ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a10

Conhecimento matemático de futuros professores: aprendizados realizados num estudo de aula

Mathematical knowledge of prospective teachers: learning in a lesson study

Raquel **Vieira**[*]

ORCID iD 0000-0001-6699-9652

João Pedro da **Ponte**[**]

ORCID iD 0000-0001-6203-7616

Joana **Mata-Pereira**[***]

ORCID iD 0000-0002-3446-014X

Resumo

O nosso objetivo é conhecer os aprendizados no domínio do conhecimento matemático, no tópico de *Sequências e Regularidades*, realizados por duas futuras professoras dos anos iniciais durante a sua participação num estudo de aula, e conhecer as suas percepções acerca do seu aprendizado. Seguimos uma abordagem qualitativa, no quadro do paradigma interpretativo e integrada numa investigação baseada em *design*. Recolhemos dados, recorrendo à observação participante, diário de bordo, recolha documental e entrevistas semiestruturadas. Para a análise dos dados, mobilizamos o modelo *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge*, no domínio do conhecimento matemático, vertente que aqui aprofundamos. Os resultados mostram que as futuras professoras desenvolveram o seu conhecimento matemático, no subdomínio do conhecimento acerca do tópico, ao colocarem em práticas conceitos, procedimentos e registros de representação; do conhecimento acerca da estrutura da matemática, quando estabelecem conexões baseadas na simplificação e no aumento de complexidade e do conhecimento de práticas em matemática, ao aplicarem o seu raciocínio, justificação e estratégias de generalização na resolução de tarefas.

Palavras-chave: Conhecimento matemático. Formação inicial de professores. Estudo de aula.

Abstract

We aim to observe the learning of two prospective elementary teachers in the domain of mathematical knowledge, in the topic of *Sequences and Regularities*, during their participation in a lesson study and see their perceptions about their learning. We followed a qualitative approach and interpretive paradigm, within design-based research. We collected data using participant observation, researchers' journal, document collection and semi-structured. We mobilized the *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* model to analyze data, more specifically, in the field of mathematical knowledge. The results show that future teachers developed their mathematical knowledge, in the subdomain of knowledge about the topic, by practicing concepts, procedures and representation registers; knowledge about the structure of mathematics, when establishing connections based on simplification and

[*] Mestre em Matemática (Ensino de) pela Universidade de Aveiro. Doutoranda em Educação, especialidade de Didática da Matemática, do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa (IE-ULisboa), Lisboa, Portugal. E-mail: raquelsvieira@campus.ul.pt.
[**] Doutor em Educação pela University of Georgia (UGA). Professor catedrático do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa (IE-ULisboa), Lisboa, Portugal. E-mail: jpponte@ie.ulisboa.pt.
[***] Doutora em Educação, especialidade de Didática da Matemática, Instituto de Educação da Universidade de Lisboa (IE-ULisboa). Professora Auxiliar Convidada do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa (IE-ULisboa), Lisboa, Portugal. E-mail: joanamatapereira@campus.ul.pt.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a10

increasing complexity and knowledge of mathematical practices, when applying their reasoning, justification and generalization strategies in solving tasks.

Keywords: Mathematical knowledge. Initial Teacher Education. Lesson study.

1 Introdução

No campo de ação do professor que ensina matemática, confluem conhecimentos de natureza diversa (CARRILLO-YAÑEZ *et al.*, 2018; SHULMAN, 1986), onde se inclui o conhecimento matemático. É, por isso, essencial investigar formas de potenciar esta vertente do conhecimento, em particular, num momento fulcral que é a formação inicial. A existência de dificuldades no campo do conhecimento matemático dos futuros professores que ensinam Matemática, em particular os dos primeiros anos, tem sido alvo de investigações e, algumas, identificam a existência de lacunas, que geram dificuldades no ensino da disciplina (BAUMERT *et al.*, 2010; FERNANDEZ; ZILLIOX, 2011; MURATA; POTHEN, 2011, TATTO, 2018).

Um aspeto comum a estes estudos é que todos eles apontam no sentido de que a solução não passa por criar mais disciplinas de Matemática nos cursos de formação inicial, mas, antes, incluir conteúdos que possam ser mobilizados para a compreensão de problemas práticos provenientes da sala de aula e que fomentem a ligação entre teoria e prática.

A procura de modelos que respondam favoravelmente aos desafios da formação inicial, colocando os conteúdos teóricos em diálogo com a resolução dos problemas práticos, levou a um grande interesse nos estudos de aula. Esse processo formativo de natureza reflexiva, onde os professores trabalham conjuntamente num problema identificado, planificam e realizam uma aula que visa a resolução desse problema (FUJII, 2018), não só é adaptável aos cursos de formação inicial como permite potenciar novas experiências e aprendizagens nos futuros professores (SHIMIZU; CHINO, 2015).

Orientados por esses pressupostos, realizamos um estudo de aula integrado na Prática Pedagógica de um curso de formação inicial de professores do 1.º Ciclo do Ensino Básico (1.º a 4.º ano de escolaridade para crianças entre seis e dez anos de idade), numa instituição portuguesa de ensino superior. Participaram duas futuras professoras, o professor supervisor da instituição, a professora cooperante da escola e a investigadora (primeira autora do artigo).

As futuras professoras trabalharam conjuntamente com os restantes participantes num problema previamente identificado, relacionado com *Sequências e Regularidades*, planificaram e conduziram aulas que visaram a resolução desse problema, focando a aprendizagem dos alunos.

Inicialmente, as futuras professoras revelaram dificuldades ao nível do conhecimento matemático. Este artigo centra-se nesse aspeto particular e procura conhecer os aprendizados, no domínio do conhecimento matemático, realizados pelas duas futuras professoras, ao participarem no estudo de aula. Procuramos, ainda, conhecer as suas percepções sobre esses aprendizados.

2 Do conhecimento matemático do futuro professor ao estudo de aula na formação inicial

Limitações no conhecimento matemático impedem que os professores interpretem e apoiem o trabalho dos seus alunos, dificultando-lhes a capacidade de reconhecer falhas no seu raciocínio, especialmente em contextos desafiantes (BAUMERT *et al.*, 2010). Num estudo que analisou os programas de formação inicial de professores do 1.º ciclo de diversos países (TATTO, 2018), as dificuldades no conhecimento matemático dos futuros professores impediram a compreensão de tópicos com maior grau de complexidade, limitando-lhes a intervenção pedagógica. Porém, um elevado número de disciplinas de Matemática, durante a formação inicial, não parece assegurar, por si só, um desenvolvimento robusto do conhecimento matemático. É necessário que, nesses cursos, os tópicos matemáticos sejam integrados em contextos da realidade escolar em que os futuros professores atuam, para que possam planificar, intervir e refletir (TATTO, 2018) sobre eles. Contudo, ainda que a generalidade dos cursos de formação inicial integre, já, uma componente prática, é comum verificar que o envolvimento dos futuros professores é insuficiente (BIEDA; CAVANNA; JI, 2015).

A integração de estudos de aula nos dispositivos de formação inicial permite criar dinâmicas de trabalho colaborativo e reflexivo, que privilegiam o diálogo entre a teoria e a prática. Com origem no Japão, está enraizado no quotidiano das suas instituições escolares e é reconhecido como um dos mais importantes veículos de disseminação de estratégias pedagógicas inovadoras, que conferem melhorias na qualidade do sistema educativo (FUJII, 2018). Os investigadores consideram o estudo de aula uma boa prática de formação de professores pois: sustentam-se em ciclos de planeamento, antecipação, ação e reflexão; relacionam o contexto e a cultura em que ocorre; proporcionam trabalho colaborativo, relacionando vários intervenientes da ação educativa; sustentam-se em investigação; são desafiantes e focados nos aprendizados dos alunos (PONTE; WAKE; QUARESMA, 2020).

Há evidências de que os futuros professores, ao envolverem-se com o estudo de aula, realizam aprendizagens no campo do conhecimento matemático. No estudo de aula apresentado por Fernández e Zilliox (2011), os futuros professores, depois de confrontados com uma dificuldade num tópico matemático, e na iminência da condução da aula de investigação,

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a10

fizeram um forte investimento para a ultrapassar. Ao conduzi-la, o futuro professor pôde investigar e aceder, proximamente, aos mecanismos de aprendizagem dos seus alunos. Entre as ideias discutidas nas sessões de preparação e as que os alunos manifestam em sala de aula, criam-se oportunidades de os futuros professores desenvolverem um conhecimento mais aprofundado do conteúdo matemático (FERNANDEZ; ZILLIOX, 2011; MURATA; POTHEN, 2011).

3 Conhecimento matemático e *Sequências e Regularidades* no modelo *MTSK*

A discussão sobre o modo de conceitualizar o conhecimento do professor adquiriu maior expressão após a proposta de Shulman (1986) - *Pedagogical Content Knowledge.* Baseando-se nesse modelo e procurando garantir as especificidades do conhecimento do professor que ensina Matemática, distintas das dos professores que ensinam outras disciplinas, Carrillo-Yañez *et al.* (2018) apresentam um modelo teórico e analítico, denominado por *Mathematics Teachers' Specialized Knowledge (MTSK)* (Figura 1).

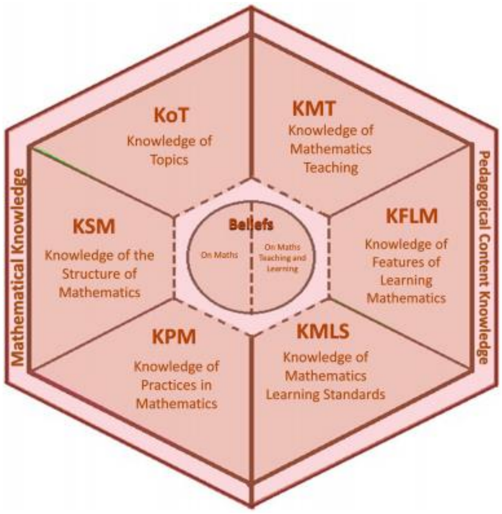

Figura 1 – *Mathematics Teachers' Specialized Knowledge* (MTSK)
Fonte: Carrillo-Yañez *et al.* (2018, p. 241)

O modelo MTSK tem sido usado por Carrillo-Yañez e seus colaboradores em contextos que têm conduzido investigadores e professores a identificaram e refletiram, conjuntamente, sobre boas práticas de ensino, favorecendo, assim, a reflexão sobre a prática. Desse modo, esse modelo não serve um propósito de avaliação, procurando, antes, "apreender o conhecimento do professor, especificamente os elementos que compõem esse conhecimento e as interações entre eles" (CARRILLO *et al.*, 2018, p. 239), constituindo um modelo analítico de interesse para a investigação sobre estudos de aula.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a10

Tal como na proposta de Shulman (1986), que considera dois grandes domínios do conhecimento: o *Subject Matter Knowledge* (SMK) e o *Pedagogical Content Knowledge* (PCK), o modelo MTSK considera o *Mathematical Knowledge* (MK) e o *Pedagogical Content Knowledge* (PCK). Cada um deles subdivide-se em três subdomínios, que se comunicam e se inter-relacionam, entre si, com o elemento central do modelo – *Beliefs*. O distanciamento do modelo de Shulman (1986) surge quando os autores pretendem ressalvar o conhecimento que um professor de Matemática possui na sua disciplina, dentro do contexto educacional (MK), criando a necessidade de diferenciar a matemática como disciplina científica da matemática escolar.

Nesse sentido, Carrillo-Yañez *et al.* (2018, p. 239) referem que esse modelo tem em consideração que "a especificidade do conhecimento do professor em relação ao ensino de matemática afeta tanto o SMK quanto o PCK juntos e, como tal, não pode ser considerado um subdomínio de ambos". Assim, os subdomínios do MK são definidos em termos da própria matemática, onde a inclusão de itens é independente do nível em que o professor atua.

No caso, o MK do professor é subdivido em três subdomínios: "o conteúdo matemático propriamente dito (Conhecimento do Tópico); os sistemas de interligação que vinculam a disciplina (Conhecimento da Estrutura da Matemática); e como se procede em matemática (Conhecimentos de Práticas em Matemática)" (CARRILLO-YAÑEZ *et al.*, 2018, p. 239). De seguida, aprofundamos cada um deles, ilustrando-os com o tema de *Sequências e Regularidades.*

O *Conhecimento do Tópico [KoT]* refere-se ao conhecimento fundamentado do tópico matemático, com grau de formalismo e complexidade superior ao conteúdo a lecionar, e engloba quatro categorias: (i) *Procedimentos* – responde a questões de como, porquê e quando de um dado procedimento. Por exemplo, no contexto das *Sequências e Regularidades,* o professor deve conhecer estratégias de generalização (locais ou globais) e saber qual delas usar quando "pretende descobrir e comprovar propriedades que se verificam em toda uma classe de objetos" (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009, p. 10); (ii) *Definições, propriedades e fundamentos* – relaciona-se com o conhecimento que permite caracterizar um conceito e respectivas propriedades matemáticas, bases e fundamentos. Por exemplo, classificar sequências (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009), definir *lei de formação, ordem, termo, unidade de repetição* ou, conhecer a razão de *padrão* não ser um objeto matemático (CARRAHER; MARTINEZ; SCHLIEMANN, 2008); (iii) *Registros de representação* – abarca as múltiplas perspectivas de representação do mesmo tópico, incluindo notação e linguagem matemática.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a10

O tema das *Sequências e Regularidades* admite uma elevada diversidade de registros de representação – ativa, icónica e simbólica (PONTE; SERRAZINA, 2000) – muitas vezes, para expressar ideias associadas à generalização. É usada notação algébrica convencional, linguagem natural, diagramas, tabelas, expressões numéricas, e outros registros, dependendo do contexto; e (iv) *Fenomenologia e aplicações* – associada ao conhecimento de modelos, usos e aplicações do tópico. Por exemplo, o recurso a sequências que ampliem o conhecimento sobre uma situação, utilizando múltiplas linguagens da modelação matemática (KAPUT, 1999).

Por sua vez, o *Conhecimento da Estrutura da Matemática [KSM]* relaciona-se com as conexões entre tópicos matemáticos, relações de natureza interconceitual originadas pela demarcação dos objetos. Divide-se em quatro categorias:

- (i) *Conexões baseadas na simplificação,* que gerem o sequenciamento de conteúdos matemáticos, reconhecendo temas que devem anteceder a introdução do tópico. Por exemplo, os alunos devem dominar a sequência dos números naturais e dispor de estratégias de contagem, antes de resolverem tarefas que solicitem a lei de formação de uma dada sequência. O sucesso no trabalho com as sequências também depende do domínio de relações entre os números e operações e respectivas propriedades. Outro exemplo, relaciona-se com a análise de relações entre termos de uma sequência para indicar a lei de formação.
- (ii) C*onexões baseadas no aumento de complexidade,* que se relacionam com a conexão entre os temas que podem suceder a um tópico. Por exemplo, partindo de uma sequência, o professor pode planear abordar a adição sucessiva e a multiplicação. Outro exemplo, refere-se a quando é solicitado um termo de uma ordem (geralmente mais distante) dados os primeiros termos de uma sequência ou para determinar termos de ordens variadas, sendo conhecida a lei de formação.
- (iii) C*onexões auxiliares*, que são conexões entre o tópico em foco e outros conceitos matemáticos, bem como a demarcação dos objetos matemáticos (interconceitual) e prevê a mobilização do conceito num contexto mais amplo. Por exemplo, o conhecimento sobre simplificação de expressões algébricas pode auxiliar a compreensão do termo geral e da sequência respectiva. Além disso, o conhecimento matemático relativo a *Sequências e Regularidades* é importante ao estudo de funções, relações e de variação conjunta de duas variáveis (KAPUT, 1999). Note-se que não são consideradas conexões interdisciplinares.
- (iv) *Conexões transversais*, que evidenciam relações comuns existentes entre

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a10

diferentes conceitos. Por exemplo, a ideia matemática de adição sucessiva pode estar presente quando se explora uma sequência ou quando se resolvem problemas que envolvem multiplicação.

Finalmente, o *Conhecimento de Práticas em Matemática [KPM]*, que se relaciona com o trabalho realizado em matemática, e não com a forma de a ensinar. Interessa-se pela especificidade da atividade matemática, como os processos de raciocínio e modos de explorar e gerar novo conhecimento matemático e confere, ao professor, a capacidade de aceitar, refutar ou refinar as respostas dos seus alunos, sempre que necessário. Considera o conhecimento acerca das atividades de justificação, demonstração, dedução e indução, específicos a cada tópico e, ainda o uso de exemplos e contraexemplos.

No âmbito do tema em estudo, perante uma sequência, o professor deve conhecer a existência de diferentes níveis e abordagens de generalização, distinguindo a natureza empírica da teórica (CARRAHER; MARTINEZ; SCHLIEMANN, 2008), ou uma estratégia recursiva de uma global. E, ainda, conhecer as justificações que exprimem as estratégias usadas, que, no caso das sequências, vão da representação à contagem, passando pela estratégia aditiva, de objeto inteiro ou de decomposição dos termos (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009).

4 Metodologia de investigação

Nesta investigação seguimos uma abordagem qualitativa no quadro interpretativo (BOGDAN; BIKLEN, 1994) inserida numa metodologia de *investigação baseada em design* (IBD) constituída por dois ciclos concretizados ao longo de dois anos letivos (COBB *et al.*, 2003), correspondendo, este estudo de aula, à fase de intervenção do 1.º ciclo. Participaram duas futuras professoras dos anos iniciais, Beatriz e Diana (nomes fictícios), então, estudantes do 2.º ano de Mestrado em Educação Pré-escolar e Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico, curso que forma os professores para esse nível de ensino (que contempla os quatro primeiros anos de escolarização das crianças a partir dos seis anos de idade). Esse mestrado tem a duração de dois anos e uma forte componente de Prática de Ensino Supervisionada, nos quatro semestres que o constituem (dois primeiros semestres no contexto Pré- Escolar e os dois últimos no 1.º Ciclo do Ensino Básico).

O Mestrado tem, como pré-requisito de entrada, a conclusão de um ciclo de estudos de ensino superior de três anos (Licenciatura em Educação Básica), que, por sua vez, pressupõe a conclusão de doze anos de escolaridade e a realização de provas de acesso. A futura professora Beatriz, no ensino secundário (três anos imediatamente anteriores ao ensino superior),

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a10

frequentou o curso de Humanidades, onde o aprofundamento da disciplina de Matemática é muito menor, relativamente ao curso de Ciências, frequentado pela futura professora Diana.

Neste estudo de aula participaram, ainda, o professor supervisor da instituição de ensino superior, a professora cooperante da escola e a investigadora. O estudo de aula foi integrado nas atividades da disciplina de Prática Pedagógica (estágio) lecionada pelo professor supervisor, ocupou nove sessões de duas horas, entre setembro e novembro de 2019, e envolveu uma turma do 2.º ano de escolaridade, formada por dezesseis alunos com sete anos de idade.

Os dados recolhidos resultaram do contacto direto com os participantes ao longo do estudo de aula, fazendo uso da observação participante, do diário de bordo, da entrevista e da recolha documental (BOGDAN; BIKLEN, 1994). A observação participante e o diário de bordo construído pela investigadora, ao longo de todas as sessões (indicadas por S*x*) e das aulas de investigação (indicadas por AI*x*), permitiram o registro de descrições detalhadas. Foram produzidos registros audiovisuais, que permitiram uma transcrição de situações vividas nas sessões, e recolhidas as planificações das aulas, tarefas e produções escritas dos alunos, bem como os dois relatórios produzidos pelas futuras professoras, contendo a reflexão sobre as duas aulas de investigação. A entrevista final, semiestruturada (indicada como EF), obedeceu a um conjunto de questões direcionadas para o objetivo da investigação.

A análise dos dados, seguindo a metodologia de IBD, ocorreu ao longo de cada etapa do estudo de aula, assumindo níveis de análise diferenciados (COBB *et al.*, 2003). A análise continuada dos dados permitiu uma compreensão alargada da realidade, ajudando, em tempo útil, na tomada de decisões sobre a experiência de *design*. Partindo dos dados selecionados, transcritos e organizados, realizamos uma análise aprofundada, usando a categorização pré-estabelecida, relativa aos aprendizados realizados pelas futuras professoras, ao longo do estudo de aula, nas diferentes vertentes do seu MK.

As categorias decorrem dos subdomínios propostos por Carrillo-Yañez *et al.* (2018). Para o KoT e KSM seguimos as categorias sistematizadas pelos autores e, dada a inexistência de categorias para o KPM, assumimos duas categorias, relacionadas com as características desse subdomínio, que apresentamos no Quadro 1 e que decorrem da nossa interpretação sobre as características valorizadas pelos autores do modelo.

Subdomínio	**Código/ Categoria**
Conhecimento do tópico (KoT)	[KoT1] Procedimentos [KoT2] Definições, propriedades e fundamentos [KoT3] Registros de representação [KoT4] Fenomenologia e aplicações
Conhecimento da estrutura matemática (KSM)	[KSM1] Conexões baseadas na simplificação [KSM2] Conexões baseadas no aumento de complexidade [KSM3] Conexões auxiliares

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a10

	[KSM4] Conexões transversais
Conhecimento de práticas em matemática (KPM)	[KPM1] Generalização [KPM2] Justificação

Quadro 1 - Subdomínios e categorias do MK
Fonte: adaptado de Carrillo-Yañez *et al.* (2018, p. 242-245)

Neste artigo, enquadramos o processo de aprendizagem seguindo a perspectiva de Jarvis (2009, p. 25), que concebe a aprendizagem humana como

> [...] a combinação de processos, ocorridos ao longo da vida em que toda a pessoa - corpo (genético, físico e biológico) e mente (conhecimentos, habilidades, atitudes, valores, emoções, crenças e sentidos) - experiencia situações sociais, cujo conteúdo transforma o indivíduo cognitivamente, emocionalmente ou no seu sentido prático (ou através de qualquer combinação) e este [conteúdo] é integrado na biografia da pessoa individual, resultando numa pessoa em constante mudança (ou mais experiente).

Esse modo de entender aprendizagem considera a interação das variáveis Individual-Acão-Realidade-Experiência, retornando ao individual através da Reflexão. Compreender os aprendizados das futuras professoras à luz dessa definição, implica que identifiquemos as *disjunturas* (dificuldades relativas à ação do indivíduo face a uma experiência) e a respectiva *resolução* (como o indivíduo ultrapassou a dificuldade). Assim, quando, por exemplo, apresentamos uma *disjuntura* relacionada com o conhecimento do tópico, na categoria de procedimentos, usamos o marcador [KoT1-D1] e para a sua resolução [KoT1-R1]. Do mesmo modo, usamos marcadores para os subdomínios KSM e KPM e sistematizamos as *disjunturas* e *resoluções* respectivas, usando os descritores presentes no Quadro 2, que sistematiza um conjunto de conteúdos, direcionados aos subdomínios do MK, que consideramos essenciais ao tema *Sequências e Regularidades*. Quando o conhecimento mobilizado não está associado a *disjunturas* e *resoluções*, é identificado sem o uso de D ou R, por exemplo, [KoT1-1].

KoT1	[KoT1-1] Ajustar modo de expressar lei de formação ao contexto
	[KoT1-2] Usar relação de *termo e ordem* para estabelecer generalizações
	[KoT1-3] Identificar unidade de repetição numa sequência
KoT2	[KoT2-1] Caracterizar os conceitos de *termo, ordem* e *unidade de repetição*
	[KoT2-2] Classificar sequências
	[KoT2-3] Identificar *termo* geral
KoT3	[KoT3-1] Valorizar a linguagem natural para descrever a lei de formação
	[KoT3-2] Organizar informação relativa a sequências, com recurso a tabela
	[KoT3-3] Valorizar a diversidade de representações (icónica, ativa e simbólica) na resolução de tarefas relacionadas com sequências
KoT4	[KoT4-1] Relacionar o pensamento algébrico com aplicações a outras áreas disciplinares e no quotidiano
KSM1	[KSM1-1] Identificar relações entre termos de uma sequência para indicar a lei de formação
	[KSM1-2] Identifica temas que auxiliam a generalização e justificação
	[KSM1-3] Usam estratégias de decomposição dos termos para produzir generalizações

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a10

KSM2	[KSM2-1] Determinam termos seguintes dados alguns termos da sequência.
	[KSM2-2] Identificam temas que podem suceder as sequências
KSM3	[KSM3-1] Usar expressões algébricas para descrever leis de formação
KSM4	[KSM4-1] Relacionar uso de linguagem algébrica com vários contextos
KPM1	[KPM1-1] Reconhecer diferentes estratégias de generalização (recursivas e globais)
	[KPM1-2] Estabelecer generalizações de natureza empírica
KPM2	[KPM2-1] Justificar com níveis de formalidade distintos

Quadro 2 - Descritores do tema "Sequências e Regularidades para as categorias do MK
Fonte: elaborado pelos autores

5 O estudo de aula com as futuras professoras Beatriz e Diana

A preparação do estudo de aula e o papel de facilitador, ao longo das sessões, foi partilhado entre a investigadora e o professor supervisor da instituição de ensino superior. O critério de seleção das futuras professoras baseou-se no facto de o professor supervisor, nesse semestre, acompanhar apenas esse grupo de estudantes. Por motivos de calendarização, a escolha do tópico foi assegurada pelo professor supervisor, que sugeriu as *Sequências e Regularidades,* pela sua relevância para o 2º ano de escolaridade e por ser uma necessidade formativa naquela instituição de ensino superior. O estudo de aula ocupou um total de nove sessões, organizadas em cinco etapas (FUJII, 2018), onde estiveram sempre presentes os facilitadores (investigadora e professor supervisor), a professora cooperante e as duas futuras professoras.

i) Estudo da matemática e questões didáticas (1.ª e 2.ª sessões). Depois da identificação do tópico e dos objetivos apropriados ao público-alvo, aprofundamos o tópico *Sequências e Regularidades*, discutindo os conceitos e procedimentos relevantes, com suporte em documentos curriculares, manuais escolares e um artigo acadêmico (PONTE; WAKE; QUARESMA, 2020). Na 2.ª sessão, os participantes resolveram e compararam as suas resoluções, criando-lhes a possibilidade de ampliar conhecimentos essenciais para a fase posterior, de antecipação das respostas dos alunos (FUJII, 2018).

ii) Planificação de uma aula (3.ª, 4.ª e 6.ª sessões). Na planificação das duas aulas de investigação todos os participantes colaboraram ativamente. A escolha das tarefas ficou a cargo de Beatriz e Diana e a adaptação aos seus alunos foi discutida nas sessões. Depois de redigidas as tarefas, todos os participantes resolveram e partilharam o seu processo de resolução, dando lugar a um momento de comparação de respostas, que serviu de ponto de partida para a antecipação de respostas dos alunos. Privilegiamos a *abordagem exploratória*, onde, para além de gerir o trabalho dos alunos, o professor é chamado a interpretar e compreender como estes

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a10

resolvem a tarefa que lhes propôs e a promover, a partir dessas respostas, momentos de discussão coletivos, e de síntese (PONTE, 2005).

iii) Aula de investigação (5.ª e 7.ª sessões). Na terceira etapa, realizou-se um momento-chave de todo o processo (FUJII, 2018), as aulas de investigação, conduzidas por Beatriz e Diana, respectivamente, que colocaram em prática os planos elaborados. Os restantes participantes observaram e recolheram dados e não interferiram com o trabalho. Entre as duas aulas ocorreu uma sessão de planejamento, que permitiu ajustes, sugeridos pela experiência da primeira aula.

iv) Reflexão pós-aula de investigação (8.ª sessão). Na reflexão pós-aula, cada uma das futuras professoras refletiu sobre o seu percurso. Na discussão, confrontamos os registros efetuados e discutimos acerca das aprendizagens que consideramos ter sido realizadas pelos alunos, as dificuldades que revelaram e a forma como acolheram as atividades propostas.

v) Partilha de resultados (9.ª sessão). Por contingências de saúde pública não se concretizou.

6 Resultados

Nesta seção apresentamos três situações que ilustram a natureza do trabalho realizado no estudo de aula, onde identificamos o conhecimento matemático mobilizado pelas futuras professoras. A seleção foi feita por forma a identificar *disjunturas*, presentes essencialmente nas sessões iniciais, e confrontá-las com situações em que as futuras professoras mobilizaram adequadamente o seu conhecimento matemático, evidenciando a *resolução* respectiva (JARVIS, 2007). Apresentamos, também, as percepções das futuras professoras sobre o seu conhecimento matemático e a sua participação no estudo de aula.

6.1 *Situação 1: "À procura de coisas complicadas"*

Os conceitos apresentados na primeira sessão não foram inteiramente novos para Diana e Beatriz, mas a sua aplicação e articulação constituiu uma séria dificuldade. No diálogo inicial, a investigadora procurou entender o seu ponto de partida no tema, questionando:

> *Investigadora: O que é que vos era solicitado, quando envolviam sequências?*
> *Diana: O par ou ímpar.*
> *Supervisor: O que é que queres dizer com par ou ímpar?*
> *Diana: Porque eu... Não sei. O termo ou a ordem?* (S1, 2019).

Após a investigadora e o professor supervisor detectarem que as futuras professoras não

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a10

aplicavam, adequadamente, conceitos básicos como *termo e ordem* [KoT2-D1] exploraram sequências onde estas pudessem aplicar a terminologia corretamente. Perante uma sequência pictórica, que alternava a cor azul e verde, o professor supervisor solicitou o 20º termo e Diana referiu "*tínhamos(...) aqui na escola, de encontrar uma expressão... E essa expressão ia dar aquele número.* E Beatriz acrescentou "*O resultado para qualquer número"* (S1). O professor supervisor informou que procuravam o *termo geral* e sistematizou estratégias de generalização, aparentemente, desconhecidas pelas futuras professoras [KPM1-D1].

Contudo, Diana insistiu na tentativa de encontrar uma expressão algébrica, não encontrando o procedimento adequado para formular a lei de formação [KoT1-D1]. Nesse contexto, não valorizou a linguagem natural como modo de expressar a lei de formação [KoT3-D1] nem ponderou o uso da relação entre *termo e ordem* para expressar essa lei [KoT1-D2]. Essas dificuldades impediram as futuras professoras de determinar os termos seguintes, dados alguns termos da sequência [KSM2-D1].

> *Diana: O termo geral tem uma multiplicação. (...)*
> *Supervisor: Qual é a generalização que me descreve a regularidade que temos aqui?*
> *Diana:* n^2*, n. Não? Não dá n?*
> *Supervisor: Porquê* n^2*? Vocês estão à procura de coisas complicadas quando não precisam* (S1, 2019).

O professor supervisor procurou direcionar a discussão para o contexto dos anos iniciais e conduziu as futuras professoras a estabelecerem uma conjetura ajustada:

> *Supervisor: Há pouco estávamos a questionar se tu sabes de que cor é o vigésimo?*
> *Diana: Eu não posso ir pelos pares e ímpares? Ou seja, o ímpar é sempre o azul, logo o par tem de ser verde* (S1, 2019).

Após a dificuldade inicial das futuras professoras em aplicarem corretamente os conceitos de *termo e ordem* [KoT2-D1], foram apresentados exemplos para as conduzir à resolução dessa dificuldade. Contudo, ficou clara, ao longo do diálogo, a existência de outras lacunas que as impediam de responder adequadamente. Perante a sequência apresentada e a questão realizada pelo professor supervisor, ambas tinham em vista a ideia matemática de *termo geral* [KoT2-D3] mas não souberam usá-la corretamente, o que evidencia uma incapacidade de relacionar o uso da linguagem algébrica com o contexto apropriado [KSM4-D1]. Foi necessário, então, que se esclarecessem esses conceitos na sessão seguinte.

6.2 *Situação 2: "De 3 em 3, mas a começar onde?"*

A sequência (Figura 2) proposta pelos facilitadores na S2, suscitou uma discussão sobre a importância de fixar a ordem de um dado termo, para identificar os termos restantes.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a10

Figura 2 - Sequência proposta na sessão de preparação
Fonte: dados da pesquisa 2019 (S2)

Perante o desafio de encontrar o décimo termo, Diana respondeu: *"isso depende da primeira* [figura]. *Mas se, por exemplo, disséssemos que este era o décimo termo, aí já dava para fazer.* E Beatriz acrescentou, *"já dava para descobrir o primeiro"* (S2). Essa discussão terá sido importante para Beatriz não só selecionar uma sequência (Figura 3), para abordar na AI1, como para orientar os seus alunos no trabalho autónomo e na discussão coletiva.

Figura 3 - Sequência apresentada na Tarefa 2 proposta aos alunos
Fonte: dados da pesquisa 2019 (AI1)

Os alunos deveriam completar os primeiros termos dessa sequência e identificarem a *unidade de repetição* (dois quadrados seguidos do círculo). A necessidade de identificar a ordem tornou-se evidente e a maioria dos alunos fê-lo autonomamente. A pedido de Beatriz, o aluno Gonçalo partilhou, no momento da discussão coletiva, a sua resolução (Figura 4):

> *Beatriz: Então, quantos quadrados existem em 19 figuras?*
> *Gonçalo: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13.*[recorre à contagem] São 13.
> *Beatriz: Estás a ver que é importante colocares os números para te guiares?* (AI1, 2019)

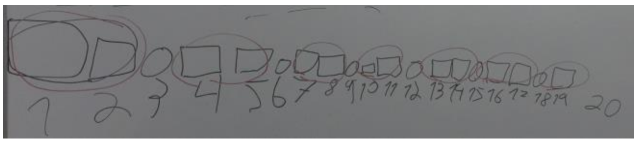

Figura 4 - Registro de aluno Gonçalo, realizada no quadro escolar
Fonte: dados da pesquisa 2019 (AI1)

Nessa sequência (Figura 3) os alunos deveriam identificar a posição dos círculos. Perante as dificuldades dos alunos, Beatriz, solicitou que identificassem, também, o primeiro termo [KoT1-R2] e a *unidade de repetição* [KoT1-3]. Essa sugestão foi um modo de os guiar a estabelecer generalizações, necessárias à identificação da lei de formação [KPM1-R2], conduzindo os alunos a produzir justificações com vários níveis de formalidade [KPM2-R1]:

> *Luísa: Os círculos aparecem de 3 em 3.*
> *Beatriz: Mas assim não está totalmente correto. Aparecem de 3 em 3, mas a começar onde?*
> *Luísa: Do 3.*
> *Beatriz: Percebeste Luísa? Percebeste que é importante dizer de 3 em 3 e a começar do 3? Perceberam todos?* (AI1, 2019).

Apesar da dificuldade inicial em relembrarem em que situações deveriam utilizar os conceitos de *termo e ordem*, ao longo do estudo de aula, as futuras professoras passaram a usar essa terminologia adequadamente [KoT2-R1] e a usá-la para estabelecer generalizações [KoT1-

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a10

R2]. Esse uso ocorreu quer por comunicação oral, nas sessões de preparação, aulas de investigação e sessão de reflexão, quer por comunicação escrita, no plano de aula e reflexão da AI1: "*Permitia aos alunos continuarem a sequência e descobrir um termo pedido em uma das alíneas, porém, não lhes permitia descobrir outro termo seguinte*" (Beatriz, Relatório, 2020).

6.3 *Situação 3: "Mas tu tens aqui uma frequência?"*

Durante a resolução das tarefas propostas na S2, as futuras professoras não fizeram uso autónomo de tabelas na organização dos dados referentes à sequência. Contudo, uma das questões referentes à sequência analisada (Figura 5) solicitava a construção de uma tabela onde se organizassem os dados expostos. Beatriz revelou dificuldades nessa questão e confundiu o pretendido com as tabelas de frequências absolutas [KoT3-D2]. Diana não revelou dificuldade em construir a tabela, mas não rentabilizou a sua construção para proceder a generalizações.

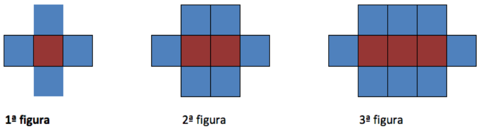

Figura 5 - Sequência analisada na S2
Fonte: dados da pesquisa 2019 (S2)

Apesar da dificuldade em usar a tabela, as futuras professoras encontraram a lei de formação [KoT1-R1] fazendo uso da relação entre *termo e ordem* [KoT1-R2]. Justificaram adequadamente o seu raciocínio, recorrendo a uma estratégia de decomposição dos termos [KPM1-R1] e usando a representação icónica [KoT3-3]. Beatriz refere "*A figura 5 vai pressupor 5 quadrados vermelhos e na parte superior dos 5 quadrados vermelhos vão estar outros 5 quadrados e na parte inferior outros 5 quadrados e mais 2 nas pontas, que é comum a todas as figuras.",* fazendo uso da linguagem natural para descrever a lei de formação [KoT3-R1].

Diana justificou de modo análogo [KPM2-R1] e usou o seu raciocínio para justificar a quantidade de quadrados num termo mais distante [KPM2-R1]: "São *62. Porque são 3 vezes 20 mais 2.(...) na figura 20 nós vamos ter 20 vermelhos. E temos o dobro dos azuis. No total temos o triplo da figura mais dois dos lados"* (S2). Nesse contexto, a relação de dobro e triplo foi mobilizada adequadamente pelas futuras professoras [KSM1-2] e o recurso a essa relação permitiu que determinassem os termos seguintes, dados termos da sequência [KSM2-R1].

Quando, na S2, foi analisada uma sequência em V em que eram dadas as três primeiras figuras da sequência, formadas por 3, 5 e 7 quadrados, encontraram a lei de formação. Tanto Diana como Beatriz usaram estratégias de decomposição dos termos [KSM1-3], com recurso à

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a10

representação icónica [KoT3-3], e estabeleceram relações entre o termo e a ordem para encontrarem a lei de formação [KoT1-R2]. Identificaram, também, essas relações como modo de a indicar [KSM1-1], ainda que o fizessem por processos distintos. Também, revelaram conhecimento da estrutura matemática nesse contexto, ao determinarem termos seguintes dados alguns termos da sequência [KSM2-1]. Beatriz justificou [KPM2-R1] a sua estratégia de generalização e revelou saber distinguir estratégias recursivas de globais [KPM1-R1]:

> *Beatriz: Ao número do termo, à figura 1, vai-se adicionar 2 porque é a figura imediatamente a seguir, ao termo da figura 2 vai-se adicionar 3 e ao termo da figura 3 adiciona-se 4.*
> *Investigadora: Foste fazer a contagem, recursivamente, até à figura 8?*
> *Beatriz: Não, se a figura é 8 só tenho de adicionar mais 9. A figura 1 tem 3 quadrados, ou seja, 1 + 2; a figura 2 tem 5 quadrados, 2 + 3. Então, na figura 1,o termo de 1ª ordem, tem 3 quadrados. Então, ao número do termo da ordem adicionei mais 2, ou seja, adicionei o número imediatamente a seguir* (S2, 2019).

Diana justificou a sua estratégia de generalização empírica [KPM1-R2], usando um argumento diferente de Beatriz [KSM1-R1]:

> *Diana: Então, a figura 1 leva um "nos seus bracinhos" cada um, na figura 2 vai levar quatro. Então, na figura 8 vai levar 8 + 8 +1 cá em baixo que é comum a todos.*
> *Investigadora: E se fosse a figura 25, que não está aqui questionado?*
> *Diana: 25 + 25 + 1 =51, vejo pela figura* (S2, 2019).

Na segunda aula de investigação, as futuras professoras propuseram a discussão de uma sequência em V (Figura 6), adaptada para facilitar a aplicação do conceito de *dobro* [KSM1-2].

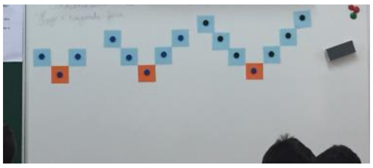

Figura 6 – Sequência proposta na tarefa da AI2
Fonte: dados da pesquisa 2019 (AI2)

Durante o trabalho autónomo, os alunos tiveram dificuldade na representação e Diana apoiou-os, o que lhe permitiu conhecer os seus modos de raciocínio e justificação e, desse modo, escolher os mais adequados para a discussão final. Essa discussão envolveu a sistematização dos dados numa tabela, previamente preparada por Diana [KoT3-R2], com a intenção de encontrar o número de quadrados referentes à 100ª figura. A aplicação da noção de dobro foi entendida pelos alunos que, quando questionados, responderam corretamente em uníssono:

> *Luísa: 200.*
> *Diana: Porquê?*
> *Alunos:* [em coro] *porque é o dobro.*
> *Diana: Porque é o dobro, não é? Nas figuras é sempre o dobro. Dos quê, dos laranjas, não é?*
> *Alunos: Não! Dos azuis.*
> *Diana: Então, nos azuis é sempre o dobro da figura e os laranjas é sempre 1. (...)* (AI1, 2019).

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a10

Na reflexão escrita sobre a AI2, Diana refletiu sobre duas produções realizadas pelos alunos, onde mostra a relevância de o professor solicitar justificações aos alunos [KPM2-R1]: "*o professor deve alertar e sugerir que ao longo das tarefas, as crianças coloquem todo o seu raciocínio, a forma como pensaram, no papel.*" (Diana, Relatório, 2020). Diana valorizou as estratégias de generalização aplicadas pelos alunos [KPM1-R2], comentando o tipo de representação usada [KoT3-3]:

> *Na primeira é visível que a criança representou pictoricamente a figura, percebendo que no ramo da direita estavam 15 quadrados e na esquerda, outros 15. O par somou, 5+5+5, apesar de não ter pensado assim, poderia perceber que a figura 5 teria 5 quadrados em cada ramo, a figura 10 teria 2x5 quadrados em cada ramo e a figura 15 teria 3x5 quadrados em cada ramo, perfazendo os 15 quadrados num ramo. Na figura 15, estavam presentes 3 vezes a figura 5. Na segunda reprodução, o grupo percebeu que se na figura 10 somassem os quadrados azuis da direita e da esquerda, 10+10=20, então, na figura 15 seria, 15+15=30.* (Diana, Relatório, 2020).

E, ainda, evidenciou as suas estratégias de generalização, privilegiando as de natureza global [KPM1-R1]: "*Neste momento as crianças já se encontravam a generalizar. (...) o par* [de alunos] *consegue identificar qualquer figura da sequência*" (Diana, Relatório, 2020).

6.4 Percepções das futuras professoras sobre o seu conhecimento matemático

Beatriz e Diana mostraram, desde as primeiras sessões do estudo de aula, alguma insegurança no campo do conhecimento matemático. Ainda que as futuras professoras tenham vivenciado um percurso de escolaridade distinto (Beatriz frequentou nove anos de Matemática, prosseguindo para o Ensino Secundário num curso de Humanidades e Diana frequentou doze anos, tendo concluído o Ensino Secundário na área das Ciências (EF)), ambas relacionaram as suas más experiências com a disciplina com a sua insegurança nesse campo.

> *O meu relacionamento com a Matemática é péssimo. Ainda o é. Sempre será, porque a partir do momento em que eu entrei no 7.º ano de escolaridade,os meus professores deixaram de ter em consideração o que eu já sabia ou não sabia(...). A partir daí e foi sempre a piorar. Foi, talvez, uma das condicionantes que me levou a escolher línguas e humanidades* (Beatriz, EF, 2020).

Contudo, a tomada de consciência dessa dificuldade terá sido o mote para aprofundar o conhecimento matemático:

> *Foi a minha má experiência a Matemática que me levou a fazer um relatório de investigação sobre Matemática no pré escolar. Pelo desafio. Porque eu tenho uma experiência péssima. A relação com a Matemática vai-se construindo, a minha perdeu-se e vai ficar condicionada para o resto da vida. Neste momento eu tenho bases, com muito esforço e dedicação, o gosto perdeu-se (...) a licenciatura em nada melhorou a minha relação com a Matemática* (Beatriz, EF, 2020).

Diana realçou mais aspetos positivos do seu percurso escolar, comparativamente à colega, e revelou como essa preparação foi muito útil para os desafios colocados pela licenciatura.

> *Eu até gostava de Matemática. Mas não gostava muito da forma que me foi dada. Porque às vezes parecia não ter sentido. Mas quando me explicavam e relacionavam as várias áreas da Matemática, para mim isso fazia mais sentido. Lembro que nos Secundário, no curso de Ciências, tive alguma dificuldade na área da Matemática. Agora no curso [superior] não* (Diana, EF, 2020).

6.5 Percepções das futuras professoras sobre a participação no estudo de aula e o conhecimento matemático

Sobre a importância do trabalho realizado ao longo do estudo de aula, relativamente ao conhecimento matemático, Beatriz salienta as primeiras sessões, admitindo que, além de rever, também aprendeu novos conceitos: “*As duas primeiras sessões ainda foram uma introdução com um suporte muito teórico e científico. (...) eu revi ou até aprendi novas coisas sobre este conceito das sequências”* (Beatriz, EF, 2020).

Diana também realçou a importância de o estudo de aula ter iniciado com o aprofundamento de questões matemáticas relativas ao tópico:

> *Nas minhas práticas, aquilo que eu sinto, às vezes, mais dificuldade é a parte científica. E começar o estudo de aula por aí, foi muito enriquecedor. Em primeiro lugar, o professor tem que ter uma base, uma consistência grande para, depois, saber como é que pode ajudar as crianças a fazer as suas aprendizagens. foi muito importante ter essas duas primeiras sessões* (Diana, EF, 2020).

Quando questionada sobre os conceitos e procedimentos que foram alvo da aprendizagem, Beatriz referiu as classificações de vários tipos de sequências [KoT2-2]:

> *[...] as sequências pictóricas, de repetição, de crescimento. Todos esses conceitos, já foi algo que nós trabalhámos, já foi aprendido por nós mas quando esta sessão surgiu, com este suporte teórico, reavivou a memória. São conceitos que estavam no vocabulário passivo e passaram a integrar o vocabulário ativo. Quer por esquecimento, quer por nunca termos compreendido* (Beatriz, EF, 2020).

A futura professora salientou o ambiente colaborativo em que as sessões decorreram e a importância do investimento na preparação e antecipação de respostas para a apropriação de conceitos [KoT]:

> *O reunirmos aqui, e em conjunto pensarmos numa planificação para ser executada por mim, fez-me ver a planificação e pensá-la um pouco de outra forma. (...) prever estratégias, prever formas de resolução diferentes e, perante essas formas de resolução e estratégias prever a minha atuação, não só me deu segurança, como me deu outra apropriação dos conteúdos* (Beatriz, S8, 2019).

Relativamente às aprendizagens realizadas nessa experiência formativa, Diana apontou, à semelhança da colega, a importância de termos classificado as sequências [KoT2-2] e de nos termos servido dessa classificação para organizar as intervenções pedagógicas seguintes:

> *Eu fiz aprendizagens: os nomes das sequências, as etapas. (...) fez com que eu estivesse também atenta. Eu sabia resolver sequências, mas essa parte mais científica das sequências eu não conhecia. Para a minha aula, fez-me todo o sentido que eu tivesse essa base teórica* (Diana, EF, 2020).

Quando solicitámos que destacasse os momentos mais significativos do estudo de aula, Diana referiu as duas primeiras sessões:

> *A parte científica é aquela em que eu apresento maiores dificuldades na prática. E por isso essas sessões foram um contributo muito importante"* (Diana, EF, 2020).

7 Síntese dos aprendizados realizados no domínio do conhecimento matemático

Ao longo das situações que apresentamos, emergiram várias disjunturas no domínio do MK que foram, posteriormente, resolvidas, evidenciando um percurso de aprendizagem por parte das futuras professoras. Assim, no início do estudo de aula, foram diagnosticadas dificuldades na compreensão de conceitos, KoP2, como *termo* e *ordem, lei de formação* e *termo geral*, o que lhes dificultou a aplicação de procedimentos coerentes com as situações propostas, KoT1. Essas dificuldades foram relativamente simples de ultrapassar e as três primeiras sessões foram suficientes para que compreendessem os conceitos e os aplicassem nas aulas de investigação e em momentos de reflexão, evidenciando a resolução das disjunturas assinaladas na primeira sessão.

Observamos, ao longo do estudo de aula, uma melhoria relativa aos registros de representação Kot3, que usaram para resolver as tarefas propostas. Essa evidência ocorre também no acompanhamento do trabalho autónomo dos alunos, na seleção de registros diversificados no momento de discussão coletiva e, posteriormente, na análise e reflexão sobre as produções dos alunos. Beatriz e Diana valorizaram diferentes tipos de representação e mostraram sentido crítico, ao solicitarem, no contexto da discussão coletiva (AI1 e AI2), a colaboração de alunos cujas resoluções recorriam a representações crescentemente formais.

No que respeita ao Conhecimento da Estrutura Matemática, estabeleceram conexões baseadas na simplificação, KSM1, ao analisarem relações entre termos e uma sequência e indicando a lei de formação. Note-se que a capacidade de mobilizar esse conhecimento só foi possível após a resolução de *disjunturas* relativas ao conhecimento do tópico. Identificaram, ainda, conexões com temas, KSM1, como a paridade, dobro, triplo e múltiplos de um número, que as auxiliaram nas suas estratégias de generalização e justificação e na orientação dos alunos.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a10

As futuras professoras estabeleceram conexões baseadas no aumento de complexidade, KSM2, quando, dados alguns termos de uma sequência, encontraram termos seguintes de ordens afastadas, mas, também, quando identificaram temas que podiam suceder ao aprofundamento das sequências, como o estudo das adições sucessivas e da multiplicação. Ainda que o uso de conexões auxiliares, KSM4, não tenha sido recorrente e aprofundado neste estudo de aula, discutiu-se a potencialidade das expressões algébricas na representação de leis de formação.

Os processos de generalização e justificação destacaram-se ao nível do Conhecimento de Práticas em Matemática. A identificação de regularidades e a procura do melhor modo de exprimir uma lei de formação, KPM1, foram atividades que ocuparam parte das três primeiras sessões. A necessidade de Diana em recorrer à linguagem algébrica para proceder à generalização conduziu a erros graves, que foram, no entanto, corrigidos, ficando explícitas, a partir da S2, as condições de uso da linguagem algébrica. A discussão sobre estratégias de generalização (recursivas ou globais), KPM1, permitiu que as futuras professoras ampliassem o seu sentido crítico relativamente à diversidade de estratégias de resolução. Essa diversidade foi evidente quando justificaram, com diferentes graus de formalidade, KPM2, o seu processo de resolução e ao analisarem as produções dos seus alunos, recorrendo a estratégias de representação e contagem, estratégias aditivas e estratégias de decomposição dos termos.

8 Considerações finais

Ao longo deste artigo, analisamos os aprendizados no campo do conhecimento matemático realizados por duas futuras professoras, considerando, também, as suas percepções sobre esses aprendizados. Provenientes de percursos escolares distintos, ambas revelaram, inicialmente, dificuldades no campo do conhecimento matemático referente ao tópico *Sequências e Regularidades*. Nas sessões seguintes, resolveram tarefas e participaram em discussões que foram fulcrais para ampliar o seu conhecimento matemático e adquirir segurança em aplicá-lo. Diana destaca as duas primeiras sessões, onde abordou os aspetos científicos, componente da Prática Pedagógica em que se sentia mais insegura. Beatriz acrescenta, nas sessões de preparação seguintes, que o momento de antecipação de respostas e dificuldades dos alunos, ocorrido em ambiente colaborativo, contribuiu para que se apropriasse dos conceitos e, consequentemente, se sentisse mais segura na condução da aula de investigação.

Para além das suas percepções, apresentamos evidências, recorrendo à identificação de disjunturas e respectiva resolução (muitas delas ocorridas em contexto prático), reveladoras das

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a10

aprendizagens realizadas pelas futuras professoras, no campo do conhecimento matemático. Assim, consolidaram e colocaram em prática conceitos, procedimentos e registros de representação [KoT]; desenvolveram conhecimentos sobre a estrutura matemática [KSM], no que respeita a conexões baseadas na simplificação e no aumento de complexidade; aplicaram o seu raciocínio em atividades que exigiam uso de justificação e estratégias de generalização, ampliando, assim, o seu conhecimento de práticas em matemática [KPM].

Destacamos a importância de as futuras professoras terem conduzido as aulas de investigação, que criou oportunidade de aplicar o seu conhecimento matemático e refletir sobre ele num contexto que lhes era muito próximo (FERNANDEZ; ZILLIOX, 2011; MURATA; POTHEN, 2011). A redação de um relatório reflexivo sobre as aulas conduzidas permitiu a identificação dos aspetos a que atribuíram maior significado. Como aspeto menos positivo, apontamos o tempo usado durante o estudo de aula para a análise de produções dos alunos, em ambiente colaborativo, claramente diminuto. Esse resultado levou-nos a reformular os princípios de *design* e a considerá-lo no segundo estudo de aula, integrado no 2º ciclo da IBD.

As características do estudo de aula, que aqui apresentamos, vão ao encontro do que Jarvis (2009) considera como um percurso de aprendizagem transformador: centrou-se nas futuras professoras (e nas suas necessidades formativas); proporcionou-lhes uma experiência (formativa), que ocorreu em contexto social (colaborativo); incentivou-as à ação e reflexão, proporcionando-lhes conhecimentos que as transformaram em pessoas com maior segurança. Ao conhecermos os aprendizados realizados por Beatriz e Diana ao longo deste estudo de aula, pudemos verificar que o conhecimento matemático, quando tem fragilidades assinaláveis, pode ser desenvolvido de forma significativa num estudo de aula, o que mostra a relevância desse processo formativo como dispositivo a usar na formação inicial.

Agradecimento

Trabalho financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia através de bolsa atribuída a Raquel Vieira (referência SFRH/BD/146837/2019).

Referências

BAUMERT, J.; KUNTER, M.; BLUM, W.; BRUNNER, M.; VOSS, T.; JORDAN, A.; KLUSMANN, U.; KRAUSS, S.; NEUBRAND; M.; TSAI, Y.M. Teachers' mathematical knowledge, cognitive activation in the classroom, and student progress. **American Educational Research Journal**, Washington DC, v. 47, n. 1, p. 133-180, 2010.

BIEDA, K. N.; CAVANNA, J.; JI, X. Mentor-guided lesson study as a tool to support learning in field

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a10

experiences. **Mathematics Teacher Educator**, Reston, v. 4, n. 1, p. 20-31, 2015.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação qualitativa em educação**. Porto: Porto Editora, 1994.

CARRAHER, D. W.; MARTINEZ, M. V.; SCHLIEMANN, A. D. Early algebra and mathematical generalization. **ZDM Mathematics Education**, Berlim, v. 40, p. 3-22, 2008.

CARRILLO-YAÑEZ, J.; CLIMENT, N; MONTES, M; CONTRERAS, L.C.; FLORES-MEDRANO, E.; ESCUDERO-ÁVILA, D.; VASCO, D.; ROJAS, N.; FLORES, P.; AGUILAR-GONZÁLEZ, A.; RIBEIRO, M.; MUÑOZ-CATALÁN, M.C. The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. **Research in Mathematics Education**, Reston, v. 20, n. 3, p. 236-253, 2018.

COBB, P.; CONFREY, J.; DISESSA, A.; LEHRER, R.; SCHAUBLE, L. Design experiments in educational research. **Educational Researcher**, Washington, v. 32, n. 1, p. 9-13, 2003.

FERNANDEZ, M. L.; ZILLIOX, J. Investigating approaches to lesson study in prospective mathematics teacher education. *In*: HART, L. C.; ALSTON, A.; MURATA, A. (ed.). **Lesson study, research and practice in mathematics education**. Dordrecht: Springer, 2011. p. 85-102.

FUJII, T. Lesson study and teaching mathematics through problem solving: The two wheels of a cart. *In*: QUARESMA, M.; WINSLØW, C; CLIVAZ, S.; PONTE, J. P.; SHÚILLEABHÁIN, A. N.; TAKAHASHI, A. (ed.). **Mathematics lesson study around the world**. New York: Springer, 2018. p. 1-21.

JARVIS, P. Learning to be a person in society: Learning to be. *In*: ILLERIS, K. (ed.). **Contemporary Theories of Learning: Learning Theorists… In Their Own Words**. Oxford: Routledge, 2009. p. 21-34.

KAPUT, J. Teaching and learning a new algebra with understanding. *In*: FENNEMA, E.; ROMBERG, T. (ed.). **Mathematics classrooms that promote understanding.** Mahwah: Lawrence Erlbaum, 1999. p. 133-155.

MURATA, A.; POTHEN, E. B. Lesson study in preservice elementary mathematics courses: Connecting emerging practice and understanding. *In*: HART, L. C.; ALSTON, A.; MURATA, A. (ed.). **Lesson study, research and practice in mathematics education.** Dordrecht: Springer, 2011. p. 103-116.

PONTE, J. P. Gestão curricular em Matemática. *In*: Grupo de Trabalho sobre Investigação (GTI) em Educação Matemática (org.). **O professor e o desenvolvimento curricular.** Lisboa: APM, 2005. p. 11-34.

PONTE, J. P.; BRANCO, N.; MATOS, A. **Álgebra no Ensino Básico**. Lisboa: DGIDC, 2009.

PONTE, J. P.; SERRAZINA, M. L. **Didática da Matemática do 1.º ciclo**. Lisboa: Universidade Aberta, 2000.

PONTE, J. P.; WAKE, G.; QUARESMA, M. Lesson study as a learning context in mathematics education. *In*: LLOYD, G. M.; CHAPMAN, O. (ed.). **The international handbook of mathematics teacher education**: Participants in mathematics teacher education. Leiden: Brill/Sense, p. 103-126. 2020. v. 3.

SHIMIZU, S.; CHINO, K. History of lesson study to develop good practices in Japan. *In*: INPRASITHA, M.; ISODA, M.; WANG-IVERSON, P.; YEAP, B. H. (ed.), **Lesson study challenges in mathematics education**. Singapore: World Scientific, 2015. p. 123-140.

SHULMAN, L. Those who understand: the knowledge growth in teaching. **Educational Researcher**, Washington, v. 15, n. 2, p. 4-14, feb. 1986.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a10

TATTO, M. T. The mathematical education of primary teachers. *In*: TATTO, M. T.; RODRIGUEZ, M.; SMITH, W.; RECKASE, M.; BANKOV, K. (ed.). **Exploring the Mathematical Education of Teachers Using TEDS-M Data**. Cham: Springer, 2018. p. 205-256.

Submetido em 17 de Agosto de 2021.
Aprovado em 18 de Fevereiro de 2022.