ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a10

Un modelo para la construcción de trayectorias hipotéticas de aprendizaje preliminares

A model for the construction of preliminary hypothetical learning trajectories

Andrea **Cárcamo**[*]

ORCID iD 0000-0001-5782-3479

Claudio **Fuentealba**[**]

ORCID iD 0000-0001-8071-5150

Resumen

El objetivo de este trabajo es ofrecer un modelo sobre el proceso de construcción de una trayectoria hipotética de aprendizaje preliminar (THAp) en matemática y que es elaborada, en general, para aplicarla en un primer ciclo de un experimento de enseñanza. Este modelo surge de la revisión de investigaciones sobre THA en el campo de la Educación Matemática. Se ejemplifica dicho modelo a través de la elaboración de una THAp sobre sistemas de ecuaciones lineales para el curso de Álgebra Lineal en el nivel universitario.

Palabras clave: Trayectoria hipotética de aprendizaje. Álgebra Lineal. Sistema de ecuaciones lineales. Trayectoria hipotética de aprendizaje preliminar. Modelo teórico-analítico de construcción de trayectorias.

Abstract

The objective of this work is to offer a model on the construction process of a preliminary hypothetical learning trajectory (pHLT) in mathematics and which is elaborated, in general, to be applied in the first cycle of a teaching experiment. This model arises from the review of research on HLT in the field of Mathematics Education. This model is exemplified through the elaboration of a pHLT on systems of linear equations for the Linear Algebra course at the university level.

Keywords: Hypothetical learning trajectory. Linear Algebra. System of linear equations. Preliminary hypothetical learning trajectory. Theoretical-analytical model of trajectory construction.

1 Introducción

Una THA es un vehículo para planificar el aprendizaje de conceptos matemáticos y su

[*] Doctora en Educación de la Universidad Autónoma de Barcelona (UAB). Académica del Centro de Docencia de Ciencias Básicas para Ingeniería, Universidad Austral de Chile (UACh), Valdivia, Chile. E-mail: andrea.carcamo@uach.cl.

[**] Doctor en Educación de la Universidad Autónoma de Barcelona (UAB). Académico del Centro de Docencia de Ciencias Básicas para Ingeniería, Universidad Austral de Chile (UACh), Valdivia, Chile. E-mail: cfuentealba@uach.cl.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a10

diseño se basa en las concepciones previas de los estudiantes involucrados (SIMON; TZUR, 2004). La THA tiene tres componentes: la meta de aprendizaje, las tareas de aprendizaje y el proceso de aprendizaje hipotético (SIMON, 1995). La THA puede aplicarse a unidades de instrucción de diferentes longitudes (SIMON, 2014). En la literatura, se puede encontrar que, en varios estudios, usan la definición de THA de Simon (1995) o una basada en esta, pero le designan el nombre de trayectoria de aprendizaje o progresión de aprendizaje.

El docente puede usar una trayectoria hipotética de aprendizaje (THA) para planificar la enseñanza, guiar la selección de tareas, facilitar la discusión en el aula y emitir juicios sobre cómo sus estudiantes pueden diferir en la comprensión de conceptos matemáticos (CONFREY, 2019). Lo anterior sugiere que la construcción de una THA es una buena herramienta para iniciar la planificación de la enseñanza en matemática.

La investigación sobre THA ha sido de interés para la comunidad científica del área de Educación Matemática. En el año 2004, la revista *Mathematical Thinking and Learning* publicó un número especial sobre THA (CLEMENTS; SARAMA, 2004). En el año 2017, se efectuó un foro de investigación en el *41st Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME41) sobre la investigación y el uso de progresiones de aprendizaje (trayectorias) en Educación Matemática (SIEMON *et al*., 2017).

Además, en los últimos años, se ha incrementado el diseño de THA para la enseñanza primaria y, en menor medida, para la enseñanza secundaria y superior. Por ejemplo, algunas THA para primaria se pueden encontrar en los trabajos de Clements y Sarama (2014), Simon *et al*. (2018a) o Confrey, Maloney y Corley (2014). En tanto, ejemplos de THA dirigidas a secundaria o bachillerato se pueden ver en los estudios de Aranda y Callejo (2010) o Mira (2016). Finalmente, algunas THA enfocadas en contenidos matemáticos para el nivel universitario se pueden observar en los trabajos de Andrews-Larson, Wawro y Zandieh (2017), o Cárcamo, Fortuny y Fuentealba (2021).

Ha sido tal la importancia de las THA que se han incorporado en la política educativa de algunos países. Los ejemplos principales se ven en países como Estados Unidos y Australia. Estos ejemplos ilustran que el uso de las THA ha crecido significativamente (CONFREY *et al*., 2019).

La THA puede ayudar y orientar a los investigadores, desarrolladores de currículos y docentes (ANDREWS-LARSON; WAWRO; ZANDIEH, 2017). Para los investigadores, la THA ilustra cómo los estudiantes podrían construir conceptos matemáticos. Para los desarrolladores de currículos, la THA describe las posibles vías para el diseño curricular. En tanto, para los docentes, la THA proporciona sugerencias y guías sobre las maneras de ayudar

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a10

a sus estudiantes a construir un concepto matemático (ELLIS; WEBER; LOCKWOOD, 2014).

En resumen, una THA puede guiar la investigación o la enseñanza porque especifica: (a) los puntos de partida conceptuales y el objetivo de aprendizaje, (b) el proceso de cambio, es decir, la transición a través del proceso de aprendizaje hipotético y (c) las tareas que un docente puede usar para involucrar a los estudiantes en actividades mentales hipotetizadas para fomentar el cambio cognitivo previsto (SIMON *et al*., 2018b).

Las THA ofrecen una forma sistemática para que la investigación se comunique tanto a los docentes como a otros profesionales, con la finalidad de que la integren en su práctica educativa o donde la requieran. A su vez, las THA brindan una oportunidad para sintetizar la investigación existente de toda la comunidad internacional, lo que permite comprender las diferencias en el aprendizaje de los estudiantes, basadas en diferentes culturas y países (CONFREY; MALONEY; CORLEY, 2014).

En la revisión de la literatura que hemos efectuado, se presentan variados ejemplos de THA, tanto preliminares (construidas previas a su aplicación en el aula) como empíricas (construidas a partir de la THA preliminar, pero considerando los resultados obtenidos de su aplicación en el aula). Sin embargo, en dichos ejemplos no se explicitan los pasos o el proceso que se siguió para construir la THA preliminar (THAp). En otras palabras, no hemos encontrado un modelo que explique paso a paso el proceso para construir una THAp para un concepto matemático específico.

A partir del contexto expuesto, el objetivo de nuestro trabajo es proponer un modelo para un proceso de construcción de una THAp y ejemplificarlo, a través de la elaboración de una THA para sistemas de ecuaciones lineales (SEL) en un curso de Álgebra Lineal dirigido a estudiantes de primer año de universidad. Con ello, queremos sistematizar los pasos que hay detrás de esta construcción y el trabajo que, de acuerdo con Ellis, Weber y Lockwood (2014), se requiere para identificar las diferentes etapas de transición de un estudiante para construir un cierto concepto matemático. De esta manera, pretendemos aportar a quienes estén interesados en el desarrollo y la investigación acerca de las THA. Esto porque consideramos que las THA no solo pueden ser elaboradas por investigadores, sino que, también, por formadores de docentes, docentes o desarrolladores de currículos que tengan las herramientas y formación necesaria para ello.

2 Fundamentos para la construcción de una THAp

La construcción de una THAp involucra el diseño de sus tres componentes, es decir, el

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a10

objetivo de aprendizaje, las tareas de aprendizaje y el proceso de aprendizaje hipotético.

Consideramos que el modelo a seguir para construir una THAp debe incluir los siguientes pasos: (1) elegir el enfoque teórico que orientará la construcción de la THAp, (2) seleccionar el objetivo de aprendizaje e identificar el concepto matemático que se vincula a la THAp, (3) revisar estudios de Educación Matemática relacionados con el concepto matemático de interés para la THAp y (4) examinar material curricular (especialmente libros de texto) que incluya el concepto matemático de interés para la THAp. A continuación, justificamos cada uno de estos pasos a través de lo señalado en diferentes investigaciones sobre THA en el campo de la Educación Matemática.

2.1 Enfoque teórico que orienta la construcción de una THAp

La construcción de una THAp requiere de, al menos, un enfoque teórico que guíe su construcción y que puede ser variado. Por ejemplo, Simon *et al*. (2004) afirman que el diseño de una THA demanda el uso de un enfoque sobre el cambio cognitivo para formular hipótesis meticulosas de cómo los estudiantes pueden presentar sus concepciones previas y transformarlas hasta lograr una concepción de un nuevo concepto matemático. En tanto, Peck (2020) considera como fuente para construir una THA, teorías del aprendizaje que describan el aprendizaje como un proceso cultural en el que los artefactos se reinventan y objetivan.

En la mayoría de los estudios que presentan THA se mencionan variados enfoques teóricos que guían su construcción. Entre estos enfoques teóricos se encuentran: el interaccionalismo jerárquico (SARAMA; CLEMENTS, 2009), el mecanismo de reflexión sobre la relación actividad-efecto (SIMON; TZUR, 2004), la heurística de diseño de los modelos emergentes (GRAVEMEIJER, 1999) y las tres heurísticas de diseño instruccional de la Educación Matemática Realista (FREUDENTHAL, 1983). Dichos enfoques teóricos dan origen a estudios de THA que pueden ser de marcadores o de transición (TZUR, 2019).

Específicamente, hay investigaciones que describen un enfoque teórico tanto para la construcción de las tareas de aprendizaje como para el proceso de aprendizaje hipotético (CLEMENTS; SARAMA, 2004; ARANDA; CALLEJO, 2010). En tanto, otras señalan dos enfoques teóricos para la construcción de estas dos componentes de la THA (CÁRCAMO; FORTUNY; FUENTEALBA, 2021; TRIGUEROS; POSSANI, 2013). Por ejemplo, el trabajo de Aranda y Callejo (2010) describe una THA para construir el concepto de dependencia lineal y usa como enfoque teórico el mecanismo de reflexión sobre la relación actividad-efecto (SIMON; TZUR, 2004).

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a10

Por su parte, el trabajo de Cárcamo, Fortuny y Fuentealba (2021) presenta una THA para los conceptos de conjunto generador y espacio generado, y utiliza dos enfoques teóricos para construir esta. Los autores mencionados consideran el mecanismo de reflexión sobre la relación actividad-efecto (SIMON *et al*., 2004) para el diseño del proceso de aprendizaje hipotético y la heurística de diseño de los modelos emergentes (GRAVEMEIJER, 1999) para la elaboración de las tareas de aprendizaje de su THA.

La selección del enfoque teórico que orientará la construcción de la THAp determinará la naturaleza de las tareas de aprendizaje y el tipo de descripción del proceso de aprendizaje hipotético. Por ejemplo, si se consideran teorías socioculturales para su construcción, aspectos tales como lo social y cultural adquirirán importancia.

Una vez que se ha definido el enfoque teórico que guiará la construcción de la THAp, el siguiente paso en el proceso de construcción de la THA, es seleccionar el objetivo de aprendizaje e identificar el concepto matemático que se vincula con ella.

2.2 El objetivo de aprendizaje y el concepto matemático que se vincula con la THAp

El objetivo de aprendizaje es la primera componente de la THA que se elige o construye porque proporciona una dirección para la THA que se elaborará (SIMON, 1995). El objetivo de aprendizaje se puede tomar de una variedad de fuentes que incluyen el programa del curso, los documentos de normas del *National Council of Teachers of Mathematics* o los marcos curriculares estatales (SLEEP, 2009). En particular, el objetivo de aprendizaje ayuda a pensar y orientar el diseño de las otras dos componentes de la THA, o sea, las tareas de aprendizaje y el proceso de aprendizaje hipotético (SIMON; TZUR, 2004).

El objetivo de aprendizaje juega un papel fundamental en la construcción de cualquier base de conocimiento para la enseñanza. Por esta razón, el objetivo de aprendizaje debe ser lo suficientemente especifico y preciso de tal forma que sugiera los tipos de intervenciones que pueden ayudar a los estudiantes a alcanzarlo (JANSEN; BARTELL; BERK, 2009). La especificidad del objetivo de aprendizaje dependerá de la profundidad que se quiere alcanzar en la construcción del concepto matemático y del tiempo que se dispone para lograrlo.

Por otra parte, en el caso de no tener un programa de curso, primero se determina el concepto matemático de interés para la THAp y, luego, se construye el objetivo de aprendizaje. En caso contrario, primero se definirá el objetivo de aprendizaje.

Una vez precisado el objetivo de aprendizaje de la THAp, y el concepto matemático involucrado en este, se hace necesario articular la naturaleza del vínculo abstracto que se supone

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a10

que se construirá entre la actividad dirigida de los estudiantes hacia sus objetivos y resultados (SIMON *et al*., 2004). Para conseguir esta articulación, consideramos que se requiere conocer la información recopilada de los siguientes pasos de la construcción de la THAp: la revisión de los estudios de Educación matemática del concepto matemático de interés de la THA, así como de la revisión de material curricular (especialmente libros de texto) que aporte a conocer los conceptos matemáticos que se vinculan con el concepto matemático de interés de la THA.

2.3 Revisión de estudios relacionados con el concepto matemático de interés para la THAp

Una recopilación, revisión y síntesis de la literatura de investigación relacionada con el concepto matemático de interés para la THA (CONFREY; MALONEY, 2010; ELLIS *et al*., 2016) es necesaria para construir una THA. En concreto, los estudios previos o la investigación relevante que hace referencia al concepto matemático de la THA es una de las fuentes principales para conocer las concepciones previas de los estudiantes y un proceso de aprendizaje hipotético de cómo se modificarían estas concepciones para construir otras (TZUR, 2019). Por tanto, consideramos que esta revisión de estudios debe informar sobre el concepto matemático de interés de la THAp, al menos, en los siguientes aspectos: las concepciones previas que se requieren para su construcción, los conceptos relacionados con este, los métodos de enseñanza o tareas que favorecen su construcción, las descripciones de cómo el estudiante podría construirlo, las dificultades que podría tener con el concepto matemático y los conceptos o procedimientos involucrados con este.

La información recopilada de esta revisión de estudios de Educación Matemática, servirá como insumo para construir tanto las tareas de aprendizaje como el proceso de aprendizaje hipotético de la THAp.

2.4 Revisión de material curricular que incluye el concepto de interés para la THAp

La revisión de material curricular (especialmente libros de texto), que incluye el concepto matemático del objetivo de aprendizaje de la THAp, contribuye a conocer los conceptos matemáticos subyacentes que permiten construir dicho concepto (MORRIS; HIEBERT; SPITZER, 2009). También, permite saber cómo se relaciona este concepto matemático que se pretende que construya el estudiante con los que ya sabe (concepciones previas) y con los que va a construir próximamente (SIMON *et al*., 2018a).

Por lo tanto, la revisión de material curricular informará sobre las concepciones previas

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a10

que se necesitan para construir el concepto matemático de la THAp y el conocimiento que construirán a partir de este. Además, esta revisión permitirá identificar las formas de representación, los conceptos y los procedimientos relevantes del concepto matemático de interés de la THAp, así como las relaciones entre ellos. Todo esto servirá de insumo para la construcción de la THAp.

En la revisión de los libros de texto de matemática se deben incluir aquellos utilizados por docentes y estudiantes para apoyar el proceso de enseñanza y aprendizaje del concepto matemático vinculado al objetivo de aprendizaje de la THAp. Para seleccionarlos, por ejemplo, se pueden revisar estudios sobre libros de texto asociados al concepto matemático de interés. En el caso, de contenidos de nivel universitario, se puede examinar la bibliografía sugerida en el programa del curso (FABIÁN, 2017).

Para analizar el concepto matemático de interés de la THAp, en el material curricular, se puede realizar un análisis de contenido que consiste en identificar y organizar la diversidad de significados vinculados a un concepto matemático (GÓMEZ, 2006). El análisis de contenido servirá para establecer una visión general del concepto matemático de interés de la THAp.

El conocer los conceptos asociados al concepto matemático de interés de la THAp permite, de acuerdo con Morris, Hiebert y Spitzer (2009), planificar la enseñanza del concepto matemático atendiendo, adecuadamente, a los conceptos que involucra y tiene el potencial de mejorar la enseñanza.

En la Figura 1 se resume el modelo del proceso de construcción de una THAp que proponemos en este trabajo.

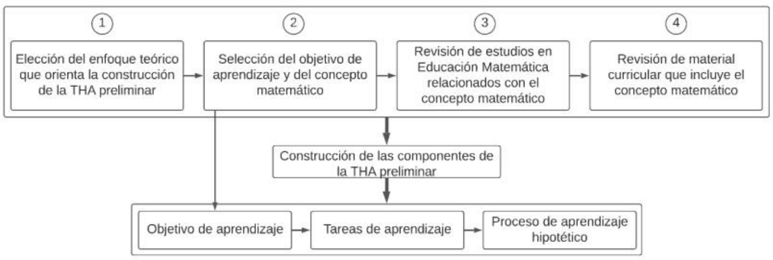

Figura 1 – Modelo del proceso de construcción de una THAp
Fuente: elaborada por los autores

3 Ejemplo del proceso de construcción de una THAp: Sistema de Ecuaciones Lineales (SEL) en Álgebra Lineal

Con base en lo descrito en la sección anterior (fundamentos para la construcción de una THAp), presentamos un ejemplo de cómo se puede construir una THAp. Para ello, detallamos cada uno de los pasos descritos en la Figura 1 acerca de la construcción de una THAp sobre

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a10

SEL para el curso de Álgebra Lineal en el nivel universitario.

3.1 Elección del enfoque teórico que orienta la construcción de la THAp de SEL

Para la construcción de la THAp sobre SEL seleccionamos dos enfoques teóricos: el mecanismo de reflexión sobre la relación actividad-efecto (SIMON *et al*., 2004) y la heurística de diseño de los modelos emergentes (GRAVEMEIJER, 1999). El mecanismo de reflexión sobre la relación actividad-efecto (SIMON *et al*., 2004) lo usamos para la elaboración del proceso de aprendizaje hipotético de la THA. En tanto, la heurística de diseño de los modelos emergentes (GRAVEMEIJER, 1999) lo utilizamos para la elaboración de las tareas de aprendizaje.

3.1.1 El mecanismo de reflexión sobre la relación actividad-efecto

El mecanismo de reflexión sobre la relación actividad-efecto involucra tres términos: actividad, meta y efecto. La actividad se refiere a los procesos mentales que generan una acción (observable o no) de los estudiantes y, generalmente, consiste en una secuencia coordinada de acciones mentales. La persona que observa solo puede inferir la actividad mental sobre la base de las acciones o a través del lenguaje del estudiante. Por otra parte, la meta se refiere al estado en que se espera que los estudiantes inicien una actividad. Esta meta sirve como un estado de referencia anticipado que estructura el foco de atención de los estudiantes, es decir, qué efectos notan, y sirve como base para juzgar hasta qué punto una actividad tuvo éxito (TZUR; SIMON, 2004). Finalmente, el efecto hace referencia a cualquier parte de la experiencia de los estudiantes que identifican como la que prosigue a su actividad, ya sea como imágenes internas de objetos físicos, actividades u otras relaciones de actividad-efecto (TZUR, 2007).

El mecanismo de reflexión sobre la relación actividad-efecto enfatiza en cómo la actividad dirigida por la meta de los estudiantes y sus efectos (que percibieron los estudiantes) sirven como base para la formación de una nueva concepción. Para alcanzar sus objetivos, los estudiantes seleccionan e implementan una actividad (o secuencia de actividades) de las que tienen disponibles. Al llevar a cabo estas actividades, los sistemas mentales de los estudiantes permiten el monitoreo continuo, incluida la distinción de los efectos de la actividad que promueven los objetivos, de los efectos que no los promueven. El sistema mental almacena registros de cada ejecución de la actividad vinculada al efecto de esa ejecución. A su vez, los estudiantes reflexionan (no necesariamente de forma consciente) sobre estos registros de

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a10

experiencia e identifican patrones de relación entre la actividad y sus efectos. Este proceso de reflexión da como resultado la abstracción de los estudiantes de una nueva relación de actividad-efecto, que constituye la base de una concepción que es más avanzada que las concepciones disponibles desde el principio (TZUR; SIMON, 2004).

El mecanismo de reflexión sobre la relación actividad-efecto especifica la interrelación entre la meta del estudiante, la tarea, la actividad, el efecto y la reflexión sobre los registros de las actividades y sus efectos. Este mecanismo ofrece una forma de pensar sobre el aprendizaje de las matemáticas, lo que facilita que el docente pueda generar conjeturas útiles sobre los tipos de experiencias y los tipos de tareas que puedan contribuir a la construcción de nuevas entidades conceptuales en esta disciplina (SIMON *et al*., 2004).

3.1.2 La heurística de diseño de los modelos emergentes

La heurística de diseño de los modelos emergentes ayuda a los estudiantes a construir, por sí mismos, una realidad matemática que no existe para ellos (GRAVEMEIJER, 2007) por medio de un proceso en el que las matemáticas formales pasan a primer plano como una extensión natural de la experiencia de los estudiantes (GRAVEMEIJER, 1999).

Los modelos se definen como formas generadas por los estudiantes de organizar su actividad matemática con herramientas observables y mentales. Las herramientas observables son cosas de su entorno (gráficos, diagramas, definiciones explícitamente definidas, objetos físicos etcétera). En tanto, las herramientas mentales se refieren a las formas en que los estudiantes piensan y razonan en la medida que resuelven problemas (ZANDIEH; RASMUSSEN, 2010). Estos modelos se denominan emergentes porque surgen diversas maneras de crear y usar herramientas con rasgos cada vez más sofisticados de razonamiento (RASMUSSEN; BLUMENFELD, 2007).

Inicialmente, los modelos aparecen como modelos específicos del contexto y se refieren a situaciones concretas que tienen sentido para los estudiantes. En este nivel, el modelo debe permitir estrategias informales que se correspondan con estrategias de solución de la situación que se define en el problema contextual. A partir de entonces, el papel del modelo comienza a transformarse. Luego, mientras los estudiantes reúnen más experiencia con problemas similares, su atención puede cambiar hacia las relaciones y estrategias matemáticas. Como consecuencia, el modelo obtiene un carácter más parecido a un objeto y se vuelve importante, ya que sirve como base para el razonamiento matemático. De esta manera, el modelo comienza a convertirse en una base referencial para el nivel de matemáticas formales. En resumen, un *modelo de* actividad matemática informal se convierte en un *modelo para* un razonamiento matemático más formal (GRAVEMEIJER, 2007).

La progresión del *modelo de* al *modelo para* se define en términos de cuatro niveles de actividad que se denominan: situacional, referencial, general y formal. La actividad situacional implica interpretaciones y soluciones que dependen de la comprensión de cómo actuar en el escenario que tiene sentido para los estudiantes. La actividad referencial implica *modelos de* que hacen referencia a la actividad situacional. La actividad general involucra *modelos para* facilitar un enfoque en las interpretaciones y soluciones independientes de imágenes específicas de la situación. La actividad formal implica razonar con el simbolismo convencional y ya no depende del apoyo de los *modelos para* la actividad matemática (GRAVEMEIJER, 1999).

3.2 Selección del objetivo de aprendizaje y del concepto matemático que se vincula con la THAp de SEL

El objetivo de aprendizaje de la THAp lo elegimos considerando la información del programa del curso de Álgebra Lineal de la universidad donde se pretende aplicar. El objetivo de aprendizaje es que los estudiantes conozcan y resuelvan matricialmente SEL de orden *mxn*. En particular, se espera que los estudiantes distingan un SEL de *mxn* (en sus distintas formas de representación), lo resuelvan matricialmente, determinen su cardinalidad y su conjunto solución. Además, el concepto matemático que se vincula con la THAp es SEL.

3.3 Revisión de estudios relacionados con el concepto matemático de interés de la THAp (SEL)

La revisión de estudios sobre SEL contempló examinar artículos publicados tanto en revistas como en congresos internacionales de Educación Matemática. Para localizar los estudios de interés, utilizamos un conjunto de términos de búsqueda que incluyeron: sistemas de ecuaciones lineales, enseñanza de sistemas de ecuaciones lineales, aprendizaje de sistemas de ecuaciones lineales, sistema de ecuación lineal, dificultades (errores u obstáculos) con los sistemas de ecuaciones lineales, secuencia didáctica sobre SEL, THA sobre SEL, conceptos matemáticos asociados a SEL, concepciones previas para construir SEL.

Nuestra búsqueda sobre estudios de SEL nos llevó a identificar diecinueve artículos. Para organizar la información entregada por estos, utilizamos una hoja de cálculo que constó de los siguientes descriptores: nombre de la revista o el congreso, autores y año de publicación, título del estudio, objetivo de la investigación, participantes, resultados obtenidos, resultados en relación con el concepto de SEL, concepciones previas para construir SEL, conceptos matemáticos asociados con SEL, dificultades (errores u obstáculos) con los SEL, sugerencias didácticas para enseñar SEL y otros (se refiere a otra información que pueda aportar a la enseñanza y el aprendizaje de SEL).

De la revisión de estudios sobre SEL, consideramos como información relevante para construir las tareas de aprendizaje y el proceso de aprendizaje hipotético de la THA, la siguiente: las concepciones previas para construir SEL, las dificultades con los SEL y las sugerencias didácticas para la enseñanza de SEL.

Las concepciones previas que se necesitan para construir SEL, de acuerdo con la revisión de estudios sobre SEL, son: variables y sus diferentes usos (TRIGUEROS; OKTAÇ; MANZANERO, 2007; TRIGUEROS *et al*., 2009), ecuaciones (TRIGUEROS, 2018), conjunto (WARREN; TRIGUEROS; URSINI, 2016), solución de una ecuación (TRIGUEROS; OKTAÇ; MANZANERO, 2007), procedimientos de solución y conjuntos de soluciones (TRIGUEROS, 2018), distinción del proceso de solución de la noción de conjunto de solución (WARREN; TRIGUEROS; URSINI, 2016), SEL 2*x*2, rango de una matriz, matriz ampliada, matriz de coeficientes y matriz escalonada por filas para resolver SEL matricialmente (CÁRCAMO; FORTUNY; FUENTEALBA, 2019).

Los estudios revisados mencionan que los estudiantes tienen dificultades con los SEL vinculadas con: la solución de un SEL (RODRÍGUEZ *et al*., 2019), el conjunto solución de un SEL que tiene infinitas soluciones (ANDREWS-LARSON, 2015), los símbolos y la falta de vocabulario técnico (ARNAWA; NITA, 2019), los símbolos literales como incógnitas, variables o parámetros (ANDREWS-LARSON, 2015), el concepto de variable (POSSANI *et al*., 2010) y la interpretación de la forma escalonada reducida por filas de la matriz ampliada asociada a un SEL (ZANDIEH; ANDREWS-LARSON, 2015).

En relación con las sugerencias didácticas para la enseñanza de SEL, Andrews-Larson (2015) recomienda que, inicialmente, el docente les pregunte a sus estudiantes: ¿cómo resolvemos un SEL? y ¿qué significa ser una solución para un SEL? Posteriormente, las discusiones en el aula podrían enfocarse en cómo piensan los estudiantes los procesos para resolver un SEL, es decir, el docente podría plantear a sus estudiantes interrogantes como las siguientes: ¿cómo afecta la relación entre el número de incógnitas y el número de ecuaciones a la solución de un SEL? o ¿cómo sabemos, cuando manipulamos un SEL o realizamos operaciones fila (o columna), qué información cambia y cuál queda igual? Por otra parte, Oktaç (2018) plantea como sugerencia didáctica usar $0x + 0y = 0$ en lugar de la expresión 0=0 porque

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a10

es más fácil de interpretar en términos del conjunto de todos los pares ordenados que satisfacen la ecuación. De manera similar, propone utilizar $0x + 0y = 8$ en lugar de $0 = 8$, ya que muestra, de manera más clara, que no hay un par ordenado que lo satisfaga.

3.4 Revisión de material curricular que incluye el concepto de interés para la THAp (SEL)

Para profundizar en el concepto matemático de SEL, realizamos un análisis de contenido (GÓMEZ, 2006) en cinco libros de texto de Álgebra Lineal (GROSSMAN, 2008; LAY, 2012; LIPSCHUTZ, 1992; POOLE, 2011; STRANG, 2007) que ofrecen, entre sus capítulos, el de SEL. Seleccionamos estos libros porque son los que se encuentran, con mayor frecuencia, en la bibliografía de los programas del curso de Álgebra Lineal de las universidades del país en donde se pretende aplicar esta THAp.

Para el análisis de contenido contemplamos: la relación del concepto de SEL con otros conceptos matemáticos, la estructura conceptual de SEL, los sistemas de representación de SEL y algunas relaciones entre sistemas de representación de SEL con un proceso de resolución de un SEL *mxn* de forma matricial. No incluimos análisis fenomenológico porque no se muestran aplicaciones de los SEL en el contexto en donde se pretende aplicar esta THA.

La relación del concepto de SEL con otros conceptos matemáticos se refiere a los conceptos matemáticos que los estudiantes ya saben (ver en la Figura 2 los recuadros sin color) y los que deben aprender en el curso de Álgebra Lineal (ver en la Figura 2 los recuadros de color verde). Para esto, en cada uno de los libros de texto de Álgebra Lineal, identificamos cómo estructuraban el concepto de SEL y qué conceptos matemáticos se involucraban con SEL. También, consideramos los estudios mencionados en el apartado, revisión de estudios en Educación Matemática sobre el concepto matemático SEL, que nos informó sobre las concepciones previas que los estudiantes requieren para construir SEL.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a10

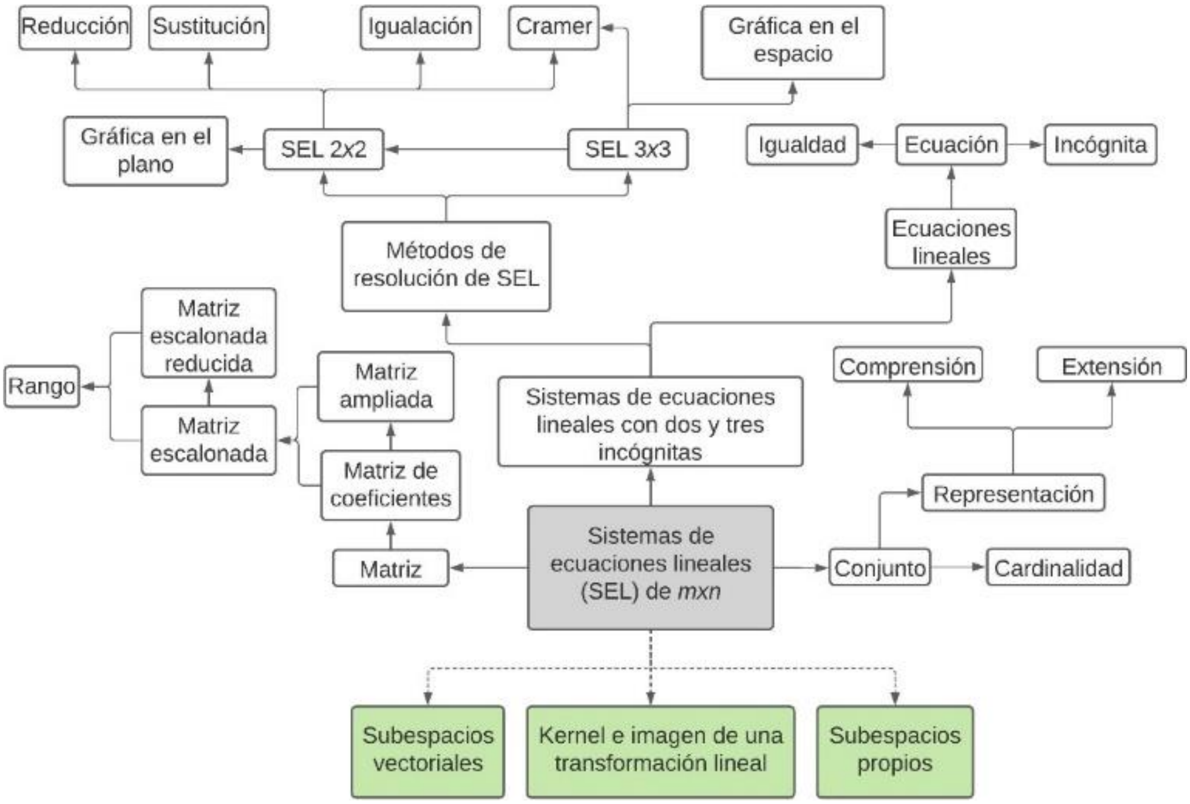

Figura 2 – Relación del concepto de SEL con otros conceptos matemáticos
Fuente: elaborada por los autores

Por otra parte, la estructura conceptual de SEL nos permitió identificar tanto los conceptos como los procedimientos más relevantes de SEL y las relaciones entre ellos (Figura 3). Asimismo, en lo que se refiere a los sistemas de representación de SEL, observamos cinco: pictórico, geométrico, analítico, matricial y conjuntista. Sin embargo, es importante señalar que la representación pictórica se utiliza, generalmente, en SEL de 2*x*2 y 3*x*3. De forma similar, la representación geométrica solo puede ser utilizada para algunos SEL, entre ellos, los de 2*x*2, 2*x*3, 3*x*3 o 3*x*2.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a10

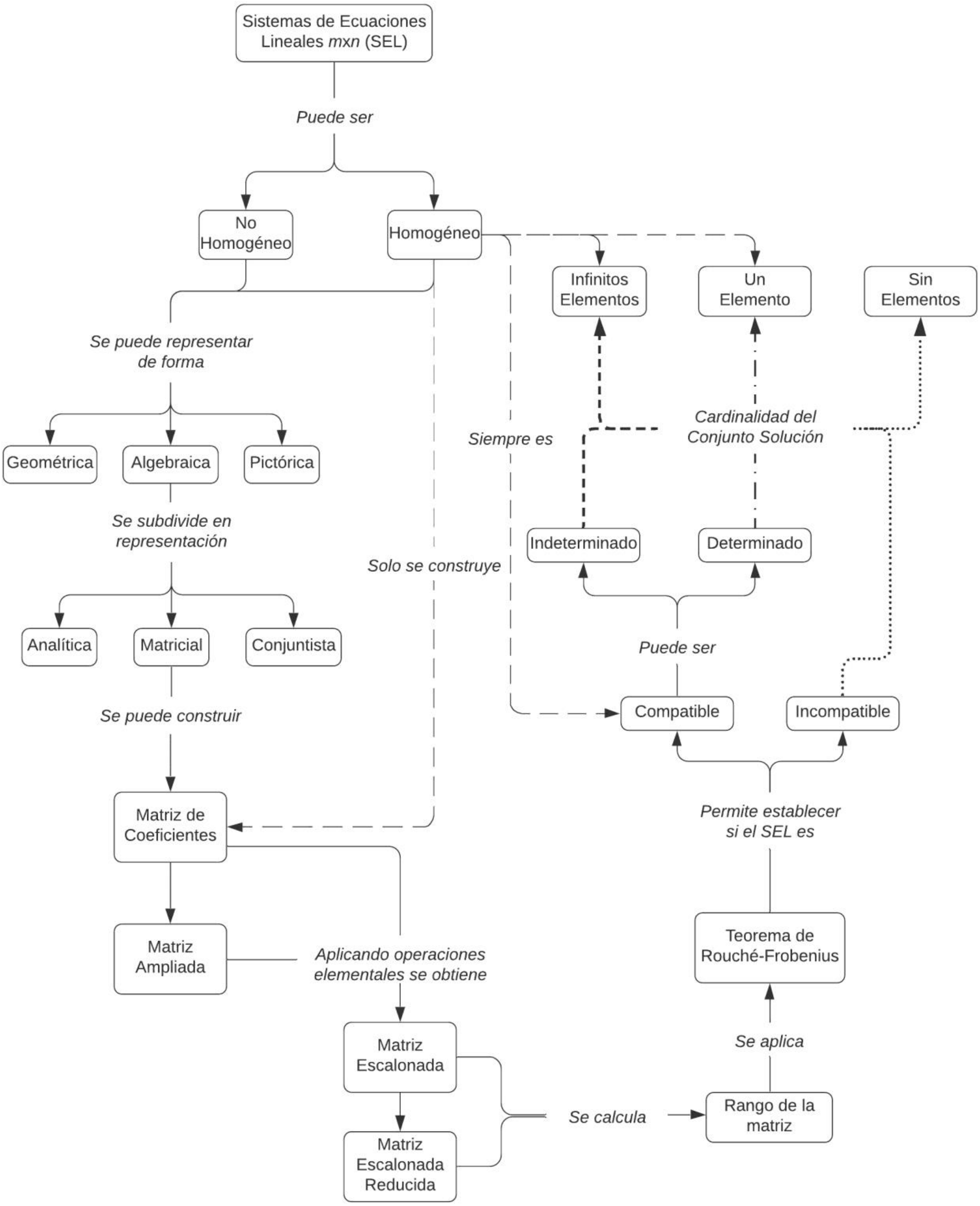

Figura 3 – Estructura conceptual de SEL
Fuente: elaborada por los autores

Analizando los posibles sistemas de representación de un SEL de *mxn*, consideramos que la representación más adecuada es la matricial. A partir de ello, en la Figura 4 se presenta un posible proceso de resolución que los estudiantes podrían seguir y lineamientos de cómo el docente podría enseñar dicho proceso.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a10

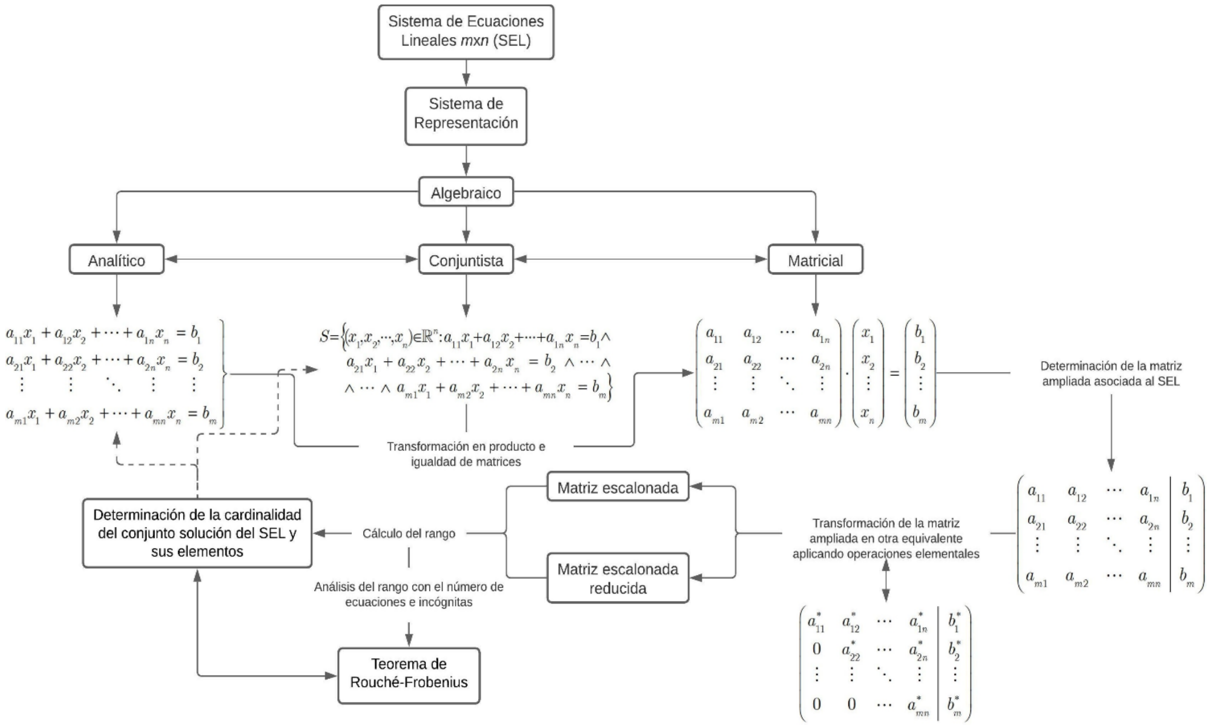

Figura 4 – Relaciones entre sistemas de representación de un SEL de *mxn* y un posible proceso de resolución de forma matricial
Fuente: elaborada por los autores

Una vez realizado el análisis de contenido, examinamos y elegimos la definición de SEL que esperamos que los estudiantes construyan. Para ello, analizamos los capítulos correspondientes a SEL en los cinco libros de texto de Álgebra Lineal, ya seleccionados previamente (GROSSMAN, 2008; LAY, 2012; LIPSCHUTZ, 1992; POOLE, 2011; STRANG, 2007). A partir de nuestro análisis, observamos que solo tres de estos libros presentan una definición explícita de SEL (LAY, 2012; LIPSCHUTZ, 1992; POOLE, 2011), las cuales se observan en el Cuadro 1. En tanto, los otros dos libros (GROSSMAN, 2008; STRANG, 2007) solo mencionan el concepto de SEL y describen métodos para resolver estos.

Definición
"Un ***sistema de ecuaciones lineales*** es un conjunto finito de ecuaciones lineales, cada una con las mismas variables. Una ***solución*** de un sistema de ecuaciones lineales es un vector que simultáneamente es una solución de cada ecuación en el sistema. El ***conjunto solución*** de un sistema de ecuaciones lineales es el conjunto de todas las soluciones del sistema. Al proceso de encontrar el conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales se le conocerá como "resolver el sistema"" (Poole, 2011, p. 65)
"Un **sistema de ecuaciones lineales** (o **sistema lineal**) es una colección de una o más ecuaciones lineales que implican las mismas variables, por ejemplo, $x_1, \ldots, x_n$. Un ejemplo es $\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 1.5x_3 &= 8 \\ x_1 \quad - \quad 4x_3 &= -7 \end{aligned} \qquad (2)$ Una **solución** del sistema es una lista de números $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ que da validez a cada ecuación cuando se utilizan los valores $s_1, \ldots, s_n$ en lugar de $x_1, \ldots, x_n$ respectivamente. Por jemplo, (5, 6.5, 3) es una solución del sistema (2) porque al sustituir estos valores en (2) para x_1, x_2, x_3, respectivamente, las ecuaciones se simplifican a 8=8 y $-7 = -7$. El conjunto de todas las posibles soluciones se llama **conjunto solución** del sistema lineal. Se dice que dos sistemas lineales son **equivalentes** si tienen el mismo conjunto solución. Es decir, cada solución del primer sistema es una solución del segundo sistema, y cada solución del segundo sistema también es una solución del primero." (Lay, 2012, p. 2)

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a10

"Esta sección considera un sistema de m ecuaciones lineales, digamos $L_1, L_2, \ldots, L_m$, con n incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ que puede ponerse de la *forma convencional*

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n = b_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n = b_m$$

donde las a_{ij}, b_i son constantes.

Una *solución* (o *solución particular*) del sistema anterior es un conjunto de valores de las incógnitas, digamos $x_1=k_1$, $x_2=k_2, \ldots, x_n=k_n$ o un n-pla $u=(k_1, k_2, \ldots, k_3)$ de cosntantes, que es solución de cada una de las ecuaciones del sistema. El conjunto de todas las soluciones tales se denomina *conjunto solución* o la *solución general* del sistema." (Lipschutz, 1992, p. 8)

Cuadro 1 – Definición de SEL que presentan los libros de texto
Fuente: elaborado por los autores

De las definiciones de SEL del Cuadro 1, esperamos que los estudiantes construyan la que se presenta en el libro de LIPSCHUTZ (1992) porque es la única que precisa el número de ecuaciones lineales (m) y el número de incógnitas (n). Esto último, indicaría que el número de ecuaciones del SEL no necesariamente deber ser igual al número de incógnitas. Además, presenta la forma convencional de representar un SEL de manera analítica.

3.5 Construcción de las componentes de la THAp de SEL (tareas de aprendizaje y el proceso de aprendizaje hipotético)

Teniendo presente el enfoque teórico que orienta la construcción de la THAp de SEL, el objetivo de aprendizaje de esta última y la información proporcionada sobre el concepto matemático de SEL, tanto de los estudios acerca de su enseñanza y aprendizaje como de los libros de texto, procedemos a pensar en el diseño de las tareas de aprendizaje y el proceso de aprendizaje hipotético de la THA sobre SEL. También, en este momento, tenemos en cuenta: el papel del docente, el papel del estudiante, la metodología docente, las estrategias, los recursos o materiales de aprendizaje y el tiempo disponible para la enseñanza.

El enfoque teórico de la heurística de diseño de los modelos emergentes (GRAVEMEIJER, 1999) nos permitió estructurar la THAp de SEL en cuatros tareas de aprendizaje, cada una vinculada a los niveles de actividad (situacional, referencial, genera y formal). En tanto, a través del mecanismo de reflexión sobre la relación actividad-efecto (SIMON *et al*., 2004) describimos el proceso de aprendizaje hipotético de la THAp de SEL en términos de la actividad, el efecto y la reflexión sobre la actividad-efecto.

A modo de ejemplo, en el Anexo 1, presentamos algunas de las actividades que conforman las tareas de la THAp. En estas se hace énfasis y se pregunta por la solución, el conjunto solución y los tipos de soluciones tanto de una ecuación lineal como de un SEL para

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a10

minimizar las dificultades referentes a estos conceptos matemáticos mencionadas por Rodríguez *et al*. (2019) y Andrews-Larson (2015). Por otro lado, el docente usará la notación sugerida por Oktaç (2018), cada vez que ejemplifique la resolución de un SEL. Por ejemplo, cuando un SEL de 3*x*3 tiene infinitas soluciones no anota 0=0 sino que escribe 0*x*+0*y*+0z =0 y en el caso, de un SEL con solución vacía escribe 0*x*+0*y*+0*z*=22 en vez de 0=22.

En la tarea 1 se espera que los estudiantes activen sus concepciones previas de ecuaciones lineales lo que implica reconocer la incógnita, aplicar un proceso de resolución e identificar la solución. Además, los estudiantes deben activar su concepción previa de conjunto (WARREN *et al*., 2016) para poder representar la solución de una ecuación lineal de forma conjuntista. Después de esta tarea, el docente introducirá la definición de SEL de *mxn* y considerará las preguntas sugeridas por Andrews-Larson (2015): ¿cómo resolvemos un SEL? y ¿qué significa ser una solución para un SEL?

Con la tarea 2, se pretende que los estudiantes activen su concepción previa de SEL de 2*x*2 (CÁRCAMO *et al*., 2019) referente a sus sistemas de representación y los métodos para su resolución. Además, se espera que ellos comuniquen la cardinalidad que puede tener un conjunto solución de un SEL al observar la cardinalidad de conjuntos soluciones de SEL de 2*x*2 y de 3*x*2 que ya hayan resuelto.

A continuación, el docente formalizará los tipos de conjunto solución y la clasificación de los SEL. También, mostrará las posibles formas de representar un SEL, incluyendo la representación matricial. Luego, el docente enseñará un procedimiento para resolver SEL matricialmente (ver Figura 4) a través de ejemplos con SEL de 2*x*2, 3*x*2 y 3*x*3. Aquí, el docente tendrá presente las siguientes preguntas mencionadas por Andrews-Larson (2015): ¿cómo afecta la relación entre el número de incógnitas y el número de ecuaciones a la solución de un SEL?, o ¿cómo sabemos, cuando manipulamos un SEL o realizamos operaciones fila (o columna), qué información se cambia y cuál queda igual?

Con la tarea 3 se pretende que los estudiantes activen sus concepciones previas de rango de una matriz, matriz ampliada, matriz de coeficientes y matriz escalonada por filas con la finalidad de que sean capaces de resolver SEL de *mxm* y *mxn* matricialmente (CÁRCAMO *et al*., 2019). Por otra parte, para minimizar la dificultad que los estudiantes pudieran presentar con la interpretación de la forma escalonada reducida por filas de la matriz ampliada asociada a un SEL (ZANDIEH; ANDREWS-LARSON, 2015), en la tarea 3 se plantea que los estudiantes resuelvan diversos SEL y que conjeturen la relación entre el conjunto solución de un SEL, el número de incógnitas, el rango de la matriz de coeficientes *A* y el rango de la matriz ampliada *A*|*B*. De esta manera, se pretende que los estudiantes construyan, también, el Teorema

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a10

de Rouché-Frobenius. Además, con la tarea 3 se espera que los estudiantes resuelvan matricialmente SEL homogéneos y no homogéneos de forma que identifiquen características de cada uno. Luego, el docente formalizará cuando un SEL es homogéneo y no homogéneo, así como el Teorema de Rouché-Frobenius.

Finalmente, con la tarea 4, se espera que los estudiantes sean capaces de resolver matricialmente SEL de cualquier orden indicando el conjunto solución en cada caso.

Por otra parte, para disminuir las dificultades que puedan tener los estudiantes con los símbolos literales como incógnitas, variables o parámetros (ANDREWS-LARSON, 2015; ARNAWA; NITA, 2019; POSSANI *et al*., 2010), el docente hará énfasis en cada tarea sobre la diferencia entre estos símbolos literales y lo que representan en un SEL.

En el Cuadro 2, presentamos un resumen de la THAp sobre SEL construida en este estudio y las principales intervenciones del docente relacionadas con la estructura conceptual de SEL (Figura 3) durante su aplicación el aula.

<table>
<tr><td colspan="4">Objetivo de aprendizaje
Los estudiantes conocen SEL de orden mxn y los resuelven matricialmente. En particular, distinguen un SEL de mxn (en sus distintas formas de representación), lo resuelven matricialmente, determinan su cardinalidad y su conjunto solución.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Nivel de actividad. Descripción de la tarea de aprendizaje</td><td colspan="3">Descripción del proceso de aprendizaje hipotético</td></tr>
<tr><td>Actividad</td><td>Efecto</td><td>Reflexión</td></tr>
<tr><td>Situacional. Tarea 1. Resuelve las siguientes ecuaciones lineales y responde: (i) ¿Qué tipo o tipos de soluciones puede tener una ecuación lineal? (ii) Para cada ecuación lineal resuelta, determina el conjunto que contiene todas las soluciones de esta.</td><td>Los estudiantes resuelven las ecuaciones lineales haciendo operaciones básicas.</td><td>Los estudiantes obtienen la solución y el conjunto solución de cada ecuación lineal.</td><td>Los estudiantes deducen que la solución de una ecuación lineal se puede representar como solución particular o como conjunto. Además, los estudiantes abstraen la idea de que una ecuación lineal tiene tres tipos de soluciones.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Intervención del docente: Introducir la definición de SEL de mxn.</td></tr>
<tr><td>Referencial. Tarea 2. (I) Determine el conjunto solución de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales (SEL) de 2x2 que están representados de forma geométrica, analítica y conjuntista.
(II) Determine el conjunto solución de los siguientes SEL de 3x2.
(III) ¿Cuál puede ser la cardinalidad del conjunto solución de un SEL de 2x2 y de 3x2? En general, ¿cuál puede ser la cardinalidad del conjunto solución de un SEL? Justifica tu respuesta.</td><td>Los estudiantes resuelven SEL de 2x2 y de 3x2 usando el método de sustitución, igualación, reducción o gráfico.</td><td>Los estudiantes obtienen el conjunto solución de los SEL.</td><td>Los estudiantes deducen que la cardinalidad del conjunto solución de un SEL puede ser cero, uno o infinita.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Intervención del docente: Formalizar los tipos de conjunto solución de un SEL y clasificación de los SEL según estos. Además, mostrar a los estudiantes las posibles formas de representar un SEL, incluyendo la representación matricial. Luego, enseñarles a resolver SEL matricialmente a través de ejemplos con SEL de 2x2, 3x2 y 3x3.</td></tr>
</table>

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a10

General. Tarea 3. (I) Resuelve matricialmente los siguientes SEL de *mxm* y *mxn* indicando: el número de incógnitas, el conjunto solución del SEL y los rangos de la matriz de coeficientes A y la matriz ampliada $A\|B$. (II) De acuerdo con los SEL resueltos, conjetura la relación entre el conjunto solución de un SEL, el número de incógnitas, el rango de la matriz de coeficientes A y el rango de la matriz ampliada $A\|B$. (III) Resuelve matricialmente los siguientes SEL de *mxm* y *mxn* que tienen sus términos independientes nulos. ¿Qué tipo de conjunto solución tienen estos SEL?	Los estudiantes resuelven SEL de *mxm* y *mxn*	Los estudiantes indican del SEL resuelto: el número de incógnitas, los rangos de la matriz de coeficientes A y la matriz ampliada $A\|B$, y el conjunto solución.	Los estudiantes deducen la relación entre el tipo de solución del SEL y el número de incógnitas, el rango de la matriz de coeficientes y el rango de la matriz ampliada. Esta relación corresponde a la que se señala formalmente en el Teorema de Rouché-Frobenius. Además, los estudiantes infieren que los SEL que tienen sus términos independientes nulos son siempre SEL determinados.
Intervención del docente: Formalizar los SEL homogéneo y no homogéneo, así como el Teorema de Rouché-Frobenius.			
Formal. Tarea 4. (I) Encuentre el conjunto solución de los siguientes SEL de *mxn* (4*x*3, 5*x*5, 3*x*4). (II) El siguiente SEL tiene cuatro incógnitas: x, y, z, w; y también dos parámetros: α, β. Determinar los valores de α y β de modo que el sistema tenga: solución única, infinitas soluciones y solución vacía.	Los estudiantes resuelven SEL de *mxm*, *mxn* y con parámetros.	Los estudiantes obtienen el conjunto solución de los SEL de *mxm* y *mxn*. Además, identifican las condiciones de los parámetros para los tres tipos de soluciones del SEL.	Los estudiantes abstraen la idea de que el tipo de solución de un SEL cualquiera se puede determinar relacionando el número de incógnitas del SEL con los rangos de la matriz de coeficientes y de la matriz ampliada.

Cuadro 2 – Resumen de la THAp de SEL y las principales intervenciones del docente
Fuente: elaborado por los autores

4 Conclusiones

En este trabajo, hemos propuesto y ejemplificado un modelo que da cuenta de un proceso detallado para construir una THAp para un curso de matemática. Este tipo de THA es utilizada, generalmente, en un primer ciclo de experimento de enseñanza. Dicho proceso surgió de la exhaustiva revisión de investigaciones sobre THA en el campo de la Educación Matemática y de la necesidad de sistematizar algunos lineamientos para construir una THAp. Por esta razón, este proceso entrega un conjunto de pasos que pueden ser considerados al momento de construir una THAp (Figura 1), los que, en principio, no tienen que seguirse linealmente porque puede que, al seguir la secuencia de pasos, se considere necesario regresar a uno anterior para realizar nuevas observaciones.

Para poner en práctica el modelo sobre el proceso de construcción de una THA, diseñamos una THAp para SEL (Cuadro 2) fundamentada teóricamente. Con ello, constatamos que existe una diversidad de elementos que se deben considerar cuando se construye una THAp

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a10

y lo importante que es identificar el concepto matemático vinculado al objetivo de aprendizaje de la THA. Lo anterior, porque la información de la THAp que se debe buscar en estudios de Educación Matemática y en el material curricular, se encuentra directamente relacionada con dicho concepto matemático.

La información recopilada para diseñar la THAp resulta ser valiosa porque permite conocer detalles sobre la enseñanza y construcción de un concepto matemático como, por ejemplo: las concepciones previas que necesita un estudiante para iniciar la construcción de un nuevo concepto matemático, la relación de concepto matemático con otros conceptos, las posibles dificultades de los estudiantes con el concepto matemático y las sugerencias didácticas para enseñar el concepto matemático. Toda esta información, sin duda que puede aportar a la formación de los futuros docentes de matemática, en aspectos tales como el conocimiento del contenido y el conocimiento pedagógico del contenido (MISHRA; KOEHLER, 2008).

La THAp sobre SEL sugiere un conjunto de tareas de aprendizaje que se pueden adaptar a diferentes contextos y un proceso de aprendizaje hipotético. Este último, da la posibilidad de que el docente se pueda imaginar o prever un posible camino que seguirá el estudiante para la construcción de SEL y, por ende, pueda anticiparse a las posibles dificultades que pudieran manifestar los estudiantes.

La mayoría de las THA se han fundamentado en enfoques cognitivos que tienen como principal limitación que se centran en la mente del estudiante de manera individual. Por esta razón, creemos que integrar otros enfoques teóricos diversificarían las THA y también, en el futuro, el desarrollo de THA colectivas. Por ejemplo, si integramos un enfoque cognitivo con uno sociocultural, la THA a construir consideraría tanto las particularidades cognitivas del estudiante como su entorno sociocultural, histórico y político (PLANAS, 2010).

Esperamos que este modelo sobre el proceso de construcción de una THAp sea útil para quienes están interesados en aportar y aplicar THA. Asimismo, confiamos en que este trabajo motive el desarrollo y la aplicación de THA en el nivel de secundaria porque, de acuerdo con Confrey (2019), existe un reducido número de estudios sobre THA en tópicos de este nivel.

Agradecimientos

A la ANID que financió parcialmente este trabajo por medio del proyecto Fondecyt N°11190284.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a10

Referencias

ANDREWS-LARSON, C. Roots of linear algebra: An historical exploration of linear systems. **Primus**, Philadelphia, v. 25, n. 6, p. 507-528, abr. 2015.

ANDREWS-LARSON, C.; WAWRO, M.; ZANDIEH, M. A Hypothetical Learning Trajectory for Conceptualizing Matrices as Linear Transformations. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, London, v. 48, n. 6, p. 809-829, feb. 2017.

ARANDA, C.; CALLEJO, M. L. Construcción del concepto de dependencia lineal en un contexto de geometría dinámica: Un estudio de casos. **RELIME**, Ciudad de México, v. 13, n. 2, p. 129-158, jul. 2010.

ARNAWA, I. M.; NITA, S. Errors and misconceptions in learning elementary linear algebra. **Journal of Physics**: Conference Series, London, v. 1321, n. 2, p. 1-6, oct. 2019.

CÁRCAMO, A.; FORTUNY, J.M.; FUENTEALBA, C. Identifying a learning progression for the resolution of a system of linear equations. *In*: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 43., 2019, Pretoria. **Proceedings…** Pretoria: PME, 2019. v.4. p. 19-23. Notes: GRAVEN M.; VENKAT, H.; ESSIEN, A.; Vale, P. (ed.),

CÁRCAMO, A.; FORTUNY, J.M.; FUENTEALBA, C. Las trayectorias hipotéticas de aprendizaje: Un ejemplo en un curso de Álgebra Lineal. Enseñanza de las Ciencias, Barcelona, v. 39, n. 1, p. 45-64, mar. 2021.

CLEMENTS, D. H.; SARAMA, J. Learning trajectories in mathematics education. **Mathematical Thinking and Learning**, London, v. 6, n. 2, p. 81-89, abr. 2004.

CLEMENTS, D. H.; SARAMA, J. **Learning and teaching early math:** The learning trajectories approach. Nueva York: Routledge. 2014.

CONFREY, J. A Synthesis of Research on Learning Trajectories/Progressions in Mathematics. **Future of Education and Skills 2030:** Curriculum analysis. Paris: OECD Directorate for Education and Skills, Education Policy Committee, 2019.

CONFREY, J.; MALONEY, A. The construction, refinement, and early validation of the equipartitioning learning trajectory. *In*: INTERNATIONAL CONFERENCE OF THE LEARNING SCIENCES, 9., 2010, Illinois. **Proceedings…** Chicago: ISLS, 2010, v. 1. p. 968-975. Notes: GÓMEZ, K.; LYONS, L.; RADINSKY, J. (ed.).

CONFREY, J.; MALONEY, A. P.; CORLEY, A. K. Learning trajectories: A framework for connecting standards with curriculum. **ZDM**, Berlín, v. 46, n. 5, p. 719-733, jun. 2014.

CONFREY, J.; MCGOWAN, W.; SHAH, M.; BELCHER, M.; HENNESSEY, M.; MALONEY, A. Using digital diagnostic classroom assessments based on learning trajectories to drive instruction. En: SIEMON, D.; BARKATSAS, T.; SEAH, R. (ed). **Researching and Using Progressions (Trajectories) in Mathematics Education**. Leiden: Brill Sense Publishers. 2019. p. 75-100.

ELLIS, A.B.; WEBER, E.; LOCKWOOD, E. The case for learning trajectories research. *In:* JOINT MEETING OF PME, 38 AND PME-NA, 36, 2014, Vancouver. **Proceedings…** v. 3. p. 1-8. Notes: OESTERLE, S; LILJEDAHL, P.; NICOL, C.; ALLAN, D. (ed.).

ELLIS, A. B.; OZGUR, Z.; KULOW, T.; DOGAN, M. F.; AMIDON, J. An exponential growth learning trajectory: Students' emerging understanding of exponential growth through covariation. **Mathematical Thinking and Learning**, London, v. 18, n. 3, p. 151-181, jun. 2016.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a10

FABIÁN, V. **Los conceptos valor propio y vector propio en un texto de álgebra lineal**: una mirada desde la teoría APOE. 2011. 185f. Tesis (Maestría en Ciencias Especialidad em Matemática Educativa). Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, Ciudad de México, 2017.

FREUDENTHAL, H. **Didactical phenomenology of mathematical structures**. Dordrecht: Reidel, 1983.

GÓMEZ, P. Análisis didáctico en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *In:* SIMPOSIO DE LA SOCIEDAD ESPAÑOLA DE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 10., 2006, Huesca. **Anales…** Huesca: SEIEM, 2006. p. 15-35. Disponible en: https://www.seiem.es/docs/comunicaciones/GruposXSimposio.pdf. Acceso en: 29 abr. 2023.

GRAVEMEIJER, K. How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. **Mathematical Thinking and Learning**, London, v. 1, n. 2, p. 155-177, nov. 1999.

GRAVEMEIJER, K. Emergent modelling as a precursor to mathematical modelling. En: BLUM, W.; GALBRAITH, P.; HENN, H.; NISS, M. (ed.). **Modelling and Applications in Mathematics Education**. Nueva York: Springer, 2007. p. 137-144.

GROSSMAN, S. I. Álgebra Lineal. Ciudad de México: McGraw-Hill, 2008.

LAY, D. **Álgebra Lineal Elemental y sus Aplicaciones**. Ciudad de México: Pearson, 2012.

LIPSCHUTZ, S. **Álgebra Lineal**. Madrid: McGraw-Hill, 1992.

JANSEN, A.; BARTELL, T.; BERK, D. The role of learning goals in building a knowledge base for elementary mathematics teacher education. **The Elementary School Journal**, Chicago, v. 109, n. 5, p. 525-536, may. 2009.

MIRA, M. **Desarrollo de la comprensión del concepto de Límite de una función. Características de trayectorias hipotéticas de aprendizaje**. 2016. 345f. Tesis (Doctorado em Didáctica de la Matemática). Departamento de Innovación y Formación Didáctica, Universidad de Alicante, Alicante, 2016.

MISHRA, P.; KOEHLER, M. **Introducing technological pedagogical content knowledge**. *In:* ANNUAL MEETING OF THE AMERICAN EDUCATIONAL RESEARCH ASSOCIATION, 72, 2008, Nueva York. **Anales…** Nueva York: AERA, 2008. p. 1-16. Disponible en: http://www.matt-koehler.com/publications/Mishra_Koehler_AERA_2008.pdf . Acceso en: 29 abr. 2023.

MORRIS, A. K.; Hiebert, J.; Spitzer, S. M. Mathematical knowledge for teaching in planning and evaluating instruction: What can preservice teachers learn? **Journal for Research in Mathematics Education**, Virginia, v. 40, n. 5, v. 491-529, nov. 2009.

OKTAÇ, A. Conceptions about system of linear equations and solution. En: STEWART, S.; ANDREWS-LARSON, C.; BERMAN, A.; ZANDIEH, M. (ed.). **Challenges and strategies in teaching linear álgebra**. Berlin: Springer, 2018. p. 71-101.

PECK, F. A. Beyond Rise Over Run: A Learning Trajectory for Slope. **Journal for Research in Mathematics Education**, Virginia, v. 51, n. 4, p. 433-467, jul. 2020.

PLANAS, N. Las teorías socioculturales en la investigación en educación matemática: reflexiones y datos bibliométricos. *In*: SIMPOSIO DE LA SOCIEDAD ESPAÑOLA DE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 14., 2010, Lleida. **Anales…** Lleida: SEIEM. 2010. p. 163-195. Disponible en: https://www.seiem.es/docs/actas/14/Actas14SEIEM.pdf. Acceso en: 29 abr. 2023.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a10

POOLE, D. **Álgebra Lineal una introducción moderna**. Ciudad de México: Cengage Learning, 2011.

POSSANI, E.; TRIGUEROS, M.; PRECIADO, J. G.; LOZANO, M. D. Use of models in the teaching of linear álgebra. **Linear Algebra and its Applications**, Netherlands, v. 432, n. 8, p. 2125-2140, abr. 2010.

RASMUSSEN, C.; BLUMENFELD, H. Reinventing solutions to systems of linear differential equations: A case of emergent models involving analytic expressions. **The Journal of Mathematical Behavior**, New Jersey, v. 26, n. 3, p. 195-210, nov. 2007.

RODRÍGUEZ M. A.; MENA A.; MENA J.J.; VÁSQUEZ P.; DEL VALLE M.E. Construcción cognitiva del conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas. **Enseñanza de las Ciencias**, Barcelona, v. 37, n. 1, p. 71-92, mar. 2019.

SARAMA, J.; CLEMENTS, D. H. **Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children**. Nueva York: Routledge, 2009.

SIEMON, D.; HORNE, M.; CLEMENTS, D.; CONFREY, J.; MALONEY, A.; SARAMA, J.; WATSON, A. Researching and using learning progressions (trajectories) in mathematics education. *In*: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 41., 2017, Singapur. **Proceedings…** Singapur: PME, 2017. v. 1, p. 109-136. Notes: PKAUR, B.; HO, W. K.; TOH, T. L.; CHOY, B. H. (ed.).

SIMON, M. A. Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. **Journal for Research in Mathematics Education**, Virginia, v. 26, n. 2, p. 114-145, mar. 1995.

SIMON, M. Hypothetical learning trajectories in mathematics education. En: LERMAN, S. (ed.). **Encyclopedia of Mathematics Education**. Dordrecht: Springer, 2014. p. 272-275.

SIMON, M. A.; KARA, M.; PLACA, N.; AVITZUR, A. Towards an integrated theory of mathematics conceptual learning and instructional design: The Learning Through Activity theoretical framework. **The Journal of Mathematical Behavior**, London, v. 52, p. 95-112, dic. 2018a.

SIMON, M. A.; PLACA, N.; KARA, M.; AVITZUR, A. Empirically-based hypothetical learning trajectories for fraction concepts: Products of the Learning Through Activity research program. **The Journal of Mathematical Behavior**, London, v. 52, p. 188-200, dic. 2018b.

SIMON, M. A.; TZUR, R. Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: An elaboration of the hypothetical learning trajectory. **Mathematical Thinking and Learning**, London, v. 6, n. 2, p. 91-104, abr. 2004.

SIMON, M. A.; TZUR, R.; HEINZ, K.; KINZEL, M. Explicating a mechanism for conceptual learning: Elaborating the construct of reflective abstraction. **Journal for Research in Mathematics Education**, Virginia, v. 35, n. 5, p. 305-329, nov. 2004.

SLEEP, L. **Teaching to the Mathematical Point: Knowing and Using Mathematics in Teaching**. 2009. 268f. Tesis (Doctor of Education' Philosophy) - Universidad de Michigan, Ann Arbor, 2009.

STRANG, G. **Álgebra Lineal y sus Aplicaciones**. Ciudad de México: Thompson, 2007.

TRIGUEROS, M. Learning linear algebra using models and conceptual activities. En: STEWART, S.; ANDREWS-LARSON, C.; BERMAN, A.; ZANDIEH, M. (ed.). **Challenges and strategies in teaching linear álgebra**. Berlin: Springer, 2018. p. 29-50.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a10

TRIGUEROS, M.; OKTAÇ, A.; MANZANERO, L. Understanding of Systems of Equations in Linear Algebra. *In*: CONGRESS OF THE EUROPEAN SOCIETY FOR RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION, 5. 2007, Lárnaca. **Proceedings…** Lárnaca: Universit of Cyprus, 2007. p. 2359-2368. Notes: PITTA-PANTAZI, D.; Philippou, G. (ed.).

TRIGUEROS, M.; POSSANI, E.; LOZANO, M. D.; SANDOVAL, I. Learning systems of linear equations through modelling. *In*: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 33., 2009, Thessaloniki. **Proceedings…** Thessaloniki: PME, 2009. v. 5. p. 225-232. Notes: TZEKAKI, M.; KALDRIMIDOU, M.; SAKONIDIS, H. (ed.).

TRIGUEROS, M.; POSSANI, E. Using an economics model for teaching linear algebra. **Linear Algebra and Its Applications**, Netherlands, v. 438, n. 4, p. 1779–1792, feb. 2013.

TZUR, R. Fine grain assessment of students' mathematical understanding: participatory and anticipatory stages in learning a new mathematical conception. **Educational Studies in Mathematics**, Netherlands, v. 66, n. 3, p. 273-291, ene. 2007.

TZUR, R. HLT: A Lens on conceptual transition between mathematical "markers". En: SIEMON, D.; BARKATSAS, T.; SEAH, R. (ed.). **Researching and Using Progressions (Trajectories) in Mathematics Education**. Leiden: Brill Sense Publishers, 2019. p. 56-74.

TZUR, R.; SIMON, M. Distinguishing two stages of mathematics conceptual learning. **International Journal of Science and Mathematics Education**, Netherlands, v. 2, n. 2, p. 287-304, jun. 2004.

WARREN, E.; TRIGUEROS, M.; URSINI, S. Research on the learning and teaching of algebra. En: GUTIÉRREZ, A.; LEDER, G.; BOERO, P. (ed.). **The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education:** The Journey Continues. Rotterdam: Sense Publishers, 2016. p. 73-108.

ZANDIEH, M.; ANDREWS-LARSON, C. Solving Linear Systems: Augmented Matrices and the Reconstruction of x. *In*: ANNUAL CONFERENCE ON RESEARCH IN UNDERGRADUATE MATHEMATICS EDUCATION, 18., 2015, Pittsburgh. **Proceedings…** Pittsburgh: RUME, 2015. p. 1072-1078. Notes: FUKAWA-CONNELLY, T.; INFANTE, N.; KEENE, K.; ZANDIEH, M. (ed.).

ZANDIEH, M.; RASMUSSEN, C. Defining as a mathematical activity: A framework for characterizing progress from informal to more formal ways of reasoning. **The Journal of Mathematical Behavior**, London, v. 29, n. 2, p. 57-75, jun. 2010.

Submetido em 12 de Outubro de 2022.
Aprovado em 07 de Março de 2023.