CC BY

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v33n63a04

Aportes de la Geometría Dinámica al estudio de la noción de función a partir de un problema geométrico: un análisis praxeológico

Contributions of Dynamic Geometry to the notion of function study starting from a geometrical problem: a praxeological analysis

Viviana Angélica Costa*

ORCID iD 0000-0003-1782-5378

Laura Sombra del Río**

ORCID iD 0000-0002-7800-631X

Resumen

Este trabajo tiene como eje la descripción y análisis *praxeológico* de un problema planteado en el marco geométrico que permite iniciar el estudio de la noción de *función*. Para ello, se realiza un análisis previo de los *saberes* y *saberes-hacer* que pueden ponerse en juego al estudiar ese problema. Luego, el mismo problema es adaptado y presentado en numerosos talleres y cursos de formación docente, con la particularidad que se incorpora en el proceso de resolución, la Geometría Dinámica. Posteriormente, se realiza un nuevo análisis en base a esas experiencias. La investigación es descriptiva y se enmarca en la Teoría Antropológica de lo Didáctico. Se concluye que el *saber-hacer* asociado a la Geometría Dinámica, en los procesos de estudio, permite incorporar las nociones constitutivas del concepto de función con sentido, partiendo de un *equipamiento praxeológico* mínimo.

Palabras clave: Noción de función. Geometría Dinámica. Teoría Antropológica de lo Didáctico. Praxeología. GeoGebra.

Abstract

The objective of this research is to describe and perform a *praxeological* analysis of a geometrical problem that allows initiating the study of the *function* concept. We make a previous analysis of the knowledge and knowhow that can be used while studying this problem. Then, the problem is presented in numerous courses for Mathematics teachers, incorporating a Dynamic Geometry software. A subsequent analysis of praxeologies is performed. The research is descriptive and the theoretical framework adopted is the Anthropological Theory of the Didactic. The conclusion is that integrating Dynamic Geometry into the studying process allows learning the function concept starting from minimal praxeological equipment.

* Dra. en Enseñanza de las Ciencias, UNICEN, Argentina. Docente-Investigador UIDET-IMApEC, Facultad de Ingeniería UNLP, La Plata, Buenos Aires y República Argentina. Investigador del NIECyT, Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional del Centro, Tandil, Argentina. Dirección postal: Calle 49 y 115, primer piso, La Plata, Provincia de Buenos Aires, República Argentina, C.P: 1900. E-mail: vacosta@ing.unlp.edu.ar.

** Magíster en Tecnología Informática Aplicada en Educación, UNLP, Argentina. Docente-Investigadora UIDET-IMApEC, Facultad de Ingeniería UNLP, La Plata, Buenos Aires y República Argentina. Calle 49 y 115, primer piso, La Plata, Provincia de Buenos Aires, República Argentina, C.P: 1900. E-mail: laura.delrio@ing.unlp.edu.ar.

CC BY
ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v33n63a04

Keywords: Function. Dynamic Geometry. Anthropological Theory of the Didactic. Praxeology. GeoGebra.

1 Introducción

El concepto de *función* es esencial en la Matemática y su importancia radica en la infinidad de problemas que pueden ser *modelizados* a través suyo, tanto en el interior de la Matemática como en otras disciplinas, en general vinculados a los procesos dinámicos. Permite representar y estudiar la dependencia entre magnitudes, predecir el comportamiento de la variable dependiente frente a la modificación de otra/s variable/s (independiente/s), hallar condiciones para obtener valores óptimos, entre otras aplicaciones. Se entiende por *modelización* matemática al proceso que consiste en "construir un modelo (matemático) de la realidad que queremos estudiar, trabajar con dicho modelo e interpretar los resultados obtenidos" (CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 1997, p. 51).

Por la importancia que tiene tal concepto, es primordial que sea enseñado de manera que se promueva su adecuada comprensión, permitiendo al estudiante resolver problemas a partir de su uso.

Numerosas investigaciones observan y atienden la problemática de la enseñanza de las funciones (RODRIGUEZ FERNANDEZ; GODINO; RUIZ HIGUERAS, 1995; HANFLING, 2000; BORSANI et al., 2013; BURGOA ETXABURU, 2014; FERRAGINA; LUPINACCI, 2015), asumiendo una postura crítica frente a algunas cuestiones asociadas al enfoque tradicional de enseñanza, que se caracteriza por realizar una presentación axiomática del conocimiento matemático.

De acuerdo con Brousseau (1986, p. 36), esta metodología facilita el proceso de instrucción, en tanto permite introducir los conceptos, paulatina y ordenadamente, pero "elimina completamente la historia de esos conocimientos, es decir la sucesión de dificultades y problemas que han provocado la aparición de los conceptos fundamentales".

En un sentido similar, Chevallard (2013, p. 164) cuestiona lo que denomina la *monumentalización* de los saberes, refiriéndose, con este término, a la presentación de cada contenido matemático como una obra que debe ser visitada, "como un monumento con valor por sí mismo, que los estudiantes deben admirar y disfrutar, aunque no sepan casi nada sobre sus razones de ser, ni actuales ni del pasado". Una aproximación a los objetos matemáticos que tenga en cuenta la génesis histórica de los mismos es necesaria para que estos objetos cobren sentido para los estudiantes.

CC BY

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v33n63a04

En relación a la enseñanza tradicional o *monumentalista* de la noción de función, Rodriguez Fernandez, Godino y Ruiz Higueras (1995) critican algunos aspectos característicos:

- El trabajo algorítmico de cálculo que contribuye al desvanecimiento del problema como motor de generación de conocimientos, conduciendo a una pérdida del sentido epistemológico.
- El trabajo acerca de las gráficas de funciones como punto de llegada: la gráfica se concibe como un fin en sí mismo y no como una herramienta del trabajo matemático del alumno.
- El uso de las gráficas de funciones únicamente como apoyo intuitivo del discurso del profesor, como una herramienta ostensiva que sirve para salvar la distancia entre el rigor y la intuición, ya que los saberes que se manejan están fuertemente descontextualizados y no adquieren ningún tipo de significación.

En la historia del concepto de función se encuentra que, en sus primeras definiciones:

> […] los conceptos centrales son el cambio y la dependencia, estando presente la correspondencia de un modo implícito. Cuanto más se avanza con las definiciones modernas, hay menos indicio de cambio y dependencia, para poner en primer plano a la función como una correspondencia pura entre dos conjuntos (FERRAGINA; LUPINACCI, 2015, p. 6).

Si se entiende a las funciones como herramientas aptas para modelizar fenómenos de cambio, se propone una enseñanza a partir de sus nociones constitutivas: “la variación, la dependencia, la correspondencia, la simbolización y expresión de la dependencia y las distintas formas de representación, sea ella algebraica, gráfica y otra” (HANFLING, 2000, p. 11).

Por otro lado, existen numerosas investigaciones que analizan el estudio de la noción de función cuando, además, se adiciona a la actividad matemática el uso de un *software* de g*eometría dinámica*, por ejemplo GeoGebra. La expresión *Geometría Dinámica* se refiere a construcciones de objetos matemáticos empleando herramientas digitales que permiten el arrastre y la deformación, conservando invariantes ciertas propiedades geométricas que se les ha asignado en el proceso de construcción (ARCAVI; HADAS, 2000; ACOSTA GEMPELER, 2005; HOHENWARTER, 2014).

Algunas de esas investigaciones consideran que la vinculación dinámica que permite este tipo de *software* entre los cambios de estado de un modelo geométrico dinámico y el movimiento de un punto de la gráfica de una función “es una oportunidad para recuperar la noción de función como modelo para vincular el cambio y/o la variación entre las medidas de

CC BY

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v33n63a04

dos magnitudes” (BORSANI et al., 2013, p. 6904).

Por su parte, Ferragina y Lupinacci (2015, p. 6) destacan los beneficios del uso de la Geometría Dinámica para el estudio del concepto de función, mencionando que:

> […] un software de características dinámicas, brinda la posibilidad de interactuar con los objetos construidos y simbolizados en tiempo real. La manipulación de los mismos a partir del arrastre y la utilización de otras herramientas y comandos, permitiría dar ese dinamismo a las funciones como una variación entre magnitudes.

Por otro lado, Acosta Gempeler (2005) destaca el uso de la Geometría Dinámica para el estudio de la Matemática, mencionando, entre otras cosas, que ello genera nuevos campos de problemas, nuevas técnicas y tareas, en la actividad matemática, y su necesidad de identificarlas por la comunidad de investigación en didáctica.

Siguiendo estas líneas de investigación, el presente trabajo, de tipo descriptivo, enmarcado en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), pretende ser un aporte al conocimiento de cuáles *saberes* y *saberes-hacer* se ponen en juego al abordar un problema geométrico que puede dar inicio al estudio del concepto de función y, en particular, cuando interviene la Geometría Dinámica en este proceso.

El objetivo es describir y analizar las praxeologías que se podrían poner en juego y las que efectivamente se desarrollan en un contexto particular, para el estudio de la noción de función a partir de un problema geométrico. Las preguntas de investigación son: *¿Cuáles praxeologías se podrían poner en juego, y cuáles efectivamente se ponen, cuando se estudia la noción de función a partir de un problema geométrico? ¿Y cuáles cuando se incorpora el saber asociado a la Geometría Dinámica?*

El trabajo se organiza del siguiente modo: en primer lugar, se presentan los aspectos del marco teórico necesarios para el análisis a realizar; luego, se describe la metodología a emplear; posteriormente, se realiza la descripción y análisis praxeológico, previo y posterior, de su implementación de un problema geométrico que posibilita el estudio de la noción de función y los aportes de la Geometría Dinámica en este contexto. Finalmente, se presentan las conclusiones.

2 Marco teórico

La investigación se enmarca en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) que propone abandonar la pedagogía tradicional o monumentalista, en pos de adoptar la denominada *Pedagogía de la Investigación y del Cuestionamiento del Mundo* (CHEVALLARD, 2013; OTERO, 2013).

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v33n63a04

Como se mencionó anteriormente, para Chevallard, la Matemática no es un conjunto de obras monumentales que los alumnos deben conocer y admirar, desconociendo su razón de ser. De acuerdo con este autor, todo *saber matemático* es una respuesta a una pregunta, y es construido a partir de situaciones o problemas. Se trata de obras o creaciones humanas, que constituyen respuestas a preguntas: "yo llamo obra, a toda producción humana cuyo objeto es aportar una respuesta a una o varias preguntas teóricas o prácticas, que son las razones de ser de la obra" (CHEVALLARD, 1997, p. 26). Cuando se *encuentra* una obra, se debería saber, para comprenderla mejor, a cuál pregunta ella responde.

El propósito de la educación escolar es, justamente, iniciar a los jóvenes en ciertas obras de la sociedad. La instauración de una relación monumental con las obras, conlleva ciertos riesgos específicos, como por ejemplo: el olvido casi inmediato por parte de los estudiantes de aquello que han estudiado, posteriormente a la aprobación de los exámenes correspondientes; la imposibilidad de poner en juego estos saberes fuera del ámbito escolar, por desconocer su vínculo con el mundo; y la incapacidad por parte de los ciudadanos de enfrentar problemas nuevos, cuyo mecanismo de resolución se desconoce con antelación (CHEVALLARD, 2013).

Una noción central en el marco de esta teoría es la de *praxeología*. Se trata de "un modelo para describir cualquier actividad humana regularmente realizada" (OTERO, 2013, p. 16), distinguiendo dos niveles: el de la *praxis*, que da cuenta del *saber-hacer* (tareas, problemas y técnicas) y el del *logos* vinculado al *saber*, en el cual se incluyen la *tecnología* y la *teoría*, en el que se encuentran los discursos que describen, explican y justifican las tareas y técnicas (CHEVALLARD, 1999). El *logos* es pues el bloque que justifica e interpreta la *praxis*.

Estudiar matemáticas consiste, en el marco de la TAD, en construir o reconstruir determinados elementos de una *praxeología matemática* para dar respuesta a un determinado tipo de tarea problemática. El término *estudio* se considera, en esta teoría, en un sentido amplio que comprende las nociones de enseñanza y de aprendizaje utilizadas en la cultura pedagógica y que se refiere a todo aquello que se hace en una determinada institución para aportar respuestas a los problemas que se plantean (CHEVALLARD, 1999).

Otro concepto relevante en este marco teórico es el de *equipamiento praxeológico,* entendido como el conjunto de conocimientos, las capacidades o competencias que posee una persona, en otras palabras, "la amalgama de *praxeologías* y de elementos *praxeológicos* que la persona tiene a su disposición, es decir que puede activar en un momento dado y bajo ciertas condiciones y restricciones dadas" (BOSCH; GASCÓN, 2009, p. 93).

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v33n63a04

3 Marco institucional

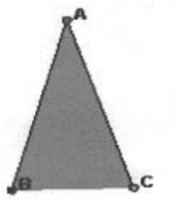
La investigación que se reporta tiene lugar en la Provincia de Buenos Aires de la República Argentina. En este distrito educativo, el Diseño Curricular adopta el enfoque de enseñanza de la Escuela Francesa. En el caso del estudio de la noción de función, se propone su comienzo desde la Escuela Secundaria. En los cursos de primer año (alumnos de 12 años) se inicia con la noción de variables, la expresión algebraica de la dependencia entre ellas y la organización de la información a través del lenguaje de las funciones (por ejemplo, mediante tablas o gráficos) (DGCYE, 2006). En el Diseño de tercer año (DGCYE, 2008) (jóvenes de 14 años), se proponen las siguientes prácticas:

- *Estimar, anticipar y generalizar soluciones de problemas relacionadas con funciones.*
- *Representar, mediante tablas, gráficos o fórmulas, regularidades o relaciones observadas entre valores de diferentes variables.*
- *Interpretar gráficos y fórmulas que modelicen situaciones diversas.*
- *Analizar representaciones de funciones para realizar estimaciones, anticipaciones y generalizaciones.*
- *Representar funciones usando, cuando sea posible, software como Graphmatica, Winplot, Derive o GeoGebra.*
- *Contrastar los resultados obtenidos en el marco de los modelos matemáticos con las situaciones que representen evaluando la pertinencia de los mismos.*

Para esta investigación, se selecciona del Diseño Curricular de segundo año para la Escuela Secundaria de la Provincia de Buenos (DGCYE, 2007) el problema que presenta en la Figura 1. En el mismo documento, más adelante, se indica que resulta interesante estudiar la noción de dominio, a partir de la existencia de medidas de la base que no son posibles, y la búsqueda del máximo.

Dado un triángulo isósceles cuyos lados congruentes miden 5 cm:

- *analizar la variación del área en función de la variación de la longitud de la base.*
- *construir una tabla y un gráfico donde se aprecie dicha variación.*



Medida de la base (en cm)	Área del triángulo (en cm²)
6	
8	
7	
5	

Figura 1 – Enunciado original del problema a estudiar.
Fuente: Diseño Curricular de Segundo Año de la Escuela Secundaria de la Provincia de Buenos Aires, Argentina (2007, p. 330)

CC BY
ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v33n63a04

4 Metodología

El trabajo de investigación es del tipo descriptivo y se enmarca en la Teoría Antropológica de lo Didáctico, que explica la actividad matemática a partir de la noción de *praxeología*. El objetivo es comprender los *saberes* y *saberes-hacer* que se ponen en juego en torno al estudio de la noción de función al explorar un problema dado en el marco geométrico, y en especial cuando se incorpora el *saber-hacer* asociado a la Geometría Dinámica. Este tipo de análisis es habitual en las investigaciones que se enmarcan en esta teoría (CORICA; OTERO, 2012; QUIJANO; CORICA, 2017).

Teniendo en cuenta el objetivo, se selecciona del Diseño Curricular de la Provincia de Buenos Aires, República Argentina el problema presentado en la sección anterior y se realiza una descripción y análisis previo de las *praxeologías*, que podrían ponerse en juego para dar respuesta, considerando los diversos *equipamientos praxeológicos*.

Luego, se reformula el problema para ser planteado como actividad matemática en cursos y talleres de formación docente donde, además, está presente el *saber-hacer* asociado al uso del *software* GeoGebra, recuperando el potencial analizado por Arcavi y Hadas (2000). A partir de observar y registrar la actividad matemática desarrollada por los docentes que participaron se describen y analizan las *praxeologías* que se pusieron en juego para la resolución de tal problema.

Los cursos a los que se hace mención se desarrollan desde el año 2015 y se realizan en modalidad virtual (DEL RÍO; COSTA, 2016, 2017), mientras que los talleres son presenciales y se llevan a cabo desde el año 2012 (DEL RÍO; COSTA, 2012, 2015; COSTA; DEL RÍO, 2017). Tanto en los cursos como en los talleres, participan numerosos profesores de diversas instituciones y niveles educativos, y estudiantes de profesorado.

En el caso de los cursos virtuales, el problema es debatido entre los participantes - alrededor de veinte personas por curso - en los foros, durante el transcurso de una semana. En el caso de los talleres presenciales, la actividad se desarrolla durante, aproximadamente, tres horas. El trabajo de todos los docentes que han participado hasta el momento y sus reflexiones, suministran valiosa y abundante información para el análisis posterior que se detalla hacia el final del presente artículo.

5 Descripción y análisis previo de las praxeologías

A continuación, se describen y analizan las *praxeologías* (*saberes* y *saberes-hacer*)

CC BY

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v33n63a04

que se podrían poner en juego para la resolución del problema de la Figura 1. Se denominan, caso 1, 2, 3, 4 y 5. Los distintos *saberes* y *saberes-hacer*, es decir, las distintas *praxeologías* que podrían movilizarse, dependen no sólo del contexto educativo (secundario, universitario, formación de profesores) en el cual se presupone que se realizaría la actividad, sino también de los *equipamientos praxeológicos* de quienes estudian el problema, dentro de los cuales se incluyen los instrumentos y los saberes asociados a su utilización: lápiz y papel, calculadora, calculadora gráfica, compás, regla, *software* de geometría dinámica.

5.1 Caso 1: Obtención de la altura por medición (con lápiz y papel)

Para realizar la *tarea* de determinar el área correspondiente a distintos valores de la medida de la base, pueden construirse varios triángulos con regla y determinar la altura midiendo su magnitud, para luego calcular el área (Figura 2). De esta manera, es posible comprobar que el área efectivamente varía, siendo ésta *dependiente* de la medida de la base.

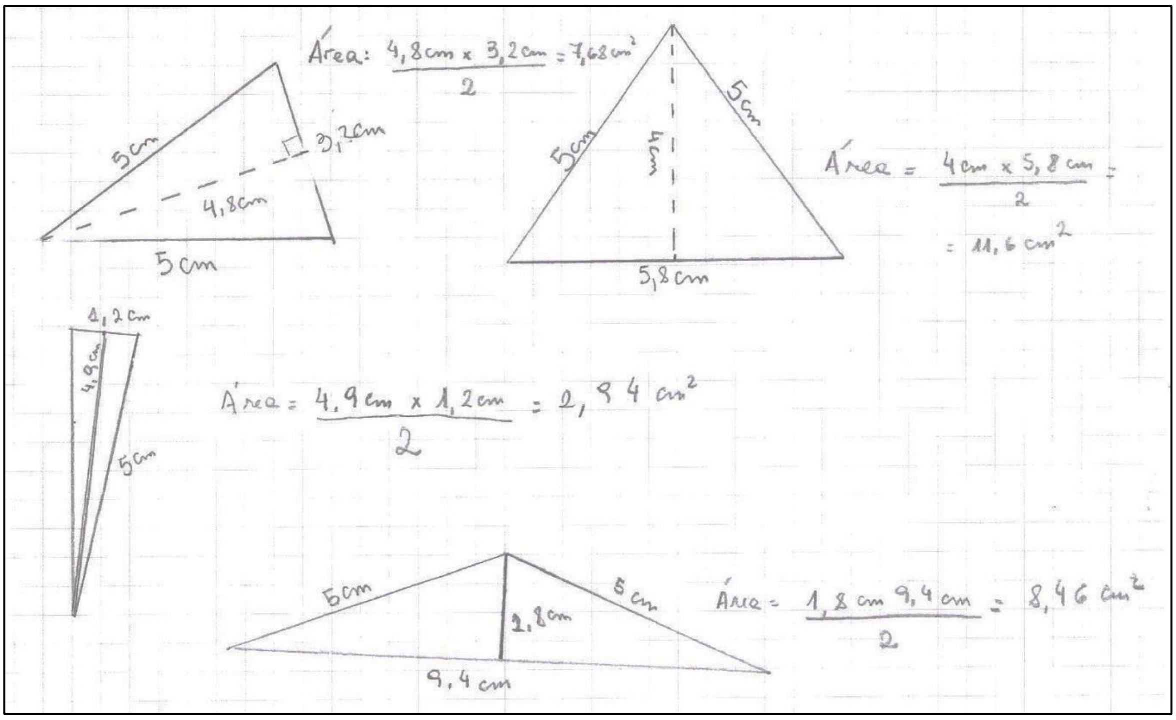


Figura 2 – Determinación de la altura y el área del triángulo mediante medición con regla en distintos triángulos
Fuente: Elaboración propia

El equipamiento praxeológico requerido en este caso consta de: conocer el concepto y las propiedades del triángulo isósceles, el concepto de altura y área de un triángulo, saber medir con regla y calcular el área de un triángulo.

A partir de la realización de la tarea de este modo, se puede comenzar a estudiar la noción de *variable*, de *dependencia* entre variables, e incluso de *dominio*, en caso de que se

CC BY

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v33n63a04

intente construir un triángulo con una base que no satisfaga la desigualdad triangular y se concluya que esto no es posible.

Sin embargo, en este caso, la búsqueda del posible máximo para el área resulta compleja. Para conjeturar de su existencia, se requiere de la construcción de una gran cantidad de triángulos; si se desea hallar en forma aproximada el valor de la medida de la base para que el área resulte máxima, la tarea es más ardua aún; y, por último, la búsqueda de un valor exacto y su validación resulta imposible en este contexto.

5.2 Caso 2: Determinación de la altura por medio del teorema de Pitágoras (con lápiz y papel / calculadora)

Este es el planteo que se propone en el Diseño Curricular, contexto donde se encontró este problema originalmente. Para determinar la altura correspondiente a cada uno de los valores de la base, se utiliza el teorema de Pitágoras, pues la altura correspondiente al lado desigual divide al triángulo isósceles en dos triángulos rectángulos (ver Figura 3).

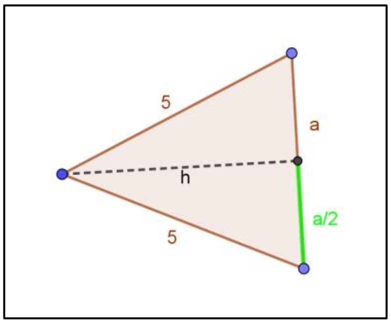


Figura 3 – Esquema de la situación empleado para visualizar la relación entre la base y la altura (longitudes medidas en centímetros)
Fuente: Elaboración propia

La altura en centímetros se obtiene, entonces, del siguiente modo: $h^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2=5^2 \rightarrow h=\sqrt{25-\left(\frac{a}{2}\right)^2}$

Luego, el área del triángulo isósceles se calcula a partir de la base *a* (el lado desigual) y de la altura (h) del triángulo correspondiente a la base, como el producto de la base y la altura dividida por dos, siendo su fórmula: $\text{Área}=\frac{1}{2}a\sqrt{25-\left(\frac{a}{2}\right)^2}$

En este caso, no se requiere la construcción de la figura cuidando las medidas, pero puede resultar engorrosa la cantidad de cálculos que se requieren y la alta probabilidad de cometer errores. En el Diseño Curricular se sugiere utilizar calculadora para agilizar las cuentas.

cc BY

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v33n63a04

El *equipamiento praxeológico* requerido consta entonces: del concepto de triángulo isósceles y sus propiedades, del concepto de altura de un triángulo, del Teorema de Pitágoras, y del concepto y cálculo del área de un triángulo, y del uso de calculadora.

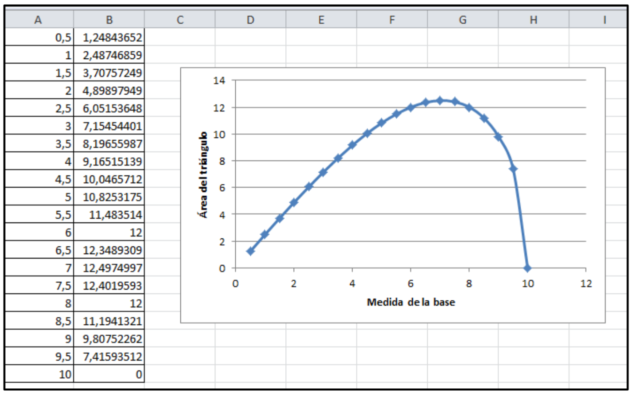
El estudio del problema daría lugar a la reconstrucción de nuevos saberes como: las nociones de variable, de dependencia, de dominio, y las nociones de crecimiento, de decrecimiento y de máximo y mínimo, además del estudio de técnicas para determinarlos.

5.3 Caso 3: Utilización de saberes algebraicos y/o analíticos (lápiz y papel / computadora)

Para alumnos con un mayor *equipamiento praxeológico*, en este caso del Álgebra, una posibilidad adicional sería representar mediante una fórmula la relación de dependencia entre la medida de la base y el área. Es decir: $\mathrm{A}(a)=\frac{1}{2}a\sqrt{25-\left(\frac{a}{2}\right)^2}$.

Luego, es posible utilizar esta fórmula para determinar el área para distintos valores de la medida de la base (a) y comprobar la variabilidad del área (A). Con este instrumento (la expresión algebraica), es posible luego realizar una tabla de valores que permita visualizar el crecimiento del área a medida que se incrementa la longitud de la base hasta un cierto punto, y posteriormente, su decrecimiento, e incluso intentar hallar, en forma aproximada, el o los valores máximos.

La escritura algebraica posibilita, incluso, automatizar la realización de esta tabla utilizando un programa informático, por ejemplo una Planilla de Cálculo (como se muestra en la Figura 4), o bien utilizar un programa que grafique funciones para representar en un sistema cartesiano y visualizar el crecimiento, el decrecimiento, y hallar así los posibles valores máximos (Figura 5).



A	B
0,5	1,24843652
1	2,48746859
1,5	3,70757249
2	4,89897949
2,5	6,05153648
3	7,15454401
3,5	8,19655987
4	9,16515139
4,5	10,0465712
5	10,8253175
5,5	11,483514
6	12
6,5	12,3489309
7	12,4974997
7,5	12,4019593
8	12
8,5	11,1941321
9	9,80752262
9,5	7,41593512
10	0

Figura 4 – Obtención de una tabla de valores y una gráfica que representen la función utilizando la Planilla de Cálculo
Fuente: Elaboración propia

CC BY

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v33n63a04

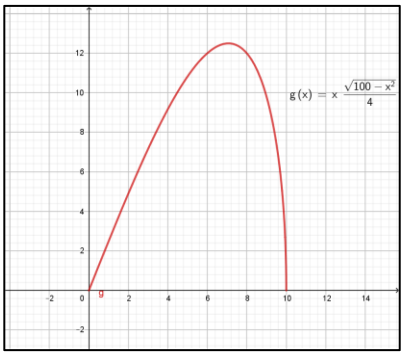


Figura 5 – Obtención de la gráfica a partir de la inserción de la fórmula en un programa graficador
Fuente: Elaboración propia

Esto requiere, como *equipamiento praxeológico* adicional, el conocimiento de ejes cartesianos, gráficos en coordenadas cartesianas y saber interpretarlos para extraer la información proporcionada por un graficador, tal como se observa en la Figura 4.

5.4 Caso 4: Utilización de herramientas del Cálculo Diferencial (lápiz y papel, no exclusivamente)

Si al *equipamiento praxeológico* descrito en el caso 3, se le añaden algunas de las herramientas del Cálculo Diferencial, se puede abordar la cuestión del máximo mediante la derivación de la fórmula que vincula el área con la longitud de la base, la búsqueda de puntos críticos y la utilización de algún criterio que permita dar cuenta de la clasificación de los puntos críticos obtenidos y la obtención del máximo, en caso de que exista. Sin embargo, aquí ya no se trataría de un problema introductorio para la noción de función, sino que se estaría presuponiendo que quien estudia el problema dispone de ese saber.

5.5 Caso 5: Utilización de un software de geometría dinámica

Si se concibe a los paquetes informáticos de Geometría Dinámica como entornos que permiten explorar, visualizar, conjeturar y reflexionar, entonces, el problema presentado resulta aún más interesante, ya que es posible construir un modelo dinámico del triángulo isósceles y visualizar la dependencia del área con la base *en tiempo real* (ARCAVI; HADAS, 2000; FERRAGINA; LUPINACCI, 2015).

Esto quiere decir que, al variar la longitud de la base - lo cual es posible arrastrando con el ratón uno de sus puntos extremos - la construcción se actualiza automáticamente permitiendo la visualización de las variaciones en el área de forma inmediata. Es posible

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v33n63a04

encontrar la respuesta a las preguntas por exploración, permitiendo al aprendiz concentrarse en lo conceptual de la situación y no perderse en una infinidad de hacer cálculos.

La construcción en sí del modelo resulta sumamente sencilla. Si utilizamos el programa GeoGebra, se puede colocar un punto en un lugar cualquiera de la *Vista gráfica*, y colocar otros dos puntos a cinco unidades de distancia del primero (dado que en este *software* no es posible expresar las medidas para las unidades correspondientes, a partir de ahora se hará referencia a las longitudes en *unidades* que deben ser interpretadas en centímetros, en el contexto de este problema). Esto puede lograrse de múltiples maneras. Por ejemplo:

- Trazar una circunferencia de radio 5 centrada en el primer punto, y colocar dos puntos sobre la misma (Figura 6).
- Utilizar la herramienta *Segmento de longitud dada*, hacer clic en el primer punto y establecer cinco unidades de longitud para el segmento, y luego repetir para obtener el tercer vértice (Figura 7).

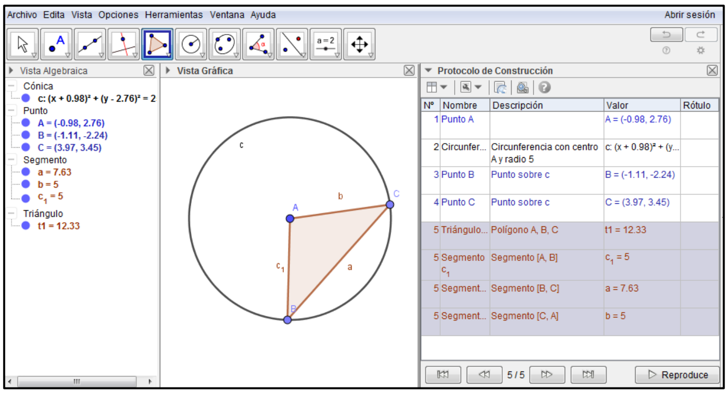


Figura 6 – Construcción del triángulo isósceles haciendo uso de una circunferencia. De izquierda a derecha, se muestran la vista algebraica, la vista gráfica y el protocolo de la construcción
Fuente: Elaboración propia

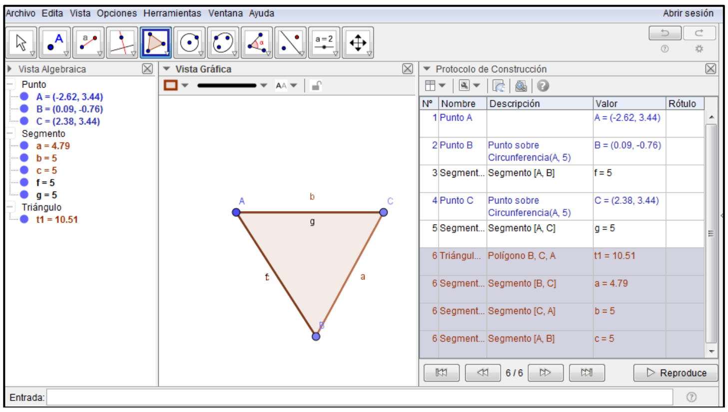


Figura 7 – Construcción del triángulo isósceles utilizando la herramienta *Segmento de longitud dada*. A la derecha se muestra el protocolo de la construcción (puede verse que el programa crea la circunferencia de radio 5, pero como objeto auxiliar)
Fuente: Elaboración propia

El lenguaje icónico que caracteriza a GeoGebra y las ayudas que proporciona este

cc BY
ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v33n63a04

programa al situar el cursor del ratón sobre cada herramienta, posibilita que durante el estudio del problema se encuentren las herramientas indicadas, en forma autónoma, sin necesidad de estudio previo de un manual de usuario. Sí resulta necesario saber el concepto de triángulo isósceles y sus propiedades para ponerlas en juego y lograr una construcción adecuada.

Una vez obtenidos los tres vértices, basta utilizar la herramienta *Polígono* para crear el triángulo y comenzar a estudiar la variación del área en dependencia con la base. Comprobar la variabilidad es inmediato, ya que el arrastre de los vértices permite observar, en forma directa, que una variación en la longitud de la base produce una variación en el área – siempre y cuando la construcción del triángulo sea correcta. El *saber* relativo a la noción de *dominio* de la función también emerge de manera natural al intentar lograr longitudes de la base mayores a diez unidades. La búsqueda de máximo y de la longitud de la base que lo produce, puede hacerse por exploración de manera aproximada.

Otra cuestión que posibilita el entorno de Geometría Dinámica es una mayor libertad en la elección de la variable independiente. En el problema, se propone el estudio del área en función de la longitud de la base. Sin embargo, puede resultar interesante estudiar la dependencia del área en función del ángulo comprendido entre los lados congruentes (o de alguna otra variable) sin que esto suponga una nueva construcción. Por ejemplo, se podría utilizar la herramienta *Ángulo* para medirlo, surgiendo, en este caso, casi de inmediato, la conjetura de que el valor máximo del área se alcanza cuando el triángulo es rectángulo.

6 Síntesis de los casos analizados

A modo de síntesis del análisis previo, se presenta el Cuadro 1, en el que se yuxtapone el *equipamiento praxeológico* requerido y las *praxeologías* que pueden reconstruirse en cada caso. Del mismo se desprende que la incorporación del *saber* de la Geometría Dinámica permite el estudio en profundidad del problema, y la emergencia de las *praxeologías* a estudiar, con un *equipamiento praxeológico* más básico. Aquí es donde se considera que radica la potencia de este problema. Pues permite introducir tempranamente, y con *sentido* para los estudiantes, las nociones constitutivas del concepto de función.

Caso	Equipamiento praxeológico	Praxeologías a estudiar
1	- Concepto y propiedades del triángulo isósceles. - Concepto y cálculo del área de un triángulo - Medición con regla.	- Nociones de variable, de dependencia entre variables, de dominio. - En este caso, el estudio del crecimiento y la búsqueda del máximo para el área resulta compleja. El máximo que podría hallarse no es exacto.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v33n63a04

2	- Concepto y propiedades del triángulo isósceles. - Concepto y cálculo del área de un triángulo. - Teorema de Pitágoras. - Uso de calculadora (no necesario, pero recomendable).	- Nociones de variable, de dependencia entre variables, de dominio. - El estudio del crecimiento y la búsqueda de un máximo parece más accesible, pero aún trabajosa. El máximo que podría hallarse no es exacto.
3	- Concepto y propiedades del triángulo isósceles. - Concepto y cálculo del área de un triángulo - Teorema de Pitágoras. - Escritura simbólica de fórmulas. - Uso de un *software* graficador o planilla de cálculo para generar numerosos puntos / - Uso de graficador para obtener la gráfica al incorporar la expresión analítica.	- Nociones de variable, de dependencia entre variables, de dominio. - El estudio del crecimiento y la búsqueda de un máximo parece más accesible. El máximo que podría hallarse no es exacto.
4	- Concepto y propiedades del triángulo isósceles. - Cálculo del área de un triángulo. - Teorema de Pitágoras. - Escritura simbólica de fórmulas. - Variables, dependencia, dominio. - Derivación, puntos críticos.	- El estudio del crecimiento y la búsqueda del máximo se realiza con precisión y exactitud.
5	- Concepto y propiedades del triángulo isósceles. Construcción de un triángulo isósceles con un programa de Geometría Dinámica y lectura del área calculada por el mismo.	- Nociones de variable, de dependencia entre variables, de dominio. Estudio del crecimiento y búsqueda del máximo.

Cuadro 1 – Síntesis de los *equipamientos praxeológicos* y las *praxeologías a estudiar* correspondientes a cada uno de los casos descritos
Fuente: Elaboración propia

Debido a lo expuesto, se seleccionó este problema para su trabajo en cursos y talleres de capacitación para profesores. Estos espacios tenían por objetivo contribuir con la adopción del *software* de Geometría Dinámica GeoGebra. En la siguiente sección, se presenta el análisis de las *praxeologías* puestas en juego por los participantes de estos cursos.

7 Descripción y análisis de los *praxeologías* cuando se trabaja en cursos de formación docente

Luego de la realización del análisis previo, a partir del cual se justificó la relevancia de abordar el problema haciendo uso de *software* de Geometría Dinámica, se propone la resolución del mismo en diversos cursos y talleres de formación docente continua. Para estos profesores o estudiantes de profesorado, el problema en sí mismo no es tal, ya que disponen de un *equipamiento praxeológico* que les permite hallar todas las respuestas aplicando directamente los conceptos del Cálculo de los cuales disponen con antelación. Es decir,

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v33n63a04

podrían hallar las respuestas a las preguntas del modo que se describió en el Caso 4. Se propone este problema a esta población a fin de promover una reflexión acerca de cómo podrían abordarlo los estudiantes de nivel secundario si disponen de un *software* de Geometría Dinámica, por lo que se solicita a los participantes no poner en juego los saberes de Cálculo que poseen, y que intenten pensar distintas formas en las que los alumnos podrían llevar a cabo el estudio.

El problema, analizado previamente, se reformula como se indica en el Cuadro 2 para la ocasión que se analiza.

Dado un triángulo isósceles cuyos lados congruentes miden 5 cm. *¿Cómo se comporta su área al modificarse la longitud del lado desigual?* *Construya el triángulo en GeoGebra y luego responda a las siguientes preguntas:* *1. ¿Varía el área del triángulo si se modifica la base?* *2. ¿Cuál es el área si la base mide 5 cm? ¿Y si mide 6 cm. o 15 cm?* *3. ¿Qué valores puede tomar la base?* *4. ¿Para qué medida de la base el área mide 4 cm^2?* *5. ¿A medida que el lado aumenta, el área aumenta o disminuye?* *6. ¿Existe algún valor de la medida de la base que haga que el área sea máxima?*

Cuadro 2 – Enunciado del problema utilizado para trabajar con los docentes y estudiantes de profesorado que asistieron a los cursos y talleres que se analizan
Fuente: Elaboración propia

La pregunta 1 puede parecer trivial, sin embargo, puede pensarse inicialmente que las variaciones de la base y de la altura pueden compensarse, permaneciendo el área constante. Para comenzar el estudio del problema, los participantes de los talleres y cursos, intentan construir un modelo dinámico de la situación. Este en sí no resulta complejo para ellos. Todos logran realizar alguna construcción. En algunos casos, más rudimentaria (como la que se describió en la sección anterior del presente artículo) y en otros, más completa: en algunos casos, logran crear un punto dinámico, cuya abscisa coincide con la longitud de la base del triángulo construido, y la ordenada con el área, y por medio de la opción *Activa rastro* que proporciona GeoGebra logran una representación de la gráfica de la función que les permite responder a la totalidad de las preguntas (Figura 8). En algunos pocos casos, proponen triángulos estáticos, que cumplen con el requisito de ser isósceles y medir 5 cm sus lados congruentes, pero no permiten avanzar en las otras preguntas. En este caso, al observar estos docentes las construcciones dinámicas de sus otros colegas, pueden superar esta dificultad y avanzar, incorporando a su *equipamiento praxeológico saberes* propios de la Geometría dinámica.

CC BY

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v33n63a04

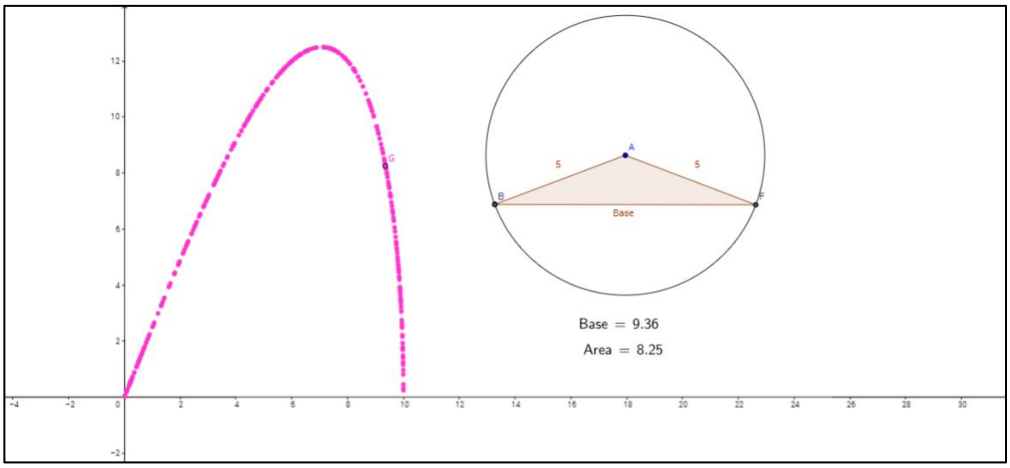


Figura 8 – Construcción de uno de los participantes del curso, incluyendo un punto dinámico que permite representar la gráfica de la función
Fuente: https://www.geogebra.org/m/WcOQE2QZ, recuperado el 23 de noviembre de 2017

La segunda pregunta tiene por objetivo explicitar que hay una *dependencia* del área en relación a la base, en el sentido de que dado un valor para la base, el área queda determinada. Hay dos cantidades que varían, una lo hace libremente y la otra queda determinada por la primera. El último valor, para el cual no es posible construir el triángulo, permite introducir la noción de *dominio*: la variable independiente, no puede tomar valores cualesquiera. Esto se formaliza e institucionaliza en la respuesta a la pregunta 3. Para los docentes que realizan la actividad esto en sí mismo no representa una novedad, ya que conocen el concepto de dominio, pero sí resulta original la forma de introducir ese concepto con *sentido* para los estudiantes.

La pregunta 4 puede dar lugar a reflexiones interesantes. Existen dos valores de la base para los cuales el área es igual a 4 cm^2. Dado que los alumnos (en este caso, docentes de matemática) están trabajando por exploración, a partir de un modelo dinámico, mueven los vértices libres del triángulo hasta encontrar que el área mida 4 cm^2, muchos de ellos, encuentran solamente uno de los valores y otros, ambos (como en el ejemplo de la Figura 10). Pero aquí está lo interesante: esto permite discutir las *limitaciones de este procedimiento* y buscar formas de anticipar la cantidad de soluciones, por ejemplo, mediante un cambio en la forma de representación (Figura 11).

cc BY

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v33n63a04

Re: Foro del encuentro 1
de [redacted] - viernes, 26 de agosto de 2016, 16:19

Hola a todos! Comparto con ustedes el trabajo que realice del Encuentro 1.

Parte 1:

1. Si, varia el área del triangulo cuando modifico la base.
2. Si la base mide 5 cm su área es de 10.83 cm2, si la base mide 6cm su área es de 12 cm2, una base de 15 cm no es posible con las características requeridas. La base máxima es de 10 cm.
3. La base toma valores entre 0,1 y 10.
4. Para un área de 4 cm2 la base es de 9.87.
5. A medida que el lado aumenta el área aumenta hasta llegar al área máxima que es de 12,5 y luego a pesar que el lado

Re: Foro del encuentro 1
de [redacted] - viernes, 26 de agosto de 2016, 20:57

Hola a todos.

Acá van mis respuestas:

ACTIVIDAD 1

1) Si modifico la base, cambia el área. Si el valor de la base está en el intervalo (0;7.06] el área aumenta, a medida que aumenta el valor de la base. En cambio si el valor de la base esta en el intervalo [7.06;10) el área disminuye a medida que la base aumenta.

2) Si la base mide 5cm, el área es de 10.82cm^2. Si la base mide 6cm, el área es de 12cm^2. La base no puede medir 15 cm, porque el valor máximo que puede tomar es un valor muy cercano a 10, porque cuando mide 10cm la base, el triángulo pasa a convertirse en una recta.

3) Los valores que puede tomar la base son los pertenecientes al intervalo (0;10).

4) Para que el área del triángulo sea de 4cm^2, la base debe ser de 1.62cm.

Figura 9 – Ejemplos de intervenciones en el foro del curso en línea en las que los participantes encuentran una sola solución
Fuente: Elaboración propia

A partir de las preguntas 5 y 6 se pueden introducir las nociones de *crecimiento* y de *extremo*. Por último, cabe mencionar que el máximo del área se obtiene cuando el triángulo es rectángulo. Esto suele ser advertido con mayor facilidad por aquellos que no ocultan los ejes cartesianos para realizar la construcción geométrica y utilizan los ejes *apoyando* uno de los lados congruentes del triángulo sobre uno de los ejes coordenados (Figura 12).

Re: Foro del encuentro 1
de [redacted] - viernes, 26 de agosto de 2016, 18:20

Hola! Acá van mis respuestas para la actividad del encuentro 1

Parte 1

1) Al modificar la base del triángulo efectivamente varía el área del mismo.

2)

- Si la base del triángulo mide 5 cm, su área será de 10.82 cm^2
- Si la base del triángulo mide 6 cm, su área será de 12 cm^2
- No es posible la construcción de un triángulo isósceles cuyos lados congruentes sean de 5cm y su base de 15cm. Recordemos que la suma de las medidas de dos lados de un triángulo debe ser mayor a la medida del tercer lado.

3) La medida de la base debe estar en el intervalo abierto (0,10)

4) Para que el área sea de 4cm^2 la base debe medir 1,62cm ó 9,87cm

Figura 10 – Ejemplo de intervención en el foro del curso en línea de una participante que solamente encontró ambas soluciones
Fuente: Elaboración propia

CC BY

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v33n63a04

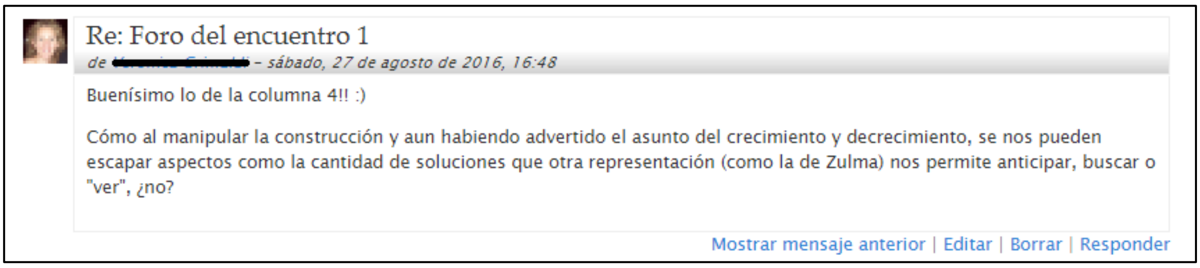


Figura 11 – Ejemplo de una participante que advierte la limitación del procedimiento y cómo superarla
Fuente: Elaboración propia

Con *la columna 4* se refiere a una intervención de la docente en la que realizó una tabla con las respuestas vertidas por todos: en la columna 4 se veían las respuestas a la pregunta en discusión. Cuando se refiere a una construcción "como la de Zulma", se refiere a otra participante que incluyó la gráfica cartesiana de la función.

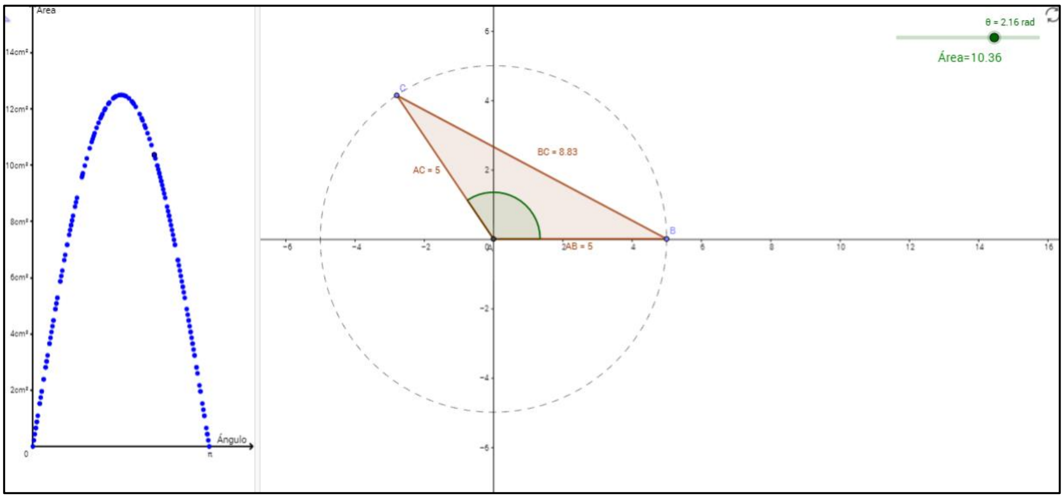


Figura 12 – Construcción propuesta por uno de los participantes del curso que analizó la situación tomando el ángulo entre lados congruentes como variable independiente
Fuente: https://www.geogebra.org/m/pmI868uF, recuperado el 23 de noviembre de 2017

Cuando se advierte esta cuestión, es posible proponer estudiar la variación del área en función del ángulo, en lugar de hacerlo en función del lado desigual. Una vez generado el modelo dinámico, cambiar la variable que se considerará independiente es sumamente sencillo, enriquece el problema y permite discutir que la elección de las variables que se ponen en juego en una situación son, en general, arbitrarias: se eligen por conveniencia y no siempre tienen que ser las que propone el profesor.

8 Síntesis del análisis posterior

A modo de síntesis, se observa que en este contexto particular, las *praxeologías* descriptas en el Caso 5 del análisis *a priori* pudieron ponerse en juego: haciendo uso de unos pocos *saberes*, tales como el concepto y propiedades del triángulo isósceles, y de algunas

CC BY
ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v33n63a04

herramientas del *software* GeoGebra, los participantes lograron estudiar el problema en profundidad. Sin embargo, cabe mencionar que al tratarse de docentes pusieron en juego otros *saberes* que probablemente no emerjan con la misma naturalidad en cursos con alumnos de secundaria. A saber, la construcción de la gráfica de la función f a partir de un punto cuyas coordenadas cartesianas son $(x,f(x))$. Este saber, en el caso de los alumnos de escuela secundaria, sería un saber a construir y no un saber previo.

9 Conclusiones

A partir de la descripción y análisis – previo y posterior – presentados, se concluye que la actividad estudiada permite un trabajo matemático genuino, que posibilita comenzar a introducir las nociones principales asociadas a las funciones de un modo no rutinario y recuperando su sentido. Es decir, utilizando las nociones teóricas que proporciona la TAD, el objeto función se construye a partir de buscar respuesta a una cierta tarea, contrariamente a lo realizado desde un enfoque monumentalista, donde los objetos se construyen sin saber para qué o cuál tarea o problema resuelven.

Además, es de interés notar que el problema estudiado involucra un tipo de función que no es habitual en el aula, como sí lo son las funciones lineales, cuadráticas, exponenciales, entre otras. Por otro lado, otorgaría a los alumnos cierta libertad para elegir las variables de interés: en la consigna, se propone estudiar el área en función de la base, sin embargo, para muchos participantes resulta natural proponer como variable independiente el ángulo subtendido entre los lados congruentes. Esto es destacado como un aspecto positivo por múltiples investigadores (BORSANI et al., 2013; NOVEMBRE; NICODEMO; COLL, 2015).

Las *praxeologías* que pueden reconstruirse a partir del trabajo con este problema dependen del *equipamiento praxeológico* de quien lo estudia, pero es destacable que con la incorporación del *software* de Geometría Dinámica, y los saberes asociados, es posible estudiar en profundidad la situación, con un *equipamiento praxeológico* mínimo. Cabe destacar que la TAD contribuyó en la comprensión de este fenómeno y permitió alcanzar esta conclusión que se considera relevante.

Es sabido que la utilización de este tipo de *software* no garantiza, *per se*, mejoras en la enseñanza. Es necesario reflexionar acerca de qué rol otorgamos a las mismas en el aula y qué actividades aportan a la construcción de conocimiento matemático. Se considera que la existencia dentro de GeoGebra de objetos libres y dependientes puede contribuir con el estudio por parte de los alumnos de la noción de función, siempre y cuando se diseñen actividades que permitan explorar las relaciones de dependencia existentes, tal como lo señalan también otros investigadores mencionados a lo largo de este artículo.

Agradecimientos

A la Secretaria de Ciencia y Técnica de la Universidad Nacional de La Plata por el apoyo económico recibido a través del proyecto de investigación Diseño, implementación y análisis de estrategias didácticas en Ciencias Básicas en Carreras de Ingeniería (referencia I 11-915).

Referencias

ACOSTA GEMPELER, M. E. Geometría experimental con Cabri: una nueva praxeología matemática. **Educación Matemática**, México DF, v. 17, n. 3, p. 121-140, 2005.

ARCAVI, A; HADAS, N. Computer Mediated Learning: An Example of an Approach. **International Journal of Computers for Mathematical Learning**, Países Bajos, v. 5, n. 1, p. 25-45, 2000.

BORSANI, V. et al. La integración de programas de geometría dinámica para el estudio de la variación de magnitudes geométricas: nuevos asuntos para la didáctica. En: CIBEM,7., 2013. Montevideo. **Actas del VII CIBEM…** Montevideo: FISEM, 2013. p. 6901-6908.

BOSCH, M.; GASCÓN, J. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico a la formación del profesorado de matemáticas de secundaria. En: GONZÁLEZ, M.;GONZÁLEZ, M. et al. (Ed.). **Investigación en Educación Matemática XIII**. Santander: SEIEM, 2009. p. 89-113.

BROUSSEAU, G. Fundamentos y métodos de la didáctica de la matemática. **Recherches en didactique de mathématiques**, Grenoble, v. 7, n. 2, p. 33-115, 1986.

BURGOA ETXABURU, M. B. La transferencia de contenidos matemáticos a contextos científicos: el concepto de función. **Enseñanza de las ciencias**, Barcelona, v. 32, n. 3, p. 703-704, 2014.

CHEVALLARD, Y.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. **Estudiar matemáticas:** el eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje. 1a.ed. Barcelona: Universitat de Barcelona, 1997.

CHEVALLARD, Y. L'enseignement des SES est-il une anomalie didactique? **Skholê, cahiers de la recherche et du développement**, Marseille, n. 26, p. 25-37, 1997.

CHEVALLARD, Y. L'analyse des practiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble, v. 19, n. 2, p. 221-266, 1999.

CHEVALLARD, Y. Enseñar matemáticas en la sociedad de mañana: Alegato a favor de un contraparadigma emergente. **REDIMAT**, Barcelona, v. 2, n. 2, p. 161-182, 2013.

CORICA, A. R.; OTERO, R. Estudio sobre las praxeologías que se proponen estudiar en un curso universitario de cálculo. **Bolema**, Río Claro, v. 26, n. 42B, p. 459-482, 2012.

CC BY

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v33n63a04

COSTA, V.; DEL RÍO, L. La noción de función: una introducción utilizando GeoGebra. En CIBEM,8., 2017, Madrid. **Actas del VIII CIBEM…** Madrid: FISEM, 2017, p. 50-56

DEL RÍO, L.; COSTA, V. GeoGebra como instrumento de modelización matemática en la enseñanza de la noción de función. En XII Simposio de Educación Matemática, 2012 Chivilcoy. **Memorias del XII SEM**, Chivilcoy: Edumat. p. 371-379.

DEL RÍO, L.; COSTA, V. La noción de función: una introducción usando GeoGebra. En II Jornadas de Enseñanza, Capacitación e Investigación en Ciencias Naturales y Matemáticas, 2015. **Actas de las 2as JECICNaMa**, Bernal**: GECICNaMa,** 2015, p. 26.

DEL RÍO, L.; COSTA, V. Análisis del diseño de un curso a distancia sobre aspectos didácticos del uso de GeoGebra. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo,** v. 5, n. 1, p. 23-38. 2016.

DEL RÍO, L.; COSTA, V. Tipos de conocimiento puestos en juego en un curso en línea de formación docente sobre el uso de GeoGebra. En CIBEM,8., 2017, Madrid. **Actas del VIII CIBEM…** Madrid: FISEM, 2017, p. 137-145.

DGCYE. **Diseño Curricular para la Educación Secundaria**: 1º año. La Plata, Resolución. 3233/06, 2006.

DGCYE. **Diseño Curricular para la Educación Secundaria**: 2º año. La Plata. Resolución 2495/07, 2007.

DGCYE. **Diseño Curricular para la Educación Secundaria**: 3º año. La Plata. Resolución 0317/07, 2008.

FERRAGINA, R.; LUPINACCI, L. La noción de función mediada por entornos dinámicos. El caso del punto dinámico. En: CIAEM, 14., 2015, Chiapas. **Educación Matemática en las Américas**: Volumen 4: Uso de la Tecnología México DF: Comité interamericano de educación matemática, 2015. p. 302-312.

HANFLING, M. Estudio didáctico de la noción de función. En: CHEMELLO, G. (Ed.). **Estrategias de enseñanza de la matemática**. 1.ed. Quilmes: Universidad Virtual de Quilmes, 2000.

HOHENWARTER, M. Multiple representations and GeoGebra-based learning environments. **Union. Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, España, v. 39, p. 11-18, 2014.

NOVEMBRE, A.; NICODEMO, M.; COLL, P. **Matemática y TIC**: Orientaciones para la enseñanza. 1a.ed. Ciudad Autónoma de Buenos Aires: ANSES, 2015.

OTERO, R. La Teoría Antropológica de lo Didáctico. En: OTERO, R. (Ed.). **La Teoría Antropológica de lo Didáctico en el Aula de Matemática**. 1.ed. Ciudad Autónoma de Buenos Aires: Dunken, 2013. p.15-27. ISBN 978-987-02-7071-3.

QUIJANO, M. D. L. T.; CORICA, A. R. Desarrollo de un modelo praxeológico de referencia en torno a lugares geométricos. **REDIMAT**, Barcelona, v. 6, n. 2, p. 192-220, 2017.

RODRIGUEZ FERNANDEZ, J. L.; GODINO, J.; RUIZ HIGUERAS, L. La noción de función como objeto a enseñar y como objeto enseñado: Análisis de un proceso de transposición didáctica. **Quadrante**, Lisboa, v. 2, n. 4, p. 91-116, 1995.

Submetido em 29 de Novembro de 2017.
Aprovado em 24 de Julho de 2018.