijo:

Esto me generó muchísima confusión y me di cuenta que aun no había madurado la definición de producto interno escrita en forma de función (JR, 2015).

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a220187

Aquí, se hacen presentes dos problemas derivados también de dos aspectos característicos propios del trabajo algebraico y del simbolismo como lo son, la generalización y la sinonimia. La dificultad relacionada con la generalización se evidencia cuando se establece la ampliación, a través de la axiomática específica, del concepto de producto escalar (o producto interno usual) que maneja el estudiante en el ámbito de los espacios vectoriales R^2 y R^3. En este sentido, se deben destacar las consecuencias de esta generalización; por una parte, se gana al establecer una categoría de mayor nivel conceptual para el producto interno; por otra, se pierde la interpretación geométrica del mismo y, por ende, su visualización. Por otro lado, también está presente la limitación asociada con la sinonimia, en este caso el conflicto ocurre entre la barra inclinada (/) y el punto (.) para denotar el producto interno, pues, ambas notaciones, a pesar de poseer diferente registro escritural tienen el mismo significado[2].

Otra dificultad detectada, relacionada con los atributos del símbolo, es la polisemia. En las siguientes opiniones de dos estudiantes se puede apreciar la presencia de este obstáculo:

> *Además de aclararnos que el (+) de un espacio vectorial no es igual al (+) de un cuerpo (AH) Vale la pena destacar una sugerencia bastante oportuna dada por el profesor y que me pareció bastante interesante, cuando al referirse a la propiedad d) estableció la distinción entre el cero vector y el cero del cuerpo, esta aclaratoria fue clave para entender lo que planteaba dicha propiedad* (JR, 2015).

El primer comentario hace referencia al símbolo (+) usado en la propiedad: $(\alpha + \beta / \gamma) = (\alpha / \gamma) + (\beta / \gamma)$. El signo (+) del lado izquierdo denota la operación aditiva en el espacio vectorial; en este caso, este símbolo sirve para representar la ley de composición interna en el espacio vectorial la cual permite transformar dos vectores cualesquiera en otro vector llamado suma. Mientras que el del lado derecho alude al mismo proceso, pero en la estructura de cuerpo; esto es, simboliza la función a través de la cual se hace corresponder un escalar[3] a dos escalares cualesquiera. Como se puede ver, el mismo símbolo sirve para expresar diferentes operaciones. Se podría agregar también el hecho de que, en muchas fuentes bibliográficas, este mismo signo es usado indistintamente para denotar tanto la operación adición (en el cuerpo o el espacio vectorial) así como la correspondiente suma, es decir la imagen que se asigna al par ordenado correspondiente.

El segundo comentario hace referencia a la naturaleza de los *ceros* del axioma: $(\alpha / \alpha) > 0$, si $\alpha \neq 0$. El de la izquierda es el número real cero[4], mientras que el de la derecha es el vector

---

[2] Es importante dejar constancia de que se tiene conocimiento de las complejas implicaciones que este término posee; sin embargo, aquí es usado para hacer referencia a la imagen conceptual (Vinner, 1991) del objeto algebraico formado en el pensamiento del estudiante.

[3] Es usual denominar escalar a los elementos de un campo.

[4] Adicionalmente, obsérvese la implicación conceptual y práctica que, en esta expresión, tiene el uso del símbolo *mayor que* junto al cero de la izquierda, pues para el vector nulo del espacio, éste carece totalmente de sentido.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a220187

nulo del espacio vectorial; de no observarse esta diferencia no se tendrá acceso al contenido que expresa esta propiedad.

Cierre

4.6 Episodio de asignación de responsabilidades

> *Nos fue dejado como tarea dos ejercicios para mostrar si estos son un producto interno* (MA, 2015).

Los ejercicios a los que alude MA los extrajo el docente de otras referencias bibliográficas. Los siguientes comentarios expresan las opiniones de JR y MA en torno a la forma como ellos percibieron la clase:

> *Puedo decir que en esta clase la simbología fue un factor determinante para comprender la definición de producto interno* (JR, 2015).
> *Me parece que la clase de hoy fue bastante amena, la interacción existente entre estudiantes y profesor fue bastante notable ya que esto permite que la clase sea metódica y haya participación de ambas partes* (MA, 2015).

5 Hallazgos, discusión y proposiciones

A partir del análisis del contenido de los Diarios se pudo observar que los estudiantes realizan dos tipos de lecturas de los materiales documentales con contenido algebraico. La primera es una Lectura Literal (*LL*), necesaria pero insuficiente; la segunda, que trasciende a la primera, la hemos denominado Lectura Algebraicamente Significativa (*LEAS*)

Además de esos dos tipos de lectura, fue posible identificar un aspecto relacionado con el lenguaje oral, al cual denominamos Expresión Oral Algebraicamente Significativa (*EXOAS*). Tanto la *LEAS* como la *EXOAS* son de naturaleza compleja, ocurren mediante un proceso lento y gradual, y en conjunto conforman lo que hemos denominado Lenguaje Algebraicamente Significativo (*LAS*).

5.1 Lenguaje algebraicamente significativo (LAS)

En la caracterización del Lenguaje Algebraicamente Significativo (LAS), tomamos en cuenta los planteamientos teóricos de Radford (2010a, 2010b), Vygotsky (1979), Drouhard (2009) y Duval (1999).

De Radford (2010a, 2010b) consideramos su noción de Medio Semiótico de Objetivación, el cual incluye *artefactos, gestos, símbolos y palabras*, las cuales no son sólo

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a220187

herramientas por medio de las cuales manipulamos el mundo, sino mediadores de nuestros actos intencionales. En su Teoría de la Objetivación, Radford (2010a, 2010b) afirma que las palabras y los gestos también pueden ser asumidos como *signos de naturaleza algebraica*.

Con Vygotsky (1979) coincidimos en cuanto a que el *lenguaje opera como mediador* de los procesos de pensamiento asociados con la producción de conocimientos en general y matemáticos en particular.

Asumimos, con Drouhard (2009), que las *palabras y los enunciados* en lenguaje natural constituyen *herramientas semiolingüísticas* que hacen posible la comprensión de las nociones abstractas propias de la Matemática. Todos estos medios, en su conjunto pueden ser interpretados como *medio de exteriorización de las representaciones semióticas* definidas por Duval (1999) y, como lo afirma (Morales, 2013):

> […] estas representaciones externas, presentadas como enunciados en lenguaje natural, fórmulas algebraicas, gráficos, entre otros, permiten a los individuos exteriorizar sus representaciones mentales y lograr que los objetos matemáticos se tornen accesibles. El éxito de la realización de este "movimiento" entre registros, es un indicador del logro del aprendizaje sobre objetos matemáticos en estudio (Morales, 2013, p. 1).

Adicionalmente, la teoría de Radford (2010a, 2010b), aludiendo a formas pedagógicas de acción que conllevan una comprensión profunda de los conceptos matemáticos, incluye los términos enseñanza y aprendizaje significativo, entendido este último como:

> […] el proceso a través del cual una información (o conocimiento nuevo) se relaciona de manera no arbitraria y sustantiva (no literal) a la estructura cognitiva del aprendiz. Es en el curso del aprendizaje significativo que el significado lógico del material de aprendizaje se transforma en significado psicológico para el sujeto (Ausubel, 1963, citado por Moreira; Caballero; Rodríguez, 1997).

Fundamentada en los planteamientos teóricos que acabamos de exponer, y centrada en el análisis de los Diarios de Clase, fue elaborada la noción que hemos denominado *Lenguaje Algebraicamente Significativo* (*LAS*) la cual se manifiesta mediante dos actividades: (a) *Lectura Algebraicamente Significativa* (*LEAS*) y (b) *Expresión Oral Algebraicamente Significativa* (*EXOAS*).

5.1.1 Lectura Algebraicamente Significativa (LEAS)

Al igual que Chumaceiro y Pérez (2011, p. 46), asumimos la lectura como un proceso complejo, dinámico e interactivo ya que:

> No se trata de una descodificación de signos, ni de transferencia de información desde la letra impresa a la memoria del lector. Leer es una forma de pensar, que se pone en marcha a partir del texto materializado. Supone una contribución activa del lector, quien apoyado en su propia experiencia cosgnoscitiva y en la aplicación de un

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a220187

> conjunto de operaciones mentales complejas, debe llenar los vacíos de sentido que el texto le plantea y establecer nuevas relaciones con base en la información que ha extraído. Leer es, pues, en una primera aproximación, extraer y construir significado en la interacción con el texto.

Lo relacionado con la *Lectura Algebraicamente Significativa*, de acuerdo con nuestro punto de vista, se aproxima a la noción de traducción, no se realiza desagregando partes, sino mediante la integración y la globalización (Barrio; Barragán, 2005). Además, supone que el todo, que es la comprensión de lo que subyace en la simbolización, es mucho más que la suma aislada de las partes, ya que esto último supone una decodificación desconectada de cada una de las partes de los signos y símbolos. Es decir, *LEAS* es una opción trascendente ante la lectura literal (*LL*) de los símbolos; sin embargo, no la niega ya que, en la práctica, el primer contacto del discente con el simbolismo es a través de una *LL*.

A continuación, mostramos un ejemplo de *LL*:

> *El tema principal de esta clase fue Gram-schmidt el cual indica que si poseemos betas, los cuales representan vectores que son independientes, a partir de ellos se puede construir una base ortogonal de alfas* (DC, 2015).

Aun cuando DC dice: *los cuales* (refiriéndose a los betas) *representan vectores* (paréntesis añadido), la consideración global del comentario nos hace creer que sobreestima el papel de las letras griegas al considerarlas, efectivamente, como vectores, como consecuencia de una *LL*. Esta *LL* puede ser identificada por los estudiantes con la expresión *leer por leer* como lo ilustra YG en su comentario:

> *Sea* $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ *y* $M = \{f \ \in C[x] | f(A) = 0\}$. *Hallar el generador Mónico…yo no entendía nada este ejercicio, ni siquiera sabía que era lo que debía buscar, mi error era que yo no estaba metida bien en el contexto de lo que se me estaba hablando… primero ni sabía que elementos tenía el conjunto M, solo leía por leer… ni me había dado cuenta de que en el conjunto había polinomios que cuando se evalúa la matriz A el resultado es 0, pero lo peor es que no me pasaba por la mente que ese 0 no es un cero sino la matriz nula* (YG, 2015).

En algunos casos, mediante la *LL* los estudiantes se encuentran muy pendientes de la morfología del símbolo (Caballero, 1996) lo que les impide tratar su contenido, veamos esto a través de los comentarios que hacen JC y MS:

> *Se dio inicio a la clase con el siguiente ejercicio* $[A + B|C] = [A|C] + [B|C]$ *…. Aquí no lograba comprender el asunto de la notación entre paréntesis y corchetes* (JC, 2015).
> *La simbología fue la que me presento confusión, como lo fue cuando utilizamos los corchetes para decir que estaríamos hablando de generador* (MS, 2015).

De continuar esta fijación con *la notación entre paréntesis y corchetes* existe una posibilidad de no comprender la propiedad que se le está indicando. En el siguiente comentario GB nos muestra dos posibles variantes de lecturas de la expresión $\alpha + \beta$:

> *Los símbolos que muchas veces lo que hacemos y lo que hemos venido haciendo es leerlos y*

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a220187

> *llamarlos por un nombre especifico, por ejemplo alfa mas beta, siendo alfa y beta vectores, también podríamos decir la suma de dos vectores* (GB, 2015).

En el comentario anterior, el autor describe la lectura *símbolo por símbolo* (en la cual, incluso a nivel verbal, no guarda diferencia con la lectura de $\alpha, +, \beta$) que podemos asociar con las primeras experiencias de lecturas aritméticas que se realizan en los primeros años de la escolaridad; adicionalmente, ofrece otra opción en la cual el operador adición es enunciado previo a los vectores, o sea, en esta última queda en evidencia la posibilidad de una lectura de un mayor nivel de elaboración.

Observemos el comentario que hace CB en relación con la *LL* de los símbolos:

> *Podríamos confundir esta notación con una idea vaga de un slach, lo cual en nuestro contexto no tiene sentido… no permitiría el desarrollo del lenguaje algebraico… lo estaremos limitando sin permitirnos la maravillosa oportunidad de ver, leer y contextualizar lo que otros no pueden…algunas personas sólo leen esto H_a como H sub a, nosotros al visualizar esta notación algebraica reconoceremos de forma inmediata que se trata de la clase lateral derecha de H asociada al elemento a* (CB, 2015).

Percibimos que cuando CB alude al lenguaje algebraico lo refiere en su versión retórica. En este fragmento se observa que CB cuestiona la *LL* de los símbolos "/" y *Ha*; y alternativamente, manifiesta la necesidad de llenarlos de significados. Una manera de lograrlo, por ejemplo, en el caso del primer signo es suprimiendo su significado usual como signo de división, y enfatizando que, en este contexto, se emplea para identificar un objeto algebraico denominado producto interno; y, en el caso del segundo, destacando la necesidad de sustituir la *LL*, cuando se dice *H sub a*, por una expresión que destaque la naturaleza del tema involucrado, como por ejemplo, en palabras de CB, se trata *de la clase lateral derecha de H asociada al elemento a.*

La *LL* es señalada por algunos estudiantes como equivalente a lectura lineal en la cual los símbolos están colocados simplemente para ser leídos. A continuación, mostramos un caso mediante la práctica de la lectura de conjuntos, por ejemplo: $N = \{ \alpha \in V | T(\alpha) = c\alpha\}$

> *Lo que generalmente hacemos… es leer de forma lineal lo planteado sin desglosar parte por parte e interpretar la expresión dada… leemos por ejemplo $T(\alpha) = c\alpha$ (es decir, T de alfa igual a c por alfa) en vez de decir: esta expresión indica que aquí están todos los múltiplos escalares del vector α* (NA, 2015).

Destacamos este comentario pues, a pesar de que NA afirma que en el conjunto están *todos los múltiplos escalares del vector α* (esta descripción se corresponde con el subespacio generado por el vector α) lo cual es erróneo, ya que no considera la transformación T, se percibe una toma de conciencia de la insuficiencia que conlleva la *LL*, (NA materializa este aprendizaje cuando critica la lectura literal de la igualdad $T(\alpha) = c\alpha$*);* ese pudiese ser el primer paso hacia una lectura de mayor comprensión algebraica como la *LEAS* (una lectura correcta es que en el conjunto están todos los vectores del espacio que son múltiplos escalares de sí mismos mediante la transformación T).

El siguiente comentario, podemos considerarlo como una comparación entre la *LL* y la *LEAS*, en la que, además, se resalta la ventaja de la última, dado el acento que la *LL* coloca sobre la morfología del símbolo:

> F^{∞}*, a simple vista cualquiera diría que es efe elevada al infinito, pero realmente su significado va mas allá,… representa el conjunto de sucesiones del tipo infinitas…* $F[X]$ *quizás para muchos o para nosotros mismos vemos simplemente un par de corchetes…en nuestro contexto su significado es un subespacio generado de* F^{∞} *en el cual cada elemento es un polinomio de* F (DC, 2015).

Con el símbolo de pertenencia, ∈, de acuerdo con la experiencia de los autores de la investigación que reportamos, es muy frecuente que haya una especie de regularidad en su lectura, consistente en el escaso empleo de expresiones sinónimas para referirse a la idea matemática subyacente, prevaleciendo, así, una LL. En torno a esto, NA comenta su propia experiencia con base en la cual es posible ilustrar este comentario:

> *La siguiente notación* $f \in Z[X]$*, la cual leemos generalmente como: "f que pertenece a* $Z[X]$*", lo que carece de significado…si reflexionamos sobre dicha expresión nos damos cuenta que al leerlo de esa manera no estamos haciendo una interpretación adecuada de la notación, y por ende, no nos arroja la información allí involucrada de una manera clara* (NA, 2015).

Es pertinente aclarar que la expresión *carece de significado* empleada no es la más exacta en la descripción que estamos haciendo, no recoge lo que queremos decir, sin embargo su reflexión en cuanto a que *al leerlo de esa manera… no nos arroja la información allí involucrada de una manera clara* probablemente haga referencia a la importancia de propiciar otro tipo de lectura cuando se aprenden estos contenidos.

A veces, durante el proceso de aprendizaje se sobreestima el papel del signo, al otorgarle cualidades que no posee, por ejemplo, obsérvese como en el siguiente comentario de EC le confiere al signo el poder de identificar *per se* al objeto:

> *La suma "+" en el cuerpo se refiere a la suma de escalares, pero en el espacio vectorial se refiere a la adición de vectores (...) debería haber alguna forma de diferenciar el símbolo en el cuerpo y en el espacio* (EC, 2015).

La importancia que EC le atribuye a la sintaxis, en torno al uso de corchetes y paréntesis, también resulta sobreestimada:

> *Encerramos en paréntesis o corchetes dependiendo si hablamos del producto interno o de las operaciones con los elementos* (EC, 2015).

En los dos comentarios de EC, puede observarse cómo toda la carga semántica del símbolo (Buzatto; Marcon, 1998) la hace recaer sobre dicho símbolo, es decir, haciendo

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a220187

dependiente el significado de su instrumento mediador, obviando, así, por lo menos dos aspectos esenciales: (1) la naturaleza arbitraria del símbolo, y (2) el hecho de que la riqueza conceptual no está en el símbolo mismo, sino en las relaciones que él (sujeto-alumno), como intérprete, logre establecer mediante los distintos cambios de representación (Duval, 2006) lo que, al fin de cuentas, en nuestra perspectiva, le permitirá enriquecer sus significados.

En los siguientes comentarios de AH y AP se muestra que los símbolos son un medio, y no un fin en sí mismos; y que en álgebra es posible *darle sentido a tanta letra* (AP):

> *Es necesario primero conocer el lenguaje matemático, luego entender el significado de lo que expresa cada concepto, posteriormente generalizar tal concepto y no apegarse a los símbolos o letras que exponga algún teorema o definición dado el caso, además debemos leer adecuadamente* (AH, 2015).
> *No comprendía lo que estaba sucediendo… logré darle sentido a tanta letra, que en un principio no entendía* (AP, 2015).

AH subraya la importancia de leer adecuadamente los textos matemáticos, dejando de lado el apego a los símbolos. Desde nuestra interpretación, su opinión deja entrever que los signos, desde el punto de vista matemático, no son el mensaje, son *instrumentos semióticos* (Schneuwly *et al*., 2004) que permiten la transmisión de ideas matemáticas.

AH prosigue su comentario, haciendo el contraste entre un leer *caletreado* y la importancia de darle *significado* a los símbolos:

> *No todo lo que aprendí caletreado me sirvió, ya que se trabaja en función de la importancia del significado de los símbolos matemáticos, ¿Qué son?, ¿Para qué sirven?, ¿Cómo los podemos abordar?, ¿Con qué otros contenidos los puedo relacionar?, ¿Qué conclusiones puedo obtener de tal expresión?* (AH, 2015).

5.1.2 Expresión Oral Algebraicamente Significativa (EXOAS)

Desde el punto de vista didáctico, semejante con lo que ocurre en el aprendizaje de la lectura en los primeros niveles de escolaridad (Caballeros; Sazo; Gálvez, 2014) la Lectura Algebraicamente Significativa pasa por una fase retórica, que denominamos *Expresión Oral Algebraicamente Significativa (EXOAS),* que, una vez comprendida cabalmente, debe conducir a otra fase superior como es la lectura sin pronunciación (Carretti *et al*., 2012).

Esta *EXOAS* es consecuencia de la verbalización, es decir del uso de expresiones orales para comunicar ideas algebraicas, lo cual puede ocurrir como resultante de la puesta en práctica de la *LEAS* aunque también puede darse sin ella. En una primera aproximación, puede aparecer como un parafraseo, ilustremos esto mediante el comentario de YG:

> *Comenzamos a interpretar la definición que nos presenta el autor Hoffman de p.i… nos pidieron que la parafraseáramos para una mejor interpretación, lo cual me permitió darme cuenta que se puede ver al p.i como una función de dos variables y es interesante como dos expresiones tan*

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a220187

distintas como estas:$(\alpha|\beta)$ *y* $\varphi(\alpha,\beta)$*sean iguales* (YG, 2015).

En este comentario se muestra como la *LEAS* se constituyen una *herramienta lingüística* (Guijarro, 2011) que posibilita un buen desempeño frente a la sinonimia; en este caso, su enunciación verbal, *EXOAS* ayudó a YG a reconocer y comprender las dos representaciones semióticas, $(\alpha|\beta)$ *y* $\varphi(\alpha,\beta)$ como equivalentes a un mismo objeto algebraico, el de producto interno.

La siguiente es la reflexión de GT, en ella el autor pone en evidencia el contraste existente entre la práctica de la *LL* y la *LEAS*:

> *Ya no vamos a ver a [S], como un corchete S corchete, sino que cada vez que aparezca esa notación va a significar SUBESPACIO GENERADO POR S* (GT, 2015).

Cabe destacar que el uso de las mayúsculas corresponde a la escritura original de GT, posiblemente lo hizo para llamar la atención en torno a la fuerte discrepancia que encontró entre decir *corchete S corchete* y subespacio *generado por S.*

Es oportuno mencionar que la *LEAS* no está exenta de dificultad para los estudiantes, esto lo deducimos de los siguientes comentarios en los que expresamente estos manifiestan sus dificultades para desarrollar este tipo de lectura:

> *El docente nos indicaba los ejercicios y nos pedía leer el enunciado del mismo y una vez leído, nos pedía parafrasearlo, lo cual nos costaba un poco* (NA, 2015).
> *Estuve leyendo… corrido hasta el teorema 9, lo transcribí, pero no me puedo concentrar para recordarlo con precisión, dijo que los parafrasearan, pero no es fácil* (JM, 2015).

Como ocurre con el aprendizaje de cualquier contenido matemático, es natural que algunos alumnos tengan que invertir más tiempo en apropirse de la *LEAS-EXOAS* o les resulte más complejo adaptarse. Veamos esto en los siguientes tres comentarios de RR:

> *El espacio generado por S lo denotamos [S]… cuando alguien leía…no pronunciaba espacio generado por S, sino que empezaba a balbucear otras cosas o se confundía y detenía la lectura.*
>
> *Me correspondió leer a mí, y no sé si es porque lo estoy leyendo yo, pero me resultó fácil.*
>
> *Comenzamos igual leyendo y realizando la debida explicación, sin embargo, la persona que estaba leyendo se enredaba y tendía a confundir los símbolos con otras cosas* (RR, 2015).

Para entender el contexto de estos comentarios, debemos señalar que en el desarrollo del Curso eran habituales las prácticas de lectura en voz alta. De acuerdo con el primer comentario de RR, inferimos que ha alcanzado un buen nivel de *LEAS* en el respectivo contenido algebraico. En la siguiente, RR estaba leyendo en una condición activa, pues lo hacía directamente; y, de acuerdo con su reflexión le resultó favorable. En el tercer comentario, RR estaba en forma pasiva, oyendo la lectura que hacía un compañero; sin embargo, este último no ponía en práctica una *LEAS* y al llegar a los símbolos *balbuceaba* o los confundía con *otras*

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a220187

cosas.

La siguiente es una evidencia de que para el discente es posible establecer un vínculo identificatorio entre el símbolo y el objeto simbolizado, en consecuencia, develar este último consiste en descifrar esta *lógica* que los conecta:

> *Cuando leí la definición no establecí relación entre la definición dada y la notación asociada a la misma, es decir, $S^{\perp}$ significa Complemento Ortogonal. Luego, haciendo una lectura más detallada me di cuenta de la notación asignada a dicha definición* (NA, 2015).

Siguiendo la metáfora de la matemática como lenguaje (Pimm, 2002) esto pudiese compararse con la misma situación que ocurre en el aprendizaje de un nuevo idioma al cual se le quieren transferir las mismas propiedades del idioma materno.

El lenguaje natural juega un papel relevante, por ejemplo, en la demostración, pudiendo servir de obstáculo tal como lo señalan Alvarado y Gonzalez (2013) al discutir algunos errores que cometen los estudiantes cuando intentan realizar una demostración; este aspecto lo vinculamos con las lecturas que se hacen del símbolo $p \to q$; por ello, a continuación, tomamos dos comentarios referidos a dicho símbolo para exhibir la potencialidad y la riqueza de significados que ofrece la *LEAS-EXOAS*:

> *Esta clase también me pareció muy importante ya que logré enriquecer mi lenguaje matemático porque por lo menos en introducción al álgebra cuando yo tenía p→ q decimos que eso significaba p implica a q….Un ejercicio particular que decía "Demuestre que si el entero c es raíz de f entonces c divide al término independiente de f" pero lo que nos quiere decir este ejercicio es que es necesario que c sea divisor del término independiente para que c sea una raíz del polinomio* (AP, 2015).
> *La siguiente notación p → q, surgió de la lectura de un ejercicio durante la clase…nos preguntan: ¿Cuál es la condición necesaria en este ejercicio? Ó ¿Cómo se le llama a p?, situación que me confundió un poco… no entendía a que se estaba refiriendo con eso ya que por primera vez había escuchado que "p era la condición suficiente", pues, desconocía que dicha implicación… se le llamará de la siguiente manera; a p puede llamársele como antecedente, hipótesis o condición suficiente; y a q se le puede llamar consecuente, tesis o condición necesaria, situación que captó mi atención* (NA, 2015).

Al referirse al *lenguaje matemático*, AP lo circunscribe a su versión oral; además, colocó un ejemplo muy significativo para la idea que estamos manejando. Creemos que las primeras lecturas que se hacen del símbolo p → q son necesarias en un primer momento (*LL*), pero no suficientes tal como ella lo destacó al indicar sus interpretaciones iniciales. Esta forma significativa de leer que hemos identificado no niega aquellas lecturas iniciales, sino que las incluye, porque tal como los dos autores afirman son posibles otras lecturas válidas para este símbolo: p implica a q, p es antecedente y q es consecuente, o p es hipótesis y q es tesis.

Sin embargo, lo que estamos planteando es que una manera de acceder al contenido de este símbolo (lo que AP identifica con *lo que nos quiere decir este ejercicio*) es a través de la

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a220187

otra lectura basada en la identificación de las condiciones necesaria y suficiente.

En este ejemplo AH pone en práctica la *LEAS-EXOAS*, cuando afirma que

> *Es necesario que c sea divisor del término independiente para que c sea una raíz del polinomio* (AH, 2015).

resultando esclarecedor el porqué se buscan las raíces de un polinomio (con coeficientes enteros) entre los divisores de su término independiente.

Otro hecho que no debe pasar inadvertido en los dos comentarios anteriores, es que la *LEAS-EXOAS* desarrollada mediante la implicación se efectuó de derecha a izquierda, lo cual es un cambio en la manera usual de leer en español. Otro ejemplo de este cambio de orientación, mediante *LEAS-EXOAS*, lo obtenemos al considerar la desigualdad de Cauchy-Schwarz, $(\alpha|\beta) \leq \|\alpha\|.\|\beta\|$, la cual puede ser leída verbalmente de izquierda de derecha como es lo usual, empleando, por ejemplo, las expresiones *a lo sumo, no sobrepasa*, entre otras. Diremos, así, que el valor absoluto del producto interno de dos vectores es a lo sumo el producto de las normas de los dos vectores. Otra forma menos usual de leerla, a través de *LEAS-EXOAS*, es de derecha a izquierda enunciándola oralmente así: el producto de las normas de dos vectores es al menos (o por lo menos) el valor absoluto del producto interno de los dos vectores, entre otras.

En la anterior descripción que hemos hecho lo referido a la verbalización ha quedado implícito, por lo que a continuación procuramos un mayor acercamiento a la *LEAS-EXOAS*:

> *Cuando nos presentaban una simbología o notación simplemente leemos lo planteado, pero no le damos la interpretación adecuada y esto se convierte en una dificultad al momento de resolver ejercicios o demostraciones, ya que carece de significado la lectura realizada. ... la siguiente notación* $[T]B_V B_W$ *lo cual generalmente leemos como está expresado pero no lo llenamos de significado,..., no expresamos con palabras lo que representa, aunque sabemos su aplicabilidad; sin ser capaces de decir que tenemos "una matriz asociada a T según las bases* B_V *y* B_w *o la matriz cuyas columnas son las coordenadas de* $T(\alpha_1), T(\alpha_2), \ldots, T(\alpha_n)$ *según la base* B_w (NA, 2015).

Este comentario nos permite tomar en cuenta la morfología del símbolo: estructuralmente se compone de un corchete, una T mayúscula dentro de él, seguido de dos B mayúsculas diferenciadas por sus subíndices; además, en este contexto la letra T denota una transformación lineal, y las dos B simbolizan las bases de dos espacios vectoriales los cuales están identificados en los respectivos subíndices. Con esta descripción, tratamos de ilustrar la naturaleza compleja de tal símbolo; por lo que expresar oralmente que representa *una matriz asociada a T según las bases* $\mathrm{B_V}$ *y* $\mathrm{B_W}$ constituye una *EXOAS*.

En el Cuadro 2 ejemplificamos otras *EXOAS* y otras dos expresiones que no lo son:

Aprendí que cada vez que tengamos $\mathrm{dF[X]}$ *no vamos a decir que "d por* $\mathrm{F[X]}$*", sino que se refiere a todos los múltiplos de d. (GT)*	*Las matrices en general no son conmutativas. (AH)* *Los polinomios en realidad son estructuras algebraicas. (AH)*

Cuadro 2 - Ejemplos de EXOAS
Fuente: elaboración propia.

En la columna de la izquierda el mismo autor, (GT), contrasta la *LL* con otra expresión equivalente, pero innovadora al introducir la idea de múltiplo del polinomio d, por lo que califica como *EXOAS*. Mientras que en la columna de la derecha los contenidos de las expresiones le atribuyen, respectivamente, a las matrices y polinomios las condiciones de ser *conmutativas* y de *estructura algebraica*. El término conmutativo tiene sentido para adjetivar una operación binaria; mientras que estructura algebraica es un sustantivo que conlleva la noción de conjunto. Por lo tanto, ambos términos carecen de significado cuando se aplican individualmente a las matrices y polinomios como objetos algebraicos, por lo que, consecuentemente, las expresiones empleadas no son representativas de una *EXOAS*.

Fnalizamos esta parte del artículo, considerando que a partir del análisis de las reseñas de los estudiantes en sus Diarios mostramos evidencias de que en el curso de álgebra lineal desarrollado para EPPM, en torno a la lectura de textos con contenidos algebraicos, los estudiantes desarrollaron un tipo que enfatiza el papel del simbolismo denominada lectura literal (*LL*), insuficiente para el progreso en la comprensión de tales contenidos y, por ende, para la resolución de problemas. También, como parte de un conjunto de actividades didácticas conscientemente organizadas y con fines instruccionales claramente establecidos, desplegaron otro tipo de lectura reflexiva que integra diferentes aspectos entre lo simbólico y lo conceptual, que denominamos *LEAS* con su correspondiente verbalización que designamos como *EXOAS*.

6 Conclusiones

El objetivo de la investigación que aquí reportamos fue develar los aspectos del lenguaje, tanto natural como algebraico que activan los EPPM cuando aprenden los contenidos del álgebra lineal universitaria. En ese sentido, hemos hilvanado un conjunto de testimonios provenientes de los propios estudiantes que nos orientaron para caracterizar el *Lenguaje Algebraicamente Significativo (LAS),* por medio del cual, el buen desempeño frente al simbolismo algebraico se presenta como un proceso que emerge sin artificios ni imposición, ya que surge como una necesidad ante lo complejo (o inclusive, lo tedioso) que puede ser el manejo en lenguaje natural de las expresiones algebraicas; además, la misma simbolización aparece como una forma de optimizar las expresiones de los conceptos y objetos, de manera tal que dichos símbolos adquieren su naturaleza instrumental, como invalorables e incuestionables mediadores entre el discente y el saber algebraico.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a220187

Este *LAS* está conformado por la *Lectura Algebraicamente Significativa (LEAS)* y por la *Expresión Oral Algebraicamente Significativa (EXOAS).* La *LEAS* constituye un tipo de lectura de los textos con contenido algebraico en la cual a los símbolos le son atribuidos ricos significados, contextuales y precisos. Por su parte, la *EXOAS* está referida a la comunicación efectiva de ideas algebraicas mediante la lengua hablada. Si la *LEAS* es con pronunciación se convierte en *EXOAS*, sin embargo, puede suceder que tal lectura se realice en forma silente con interpretación adecuada de los símbolos algebraicos. Por lo dicho en los párrafos precedentes, creemos que la enseñanza del álgebra universitaria, en el caso de EPPM, debe propender el desarrollo de las cuatro dimensiones del lenguaje: leer, escribir, escuchar y hablar, a fin de que ellos lo tengan como antecedente en sus futuras prácticas como educador matemático.

En cuanto a la *LL*, ocurre de forma natural por la extensión que se hace de la lectura de cualquier texto que no contenga el SMS, en el caso del español está orientada de izquierda a derecha. Tal como hemos dicho, en un contexto de aprendizaje, este tipo de lectura, aunque necesaria es insuficiente, y en la mayoría de los casos adolece de errores que son potenciales obstáculos para la comprensión de los conceptos algebraicos.

Creemos que la descripción que hemos estructurado del *LAS* puede enmarcarse en el punto de vista metafórico que considera la matemática como un lenguaje, dicha asociación ha sido asumida por diversos autores (Pimm, 2002; Rojano, 1994, Freudenthal, 2001; Papini, 2003) y fue nuestro soporte para su conceptualización.

Desde el punto de vista metodológico, destacamos el aporte de esta investigación concerniente al desarrollo eficaz de la cronogénesis como técnica analítica, la cual luce potencialmente rica cuando se trata de describir situaciones de clase desde las perspectivas tanto individuales como colectivas de los estudiantes.

Finalmente, entendemos que es necesario introducir modificaciones en la formación inicial de los profesores que irán a enseñar àlgebra escolar de modo que se apropien de un conocimiento específico para desarrollar una enseñanza de sus contenidos que esté en sintonia con su desenvolvimento histórico y, al mismo tiempo, propicie oportunidades para que los alumnos puedan expresar sus ideas y, a partir de allí, escuchándolos atentamente, puedan ser acompañados en el desarrollo de su propio pensamiento algebraico; en esta tarea puede ayudar la familiarización con las nociones relacionadas al Lenguaje Algebraicamente Significativo.

Referencias

ALVARADO, A.; GONZÁLEZ, M. Generación interactiva del conocimiento para iniciarse en el manejo de implicaciones lógicas. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática**

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a220187

Educativa, Ciudad de México, v. 16, n. 1, p. 37-63, 2013. Disponible en: https://www.scielo.org.mx/scielo.php?pid=S1665-24362013000100003&script=sci_abstract Acceso en: 21 nov. 2023.

ARANA, A.; GONZÁLEZ, F. Enriquecimiento conceptual progresivo. Una explicación teórica del proceso de desarrollo de los conceptos científicos. **Revista de Pedagogía***,* Vol. XXVII, Nº 79, mayo-agosto, 2006. Disponible en: https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=65907902 Acceso en: 01 dez. 2023.

AUSUBEL, D. P. **The psychology of meaningful verbal learning**. New York: Grune and Stratton, 1963.

BUZATTO, E.; MARCON, S. Estudo da Polissemia: uma Questão Lingüística. **Revista Lingua & Literatura,** Frederico Westphalen, v. 1, n. 1, p. 63-92, 1998. Disponible en: http://revistas.fw.uri.br/index.php/revistalinguaeliteratura/article/view/3/5. Acceso en: 21 nov. 2023.

CABALLERO, J. **Morfología, Símbolos, Signos y Alegorías**. Barcelona: Antares, 1996. Libro en Línea. Disponible en: https://www.morfologia.eu/wp-content/uploads/2020/10/morfologia-16112002.doc Acceso en: 01 dez. 2023

CABALLEROS, M. Z. R.; SAZO, E.; GÁLVEZ, J. A. S. El aprendizaje de la lectura y escritura en los primeros años de escolaridad: experiencias exitosas de Guatemala. **Revista Interamericana de Psicologia**, Porto Alegre, v. 48, n. 2, p. 212-222, 2014. Disponible en: http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=28437146008> ISSN 0034-9690. Acceso en: 21 nov. 2023

CARRETTI, B.; BOSIO, C.; DE BENI, R.; CORNOLDI, C. Comprensión lectora a partir de lectura oral y silente: un análisis de los tiempos y la adecuación. **Neuropsicología Latinoamericana**, *[S. l.]*, v. 4, n. 1, 2012. Disponível em: https://www.neuropsicolatina.org/index.php/Neuropsicologia_Latinoamericana/article/view/100. Acesso em: 1 dic. 2023.

CERVANTES, G. C.; JIMENEZ-BLANCO, G.; MARTINEZ-SOLANO, R. Razonamiento Cuantitativo, Lenguaje y Matemáticas. **Zona Próxima,** Barranquilla, [s.v.], n. 36, p. 76-92, Jun. 2022. Available from: http://www.scielo.org.co/pdf/zop/n36/2145-9444-zop-36-76.pdf. Access on: 03 Apr. 2023.

CHUMACEIRO, I.; PÉREZ, M. L. La literatura como puente para la lectura, en Lectura y escritura para la investigación. *In*: BOLIVAR, A.; BEKE, R (Comps.). **Lectura y Escritura para la Investigación**. Caracas: UCV-Consejo de Desarrollo Científico y Humanístico, 2011. p. 41-70. Disponible en: https://wac.colostate.edu/docs/books/bolivar-beke/investigacion.pdf Acceso en: 01 dez. 2023.

BARRIO, J. A. del; BORRAGÁN, A. Método de alto rendimiento para el aprendizaje de la lectura (M.A. R.). **International Journal of Developmental and Educational Psychology**, Badajoz, v. 1, n.1, p. 77-100, 2005. Disponible en: https://www.redalyc.org/pdf/3498/349832486005.pdf. Acceso en: 02 dez. 2023.

DROUHARD, J. P. Epistemography and algebra*. In:* CONGRESS OF THE EUROPEAN SOCIETY FOR RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION, 6. 2009, Lyon. **Proceedings...** Paris: Institut National de Recherche Pédagogique, 2009, p. 479-488. Disponible en: https://hal.science/hal-02182374/file/cerme6_proceedings.pdf. Acceso en : 21 nov. 2023.

DUVAL, R. **Sémiosis et pensée humaine***.* Bern: Peter Lang, 1995.

DUVAL, R. (1999) Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a220187

Thinking. Basic Issues for Learning. *In:* Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 21st, 1999, Cuernavaca, Morelos, México. **Proceedings… México, I, 3-26. 1999**

DUVAL, R. Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. **La Gaceta de la RSME**, Madrid, v. l, n. 9, p. 143-168, 2006. Disponible en: https://gaceta.rsme.es/abrir.php?id=546 Acceso en: 012 dez. 2023
FREUDENTHAL, H. **Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.** Traducción de Luis Puig. Ciudad de México: CINVESTAV, 2001.

GLASER B.; STRAUSS, A**. The discovery of grounded theory:** strategies for qualitative *research.* New Brunswick: Aldine. 1967.

GONZÁLEZ RONDELL, A. Procesos del Pensamiento Algebraico en Entornos de Aprendizaje Mediados Tecnológicamente. **Areté, Revista Digital del Doctorado en Educación de la Universidad Central de Venezuela**, *[S. l.]*, v. 3, n. 5, p. 141, 2017. Disponível em: http://saber.ucv.ve/ojs/index.php/rev_arete/article/view/12836. Acesso em: 27 sep. 2022.

GONZÁLEZ, F. **Procesos cognitivos y metacognitivos que activan los estudiantes universitarios venezolanos cuando resuelven problemas matemáticos.** Tesis doctoral. Universidad de Carabobo. Valencia. 1998. Disponible en: http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/Vol10/3/15Gonzalez.pdf

GONZÁLEZ, F. Algunas cuestiones básicas acerca de la enseñanza de conceptos matemáticos. **Fundamentos en humanidades, 2015** VI, Nº I, 11, 37-80, 2005. Disponible en: https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=18400603

GONZÁLEZ, A.; GONZÁLEZ, F. Exploración del pensamiento algebraico de profesores de Matemática en formación – "La prueba EVAPAL" **Acta Scientie**, 13(1), 31 – 54, jan / jun. 2011. Disponible en: www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/download/22/19 Consulta: 17May2022. 19:23

GONZÁLEZ, A.; GONZÁLEZ, F. E. Mediación Contemplativa y Resolución de Problemas Algebraicos en Entornos Virtuales. **Acta Scientiae** (ULBRA), v. 16, p. 395-421, 2014. Disponible en: http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/issue/view/99 Consulta: 17May2022; 16:30

GUIJARRO J. L. M. Bases teóricas para una hipótesis no canónica sobre el origen de la herramienta lingüística humana. **Pragmalingüística**, *[S. l.]*, n. 19, p. 23–43, 2011. DOI: 10.25267/Pragmalinguistica.2017.i25. Disponível em: https://revistas.uca.es/index.php/pragma/article/view/252. Acesso em: 2 dic. 2023.

JUNGBLUTH, A.; SILVEIRA, E.; GRANDO, R. A Álgebra no Currículo de Matemática dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental: a voz dos professores. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 24, n. 1, p. 96-118, 2022. Disponible en: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/54112/39449. Acceso en: 21 nov. 2023.

JIMÉNEZ-CHAVES, V. E. El estudio de caso y su implementación en la investigación. **Rev. Int. Investig. Cienc. Soc**., Asunción, v. 8, n. 1, p. 141-150, jul. 2012. Disponible en: https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/3999526.pdf. Acceso en: 21 nov. 2023.

KAWULICH, Barbara B. La observación participante como método de recolección de datos. **FQS, Forum:** Qualitative Social Research, v. 6, n. 2, [s.p.], May., 2005. Disponible en: http://www.qualitative-research.net/index.php/fqs/article/view/466/998. Acceso en: 17 may 2022. 18:15

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a220187

LAKOFF, G.; JOHNSON, M. **Metaphors we Live by**. Chicago: The University of Chicago Press, 1980

LAKOFF, G.; NÚÑEZ, R. **Where Mathematics comes from?** New York, NY: Basic Books, 2000.

LLANOS, V. C.; OTERO, M. R. La incidencia de las funciones didácticas topogénesis, mesogénesis y cronogénesis en un Recorrido de Estudio y de Investigación: el caso de las funciones polinómicas de segundo grado. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, Relime, Ciudad de México , v. 18, n. 2, p. 245-275, Jun./Oct. 2015 . Disponible en http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362015000200005&lng=es&nrm=iso. Acceso en 02 dic. 2023. https://doi.org/10.12802/relime.13.1824.

MORALES, Z. **Las representaciones semióticas:** un enfoque cognitivo de análisis de las dificultades en el aprendizaje del álgebra. *In:* CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 7, 2013, Montevideo. **Proceedings …** Montevideo, Uruguay: Sociedad Uruguaya de Educación Matemática, 2013, p. 7825-7829 Disponible en: http://funes.uniandes.edu.co/18568/1/Morales2013Las.pdf Acceso: 02 dez. 2023.

MOREIRA, M.A.; CABALLERO, M.C.; RODRÍGUEZ, M.L. Aprendizagem Significativa: Um Conceito Subjacente. *In:* ENCUENTRO INTERNACIONAL SOBRE EL APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO, 1., 1997, Burgos. **Actas…** Burgos: Universidad de Burgos, 1997. p. 19-44. Disponible en: https://www.if.ufrgs.br/~moreira/apsigsubport.pdf. Acceso en: 18 may 2022.

NESSELMANN, G. H. F. (1842). **Versuch einer Kritischen Geschichte der Algebra, 1. Teil. Die Algebra der Griechen.** Berlin: G. Reimer, 1842.

OLIVEIRA, V. de. **Pensamento algébrico nos anos iniciais:** um olhar para a expressão do professor. 2022. 210 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro, 2022. Disponible en: https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/234688/oliveira_v_dr_rcla.pdf?sequence=3. Acceso en: 21 nov. 2023.

PALMA, L. R. P.; LAGOS, E. J.; LÓPEZ, L. N.; IZAGUIRRE, J. A. Exploración del potencial para aprender Álgebra a través del descubrimiento y generalización de Patrones. Brazilian Journal of Development, Curitiba, v.9, n.1, p. 8300-8312, feb., 2022. Disponible en: https://ojs.brazilianjournals.com.br/ojs/index.php/BRJD/article/view/57512 Acceso en: 01 dez. 2023.

PAPINI, M. Algunas explicaciones vigotskianas para los primeros aprendizajes del álgebra. **Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa**, Ciudad de México, v. 6, p. 41-71, 2003. Disponible en: https://www.redalyc.org/pdf/335/33560103.pdf. Acceso en: 21 nov. 2023.

PÉREZ, A. DE. LA F.; PIQUET, J. D. Uso de las conexiones entre representaciones por parte del profesor en la construcción del lenguaje algebraico. **Bolema**, Rio Claro, v. 36, n. 72, p. 389-410, jan./abr. 2022. Disponible en: https://doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a17. Acceso en: 21 nov. 2023.

PIMM, D. **El lenguaje matemático en el aula.** Madrid: Morata, 2002.

PUIG, L. Signos, textos y sistemas matemáticos de signos. *In:* FILLOY, E. (coord.) **Matemática educativa. Aspectos de la investigación actual.** México: Fondo de Cultura Económica, 2003. p. 174-186. Disponible en: https://www.uv.es/puigl/2003stysms.pdf Acceso: 02 dez. 2023.

RADFORD, L. Before the Other Unknowns were Invented: Didactic Inquiries on the Methods and Problems of Mediaeval Italian Algebra**. For the Learning of Mathematics,** Montreal, v. 15, n. 3, p. 28-37, 1995. Disponible en:

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a220187

https://www.researchgate.net/publication/255618553_BEFORE_THE_OTHER_UNKNOWNS_WERE_INVENTED_DIDACTIC_INQUIRIES_ON_THE_METHODS_AND_PROBLEMS_OF_MEDIAEVAL_ITALIAN_ALGEBRA Acceso: 02 dez. 2023

RADFORD, L. Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. **Research in Mathematics Education,** London, v. 12, n. 1, p. 1-19, 2010a. Disponible en: http://www.luisradford.ca/pub/22_RME2010Algebraicthinkingfromaculturalsemioticperspective.pdf Acceso: 02 dez. 2023

RADFORD, L. Layers of generality and types of generalization in pattern activities. **PNA**, Granada, España, v. 4, n. 2, p. 37-62, 2010b. Disponible en: https://revistaseug.ugr.es/index.php/pna/article/view/6169/5485 Acceso: 02 dez. 2023

RAMOS, L. A.; GUIFARRO, M. I.; CASAS, L. M. Dificultades en el aprendizaje del álgebra, un estudio con pruebas estandarizadas. **Bolema**, Rio Claro, v. 35, n. 70, p. 1016-1033, 2021. Disponible en: https://doi.org/10.1590/1980-4415v35n70a21 Acceso: 02 dez. 2023

ROJANO, T. La matemática escolar como lenguaje. Nuevas perspectivas de investigación y enseñanza. **Enseñanza de las Ciencias**, Barcelona, v. 12, n. l, p. 45-56, 1994. Disponible en: https://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/download/21329/93290 Acceso: 02 dez. 2023

SALAZAR, J. R.; PADILLA-CABALLERO, J. E. A.; PANDURO-RAMÍREZ, J. Una revisión sistemática sobre el aprendizaje remoto de la matemática. **Espirales,** Foz do Iguaçu, v. 5, n. 37, p. 63-83, Abr./Jun.2021. Disponible en: https://www.revistaespirales.com/index.php/es/article/view/793/698 Acceso: 02 dez. 2023

SBAIZ, V. H.; DRUCK, I. de F. Pensamento e Linguagem Algébricos. Um olhar sobre a produção de significados matemáticos e didáticos nos anos finais do Ensino Fundamental I. *In:* ENCONTRO DO MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA, 7., São Paulo, 2021. **Anais...** São Paulo: USP, 2021. p. 178-196. Disponible en: https://repositorio.usp.br/directbitstream/262626c0-c3f7-43d6-bf1d-0bb7118b7ac6/3056020.pdf Acceso: 02 dez. 2023

SCHNEUWLY, B.; DOLZ, J. *et al.* **Gêneros orais e escritos na escola**. Campinas: Mercado de Letras, 2004.

SKOVSMOSE, O. **Hacia una filosofía de la educación matemática crítica.** Traducido por P. Valero. Bogotá: Una Empresa Docente,1999.

VILLEGAS, M. M.; GONZÁLEZ, F. E. La construcción del conocimiento por parte de estudiantes de educación superior. Un caso de futuros docentes. **Perfiles Educativos** [en linea] XXVII (Julio-Diciembre), 2005, Disponible en: http://aww.redalyc.org/articulo.oa?id=13211006 ISSN 0185-2698. [Fecha de consulta: 17 de mayo de 2022]
VINNER, S. (1991): The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. *In:* TALL, D. (ed.): **Advanced Mathematical Thinking.** Dordrecht, Holanda**:** Kluwer, 1999, p. 65-81

WITTGENSTEIN, L. **Los cuadernos azul y marrón**. Traducido por Francisco Gracia. Madrid: Tecnos, 1998.

VYGOTSKY, L. **El desarrollo de los procesos psicológicos superiores**. Barcelona: Crítica, 1979.

Submetido em 30 de Setembro de 2022.
Aprovado em 18 de Junho de 2023.