ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n77a06

Abordagem de Máximos e Mínimos em um Curso Universitário de Cálculo

Approach of Maxima and Minima in a University Course in Calculus

Adriana **Richit***

ORCID iD 0000-0003-0778-8198

Luiz Augusto **Richit****

ORCID iD 0000-0003-3054-4933

Bruno Augusto **Teilor*****

ORCID iD 0000-0001-9338-9075

Resumo

A aprendizagem de conceitos do Cálculo por estudantes do ensino superior caracteriza um processo complexo. Guiados pela questão Quais processos de raciocínio são desenvolvidos por estudantes universitários a partir da aula de investigação em um *lesson study* em Cálculo, realizamos uma pesquisa qualitativa e interpretativa relacionada ao tópico Máximos e Mínimos. O *lesson study*, organizado em doze encontros semanais de duas horas, envolveu oito professores de instituições de ensino superior da região Sul do Brasil. A aula de investigação, sobre a qual a presente análise se dedica, foi realizada em uma turma de Cálculo de um Curso de Licenciatura em Matemática de uma instituição federal sul-brasileira. O material empírico constitui-se das transcrições da gravação da aula de investigação e das resoluções dos estudantes para a tarefa proposta. A análise evidencia aspectos relacionados a dois processos de raciocínio: mobilização e articulação de representações e formulação de justificativas e conclusões. Como resultados, a análise sinaliza que a tarefa, pelo contexto que a embasou e pelo seu *design*, favoreceu o desenvolvimento do raciocínio matemático, o qual estimulou a comunicação de ideias matemáticas e a formulação e a validação de conclusões.

Palavras-chave: Cálculo. *Lesson Study*. Ensino Superior. Máximos e Mínimos. Licenciatura em Matemática.

Abstract

The learning of Calculus concepts by undergraduate students is a complex process. Driven by the question 'Which reasoning processes are developed by undergraduates in a Calculus Lesson Study investigation class?' we carried out a qualitative and interpretative investigation related to the topic of "Maximums and Minimums'. The Lesson Study, organized into twelve two-hour weekly meetings, involved eight professors from Higher Education Institutions in Southern Brazil. The investigation class was held in a Calculus class of a Mathematics Degree Course at a Federal Institution located in the Southern region of Brazil. The empirical material consists of transcripts from the investigation class recordings and the notes that the students produced in the assignment solving process. The analysis highlighted aspects related to two reasoning processes: deployment and depiction articulation; justification and conclusion phrasing. As for results, the analysis highlighted that the assignment, due

* Doutorado em Educação Matemática (UNESP, Rio Claro). Professora da Universidade Federal da Fronteira Sul (UFFS), Erechim, Rio Grande do Sul, Brasil. E-mail: adrianarichit@gmail.com
** Licenciado em Matemática pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS, Porto Alegre). E-mail: luizaugustorichit@gmail.com
*** Mestrado em Educação em Ciências e Matemática (UFPR, Curitiba). Doutorando em Educação em Ciências e Matemática na Universidade Federal do Paraná (UFPR), Curitiba, Paraná, Brasil. E-mail: bruno.teilor@gmail.com

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n77a06

to the context that supported it and its design, promoted the development of mathematical reasoning, which stimulated the conveying of mathematical ideas and the formulation and validation of conclusions.

Keywords: Calculus. Lesson study. University teaching. Maxima and Minima. Mathematics Degree Course.

1 Introdução

Os desafios que se manifestam, nos processos de ensino e aprendizagem de Cálculo no ensino superior, têm desafiado professores e pesquisadores a experimentarem novas abordagens e estratégias com potencial para superar as práticas baseadas na exposição e no exercício, tais como o *lesson study*, abordagem de desenvolvimento profissional amplamente desenvolvida no Japão desde o século XX. A partir da implementação do *lesson study* nos Estados Unidos, e sua disseminação para outros países do ocidente após os anos 2000 (FUJII, 2018; RICHIT, 2020), concentrando-se, majoritariamente, no ensino da Matemática na educação básica, gradualmente começaram a ser divulgados relatos de experiência e resultados de pesquisa sobre *lesson study* no ensino superior.

Nesse movimento, dois grupos são considerados pioneiros. Um deles, do Departamento de Matemática da Universidade de Harvard, Estados Unidos, analisa uma experiência divulgada em 2007 por Amanda Alvine e colaboradores (ALVINE *et al.*, 2007). O outro, de 2008, vinculado ao Departamento de Matemática, Estatística e Ciência da Computação da Universidade de Wisconsin, Estados Unidos, apresenta um estudo de Joy Becker e colaboradores (BECKER *et al.*, 2008).

Atualmente, há um interesse crescente em torno da dinamização de ciclos de *lesson study* no ensino superior (HERVAS, 2021), com prevalência de trabalhos focados na formação e desenvolvimento de futuros professores e, também, trabalhos com ênfase na aprendizagem da Matemática, a exemplo das pesquisas com foco no Cálculo (ALVINE *et al.*, 2007; BECKER *et al.*, 2008, FAJAR *et al.*, 2017; LASUT, 2013; OTTEN *et al.*, 2009; RICHIT; RICHIT; RICHTER, 2023).

Guiados pela questão: quais processos de raciocínio matemático são desenvolvidos por estudantes universitários em um *lesson study* em Cálculo?, realizamos uma investigação, qualitativa e interpretativa relacionada ao tópico Máximos e Mínimos. A aula de investigação foi realizada em uma turma de Cálculo, de um Curso de Licenciatura em Matemática de uma instituição pública federal (RICHIT; PONTE; RICHIT, 2022).

A pesquisa justifica-se pela possibilidade de explicitar elementos relacionados ao raciocínio desenvolvido pelos estudantes na aplicação de derivadas, na abordagem de Máximos

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n77a06

e Mínimos e o papel das representações para explorar esse conceito. Nesse sentido, a pesquisa pode desvelar aspectos do *lesson study*, especialmente a dinâmica da aula de investigação, que favorecem a explicitação do raciocínio dos estudantes pelo fato de que as ações deles são cuidadosamente observadas por uma equipe de observadores durante a aula. Esse olhar contínuo para o processo de raciocínio dos alunos não é possível no ensino regular, pois o professor precisa ensinar, atender às demandas e dificuldades dos estudantes e, também, acompanhar o trabalho que realizam. Além disso, a pesquisa pode contribuir para as discussões sobre a aprendizagem matemática no ensino superior, especialmente em Cálculo, cujos índices de retenção são altos.

2 Aprendizagem matemática no Ensino Superior e o Estudo de Cálculo

A aprendizagem matemática no ensino superior, especificamente em Cálculo, caracteriza o processo por meio do qual os estudantes universitários apropriam-se dos fundamentos e das ferramentas matemáticas que lhes possibilitam desenvolverem conhecimento matemático avançado, resolverem problemas relacionados a fenômenos distintos, assim como fornecerem soluções às demandas e situações-problema de diversas áreas do conhecimento. Esse processo envolve a compreensão dos conceitos de Cálculo, a compreensão de propriedades e relações, a mobilização e articulação entre representações, a capacidade de resolver problemas e a formulação de conclusões e generalizações em um contexto em que as relações entre variáveis se estabelecem a partir de variações.

Entretanto, a aprendizagem de tópicos de Cálculo pelos estudantes universitários tem sido reiteradamente referida como um processo desafiador e para a qual distintas dificuldades são reportadas (CAVASOTTO, 2010), apesar dos esforços em investigá-las e saná-las (DANS-MORENO; RODRÍGUEZ-VÁSQUEZ; GARCÍA-GARCÍA, 2022; FUENTEALBA *et al*., 2022; RICHIT; RICHIT; RICHTER, 2023).

Segundo Sangpom *et al.* (2016), no estudo de Cálculo, os estudantes se deparam com um conteúdo matemático que requer alto nível de abstração e cujo desenvolvimento tensiona para abordagens tradicionais e mnemônicas. Esses autores, ao proporem a estudantes de graduação de Cálculo I a resolução de problemas abertos, sem uma resolução imediata ou bem delimitada, envolvendo o conceito de Máximos e Mínimos, constataram a falta de familiaridade dos estudantes com esse tipo de abordagem, que – apesar do estranhamento inicial – os levou a pensarem sistematicamente e resolverem os problemas propostos.

Em um estudo dedicado a identificar fatores que influenciam a aprendizagem de

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n77a06

conceitos Matemáticos em cursos de Engenharia, Alves *et al.* (2016) examinaram as perspectivas dos estudantes sobre a Matemática. Os resultados apontam a falta de aplicação (lacunas na transposição feita pelo professor para contextos de aplicação) dos conteúdos aprendidos como fator para a pouca motivação nos estudos e, por consequência, desempenho insuficiente. Evidenciam, ainda, que a interpretação e o raciocínio crítico são uma das maiores dificuldades na aprendizagem matemática, e sugerem que uma das razões para essas dificuldades prende-se ao ensino expositivo, a exemplo do modelo definição – teorema – demonstração, pelo fato de provocar insegurança e incapacidade crítica para avaliar os resultados (ALVES *et al.*, 2016).

Ao reinterpretar a teoria de Jerome Bruner[1], David Tall compreende que o desenvolvimento do pensamento matemático emerge da percepção de objetos do mundo exterior e da *ação sobre* esses mesmos objetos, considerando que os sujeitos encaminham-se, do ponto de vista cognitivo, da percepção dos objetos do mundo externo, de uma maneira visual-espacial, para as ações sobre o que percebem desses objetos, utilizando a forma verbal-dedutiva (TALL, 1992 *apud* ALMEIDA; PALHARINI, 2012, p. 913).

Assim concebida, a aprendizagem em Cálculo no ensino superior pressupõe o desenvolvimento do pensamento matemático que, por sua vez, suscita abordagens que favoreçam a expressão do pensamento matemático. O pensamento matemático envolve, para além da possibilidade de conceber conceitos em diferentes contextos, a atribuição de significados a um objeto matemático e suas representações (ALMEIDA; PALHARINI, 2012).

Em um trabalho pioneiro, publicado na década de 1980, Tall e Vinner destacam dois conceitos centrais na aprendizagem matemática em Cálculo: imagem conceitual e definição conceitual. A *imagem conceitual* refere-se às representações visuais, experiência, impressões, propriedades associadas a um determinado conceito, isto é, embasa o processo de descrever a estrutura cognitiva inerente ao conceito, circunscrevendo as imagens mentais, propriedades e processos associados. A imagem conceitual constitui-se de forma dinâmica e contínua, mediante situações de aprendizagem diferenciadas e a partir do envolvimento do estudante com distintos tipos de tarefas ou problemas matemáticos, a exemplo das tarefas de natureza exploratória (TALL; VINNER, 1981).

A *definição conceitual*, constituída das imagens conceituais, caracteriza as formas verbais usadas para explicitar conceitos, as quais podem ser assimiladas de maneira rotinizada

[1] Teoria da aprendizagem que propõe a participação ativa da criança no processo de aprendizagem por meio da investigação, que leva a uma descoberta; explora o desenvolvimento da criança e um ensino no formato de um currículo em espiral (BRUNER, 1973).

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n77a06

ou de modo significativo, relacionando-se mais ou menos estreitamente com a definição formal de um conceito (TALL; VINNER, 1981 *apud* MEYER, 2003). A autora acrescenta que a definição conceitual pode favorecer uma "reconstrução pessoal da definição de um conceito, sem que tenham necessariamente significados coincidentes. Neste caso, a definição conceitual é considerada como a forma verbal utilizada pelo estudante para especificar sua imagem conceitual" (MEYER, 2003, p. 7). Nesse sentido, a aprendizagem de Cálculo requer o desenvolvimento de conceitos, representações, operações, justificativas e conclusões, assim como a compreensão das relações entre essas dimensões, que podem ser aprofundadas a partir de contextos temáticos próximos das vivências dos estudantes.

Henriques e Almoloud (2016) ressaltam que a distinção entre um objeto e sua representação é um ponto estratégico na compreensão da Matemática. Esclarecem que uma "escrita, uma notação, um símbolo, representam um objeto matemático: um conjunto, uma função, um vetor [...] o que significa dizer que os objetos matemáticos não devem ser confundidos com suas representações" (HENRIQUES; ALMOLOUD, 2016, p. 467).

A mobilização e a compreensão de representações são, portanto, princípios da aprendizagem em Cálculo, a qual pressupõe o desenvolvimento de uma competência básica: o raciocínio matemático, que consiste em utilizar informação matemática já conhecida para obter, justificadamente, novas conclusões (MATA-PEREIRA; PONTE, 2018). O raciocínio matemático envolve processos tais como a formulação de questões, a formulação e a verificação de conjecturas e a formulação de justificações (LANNIN; ELLIS; ELLIOT, 2011), os quais tradicionalmente demandam distintas representações.

O processo de formular conjecturas, princípio basilar do raciocínio matemático, refere-se ao processo pelo qual os estudantes precisam mobilizar conceitos matemáticos e estabelecer relações entre eles para desenvolverem afirmações, as quais supõem, inicialmente, que sejam verdadeiras, mas ainda não sabem se são (MORAIS; SERRAZINA; PONTE, 2018). De acordo com esses autores, a aprendizagem da Matemática suscita o desenvolvimento do raciocínio matemático.

Analogamente, a aprendizagem em Cálculo pressupõe o desenvolvimento de aspectos intrínsecos ao raciocínio matemático, concebido como o processo dinâmico de conjecturar, generalizar, investigar o porquê e desenvolver e avaliar argumentos (MORAIS; SERRAZINA; PONTE, 2018), que pode ser potencializado por meio de tarefas cuidadosamente planejadas para esse propósito (MATA-PEREIRA; PONTE, 2018) e com potencial para mobilizar distintas representações matemáticas, embasar justificativas e formular conclusões.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n77a06

Relativamente ao estudo de Máximos[2] e Mínimos[3], um tópico basilar de Cálculo em cursos de Matemática, Engenharia, Física, entre outros, destacamos que, geralmente, está circunscrito no estudo de Derivadas e Aplicação de Derivadas, frequentemente trabalhado após o estudo das Aplicações de Derivadas. Segundo Anton, Bivens e Davis (2014), a abordagem desse tópico envolve a mobilização de ferramentas básicas do Cálculo para a resolução de problemas associados à análise do comportamento gráfico de uma função de duas ou mais variáveis, bem como a resolução de problemas de otimização, a partir dos quais objetiva-se minimizar ou maximizar uma função em um determinado intervalo/domínio. Acrescentam que os "problemas de otimização podem ser reduzidos à obtenção do maior ou menor valor de uma função em algum intervalo e à determinação de onde esses valores ocorrem" (ANTON; BIVENS; DAVIS, 2014, p.78). Para esses autores, a compreensão das ferramentas matemáticas, representações e dos conceitos envolvidos na resolução desses problemas é basilar à aprendizagem de Cálculo nesses cursos.

Entretanto, conforme destacam Sangpom *et al*. (2016), a aprendizagem de Máximos e Mínimos no âmbito do Cálculo tem se caracterizado por abordagens predominantemente algébricas e mnemônicas. Contrapondo essa perspectiva, Almeida e Viseu (2002) sugerem que os processos de ensino e de aprendizagem em Cálculo devem envolver distintas representações (algébrica, gráfica, geométrica, tabular), promover a análise dessas representações, enfatizar a compreensão de conceitos, bem como a interpretação e a compreensão dos resultados, favorecendo a aprendizagem significativa. Consideramos, portanto, que a abordagem desse tópico em um curso universitário de Cálculo pode ser modificada a partir de tarefas favoráveis à investigação e à descoberta de conceitos e propriedades, bem como pela dinamização de aulas diferenciadas, a exemplo da aula de investigação em um *lesson study*.

3 Lesson Study e o Ensino Universitário de Cálculo

O *lesson study* despontou e se desenvolveu durante o governo imperial Meiji (1868-1912), constituindo-se como processo de preparação dos professores e das escolas para introdução de mudanças educacionais no Japão (ISODA, 2007; RICHIT, 2021), entre elas o ensino mútuo. Após a segunda Guerra Mundial, esse processo foi influenciado pelas mudanças

[2] Diz-se que uma função y = $f(x)$ possui um máximo local (ou relativo) em x_0, se existir um intervalo aberto de seu domínio contendo x_0, tal que $f(x) \leq f(x_0)$ para todo x nesse intervalo.
[3] Diz-se que uma função y = f(x) possui um mínimo local (ou relativo) em x_0, se existir um intervalo aberto de seu domínio contendo x_0, tal que $f(x) \geq f(x_0)$ para x todo nesse intervalo.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n77a06

implementadas no sistema educacional japonês, que incorporou princípios democráticos amplos (WHITE; LIM, 2008), consolidando-se como via para melhorar o ensino e favorecer a aprendizagem escolar no país (CERBIN, 2012).

O *lesson study* envolve uma equipe de professores trabalhando em torno das seguintes ações: identificação de um problema de aprendizagem discente e formulação de objetivos para tratá-lo (ou um problema de ensino); trabalho preparatório e planejamento de uma aula (a aula de investigação); lecionação dessa aula por um participante, com observação pela equipe de professores e/ou pesquisadores; reflexão sobre os aspectos observados acerca das aprendizagens dos alunos (MURATA, 2011; PONTE *et al.*, 2016; RICHIT *et al.*, 2019). Ao final desses quatro momentos, se desejável, a equipe pode realizar novo planejamento, repetindo todo o processo (MURATA, 2011).

No Japão, o *lesson study* apresenta algumas características implícitas, a exemplo do *design* da tarefa proposta para a aula de investigação e do planejamento da aula que, geralmente, envolve muitas sessões (FUJII, 2013). Segundo esse autor, a etapa do planejamento se corporifica em um detalhado plano de aula, que inclui a questão inicial (de aprendizagem discente ou de ensino), os objetivos para o trabalho a ser realizado, a tarefa preparada ou selecionada e os motivos para usá-la, assim como a antecipação das resoluções dos alunos. Outra característica predominante é propor uma única tarefa para a aula de investigação.

Além disso, a aula de investigação baseia-se na *structured problem solving*, que envolve quatro fases: apresentação do problema ou tarefa da aula, resolução do problema/tarefa pelos alunos, comparação e discussão das resoluções (*neriage*) e sumarização pelo professor (FUJII, 2013, 2018), perspectiva que se aproxima da abordagem exploratória no ensino da Matemática (CANAVARRO, 2011). Essa perspectiva, a *structured problem solving*, vem se difundindo na dinamização de *lesson study* ao redor do mundo, possibilitando abordagens distintas para o ensino da Matemática, a exemplo do ensino de Cálculo.

Atualmente, há um movimento crescente de trabalhos que analisam a dinamização de *lesson study* no ensino universitário de Cálculo, dentre os quais destacamos o estudo sobre o Teorema de Rolle e Teorema do Valor Médio (BECKER *et al.*, 2008), Taxas Relacionadas e Derivadas (ALVINE *et al.*, 2007), Máximos e Mínimos (RICHIT; RICHIT; RICHTER, 2023), aplicações de derivadas e otimização de problemas (OTTEN *et al.*, 2009). Há, também, um movimento de pesquisas sobre *lesson study* no ensino universitário, pesquisas que abordam outras temáticas e outros domínios do conhecimento (HERVAS, 2021), os quais transcendem o escopo deste trabalho.

O texto pioneiro de Alvine *et al.* (2007) discute benefícios da implementação de *lesson*

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n77a06

study no ensino superior e oferece considerações a partir da experiência desenvolvida em um programa de aprendizagem (*apprenticeship program*) do Departamento de Matemática na Universidade de Harvard. Os resultados evidenciam que lecionar a aula de investigação é uma experiência valiosa para todos os envolvidos, e que o ciclo de *lesson study* constitui uma importante via "para o desenvolvimento de habilidades pedagógicas de alunos de pós-graduação" que participaram do programa (ALVINE *et al.*, 2007, p. 111). Concluem que um ciclo de *lesson study* é melhor conduzido com grupos de três a cinco pessoas e um formador experiente.

Chappell e Killpatrick (2003) investigaram os efeitos do ambiente de ensino (conceito *versus* procedimento) na compreensão conceitual dos estudantes e no conhecimento procedimental de Cálculo. A pesquisa foi realizada em um *lesson study*, cuja dinamização deu-se em dois ambientes de aprendizagem distintos: um baseado em procedimentos e outro em conceitos. Após a primeira investigação, a experiência foi replicada em outra turma. A primeira aula envolveu 305 estudantes universitários de Cálculo e oito instrutores, e a segunda envolveu 303 estudantes e oito instrutores. Foram usadas distintas métricas de desempenho para determinar o grau de assimilação dos conceitos e procedimentos do Cálculo pelos estudantes nos dois ambientes distintos. As métricas de desempenho incluíram dois exames de habilidades, preparados para avaliar a competência processual, assim como um exame intermediário e um exame final, ambos projetados para avaliar as habilidades processuais e a compreensão conceitual (CHAPPELL; KILLPATRICK, 2003).

Na conclusão, o estudo sugere que o ambiente de aprendizagem não resultou em diferenças significativas nas habilidades dos estudantes para empregar habilidades processuais, conforme mensurado pelos exames. De acordo com as avaliações que aferiram a compreensão conceitual, os estudantes do ambiente baseado em conceito obtiveram pontuações significativamente mais altas do que os alunos matriculados no ambiente de aprendizado baseado em procedimentos, bem como as habilidades processuais. Os resultados do estudo de reaplicação são coerentes com os resultados do estudo original, elevando o grau de generalização. Essas conclusões fornecem evidências de que os programas instrucionais baseados em conceitos podem, efetivamente, promover o desenvolvimento da compreensão do aluno sem prejudicar a proficiência nas habilidades procedimentais (CHAPPELL; KILLPATRICK, 2003).

4 Metodologia

A investigação assume a perspectiva qualitativa e interpretativa (ERICKSON, 1986) com o objetivo de analisar os processos de raciocínio desenvolvidos por estudantes universitários a partir da aula de investigação em um *lesson study* em Cálculo. Examinamos as ações e interações dos estudantes no decorrer da resolução de uma tarefa sobre Máximos e Mínimos, cuidadosamente elaborada para promover a investigação e a descoberta, a discussão entre pares e a explicitação das estratégias matemáticas mobilizadas para resolvê-la. A pesquisa incidiu sobre a aula de investigação do *lesson study*, a qual foi realizada em uma turma de Cálculo do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal Catarinense – IFC, Campus Concórdia, constituída de quinze estudantes.

O *lesson study*, organizado em doze encontros semanais de duas horas, envolveu oito professores universitários (Alice, Amy, Catarina, Christopher, Esther, Estrela, Michel, Tatiana – nomes fictícios), docentes em instituições dos três estados da região Sul do Brasil, e um estudante de licenciatura em Matemática (Natan – nome fictício) pela sua experiência em Cálculo. A equipe constituiu-se de docentes com experiência em Educação Matemática e em Matemática, sendo que dois professores são especialistas em Cálculo. A investigação atende aos critérios éticos de pesquisa, tendo sido aprovada em Comitê de Ética em Pesquisa (Parecer nº. 4.764.981).

A aula de investigação foi voluntariamente lecionada por Amy, professora de Cálculo no Curso, no ano de 2021, e observada pelos participantes do *lesson study*, que produziram notas de campo sobre as ações dos estudantes na resolução da tarefa. A observação foi orientada por um protocolo, elaborado pela equipe durante o *lesson study*, centrado nos seguintes aspectos: a interpretação dos alunos em relação à tarefa; aspectos do enunciado que geraram dúvidas; questões/dúvidas levantadas na discussão nos grupos; estratégias e representações propostas para a resolução da tarefa; argumentos propostos para defender as estratégias apresentadas; contra-argumentos apresentados pelos colegas para as resoluções negociadas no grupo; resoluções obtidas e justificações formuladas nos grupos; tentativas de propor alguma generalização; dificuldades, erros e conclusões apresentadas pelos alunos na etapa da discussão coletiva; aspectos formalizados e/ou generalizados ao final da discussão coletiva; coerência entre as conclusões/aprendizagens realizadas e o objetivo estabelecido para a aula.

O material empírico constitui-se das transcrições das gravações das sessões e das notas de campo do pesquisador, as quais foram produzidas após cada sessão. A análise, qualitativa e interpretativa (ERICKSON, 1986), baseada em uma análise de conteúdo (BARDIN, 2003), estabeleceu como unidades de referência os trechos do material empírico relacionados aos processos de raciocínio dos estudantes, especialmente sobre Máximos e Mínimos,

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n77a06

potencializados pela tarefa e pela organização da aula de investigação baseada em quatro fases (FUJII, 2013). A partir da convergência entre as unidades de referência, definimos as categorias de análise: *mobilização e articulação de representações* e *formulação de justificativas e conclusões*.

4.1 A aula de investigação

O tópico escolhido pela equipe para a aula de investigação foi Máximos e Mínimos, como forma de oportunizar investigações matemáticas relacionadas à otimização de funções. O tópico foi desenvolvido no início do estudo de Derivadas, aspecto que consideramos positivo pelo fato de oportunizar aos estudantes se envolverem com um problema sobre otimização previamente ao estudo das aplicações de Derivadas.

A tarefa para a aula adotou como contexto o pastejo rotacionado de gado de leite, por ser a atividade socioeconômica predominante na região do IFC-Concórdia, caracterizando a abordagem interdisciplinar (RICHIT; TOMKELSKI, 2022). A Figura 1 apresenta a tarefa proposta para a aula de investigação.

TAREFA INVESTIGATIVA:

Enunciado: Um fazendeiro pretende planejar um circuito de piquetes para 15 vacas leiteiras. De acordo com as recomendações técnicas, para assegurar a recuperação das pastagens, o número mínimo de piquetes necessários é 30, respeitando uma área de 50 m^2 por animal por piquete. Suponha que a configuração dos piquetes adotada na propriedade rural seja a ilustrada na Figura 4.

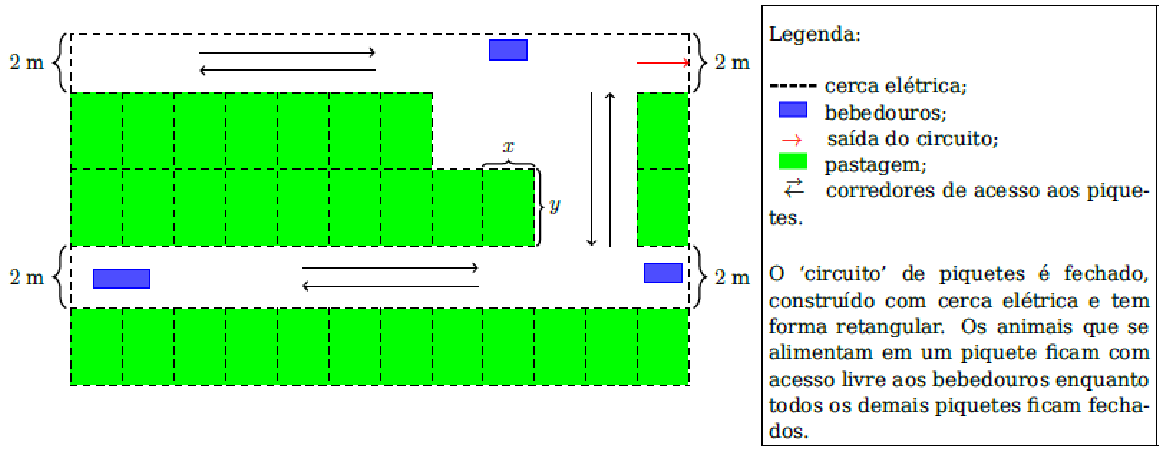


Figura 1- Enunciado da tarefa
Fonte: elaborada no ciclo de *lesson study* (RICHIT *et al.*, 2021)[4].

[4] RICHIT, L. A. *et al*. O problema dos piquetes: material didático desenvolvido em um estudo de aula para investigação do tópico de máximos e mínimos em Cálculo. [The paddock problem: didactic material created in a Lesson Study to investigate the topic of maxima and minima in Calculus.] [Lesson, 2021, July 27]. **Zenodo**, 2021. Disponível em: https://doi.org/10.5281/zenodo.5140590. Acesso em: 16 dez. 2022.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n77a06

A partir do enunciado da tarefa foram propostas as seguintes questões (Quadro 1):

Considerando o enunciado da tarefa, determine:

1. A área que cada piquete deve possuir nas condições dadas pelo enunciado.
2. Uma expressão que permita calcular o comprimento de fio (perímetro) em metros necessário para cercar um piquete retangular de medidas arbitrárias *x* e *y*.
3. Uma expressão que permita calcular o comprimento total de fio (em metros) necessário em função das medidas arbitrárias de cada piquete, para todo o circuito apresentado na Figura 4 (do material da tarefa).
4. Uma expressão que permita encontrar a área de apenas um piquete em função dos lados *x* e *y*.
5. O comprimento total de fio (item 3) em função de um dos lados *x* ou *y* do piquete, mantendo a área estipulada no item 1.
6. As dimensões *x* e *y* que minimizam o comprimento total de fio e mantêm a área estipulada no item 1.

Quadro 1 - Questões da Tarefa
Fonte: RICHIT *et al.* (2021).

A aula de investigação foi organizada em quatro momentos – problematização da tarefa, trabalho autônomo em grupos (resolução da tarefa), discussão coletiva (comparação e discussão das resoluções) e sistematização/formalização – conforme princípios do *lesson study* e da abordagem exploratória, priorizando-se a discussão entre pares, a exploração e a comunicação de ideias matemáticas (RICHIT; PONTE; RICHIT, 2022).

Após a problematização da tarefa, os estudantes foram encaminhados para subsalas virtuais (nomeadas G1, G2, G3 e G4), nas quais trabalharam na resolução da tarefa, discutiram estratégias, testaram hipóteses, propuseram resoluções e sistematizaram as conclusões. Cada sala foi observada, virtualmente, por dois participantes (um com experiência em Educação Matemática e outro em Cálculo), que produziram notas sobre as ações dos estudantes a partir do protocolo de observação previamente elaborado. Após o trabalho autônomo (TA), os estudantes retornaram à sala virtual principal para a discussão coletiva das resoluções (DC) e sistematização das aprendizagens pelo professor.

5 Resultados

A análise evidenciou processos de raciocínio relacionados à mobilização e articulação de representações e formulação de justificativas e conclusões.

5.1 Mobilização e articulação de representações

A resolução da tarefa encorajou os estudantes a *explorarem representações geométricas, tabulares e algébricas* dos objetos matemáticos complementares ao objeto a ser minimizado (comprimento total de fio do circuito de pastagem), solicitado na questão 6. Os excertos a seguir, provenientes da discussão coletiva da questão 2 (Uma expressão que permita calcular o

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n77a06

comprimento de fio (perímetro) em metros necessário para cercar um piquete retangular de medidas arbitrárias *x* e *y*), explicitam as representações mobilizadas na resolução da tarefa.

> *Kate: A questão 2 nos pedia para determinar uma expressão para calcular o comprimento do fio, o perímetro em metros, que seria necessário para cercar um piquete retangular com as medidas x e y. Como a Ely desenhou ali (Fig.3): o piquete com medidas x e y. Então, para determinar a área, a gente precisa fazer lado vezes lado (L.L) e o perímetro a gente precisa fazer lado mais lado mais lado mais lado (L + L + L + L), [e assim] a gente determinou a expressão 2x + 2y. E aqui, para exemplificar, como a gente atribuiu valores para o x e y para ver como que ficaria afinal seu perímetro, o total de fio que a gente iria utilizar. Então, para o x a gente utilizou 20 e para o y usamos 37,5. Esses números que a gente determinou foram com base na área de 750. Então, a nossa expressão, ela se deu por 2x + 2y (DC, G2).*
> *Amy: Algum grupo encontrou uma resolução ou uma expressão diferente que representa o perímetro de um piquete com as dimensões x e y?*
> *Alan: O nosso grupo fez só 2x + 2y. A gente usou só x e y como medida (G1).*
> *Amy: Por que vocês usaram como medidas as variáveis x e y?*
> *Alan: Porque ele estava falando de modo arbitrário, aí a gente achou que era para utilizar só as medidas [genéricas] que a gente estava tendo. Aí a gente só utilizou isso para fazer todos os cálculos e em nenhum momento a gente determinou as medidas (G1).*
> *Amy: E os demais grupos, como pensaram essa questão?*
> *Nick: A gente podia utilizar também x + x + y + y, que ia dar [a mesma expressão P = 2x + 2y] (G4).*
> *Amy: Ok. Então, na questão 2 é consenso que [a expressão] é 2x + 2y* (Discussão coletiva da tarefa entre alunos e professora, 2021).

A discussão da questão dois oportunizou aos estudantes explicitarem o raciocínio desenvolvido e as estratégias usadas para resolvê-la, os quais desvelaram as representações geométrica e algébrica mobilizadas. Um exemplo é ilustrado na justificativa de Kate:

> *[para determinar a expressão que fornece o perímetro] a gente precisa fazer lado mais lado mais lado mais lado (L + L + L + L). [Daí] a gente determinou a expressão de 2x + 2y* (Explicação da participante Kate, 2021).

A representação geométrica (Figura 2) é explicitada quando o grupo expressa cada piquete como uma região retangular de medidas arbitrárias *x* e *y*.

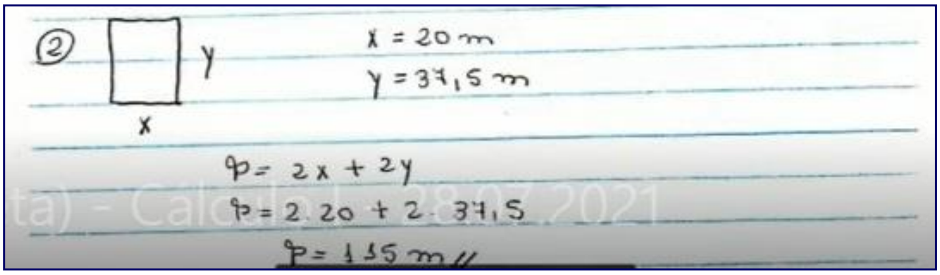


Figura 2 - Resolução da questão 2 (G2)
Fonte: ficha de trabalho do grupo.

A resolução da questão 2 evidenciou, também, a mobilização de *relações entre as variáveis* (medidas x e y) envolvidas no comprimento de fio para cercar um piquete. Os estudantes, espontaneamente, pensaram na ideia de minimizar o perímetro e estabeleceram as relações entre as dimensões dos piquetes para isso. O excerto a seguir ilustra o raciocínio.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n77a06

Nick: [A] gente pensou em medidas [...] mais próximas. E a gente acabou definindo a medida para x e para y, para largura e para comprimento. E quando a gente fez isso a gente notou que a quantidade de fio utilizada [na questão 2] seria menor quando tem um x e um y próximos [...] do que quando eu tenho x e o y [mais discrepantes], por exemplo, 15 para x e 50 para y (DC, G4) (Explicação do participante Nick, 2021).

Após socializar a expressão para o comprimento total de fio do circuito de piquetes de pastagem, o grupo 1 apresentou a seguinte explicação.

Alan: [...] para achar o perímetro a gente tem que levar em consideração as quatro laterais [externas do circuito]. E aí a gente tem aquela lateral da base, tem 12 piquetes e [...] tem o lado de x, [que nesse lado ali, apontando para a parte de baixo do circuito na Fig. 1] a gente tem 12x. Aí na lateral direita a gente vai ter 1 piquete, 2 m, 2 piquetes e 2 metros. Aí a gente tem duas vezes 2m e 3 vezes a lateral y do piquete. Isso vai se repetir nas outras laterais. Então a gente vai ter duas vezes 12x mais 2 vezes 4 m + 3y. (DC, G1)
Amy: E quanto deu a expressão de vocês, a expressão que representa o comprimento do fio?
Alan: Deu que o perímetro é igual a duas vezes 12x mais duas vezes 4 metros + 3y [ou seja: 2.12x+2.(4m+3y)].
Amy: E qual é a expressão final?
Alan: [...] seria 24x + 8 m + 6y (Discussão coletiva da tarefa entre alunos e professora, 2021).

A Figura 3, apresentada na sequência, foi elaborada pelos integrantes do grupo 1 para ilustrar a resolução da questão 3.

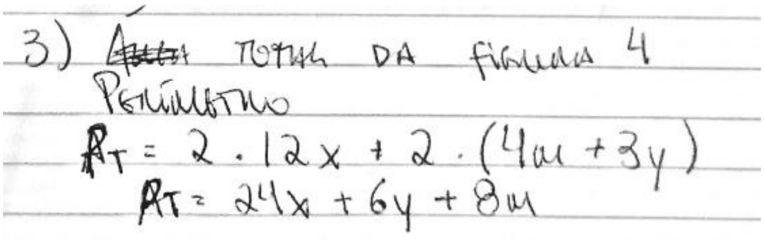

3) ~~Área~~ TOTAL DA FIGURA 4
PERÍMETRO
$P_T = 2 . 12x + 2 . (4m + 3y)$
$P_T = 24x + 6y + 8m$

Figura 3 - Resolução da questão 3 (G1)
Fonte: ficha de trabalho do grupo.

Alan explicou que a expressão do comprimento total de fio do circuito de piquetes foi obtida pela análise da figura dada no enunciado da tarefa, decompondo-a em partes, conforme indica o trecho:

Alan: a gente tem aquela lateral da base, tem 12 piquetes (Explicação do participante Alan, 2021).

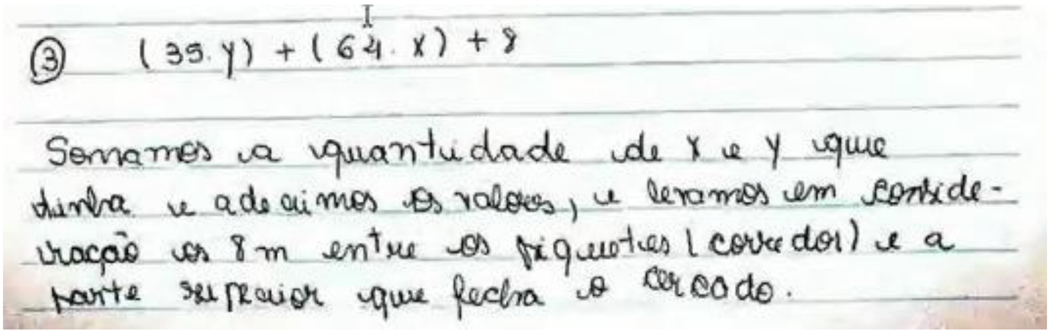
A estratégia de decompor a figura em partes predominou nos demais grupos.

Theo: A nossa [resolução] ficou um pouco diferente. [...], ficou 35y, porque a gente [...] contou quantos lados seriam iguais a y e mais 64x. [Nós contamos e concluímos] que na última parte, na base bem embaixo da figura tinha 12 piquetes, ou seja, 12x. Aí, a gente somou com as medidas [da parte] de cima do circuito, que eu acho que o Nick tinha falado 52. Nós também tinhamos falado 52, só que daí, depois, acabou que a gente tinha atribuido valores para as medidas e não tava fechando com o resultado que tinha que dar. Aí a gente somou com os valores lá de cima e aí deu 64x mais os 8m, sendo que os 8 seriam aqueles espaços entre os piquetes, que seriam os cochos de água [bebedouros], que seriam 8 m no total. Aí ficou 35y + 64x + 8 (Fig. 4). (DC, G2)
Edu: [Nosso grupo achou a mesma coisa]: 64x + 35y + 8m. (DC, G3)
Amy: Temos [duas] respostas diferentes. Alan escreveu que não entendeu de onde vieram essas

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n77a06

medidas. Alguém gostaria de explicar?
Theo: Eu posso. (Após compartilhar a figura explicou:) A gente somou. Primeiro a gente tinha atribuído valores para essa parte de cima dos corredores. Tinha feito 52x, mas daí depois a gente percebeu que não era para fazer isso, que era para somar [os lados dos piquetes], considerar (em função de) x no caso, né. Aí a gente contou quantos x tinha nessa parte de baixo e aí só aumentou a quantidade de x nessa parte de cima. Aí deu 64x, senão tinha dado 52x. (G2)
Alan: Mas, é isso que eu não entendi. Por que a gente está considerando a figura inteira como um retângulo, né? A gente tem quatro laterais [no circuito]. Eu não entendi porque que vocês estão contando individualmente em vez de contar só [a parte de baixo, na qual] tem 12. Então, nessa parte aqui, nessa paredezinha, a gente vai ter 12x. Então eu não estou entendendo da onde é que tá vindo esse 52x. (G1)
Theo: É que pede para toda a figura, aquela parte do meio (referindo-se aos piquetes internos ao circuito) ali também tem que levar em consideração. Ali, aquelas duas fileiras de piquetes do meio, a fileira de baixo, tem 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 medidas x na parte de baixo (mostrando com o mouse a contagem de medidas x).
Alan: Ah, agora eu entendi! (G1)
Theo: E tem 9 na parte de cima. Agora tu tens que descontar [os lados compartilhados] para fazer a segunda fileira de cima. (G2)
Alan: A cerca elétrica, claro! (G1)
Theo: E aí você tem que levar em consideração isso também. Eu acho que você levou em consideração os dois metros ali do lado. (G2)
Alan: Agora vi o que a gente fez de errado. A gente não pegou pela cerca elétrica, a gente não levou em consideração cada voltinha que ela fez em cada piquete. A gente fez só o perímetro [externo do circuito] da figura. (G1)
Michel: Eu acho que [essa hipótese do grupo do Alan] tem relação com aquela ideia de que [...] o perímetro [é o] contorno. Acho que talvez tenha essa influência também (Discussão coletiva da tarefa entre professora e alunos, 2021).

A Figura 4 ilustra a representação algébrica mobilizada pelo grupo 2, para a qual esclarecem que foi obtida considerando-se a quantidade de dimensões *x* e *y* dos piquetes que compõem o circuito, a cerca que contorna o circuito de pastagem e as dimensões dos corredores de acesso aos piquetes.


③ (35.y) + (64.x) + 8

Somamos a quantidade de x e y que tinha e adcimos os valores, e levamos em conside-ração os 8m entre os piquetes (corredor) e a parte superior que fecha o cercado.

Figura 4 - Resolução da questão 3 (G2)
Fonte: ficha de trabalho do grupo 2.

O grupo 1 também propôs uma expressão incompleta ($24x + 60y + 8$), porque consideraram apenas o contorno externo do circuito. O grupo 2 questionou as resoluções dos colegas e apresentou a expressão por eles elaborada ($64x + 35y + 8$), que estava completa em relação aos elementos a serem considerados. Mediante a discussão da resolução, os grupos revisaram os elementos do circuito, contabilizando novamente as medidas *x* e *y*.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n77a06

A questão 5, por exemplo, oportunizou aos grupos representarem o comprimento total de fio do circuito de piquetes, expressando-o algebricamente, conforme sinaliza a discussão:

> *Alan: Na questão 5 [usamos a expressão] do perímetro da [questão 3], que é 64x + 35y + 8m. A gente pensou o seguinte: "se a área total de um piquete tem que ser igual a 750 m², sendo essa área igual x vezes y [isto é, x.y = 750], então a gente pode transformar o x para 750 metros quadrados sobre y [isto é, x = 750/y]". Aí a gente chegou à expressão 64(750/y) + 35y + 8. (DC, G1)*
> *Amy: [Algum grupo] chegou num modo diferente de representar o perímetro em função de uma variável?*
> *Alan: [Achamos] 64(750/y) + 35y + 8m. A gente só transformou o x em y [isolando uma variável].*
> *Amy: O comprimento total do fio em função de uma variável?*
> *Alan: Isso, exato!*
> *Theo: Profª, na verdade a gente só não somou os oito [no final da expressão]. A gente fez igual ao Alan só não somou os 8, porque a gente achou que não era para [considerar esse dado] nessa questão. (G2)*
> *Edu: [Nós consideramos] a área da primeira questão e igualamos com a questão número 3. Aí a gente chegou à expressão 750 = 64x + 35y + 8 (Fig. 5). A gente chegou a essa conclusão que 750, que é a área, é igual a 64x + 35y + 8. A gente pensou assim, mas eu acho que essa questão pede para isolar [alguma variável], não é? Nesse caso, aí eu acho que seria isolar o x ou y, aí ficaria x = (750 – 35y – 8)/64. É mais ou menos assim que a gente pensou. (DC, G3)* (Discussão coletiva da tarefa entre alunos e professora, 2021).

No contexto da discussão apresentada no excerto, o grupo apresentou para os colegas a expressão que haviam formulado, conforme Figura 5.

$$750 = 64x + 35y + 8$$

Figura 5 – Resolução da questão 5 (G3)
Fonte: ficha de trabalho do grupo 3.

Sobre a Figura 5, vejamos a continuação do excerto produzido pelo grupo 3:

> *Amy: Essa expressão 64x + 35y + 8 é referente ao quê?*
> *Edu: [Ao] perímetro.*
> *Amy: E aquele primeiro valor ali (referindo-se aos 750), é o que?*
> *Edu: A área.*
> *Amy: E por que você igualou o perímetro e a área?*
> *Edu: Não sei. Foi essa conclusão que a gente chegou [no grupo].*
> *Nick: Em relação à [questão 5], a gente estava nesse processo, na interpretação da questão para entender bem o que ela tava pedindo. Aí a gente ficou bastante perdido. A gente fez algumas coisas que não eram necessárias, como escolher valores para as medidas x e y. Às vezes tinha mais valores do que precisava. Então, a gente não discutiu isso. (DC, G4)* (Discussão coletiva da tarefa entre professora e alunos, 2021).

A discussão sobre essa questão, especialmente as explicações e justificativas dos grupos para as resoluções, desvelou o raciocínio que os levou a formularem uma expressão que fornecia o comprimento total de fio para o circuito de piquetes de pastagem em função de um dos lados x ou y do piquete, embora nem todos os grupos chegaram à expressão correta. Portanto, a estrutura e o contexto da tarefa, que levaram os estudantes a confrontarem as resoluções encontradas em cada questão, favoreceram o desenvolvimento do raciocínio

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n77a06

mediante a mobilização de representações geométricas, tabulares e algébricas das grandezas envolvidas no objeto matemático solicitado (expressão para o comprimento total de fio), favorecendo a *interpretação da relação entre as representações*.

Considerando os aspectos evidenciados na análise, inferimos que a abordagem de Máximos e Mínimos foi favorecida pelo contexto e pela estrutura da tarefa e, também, pela dinâmica da aula de investigação (organizada em quatro fases), que levaram os estudantes a mobilizarem distintas representações das grandezas envolvidas.

5.2 Formulação de justificativas e conclusões

A discussão em torno da resolução da tarefa, cuidadosamente elaborada para promover a interação entre os estudantes e a comunicação de ideias matemáticas, forneceu subsídios que os possibilitaram atribuir sentido às hipóteses, estratégias utilizadas, especialmente, para as resoluções e conclusões de cada questão. Os estudantes mobilizaram e desenvolveram aspectos do Cálculo, notadamente sobre Máximos e Mínimos, e sobre o contexto da tarefa, os quais permitiram que formulassem argumentos e conclusões coerentes com o referido contexto, conforme excerto abaixo.

> *Nick: [Para responder a questão 2], a gente poderia ter deixado 15 m na largura e 50 no comprimento e aí a gente acabou vendo que [...] seria um piquete muito comprido [...]. Isso acarretaria que as vacas iriam pisar sobre a pastagem e acabariam degradando essa pastagem [...]. Então, a gente testou valores, a gente pensou em medidas mais semelhantes, mais próximas [...] (ver Quadro 2). E quando a gente fez isso [constatamos] que a quantidade de fio utilizada seria menor quando se tem um x e um y próximos (G4)* (Conclusão do participante Nick, 2021).

x	*y*	Área = x.y	Perímetro = 2x + 2y
1	750	750 m^2	1502 m
...	...	...	...
5	150	750 m^2	310 m
10	75	750 m^2	170 m
15	50	750 m^2	130 m
20	37,5	750 m^2	115 m
25	30	750 m^2	110 m

Quadro 2 - Processo de validação de medidas ideais para *x* e *y*
Fonte: elaborado pelos autores a partir das notas de campo.

O processo de validação das medidas ideais de *x* e *y* fez emergir distintas *hipóteses sobre a relação entre grandezas* (medidas), as quais foram testadas de diferentes formas nos grupos, favorecendo a formulação de conclusões matemáticas, a exemplo da ideia de minimização de perímetro, conforme indica o diálogo abaixo.

> *Theo: A gente achou que as medidas mais adequadas para x e y são 25 m e 30 m. (G2)*
> *Amy: Vocês estimaram, por exemplo, um valor para base do piquete e para a altura dele de modo que satisfizesse a área de 750 m^2?*
> *Theo: Isso mesmo. É tipo uma prova real.*

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n77a06

> *Amy: Como você sabe que são esses valores que satisfazem essa igualdade?*
> *Theo: Na verdade a gente jogou valores que satisfizessem a área de 750.*
> *Amy: E tem várias possibilidades?*
> *Theo: Tem várias possibilidades. Mas, aí a gente fez 15 vacas vezes 50 (que era a área mínima por animal), que deu 750, né. E aí a gente [testou medidas] para fazer a prova real* (Discussão coletiva da tarefa entre alunos e professora, 2021).

Esse processo possibilitou cada grupo *testar e validar hipóteses* sobre as medidas ideais para os lados x e y de cada piquete, a partir das quais puderam elaborar uma conclusão matemática referente à relação entre as medidas ideais para minimizar o perímetro de um piquete (retangular): as medidas de x e y deveriam ser próximas. Adicionalmente, essa conclusão levou os estudantes a estabelecerem uma relação entre as medidas ideais de x e y, a área e o perímetro de cada piquete, a saber: quando as medidas de x e y são mais próximas, o perímetro é minimizado para a área de 750 m².

Essa estratégia embasou as resoluções e as conclusões nos demais grupos, conforme explicitam os excertos a seguir.

> *Alan: Eu quero é botar um ponto de discussão porque a gente não conseguiu chegar exatamente numa expressão. O que a gente pensou inicialmente foi: a gente sabe que cada piquete tem uma área de 750m^2, que era o produto [entre a quantidade de] vacas e a área que cada uma teria que ter. E aí pede qual seria a menor medida possível que a gente poderia ter entre um lado e outro lado né, ou seja, x e y, que desse 750 [de área], porque quanto menor [é] cada lateral, apesar de dar mesma área, o perímetro aumenta. Tanto que 1 vezes 750 dá 750 m^2, mas, também 25 x 30 dá 750m^2. E esse valor diminui o perímetro (Quadro 3). E aí a gente foi seguindo nessa linha de raciocínio e também usando a raiz quadrada de 750 para ver quais seriam os menores valores que a gente poderia alcançar para as laterais x e y de forma que o perímetro fosse o menor possível. Aí a gente tem inicialmente que a raiz quadrada de 750 seria 27, 386, etc. E a gente tem também que 25 m vezes 30m é igual a 750. E o 27, 380, que a raiz quadrada do 750, ele se estabelece entre o 25 e o 30. E aí a partir daí a gente tentou pensar em uma forma, tentou de outra, mudou o foco, tentou pensar numa forma em que a gente pudesse aproximar cada vez mais esses dois valores procurados de 27, de forma que o perímetro fosse o menor possível. (DC, G1)*
> *Nick: A gente tava fazendo a partir da questão 2. Eu pensei em usar valores. Pensei em usar na base 15 m e na altura 50 m. E a gente calculou o perímetro do piquete, que seria o total de fio. E a gente tinha calculado e tinha dado 130. E aqui, utilizando 25 e 30, deu 110 m. Aí eu vi que quando x e y se aproximavam, x mais próximo do y, o comprimento do fio vai ser menor. Então, a gente estava testando alguns números, antes de terminar o tempo, a gente tinha chegado aos valores 27 x 27,7 m. Então, seria o x e y teriam que estar bem próximos para que eu consiga um gasto reduzido de fio. Por exemplo, se você for comprar, se você for utilizar, vai ser menor a custo. Então, seria a mesma lógica do que Alan tinha comentado. (DC, G4)* (Discussão coletiva da tarefa entre alunos, 2021).

A discussão promovida por Amy levou-os a mobilizarem conclusões formuladas nas questões anteriores, visando levar os estudantes a atribuírem significado a essas medidas em relação ao contexto da tarefa.

> *Amy: [Como] Theo, que é técnico em agropecuária, [eu pergunto se] não tem um valor mínimo para que os animais fiquem confortáveis nos piquetes? Por exemplo, se eu pensar numa área 750, eu posso considerar um [piquete retangular] de base 1 e altura 750, por exemplo, [seria*

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n77a06

> *um piquete adequado para os animais]?*
> *Theo: Vai ficar meio estranho. Como a gente comentou antes, se as medidas são muito discrepantes, o piquete vai ficar muito estreito e comprido, e as vacas vão ficar apertadas nesse espaço, além de pisotear todo o pasto antes de comer, degradando a pastagem (G1)* (Discussão coletiva da tarefa entre alunos e professora, 2021).

Formular argumentos e conclusões, mesmo que restritos a um objeto matemático específico (por exemplo, o perímetro mínimo de cada piquete ou o comprimento total de fio do circuito de piquetes) é um aspecto relevante para a aprendizagem matemática dos estudantes, porque possibilita compreendermos as relações estabelecidas entre as variáveis intrínsecas ao problema. Permitiu-nos, também, compreendermos os significados atribuídos pelos estudantes para os resultados.

A discussão da questão 6 propiciou aos estudantes formularem hipóteses relativas às medidas x e y que minimizam o perímetro dos piquetes (embora se solicitasse minimizar o comprimento total de fio do circuito de piquetes), assim como favoreceu a formulação de justificativas e conclusões para as resoluções.

> *Amy: [A partir da expressão representativa do comprimento do fio na questão 5] vocês foram tentando achar as medidas de x e y considerando aquela área?*
> *Alan: Sim, isso. E daí deu bem errado.*
> *Amy: E aí, quais medidas vocês acharam para x e para y, mais ou menos?*
> *Alan: A melhor hipótese que a gente teve foi 25 e 30, que quando muplica dá 750. É até menor do que o valor que o Theo achou. Mas, a partir daí a ideia seria encontrar um número cada vez mais próximo, mas a gente não conseguiu. (G1)*
> *Amy: A estratégia foi ir testando.*
> *Alan: Ou usar [aquela ideia] de mínimos das derivadas. Só que daí a gente foi dando umas estabacadas, a gente tentou por limite, tentou fazer aproximação, e não deu certo. Aí a gente foi pensar em derivadas. De início a gente sabia que tinha que pegar lá o valor mínimo e também não deu certo, porque a gente não entendeu. Só quis dar meu pitaco pra gente discutir um pouquinho* (Discussão coletiva da tarefa entre alunos e professora, 2021).

A discussão da questão 6 mobilizou as resoluções, justificativas e conclusões das questões anteriores, especialmente das questões 1, 3 e 5, levando-os a reverem suas respostas e reformularem as justificativas, tanto no trabalho autônomo como na etapa da discussão coletiva. Esse processo favoreceu o desenvolvimento do raciocínio matemático dos estudantes em relação ao objeto matemático a ser minimizado (perímetro do circuito de pastagem), as grandezas envolvidas (as dimensões das laterais, a área e o perímetro de cada piquete) e a correspondência entre as representações algébrica e geométrica. Portanto, constituiu-se em uma situação muito particular que os levou a testarem e validarem medidas para os lados x e y de cada piquete, a partir das quais puderam elaborar uma conclusão matemática sobre a relação entre as medidas ideais para minimizar o perímetro a partir do valor de área de cada piquete. Adicionalmente, essa conclusão levou-os a estabelecerem uma relação entre as medidas ideais

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n77a06

de x e y, a área e o perímetro de cada piquete, a saber: quando as medidas de x e y são mais próximas, o perímetro (do piquete) é minimizado.

Por fim, a discussão das resoluções dos grupos evidencia o potencial da tarefa, devido ao seu contexto (pastejo rotacionado de gado de leite) e do seu *design* para promover a comunicação das ideias, conjecturas e conclusões matemáticas, assim como a *validação das resoluções*. Além disso, a dinâmica da aula de investigação favoreceu a interação entre os estudantes e a valorização das estratégias e justificativas dos grupos.

Sistematizamos, no Quadro 3, os principais aspectos intrínsecos aos processos de raciocínio dos estudantes sobre o tópico Máximos e Mínimos, mobilizados a partir de uma tarefa cuidadosamente elaborada para esse fim, ou seja, os aspectos constituidores das categorias de análise do estudo.

Categoria	***Princípios destacados a partir das resoluções e justificativas dos grupos***
Mobilização e articulação de representações	Mobilização de representações geométricas, tabulares e algébricas Articulação entre representações Interpretação da relação entre representações
Formulação de justificativas e conclusões	Formulação de hipóteses sobre a relação entre grandezas Testagem e validação de hipóteses Validação das resoluções

Quadro 3 – Aspectos constituintes das categorias de análise
Fonte: elaborado pelos autores.

Relativamente ao *lesson study*, destacamos que o planejamento da aula de investigação – ancorado no estudo do currículo e em resultados de pesquisa, bem como na análise de diferentes tipos de contextos temáticos e de tarefas – possibilitou a preparação de uma tarefa interessante e desafiadora; a dinâmica da aula de investigação favoreceu o trabalho autônomo dos estudantes sobre a tarefa, a proposição, testagem e validação de hipóteses, assim como a formulação de conclusões e validação de resultados; a observação realizada por professores com experiência em Educação Matemática e em Cálculo possibilitou a explicitação de diferentes aspectos do raciocínio dos estudantes; a discussão coletiva das resoluções dos grupos favoreceu a formulação de conclusões mais elaboradas e coerentes, estimulou a proposição de pequenas generalizações e embasou a formalização das aprendizagens alcançadas a partir da aula.

Os aspectos constituintes das categorias de análise, explicitados no Quadro 3, são, a seguir, confrontados e discutidos com o referencial teórico do estudo.

6 Discussão e conclusões

Mobilização e articulação de representações. O desenvolvimento do pensamento

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n77a06

matemático (TALL, 2004), do raciocínio matemático, assim como a capacidade de resolver problemas em distintos campos do conhecimento mediante a apropriação de um conjunto de ferramentas matemáticas basilares (ALVINE *et al.*, 2007; ALVARENGA; DORR; VIEIRA, 2016) são processos circunscritos no ensino de Cálculo, incluindo-se, portanto, o tópico Máximos e Mínimos. Para tanto, esse processo solicita ambientes desafiadores (CHAPPELL; KILLPATRICK, 2003), tarefas específicas (FUJII, 2013) e abordagens que favoreçam o raciocínio e a expressão do pensamento matemático, para os quais as representações matemáticas são fundamentais, assim como pressupõe do professor a capacidade de conduzir as discussões tanto no trabalho autônomo dos estudantes, durante a resolução da tarefa, como na discussão coletiva.

Os resultados do estudo evidenciam que o contexto que embasou a tarefa constituiu-se em catalisador de ideias e relações matemáticas, na medida em que os estudantes puderam *mobilizar as representações geométrica, tabular e algébrica* (OTTEN *et al.*, 2009) das grandezas (variáveis) envolvidas na função a ser minimizada (comprimento total de fio do circuito de piquetes). Além disso, a abordagem dada ao tópico Máximos e Mínimos, devido ao *design* da tarefa e à estrutura da aula, propiciou aos estudantes realizarem a *articulação entre as representações* mobilizadas para resolver a tarefa e, especialmente, para fundamentarem e justificarem as estratégias propostas para resolvê-la. Ao articularem as distintas representações nos seus discursos (OTTEN *et al.*, 2009), tais como nas explicações, argumentos e justificativas, os estudantes desenvolveram o raciocínio matemático (MORAIS; SERRAZINA; PONTE, 2018; TREVISAN; ARAMAN, 2021), realizando aprendizagens relativas ao Cálculo, tais como a ideia de maximização e minimização e derivadas.

Além disso, a análise apontou que o estudo do tópico possibilitou a *interpretação da relação entre representações*, na medida em que os estudantes tiveram a possibilidade de explorar e compreender conceitos de Cálculo a partir de um contexto familiar e, assim, atribuírem significados ao objeto matemático e suas representações (TALL, 1992). O estudo de Máximos e Mínimos, mediado por uma tarefa estruturada em um contexto envolvendo uma situação próxima dos estudantes, favoreceu a compreensão do tópico (MARIANO *et al.*, 2021; RICHIT; RICHIT: RICHTER, 2023), visto que os estudantes realizaram uma interpretação orgânica e profunda das grandezas envolvidas no problema e da relação entre as representações dessas grandezas.

A representação tabular (MARIANO *et al.*, 2021), por exemplo, foi determinante na validação das dimensões ideais para minimizar o perímetro dos piquetes e comprimento total de fio do circuito de piquetes. Ao explorarem as variações das grandezas envolvidas na função

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n77a06

(FAJAR *et al.*, 2017) a ser minimizada no problema, sistematizadas em tabela, e as transformações produzidas na estimativa do perímetro mínimo e na representação geométrica dos piquetes, os estudantes compreenderam a relação entre essas grandezas: a largura e a altura dos piquetes deveriam ter dimensões próximas; as medidas ideais deveriam, ao mesmo tempo, minimizar o perímetro e se aproximar das dimensões do quadrado de mesma área (750 m²) para garantir a preservação do pasto e o bem-estar dos animais.

Por fim, a mobilização das representações geométrica, tabular e geométrica, cuidadosamente articuladas e interpretadas, promoveu mudanças no ensino de Cálculo e favoreceu a aprendizagem de conceitos matemáticos pelos estudantes (TALL, 2004), porque promoveu a flexibilidade do pensamento matemático, permitindo-os transitar entre o processo algébrico de manipular expressões matemáticas e o processo matemático mais amplo (TALL, 1991) que envolvia a minimização do comprimento total de fio do circuito de piquetes, assegurando o melhor manejo dos animais e do pasto.

Inferimos, assim, que a mobilização de distintas representações e a articulação entre elas possibilitaram aos estudantes produzirem uma imagem conceitual (TALL; VINNER, 1981) do tópico Máximos e Mínimos, embasando a interpretação dessas representações e das relações intrínsecas a elas, realizando, assim, uma aprendizagem significativa desse tópico curricular (ALMEIDA; VISEU, 2002). Da mesma forma, o envolvimento com uma tarefa de natureza exploratória favoreceu aos estudantes elaborarem uma definição conceitual (TALL, 2004), mediante a verbalização das relações entre os conceitos representados.

Nessa perspectiva, consideramos que a aula de investigação que embasou a abordagem de Máximos e Mínimos, por sua estrutura organizada em quatro fases e pelo contexto da tarefa, proporcionou aos estudantes estudarem esse tópico a partir da investigação e da descoberta, superando as práticas convencionais em que são instruídos a representarem, de maneira formal, ideias muitas vezes intuitivas (MORENO-ARMELLA, 2021), que frequentemente incorre na frustração e no fracasso dos estudantes nessa componente (SILVA, 2011). Tiveram, assim, a possibilidade de realizarem aprendizagens por meio da exploração de uma situação instigadora e da descoberta de conceitos e relações entre conceitos (TALL; MEJÍA-RAMOS, 2004).

Formulação de justificativas e conclusões. Abordagens abertas e apoiadas em contextos instigantes, a exemplo da aula de investigação citada nesse estudo, podem favorecer a formalização de conceitos e relações matemáticas que embasam a comunicação de processos matemáticos e resultados (ALMEIDA; FATORI; SOUZA, 2007). A *formulação de hipóteses sobre a relação entre as grandezas* envolvidas na função a ser minimizada, princípio basilar do raciocínio matemático (MATA-PEREIRA; PONTE, 2018; MORAIS; SERRAZINA; PONTE,

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n77a06

2018), caracterizou o processo por meio do qual os estudantes mobilizaram conceitos matemáticos prévios e buscaram estabelecer relações entre eles para sustentarem afirmações ou conclusões sobre as dimensões dos piquetes que minimizavam o perímetro dos piquetes, assegurando o manejo adequado do gado de leite e da pastagem. A análise evidencia que o contexto da tarefa favoreceu a formulação de argumentos para validar (ou não) as hipóteses, processo que os levou a movimentarem e aprofundarem conhecimentos, bem como propiciou que desenvolvessem novos conhecimentos matemáticos mediante a elaboração de novas conjecturas ou aprimoramento de hipóteses já formuladas (MATA-PEREIRA; PONTE, 2018; MORAIS; SERRAZINA; PONTE, 2018; TREVISAN; ARAMAN, 2021), e exemplo da aplicação de derivadas na resolução de problemas de otimização.

O tópico Máximos e Mínimos, estudado a partir de um contexto familiar aos estudantes, favoreceu a *testagem e validação de hipóteses* sobre as medidas que minimizam o perímetro de um piquete. Esse processo de exploração, que mobilizou conhecimentos matemáticos prévios (MORAIS; SERRAZINA; PONTE, 2018), estimulou o pensamento matemático (TALL, 2004; TALL; MEJÍA-RAMOS, 2004; TALL, 2013), permitindo que validassem *as resoluções* mediante a formulação de uma definição conceitual do tópico, caracterizada pelas imagens conceituais e as formas verbais mobilizadas para explicitá-lo (TALL; VINNER, 1981), bem como a elaboração de uma conclusão matemática relativa à relação entre as medidas ideais para minimizar o perímetro de um piquete retangular: as medidas de x e y deveriam ser próximas.

Adicionalmente, essa conclusão levou-os a estabelecerem uma relação entre as medidas ideais de x e y, a área e o perímetro de cada piquete, a saber: quando as medidas de x e y são mais próximas, o perímetro é minimizado e o formato mais quadrangular assegura uma melhor movimentação para os animais e a preservação do pasto. Portanto, o envolvimento dos estudantes em uma tarefa próxima da realidade deles oportunizou o desenvolvimento de processos do raciocínio matemático, mediante a formulação e verificação de conjecturas/hipóteses (TREVISAN; ARAMAN, 2021), assim como a validação dos resultados. Esses aspectos corroboram a centralidade do professor nesse processo, a importância de propor situações mobilizadoras da interação entre os estudantes e da comunicação de ideias matemáticas, assim como da elaboração de tarefas que suscitem o raciocínio matemático (MATA-PEREIRA; PONTE, 2018; TREVISAN; ARAMAN, 2021; FUJII, 2018).

Além disso, a abordagem concretizada na aula de investigação representou uma mudança no ensino, à medida que a aula expositiva deu lugar para a abordagem orientada para a aprendizagem participativa dos estudantes, mas que precisa alcançar outras componentes curriculares universitárias (FAJAR *et al.*, 2017).

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n77a06

Os resultados da investigação vêm contribuir para as discussões sobre as possibilidades e limitações da dinamização de *lesson study* no ensino universitário e, especialmente, para a compreensão sobre as contribuições dessa abordagem para a aprendizagem dos alunos em componentes problemáticas, a exemplo do Cálculo. Dentre as contribuições possíveis, destacamos: (i) implementação de novas abordagens e estratégias no ensino universitário de Cálculo, as quais possam favorecer a compreensão dos estudantes em tópicos específicos; (ii) favorecer a aprendizagem dos estudantes mediante seu envolvimento com tarefas de natureza exploratória, estruturadas a partir de contextos temáticos próximos da realidade deles; (iii) investigar sobre a aprendizagem dos estudantes, suas dificuldades e compreender o processo de desenvolvimento conceitual dos objetos matemáticos a partir de esforços colaborativos de professores envolvidos no *lesson study*.

Por fim, destacamos algumas possíveis limitações do estudo. Observamos que as dificuldades manifestadas pelos estudantes estão relacionadas a lacunas mais amplas do domínio matemático, as quais não foram consideradas inicialmente. Também, verificamos que os estudantes anteciparam a questão da minimização de material, o que poderia ter motivado uma abordagem menos guiada ao objeto pretendido e, portanto, mais desafiadora. Por exemplo, incluir um desafio intermediário que solicitasse determinar medidas que minimizam o perímetro de um piquete e confrontá-los: *as medidas que minimizam o perímetro de um piquete também minimizam o comprimento total de fio do circuito de piquetes?*

Agradecimentos

Agradecemos aos acadêmicos do Curso de Licenciatura em Matemática, participantes da investigação. Agradecemos ao CNPq pelo apoio financeiro (Processo N.º 402748/2021-2).

Referências

ALMEIDA, L. M. W.; PALHARINI, B. N. Os “Mundos da Matemática” em Atividades de Modelagem Matemática. **Bolema**, Rio Claro, v. 26, n. 43, p. 907-934, Ago. 2012. Disponível em: https://doi.org/10.1590/S0103-636X2012000300008. Acesso em: 26 jul. 2023.

ALMEIDA, L. M. W.; FATORI, L. H.; SOUZA, L. G. S. Ensino de Cálculo: uma abordagem usando Modelagem Matemática. **Revista Ciência e Tecnologia**, São Paulo, v. 10, n. 16, p. 47-59, 2007.

ALMEIDA, C.; VISEU, F. Interpretação gráfica das derivadas de uma função por professores estagiários de Matemática. **Revista Portuguesa de Educação**, Braga, v. 15, n. 1, p. 193-219, 2002.

ALVARENGA, K. B.; DORR, R. C.; VIEIRA, V. D. O ensino e a aprendizagem de cálculo diferencial e integral: características e interseções no centro-oeste brasileiro. **Revista Brasileira de Ensino**

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n77a06

Superior, Brasília, v. 2, n. 4, p. 46-57, 2016. Disponível em: https://doi.org/10.18256/2447-3944/rebes.v2n4p46-57. Acesso em: 26 jul. 2023.

ALVES, M.; COUTINHO, C.; ROCHA, A. M.; RODRIGUES, C. Fatores que influenciam a aprendizagem de conceitos matemáticos em cursos de engenharia: Um estudo exploratório com estudantes da Universidade do Minho. **Revista Portuguesa de Educação**, Braga, v. 29, n. 1, p. 259-293, 2016.

ALVINE, A.; JUDSON, T. W.; SCHEIN, M.; YOSHIDA, T. What graduate students (and the rest of us) can learn from lesson study. **College Teaching**, London, v. 55, n. 3, p. 109-113, 2007. Disponível em: https://doi.org/10.3200/CTCH.55.3.109-113. Acesso em: 26 jul. 2023.

ANTON, H.; BIVENS, I.; DAVIS, S. **Cálculo**. 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2014. (Vol. 1).

BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. Lisboa: Edições 70, 2003.

BECKER, J.; GHENCIU, P.; HORAK, M.; SCHROEDER, H. A college lesson study in calculus, preliminary report. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, Turkey, v. 39, n. 4, p. 491-503, 2008. Disponível em: https://doi.org/10.1080/00207390701867463. Acesso em: 20 abr. 2023.

BRUNER, J. S. **Uma Nova Teoria de Aprendizagem**. Rio de Janeiro: Bloch, 1973.

CANAVARRO, A.P. Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. **Educação e Matemática**, Lisboa, [s.v.], n. 115, p.11-17, 2011.

CHAPPELL, K.K.; KILLPATRICK, K. Effects of Concept-Based Instruction on Students' Conceptual Understanding and Procedural Knowledge of Calculus. **Primus**, London, v. 13, n. 1, p. 17-37, 2003. Disponível em: https://doi.org/10.1080/10511970308984043. Acesso em: 26 jul. 2023.

CAVASOTTO, M. **Dificuldades na aprendizagem de cálculo**: o que os erros cometidos pelos alunos podem informar. 2010. 146 f. Dissertação (Mestrado em Ciências e Matemática) - Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2010.

CERBIN, B. **Lesson study**: Using classroom inquiry to improve teaching and learning in higher education. Local de publicação: Stylus Publishing, LLC., 2012.

DANS-MORENO, E.; RODRÍGUEZ-VÁSQUEZ, F. M.; GARCÍA-GARCÍA, J. Conexiones matemáticas asociadas a las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. **PNA-Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática**, Granada, v. 17, n. 1, p. 89-116, Out. 2022. https://doi.org/10.30827/pna.v17i1.23931, Granada, v. 17, n. 1, p. 25-50, 2022.

ERICKSON, F. Qualitative methods in research on teaching. *In:* Wittrock, M. C. (ed.). **Handbook of research on teaching.** New York: Macmillan, 1986. p.119-161.

FAJAR, M. Y.; HARAHAP, E.; SUKARSIH, I.; ROHAENI, O.; SUHAED, D. Implementation of Lesson Study on Integral Calculus Course. *In:* INTERNATIONAL CONFERENCE ON LESSON STUDY, 14, 2017, Lombok. **Proceedings…** Lombok: Universitas Hanzanwadi, 2017. p. 400-407. Disponível em: http://repository.unisba.ac.id/bitstream/handle/123456789/15636/fulltext_fajar_proceeding_icls_2017_sv.PDF?sequence=1&isAllowed=y. Acesso em: 26 jul. 2023.

FUENTEALBA, C.; TRIGUEROS, M.; SÁNCHEZ-MATAMOROS, G.; BADILLO, E. Los mecanismos de asimilación y acomodación en la tematización de un Esquema de derivada. **Avances de Investigación en Educación Matemática**, Madrid, v. 21, [s.n.], p. 23-44, Abr. 2022.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n77a06

FUJII, T. The critical role of task design in lesson study. *In:* INTERNATIONAL CONGRESS ON MATHEMATICAL EDUCATION, 22, 2013, Oxford. **Proceedings…**Oxford: Oxford University, 2013. pp.273-286. Disponível em: https://www.mathunion.org/fileadmin/ICMI/files/Digital_Library/Studies/Fujii_Japan_ICMI_Study_FINAL_200130822.pdf . Acesso em: 26 jul. 2023

FUJII, T. Lesson study and teaching mathematics through problem solving: The two wheels of a cart. *In:* QUARESMA, M.; WINSLØW, C.; CLIVAZ, S.; PONTE, J. P. da; NÍ SHÚILLEABHÁIN, A.; TAKAHASHI, A. (eds.). **Mathematics lesson study around the world:** Theoretical and methodological issues. New York: Springer, 2018. p. 1-21.

HENRIQUES, A.; ALMOULOUD, S. A. Teoria dos registros de representação semiótica em pesquisas na Educação Matemática no Ensino Superior: uma análise de superfícies e funções de duas variáveis com intervenção do software Maple. **Ciência e Educação**, Bauru, v. 22, n. 2, p. 465-487, 2016. Disponível em: https://doi.org/10.1590/1516-731320160020012. Acesso em: 26 jul. 2023.

HERVAS, G. Lesson Study as a Faculty Development Initiative in Higher Education: A Systematic Review. **Aera Open**, Washington DC, v. 7, [s.n.], p. 233-285, Jan. 2021. https://doi.org/10.1177/2332858420982564. Acesso em: 10 dez. 2022.

ISODA, M. **Japanese lesson study in mathematics**: Its impact, diversity and potential for educational improvement. Singapura: World Scientific, 2007.

LANNIN, J.; ELLIS, A. B.; ELLIOT, R. **Developing essential understanding of mathematics reasoning for teaching mathematics in prekindergarten-grade 8**. Reston: National Council of Teachers of Mathematics, 2011.

LASUT, M. Effect of implementation lesson study to improve students' learning achievement in Calculus I of mathematics department. **Journal of Education and Practice**, [s.l], v. 4, n. 20, p. 182-188, 2013.

MARIANO, D. L. F. *et al*. Lesson Study: A Tool for an Improved Instructional Design in Teaching Integration by Parts. **Turkish Journal of Computer and Mathematics Education**, Ankara, v. 12, n. 3, p. 3862-3869, Abr. 2021. Disponível em: https://doi.org/10.17762/turcomat.v12i3.1675. Acesso em: 26 jul. 2023.

MATA-PEREIRA, J.; PONTE, J. P. Promover o Raciocínio Matemático dos Alunos: uma investigação baseada em design. **Bolema,** Rio Claro, v. 32, n. 62, p. 781-801, Dez. 2018. Disponível em: https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a02. Acesso em: 26 jul. 2023.

MEYER, C. **Derivada/Reta Tangente**: Imagem Conceitual e Definição Conceitual. 2003. 159 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2003.

MORAIS, C.; SERRAZINA, L.; PONTE, J. P. Mathematical Reasoning Fostered by (Fostering) Transformations of Rational Number Representations. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 20, n. 4, p. 552-570, 2018. Disponível em: https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.v20iss4id3892. Acesso em: 26 jul. 2023.

MORENO-ARMELLA, L. The theory of calculus for calculus teachers. **ZDM Mathematics Education**, Berlim, v. 53, n. 3, p. 621-633, 2021. Disponível em: https://doi.org/10.1007/s11858-021-01222-9. Acesso em: 26 jul. 2023.

MURATA, A. Conceptual overview of lesson study: Introduction. *In:* HART, L.; ALSTON, A.; MURATA, A (eds.). **Lesson study research and practice in mathematics education**: Learning together. Dordrecht: Springer, 2011. p. 1-12.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n77a06

OTTEN, S.; PARK, J.; MOSIER, A.; KAPLAN, J. J. Lesson Study as a Tool for Research: A Case of Undergraduate Calculus. **Lesson Study – Research**, [s.l], [s.v], p.1-26, 2009. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/228546282_Lesson_Study_as_a_Tool_for_Research_A_Case_of_Undergraduate_Calculus. Acesso em: 20 abr. 2023.

PONTE, J. P.; QUARESMA, M.; MATA PEREIRA, J.; BAPTISTA, M. O estudo de aula como processo de desenvolvimento profissional de professores de matemática. **Bolema,** Rio Claro, v. 30, n. 56, p. 868-891, Dez. 2016. Disponível em: https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n56a01. Acesso em: 26 jul. 2023.

RICHIT, A. Estudos de aula na perspectiva de professores formadores. **Revista Brasileira de Educação**, Rio de Janeiro, v. 25, n. 2, p. 1-24, 2020. https://doi.org/10.1590/s1413-24782020250044. Acesso em: 20 abr. 2023.

RICHIT, A. Desenvolvimento Profissional de Professores Universitários em Lesson Study. *In:* INTERNATIONAL CONGRESS OF EDUCATIONAL SCIENCES AND DEVELOPMENT, 9, 2021, Granada. **Proceedings…**, Granada: Universidad de Granada, 2021. pp. 1-6.

RICHIT, A.; PONTE, J. P.; RICHIT, L. A. Conhecimento profissional de professores universitários em um estudo de aula em Cálculo. **PNA-Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática**, Granada, v. 17, n. 1, p. 89-116, out. 2022. https://doi.org/10.30827/pna.v17i1.23931. Acesso em: 20 abr. 2023.

RICHIT, A.; PONTE, J. P.; TOMASI, A. P. Aspects of Professional Collaboration in a Lesson Study. **International Electronic Journal of Mathematics Education**, Eastbourne, v. 16, n. 2, em0637, mai. 2021. https://doi.org/10.29333/iejme/10904. Acesso em: 20 abr. 2023.

RICHIT, A.; PONTE, J. P.; TOMKELSKI, M. L. Estudos de aula na formação de professores de matemática do ensino médio. **Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos**, Brasília, v. 100, p. 54-81, Abr. 2019. https://dx.doi.org/10.24109/2176-6681.rbep.100i254.3961. Acesso em: 20 abr. 2023.

RICHIT, A.; RICHIT , L. A.; RICHTER, A. Aportes del Contexto de Tarea en el Abordaje de Máximos y Mínimos en un Estudio de Clase en Cálculo. **PARADIGMA**, [S. l.], v. 44, n. 2, p. 317-339, 2023. https://dx.doi.org/ 0.37618/PARADIGMA.1011-2251.2023.p317-339.id1422. Acesso em: 10 out. 2023.

RICHIT, A.; TOMKELSKI, M. L. Meanings of mathematics teaching forged through reflection in a lesson study. **Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education**, London, v. 18, n. 9, em2151, Ago. 2022. https://doi.org/10.29333/ejmste/12325. Acesso em: 10 out. 2023.

SANGPOM, W. *et al.* Advanced Mathematical Thinking and Students' Mathematical Learning: Reflection from Students' Problem-Solving in Mathematics Classroom**. Journal of Education and Learning**, Ontário, v. 5, n. 3, 2016. Disponível em: https://doi.org/10.5539/jel.v5n3p72. Acesso em: 26 jul. 2023.

SILVA, B. A. Diferentes dimensões do ensino e aprendizagem do Cálculo. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 13, n. 3, p. 393-413, 2011.

TALL, D. O. **Advanced Mathematical Thinking**. Dordrecht: Kluwer, 1991.

TALL, D. O. The Transition to Advanced Mathematical Thinking: Functions, limits, infinity and proof. *In*: D. A. Grouws (Ed). *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, Macmillan, p. 495-511, 1992.

TALL, D. O. Introducing the three worlds of mathematics. **For the Learning of Mathematics**,

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n77a06

Montreal, v. 23, n. 3, p. 29-33, 2004.

TALL, D.O. **How humans learn to think mathematically**. Cambridge: Cambridge University Press, 2013.

TALL, D. O.; MEJIA-RAMOS, J. P. Reflecting on post-calculus-reform. Opening plenary Topic Group 12 –Calculus. *In*: INTERNATIONAL CONGRESS OF MATHEMATICS EDUCATION, 10, 2004, Copenhagen. **Procceedings…** Copenhagen: Danish Technical University, 2004. pp.1-12. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/240213758_REFLECTING_ON_POST-CALCULUS-REFORM. Acesso em: 10 out. 2023.

TALL, D. O.; VINNER, S. Concept Image and Concept Definition in Mathematical with particular reference in Limits and Continuity. **Educational Studies in Mathematics,** Dordrecht, v. 12, [s.n.], p. 151-169, may. 1981. Disponível em: https://doi.org/10.1007/BF00305619. Acesso em: 26 jul. 2023.

TREVISAN, A. L.; ARAMAN, E. M. D. O. Processos de raciocínio matemático mobilizados por estudantes de Cálculo em tarefas envolvendo representações gráficas. **Bolema**, Rio Claro, v. 35, n. 69, p.158-178, abr. 2021. Disponível em: https://doi.org/10.1590/1980-4415v35n69a08. Acesso em: 26 jul. 2023.

WHITE, A. L.; LIM, C. S. Lesson study in Asia Pacific classrooms: Local responses to a global movement. **ZDM Mathematics Education**, v. 40, n. 6, p. 915-925, 2008. Disponível em: https://doi.org/10.1007/s11858-008-0138-4. Acesso em: 26 jul. 2023.

Submetido em 23 de Janeiro de 2023.
Aprovado em 29 de Maio de 2023.