ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a210207

ARTÍCULO

Concepciones sobre los Números Complejos de Alumnos que Inician sus Estudios Universitarios: una Caracterización desde la Teoría APOE

Undergraduate Students´ Conceptions about Complex Numbers: A Characterization from APOS Theory

Diana Carolina **García** Caro[*]

ORCID iD 0000-0001-6209-9323

Carlos **Valenzuela** García[**]

ORCID iD 0000-0002-0776-5757

María del Socorro **García** González [***]

ORCID iD 0000-0001-7088-1075

María T. **Sanz** [****]

ORCID iD 0000-0002-7146-8087

Resumen

La enseñanza y el aprendizaje de los números complejos desde la educación matemática se han indagado poco, y las investigaciones que hay al respecto señalan que su tratamiento se hace, comúnmente, desde el registro algebraico. Con la intención de contribuir al estudio de la problemática que se relaciona con ese concepto, en este estudio se realizó desde la teoría APOE una caracterización de las concepciones que han construido sobre los números complejos un grupo de alumnos que inician sus estudios universitarios. Para ello, se diseñó y aplicó un cuestionario que permitió observar las posibles estructuras mentales construidas por los estudiantes. Los resultados indican que los alumnos llegan a la universidad con elementos de las acciones y concepciones acción, pero limitadas, relacionadas principalmente con la representación binómica de los números complejos y en un registro algebraico; asimismo, muestran concepciones previas fundamentales para el estudio de los números complejos, pero desconectadas de ese concepto.

[*] Maestra en Enseñanza de las Matemáticas por la Universidad de Gudalajara (UdeG), Guadalajara, Jalisco, México. E-mail: diana.garcia2183@alumnos.udg.mx.

[**] Doctor en Ciencias Especialidad en Matemática Educativa por el Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN (CINVESTAV-IPN). Profesor investigador del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Gudalajara (UdeG), Guadalajara, Jalisco, México. E-mail: carlos.valenzuela@academicos.udg.mx.

[***] Doctora en Ciencias Especialidad en Matemática Educativa por el Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN (CINVESTAV-IPN). Profesora investigadora del programa de Posgrado en Matemática Educativa CIMATE (UAGro), Chilpancingo, Guerrero, México. E-mail: mgargonza@gmail.com.

[****] Doctora en Matemáticas por la Universidad de Valencia (UV). Profesora Titular de Universidad de Valencia (UV), Valencia, España. E-mail: m.teresa.sanz@uv.es.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a210207

Palabras clave: Números complejos. Teoría APOE. Estructuras. Mecanismos. Concepciones.

Abstract

The teaching and learning of complex numbers in mathematics education have been relatively underexplored. Research indicates that the teaching of these numbers is commonly approached from an algebraic perspective. To contribute to the understanding of complex numbers, this paper presents a characterization of the conceptions held by a group of undergraduate students using the APOS theory. A test was designed and administered to observe their possible mental structures. The results suggest that students have limited elements and conceptions related to the actions involved, primarily concerning the binomial representation of complex numbers within an algebraic register. Additionally, students commence their college studies with fundamental preexisting conceptions related to complex numbers, but these conceptions are not yet integrated with the concept itself.

Keywords: Complex numbers. APOS Theory. Structures. Mechanism. Conceptions.

1 Planteamiento del problema

A través de las investigaciones sobre los números complejos (Pardo; Gómez, 2007; Bagni, 2001; Randolph; Parraguez, 2019), algunos autores reportan dificultades de su enseñanza y aprendizaje en el nivel medio superior - estudiantes entre quince y dieciocho años - y el nivel universitario - estudiantes mayores de dieciocho años -. Un resultado relevante es que el registro algebraico es el más tratado en el aula, y en particular para estos números se suele introducir la representación binómica en su registro algebraico (Aznar *et al*., 2010). Esto deja ver un problema para la educación, especialmente para los niveles educativos mencionados y para las carreras universitarias en las que el conocimiento de estos números es fundamental. La instrucción en un único registro de representación deja de lado otras características de los números complejos, generando problemas en la construcción de estructuras mentales que amplíen las concepciones sobre este concepto y su relación con conocimientos previos.

Particularmente en México, hay pocas investigaciones enfocadas en la enseñanza y el aprendizaje de los números complejos, y más aún, una primera revisión a los planes de estudio de los niveles educativos medio superior y universitario dejó ver que su estudio se propone tímidamente. El concepto matemático en juego se encontró explícitamente como tema de estudio en algunos programas de precálculo para ingenierías (UDG, 2017, 2020), pero en otros programas de esa misma área y universidad no aparece explícitamente.

Desde un punto de vista de la historia de las matemáticas, los números complejos y las funciones han sido temas importantes para el desarrollo de conceptos relacionados con diversas ciencias. En el siglo XVI, matemáticos como Cardano obtuvieron números complejos al resolver ecuaciones de segundo grado por medio del método de completar el cuadrado y aceptar aplicar la operación de raíz cuadrada a cualquier número que se obtenía con dicho método

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a210207

(Kline, 1992). Así, en su obra *Ars Magna*, Cardano consideró la posibilidad de usar números imaginarios, y fue en una nueva edición de su obra cuando se adentró más al estudio de los números complejos.

Kline (1992) destaca que, históricamente, el desarrollo de este concepto llevó a expandir las matemáticas del siglo XIX en áreas como el cálculo. En la misma línea, el uso de estos números permitió ampliar el estudio de la hidrodinámica realizado inicialmente por D'Alembert a mediados del siglo XVIII. El citado autor también señala que Laplace desarrolló un método que transforma una función de variable real en una función de variable compleja para la solución de ecuaciones diferenciales, las cuales modelan problemas reales.

Por otro lado, y desde un punto de vista didáctico, Distéfano, Aznar y Pochulu (2012) consideran que el conocimiento de las representaciones de los números complejos es necesario para el desarrollo de problemas de aplicación relacionados con la física y la ingeniería, por ello, en las carreras universitarias afines a estas áreas, es fundamental la enseñanza de este concepto.

Dada la importancia de los números complejos desde la matemática y la necesidad de mejorar su didáctica debido a la problemática expuesta, se diseñó un proyecto de investigación que tiene como uno de sus objetivos: caracterizar, desde la teoría APOE, las concepciones previas sobre los números complejos de estudiantes que inician sus estudios en el nivel universitario. Con ello, se pretende responder a la pregunta: ¿cuáles son las concepciones que han construido los estudiantes al iniciar la universidad en relación con los números complejos?

2 Marco conceptual

La investigación se desarrolla bajo la perspectiva de la teoría APOE, la cual nace desde las ideas de Dubinsky y otros investigadores (Arnon *et al*., 2014); asimismo, se consideran algunos elementos de la teoría de Registros de Representación Semiótica (RRS) desarrollada por Duval (2006). La teoría APOE es un modelo que permite caracterizar las concepciones matemáticas de los estudiantes. Desde la teoría, Dubinsky y McDonald (2001) dan a conocer que las concepciones matemáticas se crean a partir de la construcción de acciones, procesos y objetos que se disponen a través de esquemas, esto con el propósito de solucionar e interpretar cualquier problema. Las acciones, procesos, objetos y esquemas se denominan estructuras mentales, y éstas se forman a partir de la activación de mecanismos para su construcción, los cuales son, por ejemplo, la interiorización, coordinación, reversión, encapsulación y desencapsulación. En la Figura 1, basada en las ideas de Arnon *et al.* (2014), se presenta un

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a210207

ciclo que relaciona las estructuras mentales con los mecanismos.

Desde la teoría APOE, el ciclo que se propone permite establecer la comprensión de los conceptos matemáticos, y esa comprensión e ideas intrapersonales constituyen las concepciones de un individuo (Arnon *et al*., 2014). Se empieza con acciones sobre objetos previamente construidos. Para realizar la construcción de nuevos objetos se pasa por el ciclo expuesto en la Figura 1. Las acciones permiten generar transformaciones de los objetos previamente formados, esas acciones se orientan de tal manera que puedan generarse cambios en un determinado objeto. Cuando las acciones tienen un carácter reflexivo a través del mecanismo de interiorización, se crea una nueva estructura mental denominada proceso. Los procesos están directamente relacionados con los mecanismos de coordinación y reversión, puesto que la coordinación entre los procesos permite la creación de nuevos procesos.

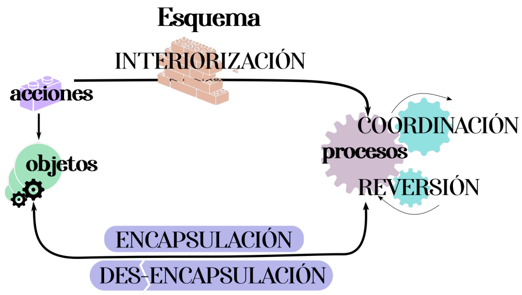


Figura 1 - Esquema basado en el Ciclo de las estructuras mentales y los mecanismos
Fuente: adaptación de Arnon *et al*. (2014).

La coordinación es un término que se emplea en las teorías APOE y RRS, por lo que, en esta investigación se toma el significado que otorga la teoría APOE. Desde el punto de vista de la teoría de RRS se asume la coordinación como articulación, en el mismo sentido que Romero (2016). Este autor entiende la articulación como la capacidad de manejar un concepto matemático aprovechando distintos registros de representación de forma conjunta (articulación entre registros).

Así, se asume que la articulación entre registros de representación es fundamental para establecer una concepción de cualquier concepto matemático. De este último punto surge la necesidad de tomar ideas de los RRS propuestas por Duval (2006), entendiendo que, en la actividad matemática es indispensable desarrollar una articulación entre los diferentes sistemas de representación, así, la construcción de estas representaciones y el conocimiento de sus particularidades permite generar concepciones.

Volviendo al ciclo de las estructuras mentales, Arnon *et al.* (2014) mencionan que cuando se logra ver a un proceso de manera sólida, en el cual se pueden aplicar diversas acciones, a ese desarrollo se le denomina mecanismo de encapsulación, dando origen a los

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a210207

nuevos objetos. De acuerdo con los mismos autores, "aplicando el mecanismo de desencapsulación, un individuo puede retroceder al Proceso que dio origen al Objeto" (Arnon *et al.,* 2014, p. 22). La interrelación de todas las estructuras y mecanismos permiten la formación de un esquema, mismo que, de acuerdo con Dubinsky y McDonald (2001), le permite al estudiante decidir cuáles son las mejores características para resolver una situación problema e identificar qué fenómenos abarca el esquema y cuáles no.

Cabe mencionar que Arnon *et al.* (2014) consideran que, aunque las estructuras poseen una secuencialidad, las concepciones en el individuo no se crean de la misma forma, puesto que depende de la habilidad que tenga el estudiante para relacionar las estructuras. Por su parte, Oktaç *et al.* (2021) mencionan que cuando un individuo progresa de una estructura mental a otra, no necesariamente lo hace de forma inmediata, ya que puede haber una transición entre ellas. Estas transiciones se llevan a cabo a través de los mecanismos mentales. Adicionalmente, para describir la transición se debe notar la existencia no tan conocida de niveles o momentos de transición (Oktaç *et al*., 2021). Estos autores mencionan que existe una diferencia entre una acción y la imposibilidad para resolver un problema, a veces denominada pre-acción.

Para caracterizar a las pre-acciones se construye lo que, en este estudio, se asume como elementos de las acciones, los cuales se relacionan con componentes de los números complejos, como son la unidad imaginaria, el módulo, el argumento, la parte real y la parte imaginaria. Dichos elementos permiten caracterizar relaciones entre concepciones de otros conceptos y componentes de los números complejos, aunque el estudiante no pueda representar al número. Por ejemplo, es posible que el estudiante identifique a la unidad imaginaria, pero presente dificultad en los tratamientos con los números complejos por sus concepciones sobre los números reales. Adicionalmente, cuando el estudiante realiza generalizaciones, pero sujetas a subconjuntos de números complejos se denomina elementos de los procesos.

En suma, el marco que guía principalmente a esta investigación es la teoría APOE, mientras que la teoría de RRS se asume para distinguir los registros de representación y la articulación entre registros. Así, las estructuras mentales desde la teoría APOE se asocian tanto al registro de representación algebraica como al registro geométrico de los números complejos.

3 Metodología

Para desarrollar una investigación desde la teoría APOE, Asiala *et al.* (1997) proponen un ciclo de investigación que consta de tres componentes. El primero es el análisis teórico, que permite entender la epistemología de un concepto y determinar las estructuras y mecanismos

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a210207

que necesita el estudiante para comprenderlo; Arnon *et al.* (2014) dan a conocer que el resultado del análisis teórico se denomina descomposición genética. El segundo componente es el diseño e implementación de actividades para la enseñanza; la descomposición genética es la pauta para el desarrollo del diseño, porque es un modelo que guía el desarrollo de nuevas estructuras y mecanismos mentales para consolidar sus concepciones. El tercer componente es la recolección y el análisis de datos, éste permite hacer una comparación del modelo otorgado por la descomposición genética y los resultados obtenidos en el análisis. El ciclo de investigación es recurrente, puede repetirse tantas veces como sea necesario para realizar refinamientos.

El análisis teórico del ciclo de investigación es el centro de este trabajo. En particular, se estudian las concepciones que tienen los estudiantes sobre los números complejos, así como aquellas que se relacionen con dicho concepto, ya que es importante identificar las estructuras mentales construidas, puesto que las primeras acciones que se realicen en la implementación de la enseñanza se hacen sobre objetos concebidos (Arnon *et al*., 2014).

El análisis teórico se inició con la revisión de investigaciones sobre el aprendizaje y la enseñanza de los números complejos (Pardo; Gómez, 2007; Bagni, 2001; Aznar *et al.,* 2010; Randolph; Parraguez, 2019). Después, se hizo una revisión de algunos conceptos asociados a los números complejos, así como la estructura algebraica de este conjunto numérico (Apostol, 1984; Andreescu; Andrica, 2006). Finalmente, se hizo el análisis para caracterizar las concepciones relacionadas con los números complejos construidas por los estudiantes durante su etapa escolar previa a la universidad; para ello, se aplicó un cuestionario (ver Cuadro 1, insertado más adelante). Este análisis es fundamental para la construcción de la descomposición genética preliminar. Arnon *et al.* (2014) mencionan que para plantear cómo se puede construir un concepto es importante tener en cuenta las estructuras previas que un individuo puede necesitar. Estos autores consideran que identificar estas estructuras en cada estudiante puede ser referencia para explicar diferencias en su rendimiento matemático.

Como ya se mencionó, se hace la distinción entre estructuras asociadas a los registros de representación algebraico y geométrico de los números complejos (Figura 2). En cada registro se pueden identificar las formas de representar a estos números, las cuales se asocian a sus componentes, o sea, al módulo, argumento, parte real y parte imaginaria, que, a su vez, se relacionan con otros conceptos matemáticos. Dicha relación condujo al diseño del cuestionario (Cuadro 1) y permitió caracterizar las concepciones previas de los estudiantes.

Las primeras acciones para el desarrollo de nuevas estructuras sobre los números complejos se podrán construir a partir de las concepciones previas identificadas en la Figura 2 - recuadros blancos -. Por ejemplo, la distancia entre el origen y cualquier otro punto en el plano

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a210207

cartesiano, podría conducir a acciones y procesos relacionados con el módulo de un número complejo tanto en el registro de representación geométrico como en su registro algebraico. Teniendo el esquema como referencia (Figura 2), el cuestionario diseñado (Cuadro 1) evalúa concepciones sobre los números complejos y los conceptos relacionados con tales números.

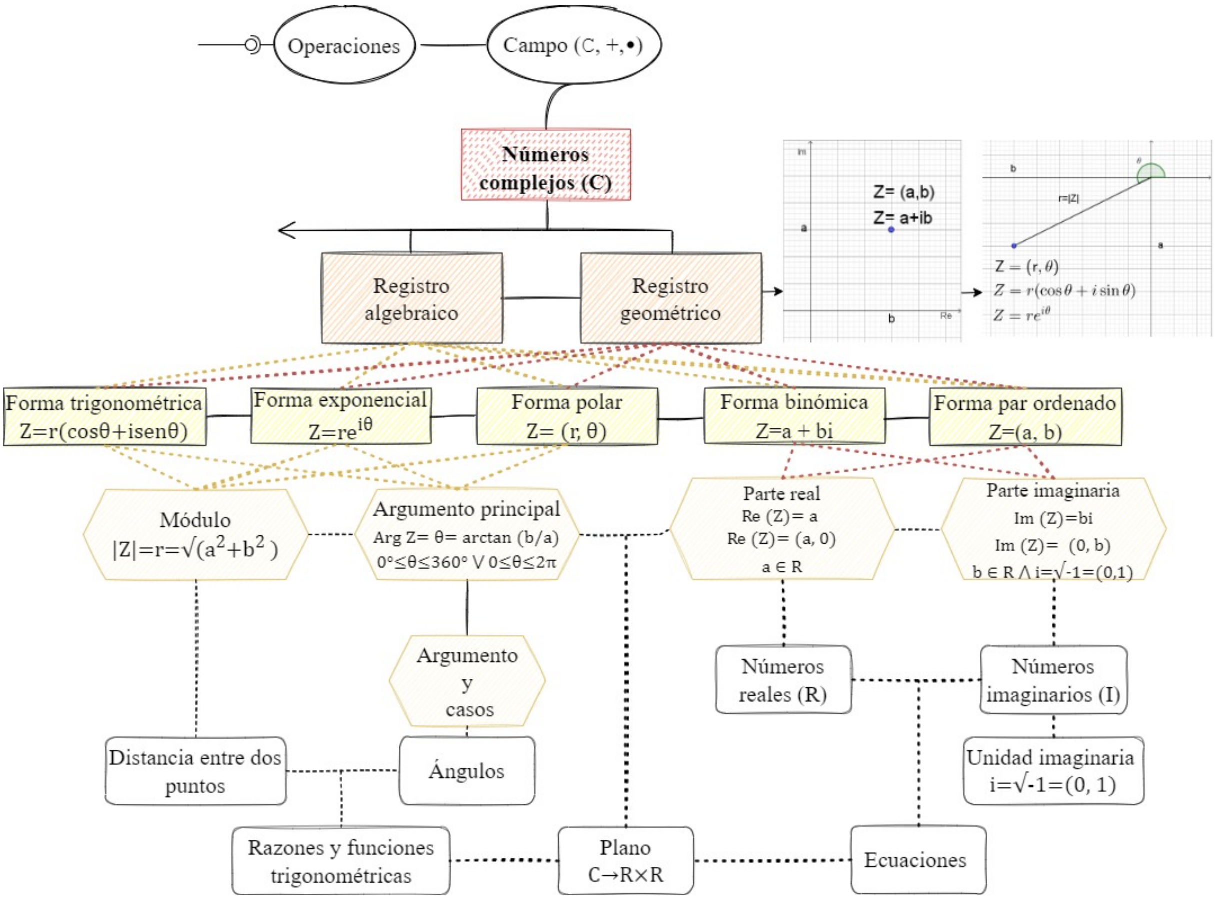


Figura 2 – Concepciones previas asociadas a los componentes de los números complejos
Fuente: elaborada por los autores.

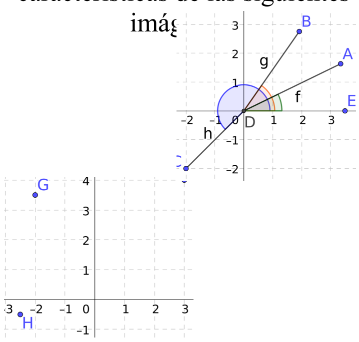
3.1 Población e instrumento

En la investigación participó un grupo de diecisiete estudiantes de primer semestre, que cursaban la materia de precálculo en la licenciatura en física de una universidad pública en México. Se aplicó un cuestionario (Cuadro 1) antes de iniciar el tema de números complejos, esto con la finalidad de indagar sobre sus concepciones previas, ya que los alumnos provenían de diversas escuelas, y no se tenía antecedente sobre el conocimiento que pudieran tener sobre el tema.

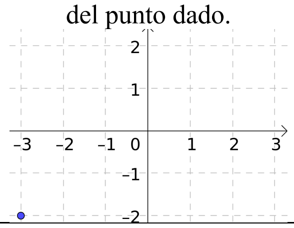
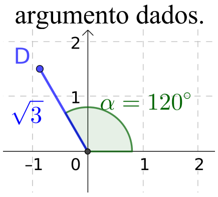
El diseño del cuestionario se basa en otras investigaciones (Pardo; Gómez, 2007; Aznar *et al*., 2010). En las primeras tres preguntas (C1, C2 y C3) subyace el trabajo con los números complejos a partir de tareas que se suponen conocidas para los estudiantes, por ejemplo, la

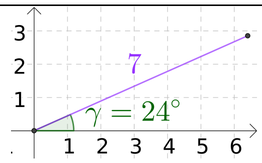
ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a210207

resolución de ecuaciones cuadráticas, la operatoria y reconocimiento de parejas ordenadas en el plano cartesiano, así como distancias y ángulos; intencionalmente no se indicó la relación de estos temas con los números complejos para identificar si los alumnos consideraban a estos números en sus soluciones. En las preguntas restantes (C4 – C9) se demandan explícitamente concepciones sobre los números complejos. Por esta característica, el cuestionario se aplicó en dos partes. La aplicación se realizó de forma individual en una sesión sincrónica videograbada a través de la plataforma *Meet*, y la recolección de evidencia se complementó a través de *Google Classroom*.

N	Pregunta	Objetivo	Posibles Concepciones
C1	a) Resuelve la siguiente ecuación: $x^2 - 2x + 5 = 0$ b) Calcula los lados de un triángulo rectángulo que tiene 12 cm de perímetro y 7 cm^2 de área.	Reconocer los números complejos como solución de una ecuación cuadrática, identificando la raíz cuadrada de un número negativo ($\sqrt{-1} = i$) para poder expresar la solución compleja en su representación binómica, es decir, $a + ib$.	-El estudiante presenta elementos de las acciones cuando: 1) hace explícito que no existen raíces cuadradas de números negativos y concluye que la solución no pertenece al conjunto de los números reales, 2) identifica la unidad imaginaria, pero no realiza tratamientos adecuados. -Muestra acciones si puede expresar un número complejo específico indicando la parte real e imaginaria.
C2	Realiza y justifica las siguientes operaciones: a) $\sqrt{-7}\sqrt{-7}$ b) $(-20, 4) + (6\,, -10)$ c) $(2.11, 3) - (-1, 1)$ d) $(9, 8.2) * (10, \pi)$ e) $(5 + 3i)(11 - i)$ f) $\left(5_{\frac{\pi}{3}}\right)\left(\sqrt{2}_{\frac{\pi}{6}}\right)$	Identificar la unidad imaginaria y asociar a los números complejos con sus diversas representaciones: binómica, par ordenado y polar; y realizar operaciones con los números complejos según su representación.	-El estudiante presenta elementos de las acciones cuando: 1) identifica a la unidad imaginaria como la raíz cuadrada de un número negativo y reemplaza $\sqrt{-1}$ por i aunque el estudiante presente dificultades en los tratamientos, 2) identifica algunas representaciones de los números complejos. -Presenta acciones si puede tomar un número complejo específico en cualquiera de sus representaciones y realizar tratamientos adecuados.
C3	Observa y describe las características de las siguientes imág 	Reconocer los componentes parte real, parte imaginaria, módulo y argumento relacionados con el registro geométrico de los números complejos en sus representaciones par ordenado y polar en el plano complejo.	-El estudiante muestra elementos de las acciones si reconoce algunos números complejos y sus componentes. -Presenta acciones si puede identificar los componentes de los números complejos como la parte real, la parte imaginaria, el módulo y el argumento.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a210207

C4	Representa el módulo y el argumento en el plano a partir del punto dado.  	Asociar el punto a un número complejo en el plano complejo para hacer el tratamiento en el registro geométrico asociado a la representación par ordenado y representar en ese mismo registro el módulo y argumento de la representación polar del número complejo.	Según sea el caso: -El estudiante muestra elementos de las acciones geométricas cuando identifica algunos de los componentes como el módulo o el argumento principal o la parte real o la parte imaginaria del número complejo en el plano complejo. -Presenta elementos de las acciones algebraicas cuando toma fórmulas externas para calcular los componentes de un número en determinados subconjuntos. -Presenta acciones geométricas si identifica todos los componentes del número complejo en el plano complejo. -Muestra acciones algebraicas si toma fórmulas externas para hallar el valor de los componentes de los números complejos específicos en cualquier parte del plano complejo.
C5	Encuentra las coordenadas del punto D a partir del módulo y el argumento dados.  	Asociar el módulo, el argumento y el punto del plano a un número complejo en su representación polar; articulándolo con el registro algebraico para determinar las partes real e imaginaria y así expresar el número complejo en su representación par ordenado.	
C6	Halla el módulo y el argumento teniendo en cuenta que el par ordenado asociado es $(4, \sqrt{48})$.	Asociar el par ordenado a un número complejo y realizar tratamiento en el registro algebraico para obtener el número complejo en su representación polar en el mismo registro.	
C7	Determina el par ordenado asociado a un número complejo teniendo en cuenta que el módulo es a y el argumento es b.	Identificar los componentes de un número complejo en su representación polar, y determinar su representación par ordenado a partir de la generalización en el registro algebraico.	Si el estudiante asigna un valor específico al número complejo, entonces se pueden observar las mismas acciones y elementos de las acciones de C4-C6. -Si logra una generalización se pueden presentar elementos de los procesos o procesos; la diferencia radica en que el primero es para subconjuntos (p.e. números de la forma 0+bi o números en el primer cuadrante) y el segundo es para cualquier número complejo. -Los elementos de los procesos o procesos geométricos se reflejan cuando el estudiante caracteriza algún componente de los números complejos en el plano complejo. Los elementos de los procesos o procesos algebraicos se presentan si el estudiante deduce fórmulas para calcular las partes real e imaginaria de un número complejo arbitrario o de un subconjunto (por cuadrantes).
C8	Calcula la parte real y la parte imaginaria del número complejo teniendo en cuenta la siguiente representación.	Asociar el módulo y el argumento del número complejo y articular la representación polar en el registro geométrico de un número complejo a la representación binómica en su registro algebraico.	Las estructuras mentales que pueden inferirse del desempeño del estudiante en C8 y C9 son las mismas que en C4-C6

			
C9	Representa en el plano complejo el módulo y el argumento asociado al número complejo $6 - 7i$.	Identificar el número complejo en su representación binómica en el registro algebraico y articular con la representación polar en el registro geométrico.	

Cuadro 1 – Cuestionario
Fuente: elaborado por los autores.

Para realizar el análisis de las respuestas de los estudiantes se construyeron grupos según las características de sus concepciones. El análisis se presenta por cada parte del cuestionario (Figura 3). En la primera parte (C1-C3) los diecisiete alumnos dieron una respuesta. En cambio, en la segunda parte (C4-C9) hubo ocho alumnos que no respondieron ninguna pregunta (Grupo 1), siete solo respondieron una o dos preguntas (Grupos 2, 3 y 4), y dos respondieron cuatro o más interrogantes (Grupo 5 constituido por E1 y E2).

4 Resultados

En la Figura 3, la parte superior muestra la agrupación de C1-C3 y sus respectivos incisos, la clasificación se hizo según las características de las respuestas de los estudiantes, mostrando la frecuencia de respuesta a cada interrogante. La parte inferior corresponde a C4-C9, en este caso, la agrupación se hizo tomando en cuenta el número de respuestas que dieron los estudiantes y después las características de sus respuestas, más adelante se explica a detalle.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a210207

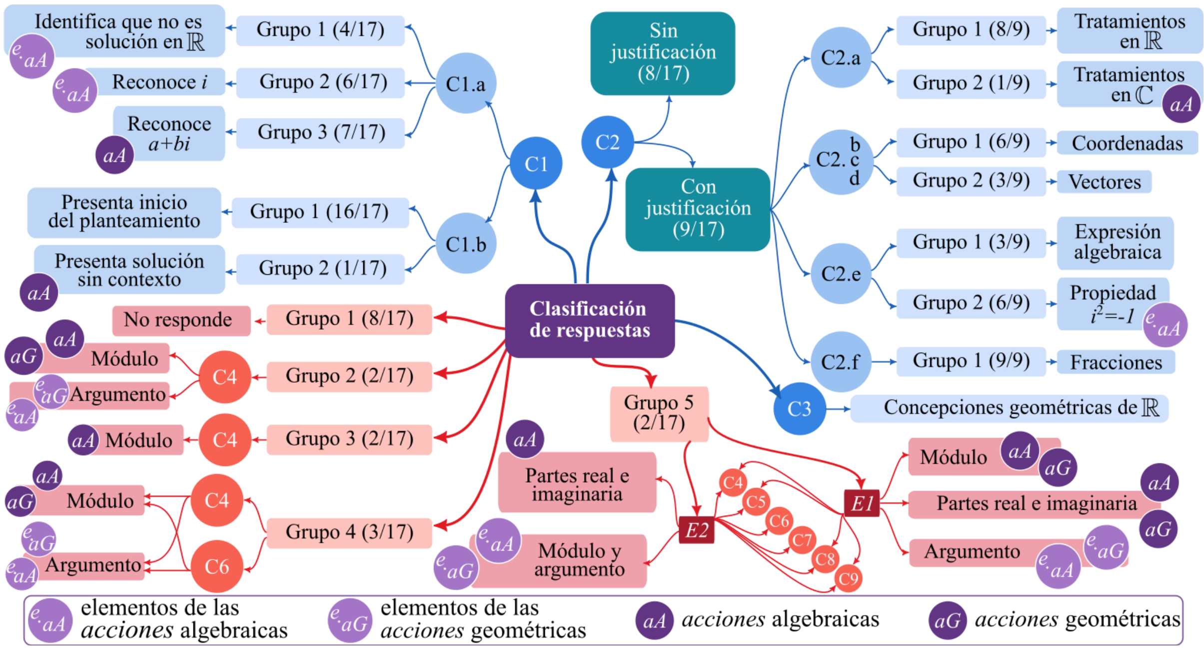


Figura 3 – Clasificación de respuestas de los estudiantes para caracterizar sus concepciones
Fuente: elaborada por los autores.

En la primera parte se identifican concepciones previas similares relacionadas con los números complejos, tales como: solución de ecuaciones cuadráticas, ángulo, distancia, coordenadas, funciones y razones trigonométricas, los cuales son esquemas previos que deben considerarse en el diseño de la descomposición genética del concepto de números complejos. Además, se identificaron dos principales características. 1) Las respuestas reflejan elementos de las acciones algebraicas (e.aA) o acciones algebraicas (aA) similares sobre la misma concepción previa, evidenciando un desequilibrio de las estructuras mentales de los estudiantes en relación con los números reales, es decir, se relacionan concepciones de los números reales que conducen a concepciones sobre los números complejos. 2) Hay evidencia de concepciones previas que no se relacionan directamente con los números complejos, así que no existen elementos de las acciones ni acciones sobre ese concepto; además, hay evidencia de errores al trabajar con números reales, algunos descritos por Pardo y Gómez (2007) y Aznar *et al*. (2010).

En la segunda parte se pudieron identificar elementos de las acciones algebraicas (e.aA) y geométricas (e.aG) y acciones geométricas (aA) y algebraicas (aG) relacionadas con los números complejos y, en especial, con componentes de los números complejos en sus diferentes representaciones, tales como: módulo, argumento, parte real y parte imaginaria. Los detalles de las estructuras que se identificaron se exponen en lo siguiente.

4.1 Primera parte del cuestionario

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a210207

Para C1.a se consideraron tres grupos de respuestas. En general los estudiantes usaron la fórmula general o intentos de factorización para encontrar la solución de ecuaciones cuadráticas, esto refleja concepciones previas sobre ese concepto. Como puede verse en el Cuadro 2a, los estudiantes del primer grupo muestran elementos de las acciones porque identificaron que la ecuación propuesta no tiene solución en los números reales, aunque tampoco dicen en qué campo sí tiene solución, por ello, no muestran acciones relacionadas con los números complejos, ya que en particular no identificaron a la unidad imaginaria. Otros estudiantes de este grupo intentaron responder con el análisis del discriminante (Cuadro 2b).

El grupo 2 de C1.a se caracterizó porque sus elementos de las acciones algebraicas le permitieron reconocer la unidad imaginaria en la raíz cuadrada de un número negativo sustituyendo $i = \sqrt{-1}$. Aun así, no se considera una concepción acción de los números complejos porque no se constituye en la representación binómica $a + ib$ en el registro algebraico (Cuadro 2c). El grupo 3 de C1.a también reconoció la unidad imaginaria, además, expresó la solución como un número complejo en su representación binómica, por lo que su estructura mental se constituye en concepción acción algebraica de los números complejos, ya que reconoce la parte real y la parte imaginaria del número complejo en un registro algebraico (Cuadro 2d). Cabe resaltar que estos resultados son apoyados por los desarrollos posteriores de los estudiantes.

<table>
<tr><td>2a
$\frac{2\pm\sqrt{4-20}}{2}$ No tiene solucion en los reales
$\frac{2\pm\sqrt{-16}}{2}$
No tiene solución en los reales.</td><td>2c
$x_1 = \frac{2+\sqrt{4-4(1)(5)}}{2} = \frac{2+\sqrt{-16}}{2} = \frac{2+4i}{2}$
$x_2 = \frac{2-\sqrt{4-4(1)5}}{2} = \frac{2-\sqrt{-16}}{2} = \frac{2-4i}{2}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">2b
$x^2-2x+5=0$ trate de hacerla con la formula general pero me salia un nugmero negativo en lal determinante.
Traté de hacerla con la fórmula general, pero me salía un número negativo en el determinante.</td></tr>
<tr><td colspan="2">2d
1 a) $x^2-2x+5=0$ $x \notin \mathbb{R}$
$x = \frac{+2\pm\sqrt{(-2)^2-4(1)(5)}}{2(1)}$ $x = \frac{2\pm 4i}{2}$
$x = \frac{2\pm\sqrt{(4)-20}}{2}$ $x_1 = \frac{2+4i}{2} \to 1+2i$
$x = \frac{2\pm\sqrt{-16}}{2}$ $x_2 = \frac{2-4i}{2} \to 1-2i$</td></tr>
</table>

Cuadro 2 – Ejemplos de respuestas a C1.a

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a210207

Fuente: resultados de la investigación.

En C1.b se identificaron dos grupos. El grupo 1 intentó formular la ecuación cuadrática que subyace del planteamiento del problema, sin embargo, se enfrentó a diversas dificultades referentes a la lectura, comprensión y traducción del problema, en el sentido de Puig y Cerdán (1988), impidiendo ver otras concepciones que se relacionan directamente con los números complejos; en particular, no logró formular y resolver la ecuación cuadrática. El grupo 2 lo conforma un estudiante, quien logró formular y resolver la ecuación cuadrática, identificando la solución como números complejos. Sin embargo, no consideró el contexto del problema, por lo que sus concepciones se caracterizan como acciones algebraicas.

Para el caso de C2 se pidió incluir el procedimiento o justificar las respuestas. Primero, se hizo una clasificación entre aquellos que no justificaron y los que sí lo hicieron. En C2.a se obtuvieron dos grupos; el grupo 1 realizó el producto considerando concepciones previas construidas para los números reales a través de propiedades de las raíces (Cuadro 3a). En este grupo se encontró una dificultad que enfrentan los estudiantes por el doble signo de la raíz al multiplicar los números complejos, asumiendo que son números reales y que $\sqrt{-7}\sqrt{-7} = \sqrt{(-7)(-7)} = \sqrt{49} = 7$ (Cuadro 3b). En este caso el estudiante usó las propiedades de las raíces asociadas a los números reales y las trasladó al conjunto de los números complejos, por lo que manifiesta desconocimiento de estos últimos números. Estos resultados también fueron obtenidos en la investigación de Pardo y Gómez (2007). El alumno del grupo 2 dejó ver en su desarrollo acciones algebraicas construidas sobre los números complejos, ya que reconoció que $\sqrt{-1} = i$ y que $i^2 = -1$ (ver Cuadro 3c).

3a	$\sqrt{-7}\sqrt{-7} = -7$ únicamente se elimina la Raiz Únicamente se elimina la raíz.
3b	a) $\sqrt{-7}\sqrt{-7} = \sqrt{49} = 7$
3c	a) $\sqrt{-7}\sqrt{-7} = i\sqrt{7} \cdot i\sqrt{7} = -(\sqrt{7})^2 = -7$

Cuadro 3 – Ejemplos de respuestas a C2.a
Fuente: resultados de la investigación.

Los *incisos b, c y d* de C2 establecen, respectivamente, operaciones de suma, resta y multiplicación de pares ordenados, de ahí se clasificaron dos grupos. El primero tuvo en consideración concepciones previas como las coordenadas cartesianas, dejando ver los procedimientos relacionados con las operaciones; el grupo 2 lo asoció con vectores y realizó

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a210207

las operaciones, representándolo incluso gráficamente. En ninguno de los casos se observó asociación con los números complejos, es decir, al ver esas representaciones, los alumnos pensaron en coordenadas y en vectores, pero no en números complejos. Randolph y Parraguez (2019) obtuvieron resultados similares, solo que los autores sí asocian los argumentos de los alumnos a un número complejo cuando los vectores que representan los asocian a un número complejo en su representación binómica.

Para responder C2.e los alumnos siguieron procedimientos algebraicos, tal como se obtuvo en el estudio de Bagni (2001), pero en este caso se distinguieron dos grupos. El grupo 1 no identificó i como un número imaginario, su respuesta fue una expresión cuadrática (Cuadro 4a). En este sentido, no existe un desequilibrio en sus estructuras mentales de los números reales. En cambio, el grupo 2 dejó explícitos elementos de las acciones algebraicas relacionadas con los números complejos, en particular los estudiantes usaron un agente externo, $i^2 = -1$, que les permitió remplazar los valores en la expresión, aunque algunos mostraron dificultades o cambiaron la expresión (Cuadro 4b). Para responder C2.f, ningún estudiante reconoció la notación de un número complejo en la representación polar $Z = r_\theta$, sino que lo asociaron a las fracciones y realizaron la multiplicación entre fracciones (Cuadro 4c). Este resultado condujo a cambiar en las etapas siguientes de la investigación la notación $Z = r_\theta$ por $Z = (r, \theta)$ para la forma polar de los números complejos.

4a $(5+3i)(11-i) = 55-5i+33i-3i^2 = -3i^2+28i+55$
4b $(5+3i)(10-i) = 50-5i+30i-3i^2 = 50+3+25i = 53+25i$ (Se multiplica cada factor y se agrupan, y el i^2 se elimina ya que es $-1(-3) = 3$) Se multiplica cada factor y se agrupan, y el i^2 se elimina ya que es $-1(-3) = 3$.
4c f) multiplicacion de fracciones es directo. $\left(\frac{5\pi}{3}\right)\left(\frac{\sqrt{2}\pi}{6}\right) = \frac{5\sqrt{2}\pi^2}{18}$ Multiplicación de fracciones es directo.

Cuadro 4 – Ejemplos de respuestas a C2.f
Fuente: resultados de la investigación.

Con las respuestas de C3 se buscaron explícitamente las posibles concepciones previas ya construidas por los estudiantes, relacionadas con los números complejos a partir de su registro geométrico. Entre los conceptos matemáticos mencionados están: puntos, ángulos, coordenadas, plano cartesiano, vectores, triángulos, pendiente, distancia y otros (ver Cuadro 5),

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a210207

pero en ningún caso los estudiantes lo relacionaron con los números complejos. Esto quiere decir que los números complejos no son el primer concepto que viene a la mente de los estudiantes cuando ven esas representaciones.

5a	5b
a) Es un plano en 2 dimensiones, cada punto es la ubicación entre una cordenada en cada eje Es un plano en dos dimensiones, cada punto es la ubicación entre una coordenada en cada eje.	Son igualmente puntos pero todos unidos al centro (0,0) lo relaciono con cordenadas vectores, ángulo entre vectores distancia entre puntos, ángulos, rectas Son igualmente puntos, pero todos unidos al centro (0,0), lo relaciono con coordenadas, vectores, ángulos entre vectores, distancia entre puntos, ángulos, rectas.

Cuadro 5 – Ejemplos de respuestas a C3
Fuente: resultados de la investigación.

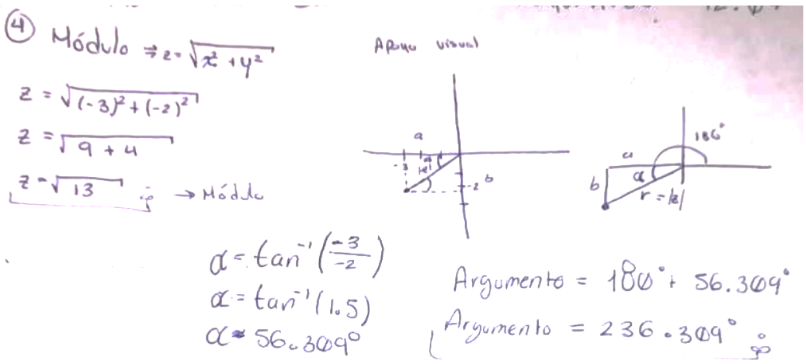
4.2 Segunda parte del cuestionario

La segunda parte está enfocada, explícitamente, en las concepciones construidas sobre los números complejos, particularmente la articulación entre los registros de representación algebraica y geométrica que dejan ver concepciones acción. De manera general, los alumnos mostraron dificultades y desconocimiento de los conceptos evaluados, ya que ocho alumnos dejaron en blanco o en sus respuestas escribían *esto no lo sé* o *no me acuerdo*, y solo dos alumnos respondieron cuatro o más preguntas, por eso el análisis se centró en sus respuestas. Este hecho da valor a las interpretaciones que se hacen en el análisis de la primera parte.

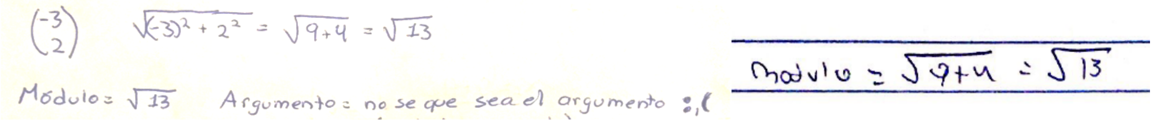
Debido a la falta de respuestas, esta segunda parte se agrupó de diferente manera. El *grupo 1* lo constituyen aquellos alumnos que no respondieron ninguna pregunta o argumentaron que no tienen conocimientos de esos conceptos. El *grupo 2* son aquellos que respondieron solo la pregunta C4, realizando acciones algebraicas para determinar el módulo, así como conexión con concepciones previas asociadas al triángulo rectángulo y las razones trigonométricas para encontrar el argumento de un número complejo, tal como lo hizo el *grupo 4*, solo que, este último, también respondió la pregunta C6. Ambos grupos tienen en común que los estudiantes muestran elementos de las acciones, ya que obtienen el argumento, así como acciones algebraicas y geométricas al obtener el módulo. Al obtener el argumento dedujeron que se deben sumar 180° al ángulo obtenido (Cuadro 6a). Sin embargo, para obtener el argumento, en la fórmula de arcotangente consideraron la parte real sobre la parte imaginaria, por lo que el cálculo es errado. El *grupo 3* también respondió solo la pregunta C4, pero estos estudiantes expresaron desconocimiento del argumento, y solo realizaron acciones algebraicas al usar la fórmula para hallar el módulo (Cuadro 6b).

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a210207

6a



6b

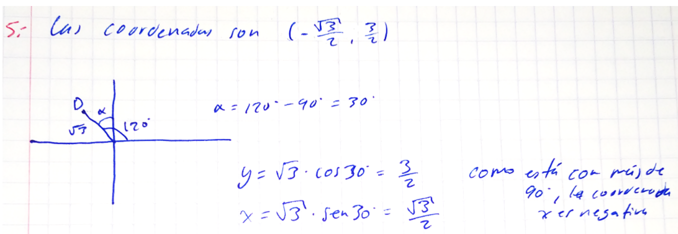


Argumento = no sé qué sea el argumento.

Cuadro 6 – Ejemplos de respuesta a C4
Fuente: resultados de la investigación.

El *grupo 5* está conformado por los dos estudiantes que respondieron cuatro o más preguntas. El estudiante 1 (*E1*) respondió C4, C5, C8 y C9; mientras que el estudiante 2 (*E2*) dio respuesta a todas las preguntas de esta parte. En C5, *E1* mostró acciones algebraicas y geométricas sobre el módulo, la parte real y la parte imaginaria, y elementos de las acciones sobre el argumento; además, logró articular la representación polar y par ordenado de un número complejo en su representación algebraica y geométrica (Cuadro 7a). De igual forma, realizó una descripción del plano complejo en C8 (Cuadro 7b). Sin embargo, tanto en C5 como en C9 presentó dificultad en la representación polar, ya que tiene problemas para identificar el argumento (Cuadro 7c). Estas mismas dificultades se dieron a conocer en la investigación de Aznar *et al*. (2010) en la que los estudiantes no podían identificar el valor del argumento.

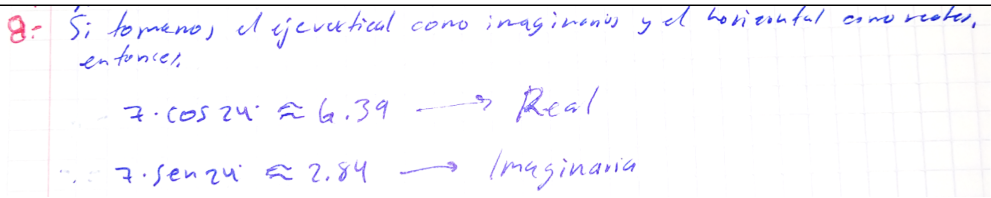
7a



Como está con más de 90°; la coordenada x es negativa.

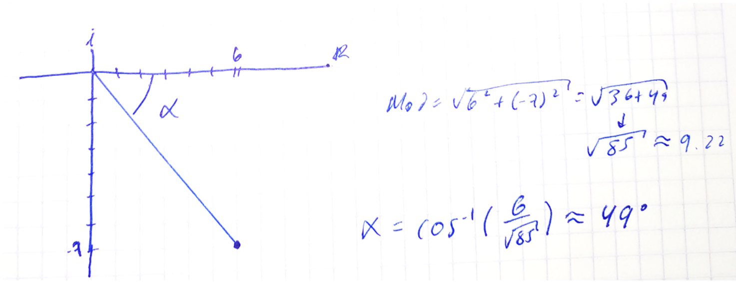
7b

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a210207



Si tomamos el eje vertical como imaginarios y el horizontal como reales, entonces…

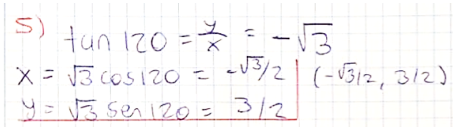
7c



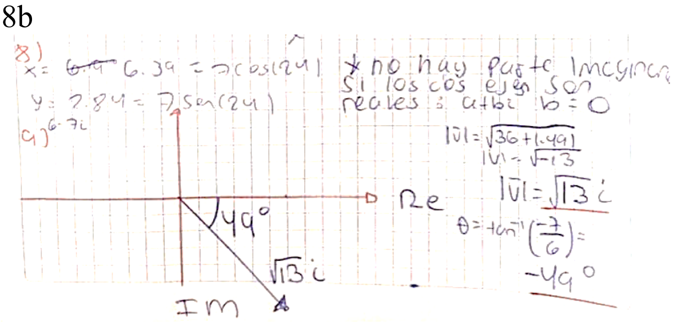
Cuadro 7 – Respuestas del estudiante E1
Fuente: resultados de la investigación.

Las concepciones que muestra *E2* también evidencian diferentes acciones algebraicas sobre la parte real y la parte imaginaria, y elementos de las acciones algebraicas y geométricas sobre el módulo y el argumento. Sus elementos de las acciones algebraicas y geométricas sobre los componentes de los números complejos tales como módulo y argumento, tienen conexión con concepciones previas de las razones trigonométricas (Cuadro 8a). Las respuestas en C8 y C9 confirman que el estudiante requiere una mayor reflexión para construir acciones sobre el registro geométrico de un número complejo en su representación polar (Cuadro 8b).

8a

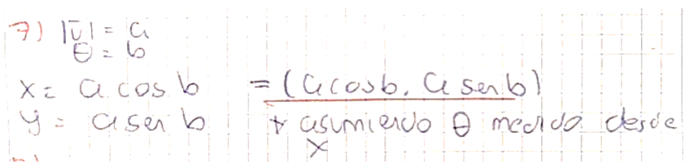


8b



No hay parte imaginaria si los ejes son reales: $a + bi, b = 0$

8c



Asumiendo θ medido desde x.

Cuadro 8 – Respuesta del estudiante E2
Fuente: resultados de la investigación.

En la respuesta a C8 se observa que *E2* logró calcular los valores correspondientes a (x, y), pero no los asoció a la parte real y parte imaginaria de un número complejo para

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a210207

expresarlo en la forma $Z = a + ib$, incluso resaltó que ambos números obtenidos son reales, argumentando que, por eso, no hay parte imaginaria (Cuadro 8b). En la respuesta a C9 (Cuadro 8b) el estudiante mostró dificultades para identificar el argumento de un número complejo en su representación polar en el registro geométrico. Un resultado diferente a los reportados por Aznar *et al*. (2010), es que *E2* consideró el módulo como un número complejo. Por lo anterior, las concepciones previas del estudiante se relacionan con el plano cartesiano y los números reales, pero no ha constituido acciones sobre el módulo y el argumento.

5 Conclusiones

Los resultados expuestos dejan ver que, aunque los alumnos enfrentan algunas dificultades, la mayoría de ellos ha construido concepciones sobre conceptos que están relacionados con los números complejos, por ejemplo, resolución de ecuaciones cuadráticas, distancia entre dos puntos, razones trigonométricas, coordenadas en el plano cartesiano, ángulos y otros. Sin embargo, la mayoría de sus concepciones no explicitan relaciones con los números complejos, sobre todo en el registro geométrico, ya sea para representar a un número en su forma polar o como pareja ordenada en el plano complejo.

Las estructuras mentales de los estudiantes que se relacionan mayormente con los números complejos son aquellos elementos de las acciones y acciones algebraicas que se realizan al resolver una ecuación cuadrática. Un grupo de seis alumnos expresó la unidad imaginaria, y otro grupo de siete reconoció la representación binómica de un número complejo en su registro algebraico. Parece que la enseñanza recibida por estos alumnos sobre estos números ha priorizado la representación binómica en su registro algebraico, lo cual coincide con lo que se reporta en investigaciones realizadas en otros países, por ejemplo, aquellas de Aznar *et al*. (2010) y Randolph y Parraguez (2019). Por ello, es necesario considerar en la enseñanza, dentro del mismo registro algebraico, las otras formas de representación de un número complejo: par ordenado, polar, exponencial y trigonométrica.

En algunas acciones algebraicas que se evidenciaron, surgieron también elementos de las acciones geométricas para determinar por ejemplo el módulo o argumento de un número complejo. Sin embargo, son pocos los alumnos que muestran esos elementos de las acciones y acciones geométricas. Por ello, es necesario dirigir la enseñanza para hacer, también, énfasis en el estudio de representaciones de los números complejos en el registro geométrico, tanto en su forma polar, como pareja ordenada, trigonométrica, exponencial y binómica; y con ello, promover concepciones que deriven de la articulación entre registros de representación.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a210207

Pese a las limitaciones de este estudio, en cuanto al número de participantes, los resultados vistos permiten indagar sobre la instrucción en el nivel medio superior en México - estudiantes entre quince y dieciocho años - ya que los participantes provienen de distintas instituciones del país, y además tienen una nota por encima de la media. Así, se destaca la importancia de promover, desde el nivel medio superior, una enseñanza que permita conectar concepciones previas como la resolución de ecuaciones cuadráticas u otro grado, números reales, el plano cartesiano y la trigonometría, a fin de construir estructuras mentales sobre los números complejos. Una forma de hacer esa conexión es promoviendo acciones algebraicas, geométricas y la articulación entre ellas para caracterizar el módulo, el argumento, la parte real y la parte imaginaria de un número complejo, y así continuar con el ciclo de las estructuras y mecanismos mentales. Esto se materializa en una guía para la construcción de la descomposición genética preliminar para los números complejos (Figura 4), misma que considera las concepciones descritas en el Cuadro 1.

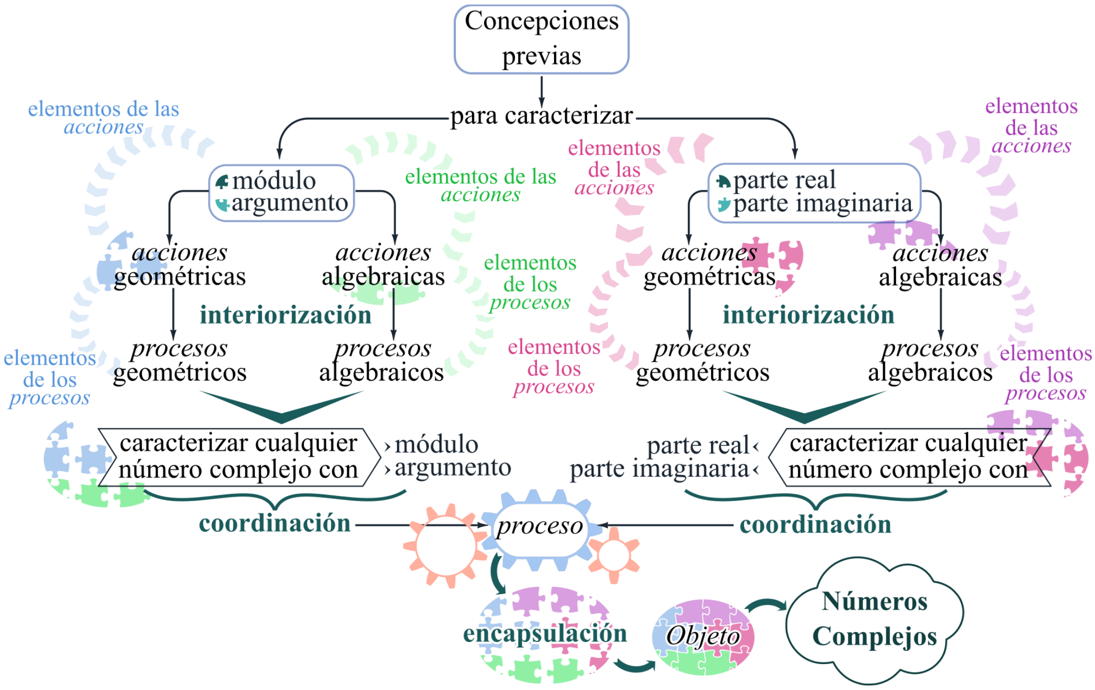


Figura 4 – Una guía para la descomposición genética preliminar de los números complejos
Fuente: elaborada por los autores.

Los resultados de este estudio son una pauta para el diseño de un ciclo de enseñanza para la construcción de nuevas estructuras, en el sentido de Asiala *et al.* (1997). Es decir, a partir de las concepciones sobre la distancia entre dos puntos, razones trigonométricas y ángulos se generan acciones para determinar el módulo y argumento de un número complejo de forma articulada en el registro geométrico y en el algebraico. Al mismo tiempo, la resolución de ecuaciones permite generar acciones para identificar la unidad imaginaria y determinar la parte real y parte imaginaria de un número complejo en su representación binómica en un registro

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a210207

algebraico, si esto se articula con el registro geométrico se pueden generar acciones de esa representación en ese mismo registro y promover acciones sobre la representación par ordenado. Después, la enseñanza se debe conducir a generalidades, es decir, que los estudiantes logren la interiorización sobre esas acciones para constituir procesos, los cuales también dependerán de los registros de representación, y para lograr nuevas estructuras, se debe buscar la articulación entre registros, así como la coordinación entre procesos. Cabe señalar que, en este ciclo, aparecerán elementos de las estructuras como las descritas en el Cuadro 1.

En suma, la enseñanza de los números complejos debe contemplar el registro algebraico en articulación con el registro geométrico, ya que, para lograr sus concepciones, el estudiante requiere activar mecanismos cognitivos en diversos sistemas de representación. Además, desde la instrucción en el nivel medio superior, es necesario comenzar a establecer relaciones entre los números complejos y otros conceptos, como los descritos en este estudio.

Referencias

ANDREESCU, T.; ANDRICA, D. **Complex Numbers from A to... Z**. Boston: Birkhäuser, 2006.

APOSTOL, T. **Calculus**. España: Reverté, 1984.

ARNON, I.; COTTRILL, J.; DUBINSKY, E.; OKTAÇ, A.; ROA-FUENTES, S.; TRIGUEROS, M.; WELLER, K. **APOS Theory:** A framework for research and curriculum development in mathematics education. New York: Springer, 2014.

ASIALA, M.; BROWN, A.; DEVRIES, D.; DUBINSKY, E.; MATHEWS, D.; THOMAS, K. A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. *En*: KAPUT, J; SCHOENFELD, A. H; DUBINSKY, E. (eds.). **Research in Collegiate Mathematics Education I**. Providence: American Mathematical Society, 1997. p. 1-32. (Vol. 6).

AZNAR, M.; DISTÉFANO, M.; PRIETO, G.; MOLER, E. Análisis de errores en la conversión de representaciones de números complejos del registro gráfico al algebraico. **Revista Premisa**, Buenos Aire, v. 12, n. 47, p. 13-22, 2010.

BAGNI, G. La Introducción de la Historia de las Matemáticas en la Enseñanza de los Números Complejos: una Investigación Experimental Desempeñada en la Educación Media Superior. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, Ciudad de México, v. 4, n. 1, p. 45-61, 2001.

DISTÉFANO, M.; AZNAR, M.; POCHULU, M. Errores asociados a la representación geométrica-vectorial de números complejos: un análisis ontosemiótico. **Unión -** Revista Iberoamericana de Educación Matemática, Andújar, v. 30, [s.n.], p. 61-80, 2012.

DUBINSKY, E.; MCDONALD, M. APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Research. *En:* HOLTON, D.; M. ARTIGUE.; U. KIRCHGRÄBER., J. HILLEL, M. NISS, SCHOENFELD, A. (eds.). **The Teaching and Learning of Mathematics at University Level**. Dordrecht: Springer, 2001. p. 275-282.

DUVAL, R. Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a210207

representación. **La Gaceta**, Madrid, v. 9, n. 1, p. 143-168, 2006.

KLINE, M. **El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días**. Madrid: Alianza, 1992.

OKTAÇ, A.; VÁZQUEZ. R.; RAMÍREZ, O.; VILLABONA, D. Transitional points in constructing the preimage concept in linear algebra. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, Londres, v. 53, n. 5, p. 1170-1189, 2021.

PARDO, T.; GÓMEZ, B. La enseñanza y el aprendizaje de los números complejos: un estudio en el nivel universitario, **PNA**, Granada, v. 2, n. 1, p. 3-15, 2007.

PUIG, L.; CERDÁN, F. **Problemas aritméticos escolares**. Madrid: Síntesis, 1988.

RANDOLPH, V.; PARRAGUEZ, M. Comprensión del Sistema de los Números Complejos: Un Estudio de Caso a Nivel Escolar y Universitario. **Formación universitaria**, La Serena, v. 12, n. 6, p. 57-82, 2019.

ROMERO, C. **Aprendizaje de Transformaciones Lineales Mediante la Coordinación de Representaciones Estáticas y Dinámicas**. Tesis (Doctorado en Ciencias) - Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav, Ciudad de México, 2016.

UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA - UDG. **Mapa modular de Ingeniería Mecánica Eléctrica. Precálculo**. Guadalajara: UDG, 2017. Disponible en: http://www.cucei.udg.mx/carreras/mecanica/sites/default/files/ua_precalculo_i5799.pdf. Acceso: 21 oct. 2020.

UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA - UDG. **Programa modular de Ingeniería Civil. Precálculo**. Guadalajara: UDG, 2020. Disponible en: http://www.pregrado.udg.mx/sites/default/files/unidadesAprendizaje/precalculo_2.pdf. Acceso: 20 dic. 2020.

Submetido em 20 de Dezembro de 2021.
Aprovado em 06 de Novembro de 2023.