ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230005

ARTÍCULO

La propiedad de completitud del sistema real: una introducción vía la convergencia de sucesiones

A propriedade de completude do sistema real: uma introdução via la convergência de sequências

Alexandra **Fregueiro***

ORCID iD 0000-0002-0710-5927

Analía **Bergé****

ORCID iD 0000-0002-0740-8469

Resumen

El sistema de los números reales es el dominio numérico en el cual se desarrollan conceptos y se validan propiedades del Análisis Matemático vinculadas a sucesiones y series numéricas, funciones continuas, funciones derivables y la noción de integrabilidad, entre otros. Estos desarrollos teóricos son posibles en $\mathbb{R}$ y no en $\mathbb{Q}$ debido a una propiedad que distingue a estos dos cuerpos totalmente ordenados: la propiedad de completitud. En este trabajo, presentamos el diseño y los resultados de una propuesta de enseñanza para introducir la propiedad de completitud vía la convergencia de las sucesiones monótonas crecientes y acotadas superiormente. El diseño de la propuesta considera el doble carácter de herramienta y de objeto de una noción matemática (Douady, 1992) y el metadiscurso de las nociones FUG (Dorier, 1995). Utilizamos un enfoque metodológico interpretativo-cualitativo y como método el estudio de casos (Bisquerra, 2009). El análisis e interpretación de los datos nos permiten afirmar que tres de los cuatro estudiantes que participaron de la experiencia, lograron poner en funcionamiento el carácter de herramienta explícita y de objeto de la completitud.

Palabras clave: Formación de docentes. Sistema de números reales. Propiedad de completitud. Carácter de herramienta y de objeto de nociones matemáticas. Metadiscurso de nociones FUG.

Resumo

O sistema dos números reais é o domínio numérico no qual conceitos são desenvolvidos e propriedades da Análise Matemática ligadas a sequências e séries numéricas, funções contínuas, funções deriváveis e a noção de integrabilidade, entre outras, são validadas. Esses desenvolvimentos teóricos são possíveis em $\mathbb{R}$ e não em $\mathbb{Q}$, devido a uma propriedade que distingue esses dois corpos totalmente ordenados: a propriedade de completude. Neste artigo, apresentamos o desenho e os resultados de uma proposta pedagógica para introduzir a propriedade de completude através da convergência de sequências monótonas crescentes e limitadas superiormente. O projeto da proposta considera o duplo caráter de ferramenta e objeto de uma noção matemática (Douady, 1992) e o metadiscurso das noções FUG (Dorier, 1995). Utilizamos uma abordagem metodológica interpretativa-qualitativa

* Profesora del Departamento de Matemática del Consejo de Formación en Educación (CFE), Rocha, Uruguay. E-mail: suresmeralda@hotmail.com.
** Profesora en didáctica de la matemática en la Université du Québec à Rimouski (UQAR), Rimouski, Québec, Canadá. E-mail: analia_berge@uqar.ca.

e um método de estudo de caso (Bisquerra, 2009). A análise e interpretação dos dados nos permitem afirmar que três dos quatro alunos que participaram da experiência conseguiram pôr em funcionamento o caráter de ferramenta explícita e de objeto da completude.

Palavras-chave: Formação de professores. Sistema dos números reais. Propriedade de completude. O caráter de ferramenta e objeto das noções matemáticas. Metadiscurso de noções de FUG.

1 Introducción

El sistema de los números reales, ℝ, es el dominio numérico donde se desarrollan conceptos y se validan propiedades del Análisis Matemático, vinculadas a sucesiones y series numéricas, funciones continuas, funciones derivables y la noción de integrabilidad, entre otros conceptos. Estos desarrollos teóricos son posibles en ℝ y no en el sistema racional ℚ, debido a una propiedad que distingue a estos dos cuerpos totalmente ordenados: la propiedad de completitud que ℝ posee, y ℚ no.

Nos ha interesado indagar en qué medida los estudiantes universitarios logran comprender por qué estos desarrollos teóricos son posibles en ℝ y no en ℚ. En particular, el curso de análisis de variable real del profesorado de matemática en Uruguay, denominado *Análisis 1*, la propiedad de completitud del sistema de los números reales es presentada a partir del enunciado que afirma que *todo subconjunto de números reales, no vacío y acotado superiormente, tiene supremo real*, enunciado conocido como *la propiedad* o el axioma *del supremo*. Hay trabajos de investigación, referenciados en la próxima sección, que muestran que la noción de supremo es comprendida sólo por una proporción muy pequeña de estudiantes. Deducimos, entonces, que la comprensión de la propiedad de completitud para el trabajo en el área del análisis matemático, se dificulta cuando es introducida vía la propiedad del supremo.

El objetivo de este escrito es dar cuenta de la exploración de un camino alternativo al de la propiedad del supremo para introducir la propiedad de completitud del sistema de los números reales. Construimos y experimentamos una secuencia de enseñanza y aprendizaje en la que hemos buscado poner de relieve la necesidad de esta propiedad, así como explotar el doble carácter de *herramienta* (hacer uso de la noción para resolver ciertos problemas) y *objeto* de esta noción matemática, tomando como referencia la *dialéctica herramienta – objeto* introducida por Douady (1992).

2 Estado del arte

Para abordar como un problema la enseñanza y el aprendizaje de la completitud de ℝ,

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230005

consideramos necesario tomar distancia de dicha noción y entender cómo, por qué y en qué contexto se hizo necesaria su aparición en la matemática. Tomamos como referencia el trabajo de Bergé y Sessa (2003), quienes señalan tres estados epistemológicos de la propiedad de completitud en distintos momentos de la historia de la matemática: como *un atributo implícito*, como *un atributo explícito, aunque naturalmente aceptado* y como *una propiedad explícita y demostrable*. Este recorrido histórico nos acerca a entender qué tipo de problemas resuelve la completitud, la importancia de su rol en la construcción de conocimientos matemáticos del Análisis y la insuficiencia del conjunto de los números racionales para resolver los problemas planteados.

La convergencia de sucesiones monótonas y acotadas y el teorema del valor intermedio (también conocido como Teorema de Bolzano) forman parte del problema vinculado a la necesidad de formalizar la propiedad a inicios del siglo XIX. Los problemas en los que la completitud se hace necesaria, están relacionados con la construcción de pruebas formales (todas ellas ligadas a asegurar la existencia de un elemento del sistema numérico real) que, en muchos casos, resultan evidentes desde una perspectiva gráfica. La propiedad de completitud es necesaria cuando se quiere fundamentar en Análisis, cuando se busca resolver problemas relacionados con una prueba de existencia, ya sea de un límite, de la raíz de una función, del elemento intersección de intervalos encajados. En muchos casos, estas situaciones son evidentes desde una perspectiva gráfica.

Respecto a la enseñanza y el aprendizaje de la completitud, pudimos constatar que diversas investigaciones abordan cuestiones vinculadas, directa o indirectamente, a esta temática. Los trabajos de Bergé (2016, 2008), Acevedo (2011) y Bills y Tall (1998) nos permiten conocer ciertas ideas que construyen los estudiantes cuando la presentación de la completitud, en cursos iniciales de Análisis, se realiza a partir del enunciado del Axioma del supremo; el tipo de trabajo en el aula descripto en esos tres trabajos es similar a los cursos de Análisis 1 del profesorado uruguayo.

De estos trabajos se desprende que este tratamiento tiene como consecuencia una visión *naturalizada* de la propiedad que no parece contribuir a que los estudiantes logren poner en funcionamiento el carácter de herramienta explícita de la completitud. Las actividades y el tipo de preguntas propuestas en las investigaciones nos permiten conjeturar que los cursos *típicos* de Análisis privilegian un tratamiento del supremo desvinculado de los contextos particulares de uso y centrado en analizar las propiedades y características de esta noción, sin hacer explícita la necesidad de su existencia. De estos trabajos, interpretamos que la presentación de la completitud vía la noción del supremo no favorece que los estudiantes tengan disponible la

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230005

propiedad para ser usada en la demostración de otras propiedades o en la definición de otros objetos matemáticos. El acceso a la completitud queda bloqueado y en el mejor de los casos, el alumno retiene la definición formal de supremo y la demostración de propiedades generales de supremos de subconjuntos de números reales.

Hay investigaciones que dan cuenta de ciertas dificultades que pueden manifestar los estudiantes durante el proceso de conceptualización de la noción de supremo. Algunas de estas dificultades parecen estar relacionadas tanto a la comprensión de las estructuras, objetos y relaciones lógicas que entran en juego en la construcción de su definición formal (Chellougui, 2016); como también a la realización de ejercicios de determinar y justificar la existencia de cotas superiores, inferiores, supremo e ínfimos de conjuntos dados (Sari; Machromah; Purnomo, 2018; Hernández; Trigueros, 2012). Las actividades y el tipo de preguntas propuestas en estas investigaciones nos llevan a inferir que en los cursos *típicos* de Análisis se privilegia un tratamiento objetual de la noción de supremo, sin hacer explícita la necesidad de su existencia.

Como producto de la reflexión sobre lo expuesto en los párrafos anteriores, decidimos elaborar una propuesta de enseñanza para introducir la propiedad de completitud, que muestre la necesidad de esta propiedad y revele que el trabajo con ciertas nociones matemáticas no es posible en el conjunto de los números racionales. Tomamos de Bergé (2016) la sugerencia de introducir la propiedad de completitud mediante situaciones que van más allá de lo estrictamente numérico e incluyan sucesiones o funciones, recreando condiciones similares o equivalentes a las que motivaron la emergencia de la definición de dicha propiedad. Nuestra propuesta considera introducir la completitud vía la convergencia de sucesiones monótonas y acotadas. En la siguiente sección, explicitamos las nociones teóricas que sustentan nuestro trabajo.

3 Marco conceptual

3.1 Las nociones matemáticas, su enseñanza y su aprendizaje

Tomamos como referencia los trabajos de Douady (1992, 1995), quien afirma que, para un concepto matemático, conviene distinguir su carácter de herramienta (H) y su carácter de objeto (O). Vemos el carácter de herramienta de la completitud desplegarse cuando la misma es utilizada para resolver una situación contextualizada y particular; por ejemplo, para probar la convergencia de sucesiones, la existencia de raíces o de extremos de funciones bajo

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230005

determinadas condiciones. Cuando el interés en la propiedad de completitud se presenta desligado de los contextos particulares de uso y se busca caracterizar dicha propiedad de forma general o analizar la interrelación con otras nociones matemáticas, se pone de manifiesto su carácter de objeto. Tomamos de Douady (1995) las siguientes caracterizaciones: un alumno *ha aprendido* cierta noción matemática si es capaz de hacerla funcionar en su doble carácter de herramienta y de objeto. Para el docente, *enseñar* un concepto matemático implica crear las condiciones que permitirán la apropiación del mismo por parte del alumno, lo que requiere cierta organización en su enseñanza.

Hay nociones matemáticas cuyo aprendizaje representa, en buena medida, un salto con respecto a los conocimientos previos de los estudiantes: su presentación en el aula involucra la definición de nuevos objetos matemáticos o la introducción de un nuevo formalismo, o de nueva simbología, o responden a la necesidad de unificar o generalizar conocimientos. Las nociones con estas características han sido denominadas nociones o conceptos FUG (Robert, 1998; Dorier, 1995) justamente por su carácter formalizador, unificador y generalizador. Pensamos que la propiedad de completitud puede ser interpretada como una noción FUG por las razones que detallamos a continuación.

En los cursos universitarios donde la completitud se introduce con el enunciado de la propiedad del supremo, se hace necesario definir nuevos objetos matemáticos, nuevas palabras e introducir una nueva simbología, característica formalizadora de la noción en el sentido de Robert (1998). La completitud permite unificar nociones ya conocidas de manera compartimentada por los estudiantes, como ser el comportamiento de ciertas sucesiones numéricas y las propiedades de ciertas funciones continuas en intervalos cerrados. El trabajo matemático, en un cuerpo ordenado y completo, posibilita asegurar y generalizar la convergencia de las sucesiones monótonas y acotadas, y ciertas características de todas las funciones continuas en intervalos cerrados. Considerar la completitud como una noción FUG nos posibilita tomar en cuenta las recomendaciones didácticas de autores que han trabajado en la enseñanza y el aprendizaje de este tipo de nociones. Estos investigadores consideran que las nociones FUG difícilmente pueden ser introducidas en el aula a partir de una situación fundamental en el sentido de Brousseau (1986), afirman que son nociones que requieren de una enseñanza a largo plazo y de la elaboración de un discurso particular por parte del docente (metadiscurso) para generar la reflexión en el aula sobre las nociones puestas en juego (Dorier, 1995).

4 Metodología

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230005

Hemos diseñado una secuencia de enseñanza y aprendizaje de ocho actividades para ser trabajada en un curso de Análisis de variable real, de la que daremos cuenta en la sección 5. En este escrito, nos centramos en las dos primeras actividades de dicha secuencia. Utilizamos una metodología cualitativa dentro del paradigma interpretativo-cualitativo y el método utilizado es el estudio de casos (Bisquerra, 2009). Este paradigma se caracteriza por tener como objetivo de investigación la acción humana; la realidad educativa es considerada una construcción social que resulta de las interpretaciones y significados que le otorgan los participantes del estudio (dimensión ontológica), la naturaleza de la relación entre el investigador y el contexto de investigación (dimensión epistemológica) es *desde adentro*: tiene un carácter fundamentalmente subjetivo, puesto que se busca interpretar las acciones de los sujetos investigados. Para este paradigma, la forma de conocer la realidad (dimensión metodológica) implica que el investigador esté inmerso en el contexto de investigación para lograr comprender y describir la realidad educativa realizando un análisis profundo de las percepciones e interpretaciones de los sujetos intervinientes en la investigación (Santamaría, 2013).

En este trabajo, se trata de poner a estudiantes, junto con un docente investigador, en interacción con dos actividades que permiten potencialmente problematizar y mostrar la necesidad de enunciar la propiedad de completitud en el aula. El ámbito natural de las actividades propuestas es el de un curso de introducción al Análisis de variable real que, en el programa uruguayo de formación de profesores, corresponde al 2º año de formación. La experimentación fue efectuada fuera del curso, en una modalidad de laboratorio, dado que el año escolar estaba terminado. En el contexto natural de un curso de Análisis I, se esperaría trabajar en clase con sucesiones numéricas racionales antes de proponer la segunda actividad. La experimentación en laboratorio fue realizada con cuatro estudiantes que ya contaban con ese trabajo previo sobre sucesiones numéricas, necesario para abordar la segunda actividad.

4.1 Recolección de los datos

Para recabar la información, utilizamos tres tipos de técnicas cualitativas: instrumentos, estrategias y medios audiovisuales (Bisquerra, 2009, p. 151).

Dentro de los *instrumentos* (desarrollados en detalle en la sección 5) se encuentra el diseño de dos actividades de enseñanza en torno a la propiedad de completitud. Dichas actividades permitieron explorar formas de poner en funcionamiento la propiedad de completitud en su doble carácter de herramienta y de objeto (en el sentido mencionado de

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230005

Douady, 1992) y tomar en cuenta las sugerencias que plantean varios autores acerca de la enseñanza de las nociones FUG (Robert, 1998; Dorier, 1995; Bridoux, 2012; Chorlay, 2019).

El otro instrumento consiste en la concepción de un conjunto de indicadores que hemos denominado *niveles de funcionamiento y niveles de conocimiento de la completitud de* $\mathbb{R}$. Estos indicadores sustentaron tanto el análisis didáctico de las actividades de enseñanza como la interpretación y la descripción de las conceptualizaciones de los estudiantes en interacción con dichas actividades. En cuanto a las *estrategias y los medios audiovisuales*, se utilizó la *observación participante*: el primer autor de este escrito fue el responsable de implementar la propuesta de enseñanza. Las actividades fueron propuestas en modalidad taller, en un encuentro de 180 minutos con un descanso de 20 minutos entre las actividades. El taller se realizó en el mes de noviembre de 2021. Todas las producciones de los estudiantes fueron registradas en papel y entregadas al docente-investigador. La sesión fue grabada en audio y video.

5 Diseño de los instrumentos de investigación

En esta sección presentamos el diseño de los dos instrumentos que utilizamos en esta investigación: la creación de un conjunto de indicadores para analizar e interpretar los datos recabados y la elaboración de una propuesta de enseñanza con su análisis didáctico. Al conjunto de indicadores lo denominamos niveles de funcionamiento y de conocimiento de la completitud de $\mathbb{R}$.

5.1 Los niveles de funcionamiento- conocimiento de la completitud de $\mathbb{R}$

Para este diseño, tomamos las nociones de herramienta implícita, herramienta explícita y objeto, así como, también el carácter diferenciador de la completitud como noción FUG (Chorlay, 2019). Por otro lado, readaptamos la caracterización de herramienta explícita de prueba y para definir objetos matemáticos de Jovignot (2018). Resumimos los niveles de funcionamiento en el Cuadro 1.

Funcionamientos	Subniveles	Descripción. El estudiante…
Herramienta implícita (HI)		[…] usa la completitud sin identificarla. Por ejemplo: asegura la convergencia de una sucesión real monótona y acotada sin poder dar una justificación.
Herramienta explícita (HE). Este funcionamiento requiere que el estudiante identifique a la noción como objeto	Diferenciadora (HED)	[…] usa algún enunciado de la completitud para probar que $\mathbb{R}$ y $\mathbb{Q}$ son cuerpos totalmente ordenados distintos, el primero completo y el segundo no.
	Para definir objetos matemáticos (HEDO)	[…] usa algún enunciado de la completitud para definir objetos matemáticos. Por ejemplo: $\mathbb{I} = \{l / l = \sup(A), A \subset \mathbb{Q}, A \neq \emptyset, A \text{ acot. sup. en } \mathbb{Q}, A \text{ no admite supremo racional}\}$

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230005

y la use de forma intencional.	De prueba (HEP)	[…] identifica el uso de la completitud en el desarrollo de demostraciones que la requieran. Por ejemplo: en la demostración del Teorema de Valores Intermedios.
Objeto	Inicial (OI)	[…] conoce un enunciado de la completitud pudiendo o no ponerla en funcionamiento como HE.
	Movilizable (OM)	[…] conoce más de un enunciado de la completitud pudiendo o no identificar la equivalencia entre ellos, y es capaz de usarla como HE.
	Flexible (OF)	[…] conoce más de dos enunciados de la completitud, identifica la equivalencia entre ellos y pone en funcionamiento la noción como HE.

Cuadro 1 - Niveles de funcionamiento de la completitud de ℝ
Fuente: elaboración propia.

Tomando como referencia el trabajo de Douady (1992), entendemos que un estudiante sabe qué es la propiedad de completitud en la medida que es capaz de poner en funcionamiento su carácter de herramienta explícita y su carácter de objeto; identificamos, entonces, distintos niveles de conocimiento de la completitud utilizando los niveles de funcionamiento mencionados en el Cuadro 1. Resumimos los niveles de conocimiento en el Cuadro 2, presentado a continuación, en el cual cada trama representa un nivel de conocimiento diferente.

Funcionamientos →	Herramienta implícita	Herramienta explícita			Objeto		
↓Nivel de conocimiento		HED	HEDO	HEP	OI	OM	OF
Implícito (CI)							
Implícito (CI)							
Explícito inicial (EI)							
Explícito movilizable (EM)							
Explícito movilizable (EM)							
Explícito flexible (EF)							

Cuadro 2 - Niveles de conocimiento de la completitud de ℝ
Fuente: elaboración propia.

A modo de ejemplo, un estudiante muestra un conocimiento *implícito* (CI) de la completitud si la propiedad funciona como herramienta implícita (HI), pudiendo o no funcionar como objeto inicial (OI). Un estudiante tiene un conocimiento *explícito movilizable* (EM) de la completitud si la utiliza como herramienta explícita diferenciadora (HED), para definir objetos (HEDO) y para hacer pruebas (HEP) pudiendo funcionar como objeto inicial (OI) o como objeto movilizable.

Los niveles elaborados, incluyen categorías y subcategorías para ser utilizados en los análisis de la secuencia completa. Recordemos que, en este trabajo, nos centramos en analizar las dos primeras actividades de dicha secuencia (no todas las categorías y subcategorías se usan en este escrito).

La secuencia de enseñanza apunta a formular en la clase una primera hipótesis de la completitud de ℝ considerando el enunciado *toda sucesión real monótona creciente y acotada*

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230005

superiormente es convergente en $\mathbb{R}$, y la demostración, por parte de los estudiantes, de la equivalencia de cuatro posibles enunciados de la propiedad. La organización de las actividades de la secuencia responde a la intención de ir construyendo y demostrando (con institucionalizaciones intermedias, Bridoux (2012)) la equivalencia de los siguientes cuatro enunciados matemáticos de la propiedad de completitud de $\mathbb{R}$:

E1: *toda sucesión real monótona creciente y acotada superiormente es convergente en* $\mathbb{R}$.
E2: *toda sucesión real monótona y acotada es convergente en* $\mathbb{R}$.
E3*: todo par de sucesiones reales monótonas adyacentes converge a un mismo límite en* $\mathbb{R}$.
E4: *todo subconjunto de números reales no vacío y acotado superiormente tiene supremo real.*

Compartimos, en anexos 1 y 2, el esquema que elaboramos para ilustrar la secuencia completa, buscando facilitar la comprensión de su estructura.

5.2 Las actividades y su análisis didáctico

En esta sección, organizamos el análisis didáctico de las dos primeras actividades de enseñanza de la secuencia considerando los siguientes puntos: tiempo previsto, consigna, objetivos, desarrollos posibles e institucionalización esperada. Este análisis toma en consideración los niveles de funcionamiento y de conocimiento presentados en la sección precedente.

5.2.1 Actividad 1

Tiempo previsto: 90 minutos (Cuadro 3).

Consigna de la actividad

a- Completa la siguiente tabla enunciando las propiedades que cada una de las estructuras numéricas verifica con respecto a las operaciones de adición, multiplicación y la relación de orden definida.
b- Una vez completada la tabla, analiza similitudes y diferencias comparando las propiedades que verifica cada una de las estructuras algebraicas.

	$(\mathbb{N},+,\times,\leq)$	$(\mathbb{Z},+,\times,\leq)$	$(\mathbb{Q},+,\times,\leq)$	$(\mathbb{R},+,\times,\leq)$
$(+)$	*Conmutativa:* $\forall a,b \in \mathbb{N}, a+b=b+a$			
$(\times)$				
$(+,\times)$				
$(+,\leq)$				
$(\times,\leq)$				

Cuadro 3 - Consigna actividad 1
Fuente: elaboración propia.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230005

Objetivos de la actividad

Partimos de la hipótesis que la completitud no está disponible para los estudiantes como propiedad que diferencia a $\mathbb{Q}$ de $\mathbb{R}$. Esta falta de disponibilidad de la completitud nos permitirá legitimar el hecho de restringir trabajo a $\mathbb{Q}$ hasta tener más elementos para iniciar el trabajo en $\mathbb{R}$, sin imponer la propiedad de completitud. Durante la puesta en común de la actividad, el docente puede presentar una caracterización axiomática para $\mathbb{Z}$ y para $\mathbb{Q}$, haciendo uso de las propiedades de existencia del opuesto aditivo en $\mathbb{Z}$ y del elemento inverso multiplicativo en $\mathbb{Q}$. Esta forma de caracterizar a $\mathbb{Z}$ a partir de $\mathbb{N}$ y caracterizar a $\mathbb{Q}$ a partir de $\mathbb{Z}$ usando las propiedades que diferencian a cada estructura, *sienta las bases para generar una discusión en clase que permita analizar qué propiedad verifica* $\mathbb{R}$ *y no verifica* $\mathbb{Q}$ *y cómo usar dicha propiedad para caracterizar* $\mathbb{R}$ y, en consecuencia, el conjunto de los números irracionales ($\mathbb{I}$).

Desarrollo posible

Se espera que los estudiantes realicen sin dificultades la actividad.

Para analizar el estado inicial sobre la completitud que tienen los estudiantes el docente puede realizar la siguiente intervención (ficticia):

> *Podemos constatar que* $\mathbb{Q}$ *y* $\mathbb{R}$ *como estructuras algebraicas y de orden son cuerpos totalmente ordenados. Entonces, ¿qué diferencia a* $\mathbb{Q}$ *de* $\mathbb{R}$*?*

La intención de esta pregunta es provocar un cuestionamiento sobre la existencia de una propiedad que distingue a $\mathbb{R}$ de $\mathbb{Q}$ y que posibilitará caracterizar a los nuevos elementos numéricos que son números reales, pero no números racionales. Algunas respuestas que pueden brindar los estudiantes a esta cuestión son presentadas a continuación; las ponemos en relación con los niveles de funcionamiento de la completitud (respuesta ficticia):

> *E: Los números reales son la unión de los números irracionales y de los números racionales* - Herramienta implícita.
> *E: Existen números reales que no son periódicos* - Herramienta implícita
> *E:* $\sqrt{2}, \pi$ *no son números racionales pero son números reales* - Herramienta implícita.
> *E:* $\mathbb{R}$ *verifica el axioma del supremo y* $\mathbb{Q}$ *no. Porque existen subconjuntos de números racionales no vacíos y acotados superiormente que no tienen supremo racional* - Herramienta explícita diferenciadora, Objeto inicial.

Si un estudiante se encuentra recursando la asignatura, puede llegar a responder (respuesta ficticia):

> *E: Todos los subconjuntos de números reales no vacíos y acotados superiormente tienen supremo real y esto no lo cumple el conjunto de los números racionales. Además, todas las sucesiones que son de Cauchy tienen límite en* $\mathbb{R}$ *pero no en* $\mathbb{Q}$ - Herramienta explícita diferenciadora, Objeto movilizable.

El análisis de las respuestas (no ficticias) de los estudiantes nos proporcionará información sobre el estado inicial de conocimientos que ellos tienen sobre la completitud, a la

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230005

luz de los niveles de conocimiento que diseñamos.

Institucionalización esperada

Con esta actividad, se busca sentar las bases para presentar una caracterización de $\mathbb{Z}$ y de $\mathbb{Q}$ tomando como punto de partida la definición axiomática de $\mathbb{N}$ (axiomas de Peano).

Se espera caracterizar $\mathbb{Z}$ considerando la propiedad que distingue a $(\mathbb{Z},+)$ de $(\mathbb{N},+)$ (la existencia de elemento simétrico (existencia de opuesto) en $(\mathbb{Z},+)$). El docente podría relacionar esta propiedad que diferencia a estas estructuras algebraicas con la existencia de elementos numéricos que son números enteros, pero no son números naturales, y presentar la siguiente caracterización para $\mathbb{Z}$: $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{k/k + a = 0, \forall a \in \mathbb{N}\}$. El docente puede observar que $k + a = 0, \forall a \in \mathbb{N}$, y notar a k de la siguiente manera: $k = -a$

Esta caracterización que elegimos responde a una decisión didáctica que, si bien no respeta el rigor matemático, permite que los estudiantes relacionen los *nuevos elementos* con la propiedad que diferencia a las estructuras algebraicas $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{N}$. Esta misma decisión tomamos para caracterizar a $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$, haciendo énfasis en usar la propiedad que diferencia a cada estructura.

Para caracterizar a $\mathbb{Q}$, el docente puede hacer énfasis en la propiedad que diferencia a $(\mathbb{Q},\times)$ de $(\mathbb{Z},\times)$ (existencia de elemento inverso en $(\mathbb{Q},\times)$) y relacionar la validez de esta propiedad con la existencia de elementos numéricos que son números racionales, pero no son números enteros. Una posible caracterización de $\mathbb{Q}$ que puede presentar el docente, considerando esta diferencia, es definiendo el conjunto de todos los inversos multiplicativos de $\mathbb{Z} - \{0\}$): $K = \{k/k \times a = 1, \forall a \in \mathbb{Z} - \{0\}\}$. Una vez definido este conjunto, se puede caracterizar $\mathbb{Q}$ de la siguiente forma: $\mathbb{Q} = \{zk;\ \forall z \in \mathbb{Z}, \forall k \in K\ \}$

Luego de caracterizar $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$, el docente podría observar que la emergencia de una nueva propiedad está relacionada con la definición de nuevos números y se podría conjeturar que si $\mathbb{R}$ cumple una propiedad que no es verificada por $\mathbb{Q}$, esto traería aparejado la definición de nuevos números. Eso se *pega* bien con los conocimientos usuales sobre los números, los estudiantes no ignoran la existencia de $\sqrt{2}$, π etc. El docente puede plantear la siguiente interrogante: ¿cómo podemos caracterizar a los nuevos elementos usando una nueva propiedad?

Como cierre de la actividad, el docente puede enfatizar las caracterizaciones presentadas y realizar un comentario como el siguiente (discurso docente ficticio):

> *En principio,* $(\mathbb{Q},+,\times,\leq)$ *y* $(\mathbb{R},+,\times,\leq)$ *no presentan diferencias estructurales.y no está claro el rol del axioma del supremo en el desarrollo de conceptos del análisis. Entonces comenzaremos trabajando en* $(\mathbb{Q},+,\times,\leq)$ *hasta que podamos dar cuenta que es lo que diferencia a* $\mathbb{Q}$ *y* $\mathbb{R}$ *de manera explícita y entender qué aporta una nueva propiedad que se agregaría a las que definen a* $\mathbb{Q}$*, al desarrollo de los contenidos del Análisis matemático.*

En situación de curso, se espera que luego de concluida la Actividad 1 el docente aborde

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230005

en clase un trabajo con sucesiones racionales monótonas convergentes y divergentes en $\mathbb{Q}$ antes de proponer la Actividad 2.

5.2.2 Actividad 2

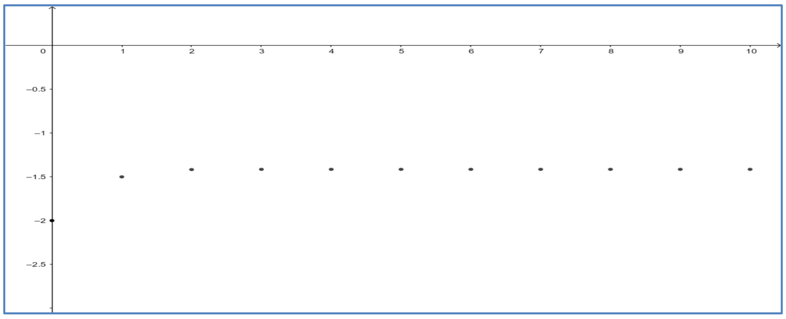
Esta actividad se les entrega a los estudiantes en dos etapas: primero la parte (a) y luego de la puesta en común de esta parte, el resto de la consigna.

Tiempo previsto: 90 minutos (Cuadro 4).

Consigna de la actividad

Considera la siguiente sucesión definida por recurrencia: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tal que:* $\begin{cases} a_0 = -2 \\ a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

a- En la siguiente figura están representados los primeros puntos pertenecientes al gráfico de la sucesión (a_n)*:*



A partir del gráfico, ¿qué información sobre la monotonía, la acotación y la convergencia de (a_n) *puedes obtener? Explica detalladamente.*

b- Calcula el valor de los cinco primeros términos de la sucesión, verifica que es una sucesión racional y prueba que (a_n) *está acotada superiormente por -1.*

c- Prueba que $(a_n) \uparrow_E$ *(nota:* $\uparrow_E$ *simboliza "estrictamente creciente").*

d- La sucesión (a_n)*, ¿es convergente en* $\mathbb{Q}$*? Fundamenta tu respuesta.*

Cuadro 4 - Consigna actividad 2
Fuente: elaboración propia.

Objetivos de la actividad

Esta actividad está pensada para analizar que existen sucesiones racionales monótonas crecientes y acotadas superiormente que no son convergentes en $\mathbb{Q}$ y, a partir de esto, enunciar la propiedad de completitud de $\mathbb{R}$ vía la convergencia de las sucesiones reales monótonas crecientes y acotadas superiormente. En concordancia con las caracterizaciones presentadas en la actividad 1, buscamos presentar una caracterización de $\mathbb{R}$ usando este enunciado. Compartimos una posible resolución de esta actividad en anexos.

Desarrollo posible

En la parte (a) de la actividad se espera que los estudiantes conjeturen que la sucesión representada es monótona creciente, acotada superiormente y que afirmen que no se puede

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230005

asegurar esto a partir del gráfico. Necesitan recurrir a la expresión algebraica de la sucesión para probar su conjetura, el marco gráfico resulta limitado para este tipo de estudios. Algunos pueden considerar que la sucesión es convergente a algún valor específico, por ejemplo $-\frac{3}{2}$, esto se discutirá durante la puesta en común de la actividad. Durante la resolución de la parte (c) algunos estudiantes pueden sentirse desorientados al percatarse que la prueba de la monotonía queda supeditada a la prueba previa de que $2 - {a_n}^2 < 0$, una posible intervención del docente es sugerir la prueba de esta última desigualdad para poder asegurar la monotonía creciente. Algunos estudiantes podrían presentar dificultades para demostrar esta última desigualdad, en ese caso, el docente tiene la opción de sugerir que utilicen la inducción completa como método de demostración y recordar que se está trabajando en $\mathbb{Q}$. Si en la resolución de la parte (d) os estudiantes afirman que $l^2 = 2$ no tiene solución racional porque $l = \pm\sqrt{2}$ y que estos números son *irracionales*, el docente puede señalar que en el contexto de trabajo se consideran solo las propiedades que son válidas sobre $\mathbb{Q}$. Esto hace necesario probar que no existen números racionales cuyo cuadrado sea igual a 2.

Como consecuencia del trabajo con esta actividad, se espera institucionalizar las ideas siguientes:

> Existen sucesiones racionales monótonas crecientes y acotadas superiormente que no son convergentes en $\mathbb{Q}$.
>
> Lo deseable es trabajar en un sistema numérico en el que TODAS las sucesiones monótonas crecientes y acotadas superiormente definidas sobre ese sistema numérico sean convergentes.

Sobre esta base, es posible presentar el enunciado de la propiedad de completitud vía la convergencia de sucesiones monótonas y acotadas como respuesta a esta necesidad. Previo al enunciado de la propiedad de completitud, el docente recuerda la definición de sucesión real: (a_n) es una sucesión real si y sólo si $a: \mathbb{N}_p \to \mathbb{R}$, siendo $\mathbb{N}_p = \{n \in \mathbb{N}, n \geq p\ \}$ con $p \in \mathbb{N}$ y enuncia que el conjunto de los números reales es el cuerpo totalmente ordenado que verifica la propiedad de completitud:

> Toda sucesión real monótona creciente y acotada superiormente es convergente en $\mathbb{R}$.

El docente, entonces, invita a los estudiantes a volver sobre la actividad 1, en la cual quedó pendiente caracterizar a $\mathbb{R}$ y al conjunto de los números irracionales a partir de $\mathbb{Q}$ y de esta nueva propiedad. Posible intervención del docente (intervención ficticia):

> *Ahora que tenemos una propiedad que diferencia a $\mathbb{Q}$ de $\mathbb{R}$, ¿cómo la usarían para caracterizar a $\mathbb{R}$?*

Algunas respuestas que pueden brindar los estudiantes a esta cuestión son las siguientes, y las ponemos en relación con los niveles de funcionamiento de la completitud (respuestas

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230005

ficticias):

E: $\mathbb{R}$ *es la unión de* $\mathbb{Q}$ *y las sucesiones racionales que no son convergentes en* $\mathbb{Q}$.
E: $\mathbb{R}$ *es la unión de* $\mathbb{Q}$ *y los límites de las sucesiones racionales que no son convergentes en* $\mathbb{Q}$.
E: $\mathbb{R}$ *es la unión de* $\mathbb{Q}$ *y las sucesiones racionales monótonas crecientes y acotadas superiormente que no son convergentes en* $\mathbb{Q}$ - Herramienta explícita diferenciadora, Herramienta explícita para definir objetos y Objeto inicial o movilizable.

E: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$ *siendo* $\mathbb{I}$ *el conjunto de todos los límites de las sucesiones racionales que no son convergentes en* $\mathbb{Q}$ - Herramienta explícita diferenciadora, Herramienta explícita para definir objetos y Objeto inicial o movilizable.

Otra respuesta (ficticia) posible, pero que difícilmente surja es:

E: $\mathbb{R}$ *es el conjunto de todos los límites de las sucesiones racionales monótonas crecientes y acotadas superiormente* - Objeto inicial o movilizable.

El estatus de objeto inicial o movilizable en las respuestas anteriores depende de si el estudiante reconoce la propiedad del supremo como un posible enunciado de la propiedad de completitud.

Institucionalización esperada

Como fruto de la discusión colectiva, se espera arribar a las siguientes caracterizaciones:

Caracterización de $\mathbb{I}$*:*
$\mathbb{I} = \{k, k = lim\, a_n\, , (a_n)\ racional\ monótona\ creciente, acotada\ superiormente\ y$
$no\ convergente\ \ en\ \mathbb{Q}\}$
Caracterización de $\mathbb{R}$*:* $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$
$\mathbb{R} = \{k, k = lim\, a_n\, , (a_n)\ racional\ monótona\ creciente\ y\ acotada\ superiormente\ en\ \mathbb{Q}\}$

En la siguiente sección, exponemos el análisis e interpretación de los resultados que obtuvimos en la experimentación a la luz de los niveles de funcionamiento y de conocimiento de la completitud que diseñamos.

6 Análisis e interpretación de los resultados

En esta sección, presentamos el análisis de las producciones e intervenciones de los estudiantes y su interpretación a la luz de los niveles de funcionamiento y de conocimiento de la completitud introducidos en la sección 5. Forma parte de este análisis la identificación de metadiscursos (Dorier, 1995) elaborados por el docente durante el desarrollo de las actividades.

Los datos fueron analizados considerando la lectura de todas las producciones de los estudiantes y la transcripción de los registros audiovisuales. Los nombres de los estudiantes son ficticios.

6.1 Análisis e interpretación de los resultados obtenidos en la actividad 1

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230005

Recordemos que uno de los objetivos de esta actividad es analizar el estado inicial de los estudiantes con respecto a su conocimiento de la propiedad de completitud, considerando los niveles de conocimiento y funcionamiento de la completitud de $\mathbb{R}$. Todos los estudiantes realizan exitosamente la actividad. La discusión de sus respuestas y la puesta en común de la misma da lugar a la institucionalización esperada.

A continuación, transcribimos parte del diálogo que se desarrolló durante la puesta en común de la actividad y que muestra el discurso utilizado por el docente (metadiscurso, Dorier (1995)) y las respuestas aportadas por los estudiantes como parte de su producción verbal. Esto nos permitió analizar qué idea de la completitud tienen los estudiantes al inicio del taller. Los estudiantes trabajaron en duplas:

> *Profesora (P): Podemos constatar que $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$, como estructuras algebraicas y de orden, son cuerpos totalmente ordenados. Entonces, ¿qué diferencia a $\mathbb{Q}$ de $\mathbb{R}$?¿Qué diferencia a $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ como estructuras algebraicas?*
> *Andrea: Nada.*
> *Mónica: Yo me pregunto lo mismo.*
> *Profesora: Como estructuras algebraicas $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ son ambos cuerpos totalmente ordenados. ¿Cómo me doy cuenta que $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ no son lo mismo?*
> *Víctor: Por Pitágoras.*
> *Profesora: ¿Por qué por Pitágoras?*
> *Víctor: Porque en un triángulo rectángulo de catetos 1, la hipotenusa mide $\sqrt{2}$.*
> *Profesora: Y eso, ¿cómo lo usás para argumentar que $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ son diferentes?*
> *Andrea y Elena: Hay otros números que no son racionales y están en $\mathbb{R}$, los números irracionales.*
> *Profesora: ¿cómo podemos caracterizar a esos números?*
> *Andrea: $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$.*
> *Profesora: No tenemos caracterizado a $\mathbb{R}$, hemos caracterizado a $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$.*
> *Andrea: Los irracionales son aquellos números que no podemos escribir como fracción.* [Andrea insiste en que se trata de $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$]
> *Mónica y Víctor: ¿el axioma del supremo?*
> *Profesora: ¿Cuál es el enunciado del axioma del supremo?*
> *Mónica y Víctor:… ¿todo subconjunto no vacío y acotado superiormente tiene supremo? O algo así…*
> *Profesora: Bien, ¿cuál es la utilidad de esta propiedad? ¿Podemos usarla para caracterizar $\mathbb{R}$?*
> (Diálogo entre la profesora y los estudiantes, 2021).

Los estudiantes no logran responder que utilidad tiene la propiedad del supremo. Al cierre de esta actividad no están dadas las condiciones para que los estudiantes logren vincular una propiedad que diferencia a $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ y usarla para definir al conjunto de los números irracionales. Teniendo en cuenta los niveles de funcionamiento presentados en el Cuadro 1, las respuestas de Andrea y Elena al inicio de la secuencia dan evidencias de un funcionamiento de la completitud como herramienta implícita, puesto que reconocen la existencia de los números irracionales, pero no establecen el vínculo de éstos con la propiedad de completitud.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230005

Las respuestas de Mónica y Víctor dan evidencia de un funcionamiento como herramienta explícita diferenciadora y como objeto inicial, ya que conocen un enunciado de la completitud vía la noción de supremo y la usan como argumento para diferenciar a $\mathbb{Q}$ de $\mathbb{R}$. En sus respuestas no citan el término *completitud*, sino que lo denominan *axioma del supremo*. Consideramos que Andrea y Elena presentan un conocimiento implícito de la completitud porque la diferencia que identifican entre $\mathbb{Q}$ *y* $\mathbb{R}$ es la existencia de los números irracionales, sin caracterizarlos de manera formal. Mónica y Víctor tienen un conocimiento explícito inicial de la propiedad, puesto que identifican la existencia de la propiedad de supremo para diferenciar a $\mathbb{R}$ de $\mathbb{Q}$.

A continuación, presentamos el resumen de los funcionamientos de la completitud evidenciados en las producciones de los estudiantes durante el desarrollo de esta actividad (Cuadro 5).

Estudiantes	**Nivel de funcionamiento**	**Nivel de conocimiento**
Andrea	Herramienta implícita.	Implícito.
Elena	Herramienta implícita.	Implícito.
Mónica	Herramienta explícita diferenciadora. Objeto inicial.	Explícito inicial.
Víctor	Herramienta explícita diferenciadora. Objeto inicial.	Explícito inicial.

Cuadro 5 - Niveles de funcionamiento y conocimiento de los estudiantes en la Actividad 1
Fuente: elaboración propia.

Las respuestas que brindaron los estudiantes durante el diálogo que se estableció en la puesta en común coinciden, esencialmente, con las respuestas esperadas en el análisis didáctico de la actividad. Cabe mencionar que en nuestro análisis didáctico no consideramos la propiedad de Pitágoras, mencionada por Víctor, como diferenciadora de $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$.

6.2 Análisis e interpretación de los resultados obtenidos en la actividad 2

Nuevamente, recordemos que uno de los objetivos de esta actividad es enunciar la propiedad de completitud de $\mathbb{R}$ mediante el enunciado: *todas las sucesiones reales monótonas crecientes y acotadas superiormente son convergentes en* $\mathbb{R}$. Los estudiantes intentan probar la monotonía de la sucesión usando, únicamente, propiedades de la estructura de cuerpo totalmente ordenado de los números racionales. Mónica presenta una prueba de la acotación superior de la sucesión y recurre al uso de números irracionales en la prueba de la monotonía (Figura 1). Víctor también intenta probar la monotonía y acotación de la sucesión, pero no logra elaborar una prueba usando solo las propiedades de cuerpo y orden en $\mathbb{Q}$ (Figura 2). Elena también intenta probar la acotación y la monotonía de la sucesión pero no logra terminar

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230005

ninguna de las dos pruebas (Figura 3 y 4).

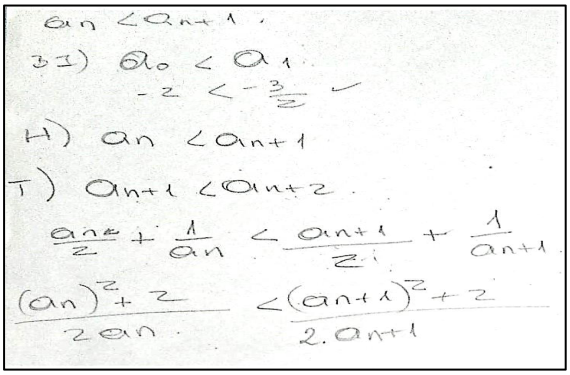


Figura 1 - Resolución de Mónica
Fuente: elaboración propia.

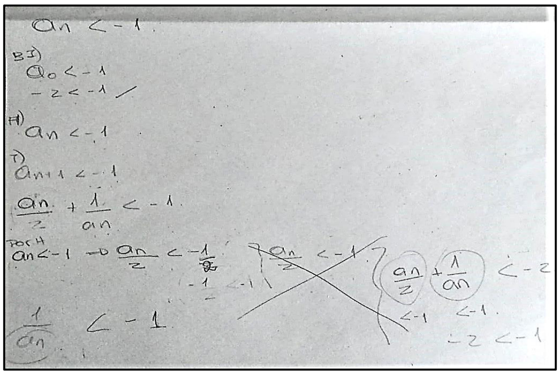


Figura 2 - Resolución de Víctor
Fuente: elaboración propia.

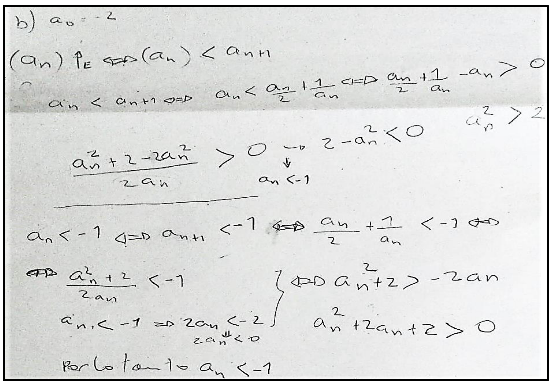


Figura 3 - Resolución de Elena 2(b)
Fuente: elaboración propia.

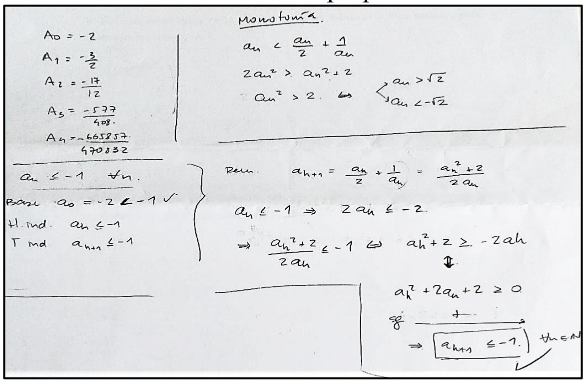


Figura 4 - Resolución de Elena 2(c)
Fuente: elaboración propia.

Andrea trabaja únicamente sobre la prueba de acotación superior de la sucesión y presenta dos versiones. No logra elaborar una prueba con las condiciones de la consigna (Figura 5 y 6).

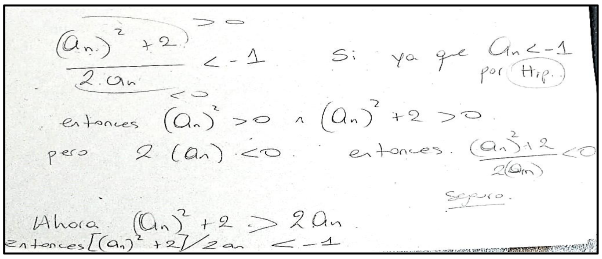


Figura 5 - Resolución de Andrea 2(b)
Fuente: elaboración propia.

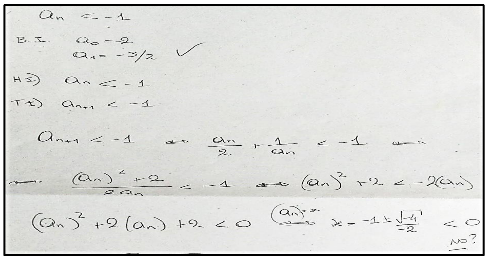


Figura 6 - Otra resolución de Andrea 2(b)
Fuente: elaboración propia.

En la puesta en común se prueba, con la ayuda del docente, que la sucesión es monótona creciente. También se demuestra, con la participación activa de los estudiantes, que la sucesión racional está acotada superiormente en $\mathbb{Q}$ y que tiene límite racional, haciendo uso exclusivo de las propiedades que verifica $\mathbb{Q}$ como cuerpo totalmente ordenado. Como parte de la institucionalización esperada y en concordancia con los objetivos de esta actividad el docente

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230005

comenta:

> *La sucesión racional de esta actividad es monótona creciente y acotada superiormente en $\mathbb{Q}$. Sin embargo, en contra de nuestra intuición, no tiene límite racional. Lo deseable es trabajar en un sistema numérico donde podamos asegurar la convergencia de TODAS las sucesiones monótonas crecientes y acotadas superiormente* (Comentario del docente, 2021).

Este comentario del docente busca dar lugar a enunciar la propiedad de completitud vía la convergencia de las sucesiones reales monótonas crecientes y acotadas superiormente, como se explicitó en la institucionalización del análisis didáctico de esta actividad.

El docente retoma lo trabajado en la Actividad 1 y pregunta a los estudiantes (metadiscurso, Dorier (1995)):

> *Recordemos que al final de la actividad 1 caracterizamos $\mathbb{Z}$ a partir de $\mathbb{N}$ y de la propiedad que diferencia a estas dos estructuras. También caracterizamos $\mathbb{Q}$ a partir de $\mathbb{Z}$ usando la propiedad que verifica $\mathbb{Q}$ y no verifica $\mathbb{Z}$ (la existencia de inverso multiplicativo). Ahora que tenemos una propiedad que diferencia a $\mathbb{Q}$ de $\mathbb{R}$, ¿cómo la usarían para caracterizar $\mathbb{R}$ a partir de $\mathbb{Q}$?* (Cuestión propuesta por el docente, 2021).

Esta pregunta invita a los estudiantes a usar esta propiedad para continuar un cuestionamiento que quedó sin respuesta durante la puesta en común de la actividad 1. Busca que los estudiantes se pregunten cómo usar esta nueva propiedad para caracterizar al conjunto de los números reales y, en particular, para dar una caracterización del conjunto de los números irracionales. Los estudiantes se toman un tiempo para pensar en una posible forma de caracterizar y dudan. El docente recuerda la forma en que se caracterizó al conjunto de los números enteros a partir del conjunto de los números naturales para orientar a los estudiantes.

Elena y Víctor presentan la siguiente caracterización para $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \{k, k = lim\ a_n, (a_n) \text{ sucesión racional monótona creciente, acotada superiormente y no convergente en } \mathbb{Q}\}$$

(Respuesta de Elena y Víctor, 2021)

Mónica propone la siguiente caracterización:

$$\mathbb{R} = \{L, L = lim\ a_n, (a_n) \text{ sucesión racional monótona creciente, acotada superiormente}\}$$

(Respuesta de Mónica, 2021)

Elena y Víctor utilizan el enunciado de la propiedad de completitud para caracterizar a los números irracionales, sin embargo, Mónica hace uso de la propiedad para caracterizar a $\mathbb{R}$ y Andrea no presenta una respuesta para esta pregunta que formuló el docente, esto da evidencia que la propiedad de completitud, todavía, no funciona para ella como herramienta explícita para definir objetos.

Esta forma de caracterizar a $\mathbb{R}$ da evidencia que la completitud es usada por los estudiantes como herramienta explícita para definir objetos. En el caso de Mónica y Víctor,

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230005

consideramos que dan muestras de un funcionamiento como objeto movilizable porque en la actividad 1 ya se constató que conocían un enunciado de la completitud (vía la noción del supremo). En el Cuadro 6 resumimos los niveles de funcionamiento identificados en la resolución de esta actividad.

Estudiantes	Nivel de funcionamiento
Andrea	Herramienta implícita. Objeto inicial.
Elena	Herramienta explícita para definir objetos matemáticos. Objeto inicial.
Mónica	Herramienta explícita para definir objetos matemáticos. Objeto movilizable.
Víctor	Herramienta explícita para definir objetos matemáticos. Objeto movilizable.

Cuadro 6 - Niveles de funcionamiento identificados en la resolución de la Actividad 2
Fuente: elaboración propia.

Las dificultades esperadas en el análisis didáctico y las intervenciones docentes previstas contribuyeron a que los estudiantes, durante la puesta en común, participaran activamente en las demostraciones solicitadas en la actividad.

7 Conclusiones

Las actividades diseñadas muestran la intención de introducir la completitud, generando una situación que ponga en evidencia tanto la insuficiencia de $\mathbb{Q}$ como la necesidad de introducir la propiedad de completitud como diferenciadora de los cuerpos totalmente ordenados $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$. El móvil es asegurar la convergencia de las sucesiones monótonas crecientes y acotadas superiormente, condición necesaria para llevar a cabo el trabajo en Análisis matemático.

Referente a los niveles de funcionamiento, la categoría de objeto inicial no requiere, necesariamente, el funcionamiento como herramienta explícita. Sin embargo, el funcionamiento de la noción como objeto movilizable y flexible hace necesario que el estudiante utilice la noción como herramienta explícita en todos sus subniveles (HED, HEDO y HEP). Los estudiantes pueden transitar de un nivel de conocimiento inicial a un nivel de conocimiento movilizable o flexible, sin transitar de manera evidente por el nivel de conocimiento explícito inicial. La secuencia que diseñamos apunta a que el estudiante logre poner en funcionamiento la completitud como herramienta explícita en todos los subniveles y como objeto flexible.

Las respuestas de los estudiantes a la primera actividad nos permiten inferir que el conocimiento sobre la completitud que presentaron al inicio del taller se ubica en las categorías de *conocimiento implícito* y *conocimiento explícito inicial*.

El análisis de las producciones de los estudiantes, a propósito de la segunda actividad,

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230005

muestra que el funcionamiento como herramienta de la completitud se modificó, pasando de un uso como *herramienta implícita* a *herramienta explícita para definir objetos*, en tres de los estudiantes. En cuanto al funcionamiento de la completitud como objeto, en el caso de Mónica y Víctor pasó de *objeto inicial* a *objeto movilizable*. Elena mostró un *conocimiento implícito* al inicio de la propuesta y éste cambió a un *conocimiento explícito inicial* al finalizar la actividad 2.

El diseño de actividades intencionadas, conjuntamente con la puesta en juego de un discurso particular del docente apoyado en las resoluciones y aportes de los estudiantes (metadiscurso), parece contribuir positivamente a que los estudiantes pongan en funcionamiento el carácter de herramienta explícita y de objeto de la noción en cuestión. En efecto, es lo que vemos a partir de la introducción de la propiedad de completitud mediante estas dos actividades que ponen en discusión las diferencias entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{Q}$ como cuerpos totalmente ordenados y que generan la necesidad de enunciar esta propiedad para validar algunos resultados del análisis matemático (en este caso, la convergencia de sucesiones monótonas y acotadas).

Referencias

ACEVEDO, C. **Una secuencia didáctica para el concepto del Supremo basado en la teoría APOE**. 2011. 59 hojas. Tesis (Licenciatura en Matemáticas) – Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, 2011.

BERGÉ, A.; SESSA, C. Completitud y continuidad revisadas a través de 23 siglos. Aportes a una investigación didáctica. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, Ciudad de México, v. 3, n. 6, p. 163-197, jul. 2003.

BERGÉ, A. The completeness property of the set of real numbers in the transition from calculus to analysis. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 67, n. 3, p. 217-235, mar. 2008.

BERGÉ, A. Le rôle de la borne supérieure (ou supremum) dans l'apprentissage du système des nombres reels. *In*: INTERNATIONAL NETWORK FOR DIDACTIC RESEARCH IN UNIVERSITY MATHEMATICS, 1., 2016, Montpellier. **Proceedings…** Montpellier: INDRUM, 2016. p. 33-42. Disponible en: https://hal.science/INDRUM2016/public/indrum2016proceedings.pdf. Acceso en: 14 jul. 2020.

BILLS, L.; TALL, V. Operable Definitions in Advanced Mathematics: The Case of the Least Upper Bound. *In*: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 22., 1998, Stellenbosch. **Proceedings…** Stellenbosch: PME, 1998. p. 104-111. Disponible en: https://www.researchgate.net/publication/240157061_Operable_Definitions_in_Advanced_Mathematics_The_Case_of_the_Least_Upper_Bound. Acceso en: 25 mar. 2020.

BISQUERRA, R. **Metodología de la Investigación Educativa**. 2. ed. Madrid: La Muralla, 2009.

BRIDOUX, S. Notions de topologie: élaboration de leviers didactiques à intégrer dans un enseignement pour favoriser les apprentissages des étudiants. *In*: COLLOQUE DE L'ESPACE MATHÉMATIQUE FRANCOPHONE, 5., 2012, Ginebra. **Actes...** Ginebra: EMF, 2012. p. 327-350. https://www.researchgate.net/publication/308611746_Notions_de_topologie_elaboration_de_leviers_didactiques_a_integrer_dans_un_enseignement_pour_favoriser_les_apprentissages_des_etudiants. Acceso en: 16 set. 2020.

BROUSSEAU, G. **Theory of Didactical Situations in Mathematics:** Didactique des Mathématiques, 1970–1990. Dordrecht, Springer. 2002.

CHELLOUGUI, F. Approfondissement du questionnement didactique autour du concept de « borne supérieure ». *In*: INTERNATIONAL NETWORK FOR DIDACTIC RESEARCH IN UNIVERSITY MATHEMATICS, 1., 2016, Montpellier. **Proceedings…** Montpellier: INDRUM, 2016. p. 266-275. Disponible en: https://hal.science/hal-01337931/document. Acceso en: 23 jun. 2020.

CHORLAY, R. A Pathway to a Student-Worded Definition of Limits at the Secondary-Tertiary Transition. **International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education,** Lausanne, v. 5, n. 3, p. 267-314, jun. 2019.

DORIER, J. Meta level in the teaching of unifying and generalizing concepts in mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 29, n. 2, p. 175-197, 1995.

DOUADY, R. Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement. **Repères Irem**, París, [s.v.], n. 6, p. 132-158, en. 1992.

DOUADY, R. La ingeniería didáctica y la evolución de la relación con el conocimiento matemático. *In*: GÓMEZ, P (ed.). **Ingeniería didáctica en Educación Matemática**: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Ciudad de México: Grupo Editorial Iberoamérica, 1995. p. 61-96.

HERNÁNDEZ, L.; TRIGUEROS, M. Acerca de la comprensión del concepto del supremo. **Educación Matemática**, Ciudad de México, v. 24, n. 3, p. 99-119, 2012.

JOVIGNOT, J. L'analyse épistémologique du concept d'idéal et ses apports à l'étude didactique. *In*: COLLOQUE DE L'ESPACE MATHÉMATIQUE FRANCOPHONE, 7., 2018, Genevilliers. **Actes...** Genevilliers: EMF, 2018, p. 61-73. Disponible en: https://books.openedition.org/pufc/11337?lang=es. Acceso en: 18 may. 2021.

ROBERT. A. Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. **Recherches en didactique des matématiques**, Grenoble, v. 18, n. 2, p. 139-190, 1998.

SANTAMARÍA, J. Paradigmas de investigación educativa: de las leyes subyacentes a la modernidad reflexiva. **Entelequia**, Cádiz, 2013, n. 16, p. 91-102, oct. 2013. Disponible en: https://revistaentelequia.wordpress.com/2013/10/12/1320/. Acceso en: 27 oct. 2022.

SARI, C. K.; Machromah, U.; Purnomo, M.E. R. (2018). Finding and proving supremum and infimum: students' misconceptions. Journal of Physics: Conference Series. Disponible en: https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1180/1/012007. Acceso en: 15 feb. 2020.

Submetido em 09 de Janeiro de 2023.
Aprovado em 06 de Novembro de 2023.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230005

Anexo 1

Figura 7 - Las actividades de la secuencia en relación con la equivalencia de enunciados
Fuente: elaboración propia.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230005

Anexo 2

Actividad 2

Una posible resolución

a- El gráfico muestra unos pocos puntos del gráfico de la sucesión y no permite conjeturar nada sobre el comportamiento de la sucesión en términos de monotonía, acotación y, menos aún, de convergencia. Pero puede ayudar a considerar la posibilidad de probar que la sucesión es monótona creciente y parecería que está acotada superiormente por -1, aunque la prueba de esto requiere cambiar al marco aritmético. En cuanto a la convergencia, no se puede asegurar nada en este marco, el análisis de la convergencia requiere cambiar al marco aritmético.

b- $a_0 = -2 \quad a_1 = -\frac{3}{2} \quad a_2 = -\frac{17}{12} \quad a_3 = -\frac{577}{408} \quad a_4 = -\frac{665857}{470832}$

Prueba de que $\boldsymbol{a_n < -1}$ $\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$

Demostración:

$a)\ a_0 = -2 \Rightarrow a_0 < -1$

$b)\ H_i: a_n < -1 \quad T_i: a_{n+1} < -1$

Demo: $(a_n + 1)^2 > 0 \Rightarrow (a_n + 1)^2 > -1 \Rightarrow {a_n}^2 + 2a_n + 2 > 0 \Rightarrow {a_n}^2 + 2 > -2a_n$

por (H_i) $a_n < -1 \Rightarrow \frac{{a_n}^2+2}{2a_n} < -1$; $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n} = \frac{{a_n}^2+2}{2a_n} < -1$

Entonces: $a_n < -1\ \forall n \in \mathbb{N}$

Prueba de que $\boldsymbol{a_n} \in \mathbb{Q}$ $\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$

Demostración:

$a)\ a_0 = -2 \Rightarrow a_0 \in \mathbb{Q}$

$b)$ $\mathrm{H_i}$: $a_n \in \mathbb{Q}$ $\quad$ $\mathrm{T_i}$: $a_{n+1} \in \mathbb{Q}$

Demo: $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2} + \dfrac{1}{a_n}$ por$\mathrm{H_i}$ y por ser $(+)y$ $(\times)$cerradas en $\mathbb{Q}$ $\Rightarrow a_{n+1} \in \mathbb{Q}$

por $a)$ y $b)$ $a_n \in \mathbb{Q}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

c- La prueba de que $(\boldsymbol{a_n})$ es estrictamente creciente $[(\boldsymbol{a_n}) \uparrow_{\boldsymbol{E}}]$

Demostración:

$$(a_n) \uparrow_E \Leftrightarrow a_{n+1} - a_n > 0\ \forall n \in \mathbb{N}$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n} - a_n = \frac{2 - {a_n}^2}{\underbrace{2a_n}_{<0}} > 0 \Leftrightarrow 2 - {a_n}^2 < 0$$

$$(a_n) \uparrow_E \text{ si } \boldsymbol{2 - {a_n}^2 < 0}$$

La demostración de la monotonía creciente de (a_n) queda supeditada a la prueba de

$$2 - {a_n}^2 < 0$$

Prueba de que $\boldsymbol{2 - {a_n}^2 < 0\ ({a_n}^2 > 2\,)}$ $\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230005

Demostración:

$a)\ a_0 = -2 \Rightarrow {a_0}^2 = 4 > 2$

$b)$ H_i: ${a_n}^2 > 2$ T_i: ${a_{n+1}}^2 > 2$ $({a_{n+1}}^2 - 2 > 0)$

Demo:

$$\boldsymbol{{a_{n+1}}^2 - 2} = \left(\frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n}\right)^2 - 2 = \left(\frac{{a_n}^2 + 2}{2a_n}\right)^2 - 2 == \frac{{a_n}^4 + 4{a_n}^2 + 4}{4{a_n}^2} - 2 = \frac{({a_n}^2 - 2)^2}{4{a_n}^2} > \mathbf{0}$$

por a) y b) ${a_n}^2 > 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Como $\boldsymbol{2 - {a_n}^2 < 0}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ entonces $(a_n) \uparrow_E \ \forall n \in \mathbb{N}$.

d- Analizando la convergencia en $\mathbb{Q}$ de $(\boldsymbol{a_n})$

$(\boldsymbol{a_n})$ es una sucesión racional, estrictamente creciente y acotada superiormente en $\mathbb{Q}$. Suponiendo que la sucesión tiene límite racional, $\Rightarrow \exists\, l \in \mathbb{Q}, \lim_n a_n = \lim_n a_{n+1} = l$

Entonces: $\lim_n a_{n+1} = \lim_n \left(\frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n}\right)$

Resultando: $l = \frac{l}{2} + \frac{1}{l} \Leftrightarrow \frac{l^2-2}{2l} = 0 \Leftrightarrow l^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow l^2 = 2$

$Sea\ l = \frac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z}\ , q \in \mathbb{N}^*\ y\ D(p,q) = 1$

$l^2 = 2 \Leftrightarrow \left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \Leftrightarrow \frac{p^2}{q^2} = 2 \Leftrightarrow p^2 = 2q^2$ [1], de aquí se deduce que

$p = \dot{2}$ (p es múltiplo de 2) $\Rightarrow \exists h \in \mathbb{N}, p = 2h$. Entonces $p^2 = 4h^2$ resultando por [1] que $2q^2 = 4h^2 \Rightarrow q^2 = \dot{2} \Rightarrow q = \dot{2} \Rightarrow D(p,q) \neq 1$. Esto contradice lo supuesto. Se concluye que no existe un número racional cuyo cuadrado sea igual a 2.