BRAGANTIA

Boletim Técnico do Instituto Agronômico do Estado de São Paulo

Vol. 18 Setembro de 1959 N.º 2

DETERMINAÇÃO DO NÚMERO DE REPETIÇÕES NO PLANEJAMENTO DE EXPERIMENTOS (*)

ARMANDO CONAGIN

Engenheiro-agrônomo, Seção de Técnica Experimental, Instituto Agronômico

RESUMO

A avaliação do número de repetições necessárias para a obtenção de resultados significativos, a partir da fórmula da diferença mínima significativa, não é satisfatória. Por êste processo os resultados serão significativos em cêrca de 50% dos futuros experimentos.

São discutidos vários métodos que procuram eliminar êsse inconveniente: os métodos devidos a Neyman, o de Cochran e Cox, o de Harris, Horvitz e Mood, o devido a Tang e, finalmente, o de Tukey; consideram-se os casos em que a maior ênfase está no teste de significância e os casos em que o objetivo está na determinação de um intervalo de confiança de tamanho especificado. As condições necessárias para que cada um dos métodos possa ser corretamente aplicado e ainda, as limitações dos mesmos, são discutidos no texto. Transcreveram-se com a permissão dos autores, algumas tabelas, as quais facilitarão a aplicação dêsses métodos por parte dos experimentadores.

1 — INTRODUÇÃO

A precisão desejada para um experimento pode ser especificada de uma das duas formas seguintes:

a) testes de significância, para pôr em prova uma suposta diferença entre dois tratamentos;

b) estimação de um parâmetro, com uma certa precisão, pelo cálculo de um intervalo de confiança de tamanho pré-fixado.

(*) Trabalho apresentado na Reunião da Região Brasileira da "Biometric Society", em São Paulo, em 15 de janeiro de 1957.

O autor agradece ao Editor de The Journal of the Royal Statistical Society, a permissão para a reprodução das tabelas constantes do quadro 1, adatadas de Neyman e outros (6); a T. E. Harris, pela permissão da reprodução das tabelas constantes do quadro 3, adatadas de Lehmer (5); agradece também ao Editor de The Journal of the American Statistical Association, a permissão para a reprodução das tabelas constantes do quadro 2, adatadas de Harris e outros (3).

Recebido para publicação em 16 de setembro de 1957.

O uso do teste de significância é de grande utilidade, principalmente nas fases iniciais de uma pesquisa; a estimação do valor do parâmetro, um do objetivos finais da mesma.

Ao instalarmos um experimento queremos que certas diferenças possam ser reveladas; se pudermos estabelecer que um novo tratamento é superior ao padrão em 15%, pelo menos, teremos obtido um resultado importante: não queremos deixar passar despercebidas diferenças reais entre tratamentos por culpa exclusivamente da falta de precisão do experimento.

2 — TESTES DE SIGNIFICÂNCIA

O experimento deve ser planejado de tal forma a garantir que uma diferença real, entre o novo tratamento e o padrão, da ordem de 15% ou mais, por exemplo, leve à provável obtenção de resultados significativos.

Quando pomos à prova uma hipótese estatística, temos que controlar dois possíveis tipos de êrro: 1) rejeição da hipótese posta à prova, quando ela é verdadeira; 2) aceitação da mesma, quando falsa. O êrro cometido quando tomamos decisões do tipo (1) é chamado êrro de primeira espécie; o cometido em decisões do tipo (2), êrro de segunda espécie.

Normalmente escolhemos aquêles resultados do teste, tais que, para a probabilidade de um êrro do tipo (1) fixada em 5% ou 1%, a probabilidade de um êrro do tipo (2) seja a menor possível.

Suponhamos, por exemplo, uma certa variedade de mamona A, com preferência estabelecida entre os lavradores. O melhorador consegue produzir uma nova variedade B, que acredita seja superior, em produção, à antiga variedade.

Uma comparação simétrica de A com B pode ser considerada como o problema de pôr à prova a hipótese H_O: $\mu_A = \mu_B$ (a hipótese H_O é chamada hipótese de nulidade, isto é, a produção de ambas as variedades é a mesma). A simples especificação da hipótese H_O não permite a avaliação do êrro de 2.ª espécie. Para êsse fim necessitamos de, pelo menos, uma hipótese alternativa.

2.1 — MÉTODO DE NEYMAN

Neyman e outros (6) apresentaram um método para a determinação do número de repetições necessárias para garantir, com uma certa probabilidade $1 - \beta$, a não aceitação de uma hipótese quando ela é falsa.

A solução estatística do problema atrás considerado (comparação das variedades A e B) consiste em pôr à prova a hipótese $H_1 : \mu_A \geqq \mu_B$ contra a hipótese $H_2 : \mu_A < \mu_B$.

Neyman e Pearson (7) demonstraram que o teste mais poderoso para a hipótese H_1, referente às médias de A e B quando estas são provenientes de uma distribuição normal com um mesmo desvio padrão σ, é o dado a seguir.

Sejam $\overline{X}_A$ e $\overline{X}_B$ as médias das amostras obtidas, s_d uma estimativa de σ_d, o desvio padrão da diferença $d = \overline{X}_B - \overline{X}_A$ e n o número de graus de liberdade.

Seja $P_I \leqq \alpha$ a probabilidade de um êrro de primeira espécie. A partir de uma tabela de t, determinamos o valor correspondente a $t_{2\alpha}$, com **n** graus de liberdade.

O teste de significância consiste em rejeitarmos H_1 (portanto em aceitar H_2, isto é, $\mu_B > \mu_A$) tôda vez que $d > t_{2\alpha} \cdot s_d$.

Neyman calculou a probabilidade β de cometermos um êrro de segunda espécie quando o êrro de 1.ª espécie foi fixado em $\alpha = 0{,}05$ ou $0{,}01$, e são conhecidos os valores **n** e $\rho = \Delta/\sigma d$ (onde **n** representa o número de graus de liberdade, $\Delta = \mu_B - \mu_A$ e σ_d é o valor do desvio padrão da diferença).

Exemplo I. — Vamos supor que dispomos de cinco novos híbridos de milho A, B, C, D e M que julgamos serem produtivos em pelo menos 15% mais do que o híbrido anteriormente em distribuição, E(Δ = 15% da média). Pretendemos usar um delineamento em blocos ao acaso com seis repetições e dispomos da informação de que σ = 15% da média. Qual será a probabilidade de têrmos um resultado satisfatório se para a rejeição da hipótese $H_1 : \mu_E \geqq \mu_A$ escolhemos α = 5% ?

Neste caso $\Delta = 15$, $\sigma = 15$, $n = 25$ e calculamos

$$\rho = \frac{\Delta}{\sigma d} = \frac{15}{15\sqrt{\frac{2}{6}}} = 1{,}732$$

Para $n = 25$ e $\rho = 1{,}732$ obtemos, depois da interpolação na tabela III de Neyman, a probabilidade $\beta = 0{,}435$ (obtida por interpolação harmônica).

Então, se a hipótese H_2 (o contrôle é inferior ao novo híbrido em 15%) fôr verdadeira, a probabilidade de se obter a rejeição da hipótese H_1 será de 1 — 0,435; isto é, em aproximadamente 56% dos casos considerados, vamos obter significância dos resultados.

Exemplo II. — Queremos calcular o número de repetições necessárias para que tenhamos $\beta = 5\%$. Neste experimento temos $\Delta = 15$, $\sigma = 15$, $\alpha = 5\%$.

A partir da denifição $\rho = \dfrac{\Delta}{\sigma d} = \dfrac{\Delta}{\sigma\sqrt{\dfrac{2}{n'}}}$, calculamos

$$n' \geqq \frac{2\,\sigma^2\,\rho^2}{\Delta^2} = \frac{2(15)^2\,(\rho^2)}{15^2} = 2\,\rho^2$$

O valor de ρ não é conhecido, mas na última coluna do quadro 1, vemos que, para valores de **n** variando entre 15 e ∞, ρ varia entre 3,45 e 3,29 isto é, o número de repetições estaria compreendido nesse caso, entre 24 e 22.

Dessa forma, com 24 repetições teríamos 95% de probabilidade de têrmos um resultado significativo em diferenças do tipo $\overline{X}_B - \overline{X}_E$ se a hipótese $\Delta = 15\%$ fôsse verdadeira.

No caso, o número de repetições necessárias é muito elevado. Em estágios finais da experimentação, quando as conclusões forem baseadas em resultados obtidos em diferentes localidades, é provável que um número menor que êsse, por localidade, dê o resultado desejado.

2.2 — MÉTODO DE COCHRAN E COX PARA O CÁLCULO DO NÚMERO DE REPETIÇÕES NECESSÁRIAS PARA A SEPARAÇÃO DE UMA DIFERENÇA ESPECIFICADA

O valor de **r** é determinado pela fórmula

$$r \geqq 2\,\left(\frac{\sigma}{\delta}\right)^2 (t_1 + t_2)^2$$

onde δ = diferença verdadeira que se deseja revelar

σ = êrro padrão na base unitária

t_1 = valor significativo de **t** no teste de significância com probabilidade dupla da que queremos (por causa da natureza da tabela)

t_2 = valor de **t** na tabela correspondendo à probabilidade $2(1 - P)$ onde $P = P(1 - \beta)$.

A avaliação de **r** é feita através de tentativas repetidas até que seu valor mínimo seja encontrado, pois na equação apresentada o número de graus de liberdade depende sòmente de **r** (normalmente o número de tratamentos a experimentar depende do material que o experimentador deseja comparar e não da precisão do experimento).

Usualmente o valor σ não é conhecido e na prática utilizamos a média das estimativas de σ obtidas em experimentos anteriores, isto é, substituimos σ por **s**. Valores de **r** correspondentes a diferentes valores de σ e de δ encontram-se em Cochran e Cox, tabela 2.1 (**1**).

Exemplo. — Quantas repetições serão necessárias para têrmos 80% de probabilidade ($\beta = 20\%$) de obter uma diferença significativa entre o novo tratamento e o contrôle, quando a diferença verdadeira é de 20% e $\sigma = 12\%$? Como anteriormente, supomos que irão ser comparados quatro tratamentos num experimento em blocos ao acaso, isto é, teremos $3(r - 1)$ graus de liberdade.

Admitindo inicialmente 30 graus de liberdade teremos

$$t_1 = t_{(10\%, 30)} = 1{,}697 \qquad P\left[|t_2|\right] = 2\left[1 - 80\%\right] = 40\%$$

$$t_2 = 0{,}854 \qquad (P = 40\%)$$

$$r \geqq 2\left(\frac{12}{20}\right)^2 (1{,}697 + 0{,}854)^2 = 4{,}7$$

Com cinco repetições e quatro tratamentos o número de graus de liberdade é 12. Necessitamos, portanto, efetuar novos cálculos.

$$t_1 = t_{(10\%, 12)} = 1{,}782, \qquad t_2 = 0{,}873$$

$$r = 2\left(\frac{12}{20}\right)^2 (1{,}782 + 0{,}873)^2 = 5{,}08$$

Tomando seis repetições, os graus de liberdade são 15. Não há necessidade de mais cálculos; com seis repetições, a probabilidade de obtermos diferenças significativas entre os dois tratamentos é de 80% pelo menos, se a diferença verdadeira fôr $\delta = 20\%$.

A fórmula de Cochran e Cox suplementa a de Neyman, os resultados obtidos por ambas concordando muito bem.

2.3 — MÉTODO DE HARRIS, HORVITZ E MOOD

Com êste método (**3**) é possível calcular-se a grandesa $(n + 1)$ da amostra necessária para, com uma probabilidade pré-fixada, ter-se a garantia de que em um futuro experimento a estimativa de um parâmetro conhecido ultrapassará um valor especificado.

Para êsse fim supomos que no experimento preliminar obtivemos a estimativa s_1^2 com n_1 graus de liberdade, e um valor médio $\overline{X}_1$. Queremos saber qual o tamanho da amostra que permite, com probabilidades α e $1 - \beta$ especificadas, obter uma estimativa que exceda um valor dado μ, se na experiência preliminar $\overline{X}_1$ excedeu μ pela quantidade **a**.

Para isso calculamos $k = \frac{a}{s_1}$ onde $a = \overline{X}_1 - \mu$, e vamos ao quadro 1, de acôrdo com as probabilidades $\alpha = 5\%$ e $1 - \beta = 80\%$ ou $1 - \beta = 95\%$, procurando, na coluna relativa ao número de graus de liberdade de s_1, o valor k.

Correspondendo a êsse valor encontramos na mesma linha, na 1.ª coluna, um valor **n** que constitui o número de graus de liberdade necessários para garantir a probabilidade desejada. O tamanho da amostra será $n + 1$.

Exemplo. — Suponhamos que num experimento preliminar obtivemos $s_1^2 = 16$, $n_1 = 20$, $\overline{X}_1 = 16$. Queremos que em 95% dos futuros experimentos a nova média ultrapasse o valor $\mu = 11$ (sendo adotado o limite de significância $\alpha = 5\%$ para o valor de **t** a ser calculado), se o valor real da mesma fôr 16.

Para isso devemos calcular

$$k = \frac{a}{s_1} \quad \text{onde } a = 16 - 11 = 5$$

donde

$$k = \frac{5}{4} = 1{,}25$$

Os valores de **k** são encontrados no quadro 2 (3), e devemos procurar nosso **k** na coluna $n_1 = 20$. Como êste não consta da mesma, usamos a coluna $n_1 = 16$, que é a mais próxima do valor que procuramos. Lá se acham os valores 1,26 e 1,19, correspondentes a $n = 9$ e $n = 10$, respectivamente. Vamos admitir que $n = 9$. O tamanho da amostra será então, $n + 1 = 10$, isto é, tomando da mesma população, da qual se originou a amostra preliminar, uma nova amostra de tamanho 10, teremos 95% de confiança de que a nova média da amostra, $\overline{X}_2$, excederá o valor $\mu = 11$. O valor $t = \sqrt{10}\ (\overline{X}_2 - 11) \div s_2$ será maior que o valor crítico $t_{10\%(n2 = 9)} = 1{,}833$ em 95% dos futuros experimentos, se a média verdadeira fôr 16.

O teste usado é um teste de **t** unilateral, pois o experimentador está interessado em que a média obtida no segundo experimento venha a exceder o valor $\mu = 11$; êle não está interessado em valores menores que êsse.

Os mesmos autores recomendam a interpolação recíproca (harmônica) em n_1 e em $\sqrt{n_2}$ para os valores não encontrados na tabela, e uma interpolação linear para valores de **k** menores que os valores correspondentes a $n = 100$, da última linha da tabela.

2.4 — TESTES DE SIGNIFICÂNCIA PARA DIFERENÇAS ENTRE DUAS MÉDIAS

Querendo verificar se uma média é maior que outra por uma certa quantidade **a**, precisamos calcular

$k = \dfrac{a}{2s_1}$ e procurar o valor **n** no quadro 2, de acôrdo com os valores de $(1 - \beta)$. O valor de **n** obtido será o número de graus de liberdade da estimativa da variância ponderada. Para calcular o tamanho da amostra devemos tomar $\dfrac{(n + 2)}{2}$ ou $\dfrac{(n + 3)}{2}$, dependendo de **n** ser par ou ímpar (se as duas médias tiverem a mesma precisão, como foi suposto, $n = 2(r - 1)$ e, portanto, $r = \dfrac{(n + 2)}{2}$.

Exemplo. — Vamos supor que em um experimento preliminar obtivemos $s_1^2 = 16$, $n_1 = 20$, $\bar{x}_1 = 16$, $\bar{x}_2 = 25$. Queremos fixar em $1 - \beta = 95\%$ a probabilidade de que a diferença entre duas médias venha a ultrapassar o valor $\mu_D = \mu_2 - \mu_1 = 2$ no futuro experimento.

Então

$$k = \frac{a}{2s_1} = \frac{(25 - 16) - 2}{2\sqrt{16}} = \frac{7}{8} = 0{,}875$$

Com $n_1 = 20$ e $k = 0{,}875$, $n_2 \sim 18$.

Então

$$r = \frac{18 + 2}{2} = 10$$

isto é, com 10 repetições teremos 95% de confiança em que a diferença

$$\frac{\left[(\bar{x}_2 - \bar{x}_1) - 2 \right] \sqrt{10}}{s_2 \sqrt{2}}$$

excederá o valor crítico $t_{10\%(n2 = 18)} = 1{,}743$, se a hipótese alternativa $\mu_2 - \mu_1 = 9$ fôr verdadeira.

Nos dois casos considerados (2.3 e 2.4) os testes de **t** serão testes unilaterais, isto é, as comparações serão feitas num único sentido.

2.5 — MÉTODO PARA A AVALIAÇÃO DA GRANDEZA DA DIFERENÇA ENTRE DOIS TRATAMENTOS ADOTANDO OS NÍVEIS DE PROBABILIDADE $\alpha\%$ e $(1 - \beta)\%$

Utilizaremos para a avaliação da diferença desejada a fórmula

$$d = \sqrt{\frac{2\,(n_2 + 1)}{r}}\; k\, s_1$$

devida a Harris, Horvitz e Mood (**3**).

Escolhemos **a priori** os valores n_2 e **r** do futuro experimento e necessitamos dispor de uma estimativa preliminar s_1^2 com n_1 graus de liberdade. Nessa fórmula **d** é a diferença e **k** é o valor lido na tabela I ou II. O valor de **k** depende dos graus de liberdade n_1 e n_2 e da probabilidade $(1 - \beta)$ escolhida. Os dois tratamentos $\bar{X}_i$ e $\bar{X}_j$ serão comparados pelo cálculo de

$$t = \sqrt{r}\;(\bar{X}_i - \bar{X}_j) \div s_2 \sqrt{2}$$

Teremos $(1 - \beta)\%$ de probabilidade de obter significância para a diferença entre os dois tratamentos no nível $\alpha\,\%$ em uma única direção (isto é, $\bar{X}_i > \bar{X}_j$).

Exemplo. — Vamos supor que quatro tratamentos vão ser comparados em um plano experimental com **r** repetições e temos uma estimativa preliminar $s_1 = 2$ com $n_1 = 20$. Se admitirmos a utilização, no futuro experimento, de quatro tratamentos e cinco repetições para uma probabilidade $1 - \beta = 95\%$, teremos:

$$d = \sqrt{\frac{2\,(13)}{5}} \times 1{,}06\ (2) = 4{,}83 \sim 5$$

Admitindo, por outro lado, $r = 13$, n_2 será 36, $k \sim 0{,}614$ e então,

$$d = \sqrt{\frac{2\,(37)}{13}} \times 0{,}614\ (2) = 2{,}94 \sim 3$$

Calculados os vários valores de **d**, escolheremos o valor de **d** que desejamos. O valor de **r** da fórmula indica o número de repetições necessárias.

Essa fórmula foi proposta inicialmente para a avaliação de **d**. Federer (**2**), no entanto, recomenda-a também para a operação inversa. Fixandose **d** é possível calcular **r** através de tentativas repetidas já que $n = f(t, r)$, o número de tratamentos sendo imposto **a priori** pelo experimentador. Então, para avaliar **r**, calculamos:

$$r = 2(k \,.\, s_1 \div d)^2 \; (n_2 + 1)$$

Exemplo. — Qual será o valor de **r** necessário para que os tratamentos do futuro experimento possam revelar diferenças de tamanho $d = 3$? Um experimento preliminar nos forneceu $s_1 = 2$, com $n_1 = 20$ graus de liberdade e queremos $\alpha = 5\%$ e $(1 - \beta) = 95\%$.

Vamos admitir inicialmente que iremos ter $n_2 = 50$.

Neste caso $k = 0{,}509$ (tirado da tabela II) e

$$r = 2(0{,}509 \times \frac{2}{3})^2 \; (51) \sim 12$$

Mas com 12 repetições e quatro tratamentos, $n_2 = 33$.
Recalculando,

$$r = 2(0{,}650 \times \frac{2}{3})^2 \; (34) \sim 13.$$

2.6 — MÊTODO DE TANG

Tang, citado por Federer (2), desenvolveu um método para a avaliação do número de repetições necessárias para que um experimento permita a separação de certas diferenças especificadas.

É necessário ter-se uma boa estimativa de σ^2 e ainda a especificação da grandeza das diferenças verdadeiras $\Sigma(\mu_i - \mu)^2$, além da fixação dos erros dos tipos I e II. Os componentes da variação devem ser distribuídos normalmente com média zero e variância σ^2.

Para a avaliação do número de repetições calculamos $\Phi_{\beta,\,\alpha} = \sqrt{(2\lambda) \div t}$ em que $\lambda = [\, r \; \Sigma(\mu_i - \mu)^2 \,] \div 2\sigma^2$

Nessas fórmulas **r** representa o número de repetições, **t** o número de tramentos, $\mu_i - \mu$ o efeito do tratamnteo i, α e β as grandezas dos erros dos tipos I e II, respectivamente.

Calculado Φ usamos as tabelas de Tang (9) ou de Lehmer (5). Para um α especificado e valores de Φ, f_1 e f_2 (onde f_1 representa os graus de liberdade da soma de quadrados de tratamentos e f_2 a do êrro experimental do delineamento a ser utilizado), encontramos a probabilidade do êrro de segunda espécie β, nas tabelas de Tang. Nas tabelas de Lehmer para α, β, f_1 e f_2 especificados encontramos os valores mínimos de Φ que garantem as probabilidades especificadas. Os valores de **r** utilizados nesses cálculos representam o número de repetições que deveremos usar.

Tang apresenta tabelas para diversas combinações de valores de α e f_1 (9). Lehmer apresenta duas tabelas em que os valores de β são respectivamente 0,20 ou 0,30 para valores de α de 0,05 e 0,01 (5). Essas duas últimas tabelas encontram-se reunidas no quadro 3.

Exemplo. — Vamos supor que a grandeza da variância média dada por experimentos anteriores é de $s^2 = 25$. Queremos comparar três novas variedades com a mais usada na região. Admitamos que os desvios $(\mu_i - \mu)$ venham a ser respectivamente de $+8$, $+3$, -3 e -8. Se pretendemos usar no futuro experimento seis repetições em blocos ao acaso, teremos

$$\lambda = [\,6(64 + 9 + 9 + 64)\,] \div 2(25) = 17{,}52$$

$$\Phi = \sqrt{2(17{,}52) \div 4} = 2{,}96$$

No nosso caso $f_1 = (t - 1) = 3$ e $f_2 = (t - 1)\ (r - 1) = 3 \times 5 = 15$ Na tabela de Lehmer achamos para $\alpha = 0{,}05$, $\beta = 0{,}20$, $f_1 = 3$ e $f_2 = 16$ o valor $\Phi = 1{,}87$.

Valores de $\Phi = 1{,}87$ ou maiores garantem um β igual ou menor que 0,20. Obtivemos $\Phi = 2{,}96$, maior que o valor $\Phi = 1{,}87$. Com seis repetições a probabilidade de que a hipótese H_o $(\mu_i = \mu)$ seja rejeitada, se a hipótese alternativa H_1, especificada por $\Sigma(\mu_i - \mu)^2 = 146$ fôr verdadeira, será portanto maior que $1 - \beta = 80\%$. Mesmo com quatro repetições, o valor obtido para Φ é maior que o da tabela, isto é, quatro repetições seriam no caso suficientes, ainda, para em 80% dos casos rejeitar a hipótese H_o.

Obtido um valor de Φ menor que o da tabela, é necessário aumentar o número de repetições, recalcular Φ, até encontrar um valor calculado para Φ superior ao da tabela. O número de repetições usado nesse cálculo é o que deverá ser empregado no futuro experimento. Maiores detalhes sôbre êste tipo de teste encontram-se nas referências (2) e (4).

3 — INTERVALOS DE CONFIANÇA

Vejamos agora os diferentes métodos para a especificação de um intervalo de confiança com uma certa probabilidade.

3.1 — MÉTODO DE COCHRAN E COX

O limite de confiança para a verdadeira diferença entre os efeitos de dois tratamentos será:

$$\delta = d \pm \sqrt{\frac{2}{r}}\ st$$

onde **t** é o valor correspondente ao intervalo de confiança, **d** a diferença entre dois tratamentos, δ a verdadeira diferença (sendo **n** o número de graus de liberdade).

O valor $\sqrt{\frac{2}{r}}\,st$ pode ser chamado **limite do êrro,** pois mede a distância máxima entre **d** e δ, para uma certa probabilidade de confiança, escolhida. O valor de **s** que vamos obter no futuro experimento só será conhecido depois do experimento completado.

Se **s** é substituído pelo valor médio, esperado, teremos o **limite do êrro esperado,** o qual é calculado

$$L = \sqrt{\frac{2}{r}}\ .\ f\,\sigma\,t \quad \text{onde} \quad f = (4n - 1) \div 4n$$

Os autores (1) apresentam uma tabela (página 24) que nos permite determinar o número de repetições requeridas para um dado limite de êrro da diferença entre dois tratamentos. Os valores são calculados usando $t_{20\%}$, $t_{10\%}$ e $t_{5\%}$, a tabela fornecendo o número de repetições correspondentes às probabilidades de confiança 0,80, 0,90 e 0,95. Em seu cálculo admitimos $n = 3(r - 1)$ isto é, consideramos quatro tratamentos em blocos ao acaso, como anteriormente, sendo que o valor **t** foi tomado com probabilidade $t_{\alpha\%}$. Aqui, mais ou menos em 50% dos casos, teremos o limite do êrro desejado já que a variação devida a **s** não é tomada em consideração pela fórmula.

3.2 — MÉTODO DE HARRIS, HORVITZ E MOOD PARA A DETERMINAÇÃO DO TAMANHO DA AMOSTRA QUE PERMITE CALCULAR UM INTERVALO DE CONFIANÇA ESPECIFICADO, PARA UMA MÉDIA

Neste método é possível avaliarmos, por exemplo, o número **n + 1** de elementos da amostra que assegure que o intervalo 99% de confiança tenha um comprimento menor ou igual a **2d**, em 95% dos casos estudados.

A fórmula a aplicar é:

$$\left(\frac{d}{s_1}\right)^2 = t^2_{1-\alpha\,(n_2)} \cdot F_{1-\beta(n_2, n_1)} \div (n_2 + 1)$$

Exemplo. — Temos uma estimativa $s_1^2 = 16$ da variância de uma população, com 20 graus de liberdade. Queremos tirar uma amostra de tamanho $n_2 + 1$ suficientemente grande para garantir, com 95% de probabilidade, que o intervalo 99% de confiança tenha um comprimento $2d = 10$ unidades ou menos.

No caso, $\alpha = 0{,}99$, $\beta = 0{,}95$, $d = 5$ e $n_1 = 20$

Vamos supor que o valor obtido para n_2 seja 25:

$$\left(\frac{5}{4}\right)^2 = t^2_{1\%(25)} \cdot F_{5\%(25,\,20)} \div (n_2 + 1)$$

$$\left(\frac{5}{4}\right)^2 = 2{,}787^2 \; (2{,}07) \div (n_2 + 1) \qquad F_{5\%(25,20)} = 2{,}07$$

$$t_{1\%(25)} = 2{,}787$$

$$\therefore \; n_2 + 1 = \frac{16\;(7.767)\;(2.07)}{25} = 11$$

$$\therefore \; n_2 = 10$$

Temos, por conseguinte, que abandonar a suposição inicial e considerar $n_2 = 10$. Teremos:

$$F_{5\%(10,\,20)} = 2{,}35$$

$$t_{1\%(10)} = 3{,}169$$

e, por conseguinte

$$n_2 + 1 = \frac{16\;(10{,}04)\;2{,}35}{25} = 15 \quad \text{e} \quad n_2 = 14$$

Com $n_2 = 14$,

$$F_{5\%(14,\,20)} = 2{,}23 \quad \text{e} \quad t_{1\%(14)} = 2{,}977$$

Daí

$$n_2 + 1 = \frac{16\;(8{,}863)\;2{,}23}{25} = 13$$

A amostra deverá ser, portanto, de tamanho 13. O valor de **t** utilizado abrange a probabilidade nas duas caudas da distribuição (teste de **t** bilateral).

3.3 — INTERVALO DE CONFIANÇA PARA A DIFERENÇA ENTRE DUAS MÉDIAS ESPECIFICADAS

Queremos determinar o tamanho da amostra $n_2 + 1$, suficientemente grande para garantir que a probabilidade venha a ser $1 - \beta$ de que o intervalo de confiança α % da diferença entre duas médias especificadas seja igual ou menor que 2d. Conhecemos a estimativa s_1^2, com n_1 graus de liberdade.

Para determinar n_2 usamos a fórmula

$$\frac{d^2}{2s_1^2} = t^2 \cdot F \div (n_2 + 1) \quad \text{onde} \quad t = t_{1-\alpha\,(2n_2)}$$

$$F = F_{1-\beta\,(2n_2,\, n_1)}$$

Essa fórmula também foi proposta por Harris, Horvitz e Mood (**3**).

A aplicação é feita como anteriormente, só que o número de graus de liberdade será agora, $2n_2$, para **t** e **F**.

3.4 — MÉTODO DE TUKEY PARA A AVALIAÇÃO DE UM INTERVALO DE CONFIANÇA PARA A DIFERENÇA ENTRE DUAS MÉDIAS QUAISQUER

Se quizermos obter um intervalo de confiança de tamanho 2d ou menor, entre duas médias quaisquer, dentre as **t** do experimento, podemos usar a fórmula devida a Tukey (**8**).

$$r = \left(\frac{s_1^2}{d^2}\right) \cdot q^2 \cdot F$$

onde $q = q_{t, n_2}$ e $F = F_{(n_2, n_1)}$. O valor $q_{t, n_2} = \frac{w}{s}$ é a amplitude de dispersão estudentizada (**t** representa o número de tratamentos e n_2 o de graus de liberdade) que garante α % de significância para tôda e qualquer comparação de duas médias. Para o cálculo precisamos conhecer uma estimativa preliminar s_1^2, baseada em n_1 graus de liberdade.

Evidentemente, maior número de repetições será necessário neste caso do que no anterior. É o preço da segurança adicional que garante a comparação de duas médias quaisquer **a posteriori,** escolhidas dentre **t** médias.

Exemplo. — Qual deve ser o valor de **r** necessário para garantir com probabilidade $1 - \beta = 95\%$, que o intervalo de confiança ($\alpha = 5\%$) da diferença entre duas médias quaisquer seja menor que $2d = 30\% \; \bar{x}$? Vamos admitir que tivemos $\bar{x}_1 = 20$, C.V. = 10% e $n_1 = 20$ graus de liberdade, e que o futuro experimento será delineado em blocos ao acaso, com quatro tratamentos.

$$r = \left(\frac{s_1^2}{d^2}\right) . q^2 . F$$

Suponhamos que n_2 tinha 39 graus de liberdade. Então $d = 3$, $s_1 = 2$, $n_1 = 20$, $q_{4,39} = 3{,}79$ (5%) e $F_{(39,20)} = 2{,}00$ (5%)

$$r = \frac{4}{9} 3{,}79^2 (2{,}00) \sim 13$$

Com 13 repetições o experimento terá 36 graus de liberdade, $q_{4,36} = 3{,}81$, $F_{(36,20)} = 2{,}01$.

$$d^2 = (q^2 . s_1^2 . F) \div r \sim 9$$

isto é, $d = 3$, que é o valor que procurávamos.

Diferenças de tamanho 3 entre duas médias, serão reveladas em 95% dos casos, se usarmos 13 repetições.

4 — CONCLUSÕES

O método de Neyman pressupõe o conhecimento do desvio padrão da população. Na prática teremos no máximo uma estimativa s, média de vários experimentos, o resultado ficando sujeito às variações de amostragem. A mesma restrição subsiste quanto ao uso do método de Cochran e Cox.

O método de Harris, Horvitz e Mood está isento dessa restrição: necessita da estimativa preliminar s_1 e da estimativa de diferenças específicas, permitindo pôr à prova diferenças escolhidas **a priori.** Apesar de não ser exato, êste método serve para se obter uma estimativa do número de repetições.

O método de Tang pressupõe um conhecimento de σ e de certas diferenças $\mu_1 - \mu$, da população. Na prática só aproximadamente essas condições podem ser satisfeitas.

O método de Tukey procura estender o método de Harris, Horvitz e Mood para o caso de um certo número de diferenças escolhidas **a posteriori,** exigindo por isso número mais alto de repetições.

Em todos êsses métodos, o número de repetições necessárias será fundamentalmente uma função da variabilidade esperada. Nessas condições, o uso de técnicas agronômicas que conduzam a uma diminuição da variabilidade experimental será de inestimável valor, pois contribuirá para uma solução mais rápida, eficiente e econômica dos problemas experimentais.

DETERMINATION OF NUMBER OF REPLICATIONS IN THE PLANNING OF EXPERIMENTS

SUMMARY

This paper presents various method used to evaluate the number of replications that guarantees the detection of prefixed differences with certain probabilities. The methods due to Neyman et al., Cochran & Cox, Harris, Horvitz & Mood, Tang, and finally the method due to Tukey, are presented with examples. Implications and limitations of these methods are also considered.

LITERATURA CITADA

1. Cochran, W. C. & Cox, G. M. Experimental designs. New York, John Wiley & Sons, Inc., 1950. p. 20-12.

2. Federer, W. T. Experimental design. New York, The Macmillan Co., 1955. p. 72-80.

3. Harris, M., Horvitz, D. G. & Mood, A. M. On the determination of sample sizes in designing experiments. J. Amer. statist. Ass. 43:391-402. 1948.

4. Kempthorne, O. The design and analysis of experiments. New York, John Wiley & Sons, Inc., 1952. p. 219-230.

5. Lehmer, E. Inverse tables of probabilities of errors of the second kind. Ann. math. Statist. 15:388-398. 1944.

6. Neyman, J., Iwaszkiewicz, K. & Kolodziejczyk, St. Statistical problem in agricultural experimentation. Suppl. J. R. statist. Soc. 2:108-180. 1935.

7. Neyman, J. & Pearson, E. S. On the problem of the most efficient tests of statistical hypothesis. Phil. Trans. (A) 231:289. 1933 [Original não consultado; citado em (**6**)].

8. Snedecor, G. W. Statistical methods. 5th ed. Ames, The Iowa State College Press, 1956. p. 275-281.

9. Tang, P. C. The power function of the analysis of variance tests with tables and illustrations of their use. Statist. Res. Mem. 2:126-149. 1938 [Original não consultado; citado em (**2**)]

QUADRO 1. — Probabilidade do êrro de 2.ª espécie, sendo $\alpha = 0{,}05$ e $\alpha = 0{,}01$, segundo Neyman e outros (**6**) (*)

n \ ρ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	ρ correspondente a $P_{II} = \alpha$
1	0,950	0,865	0,753	0,639	0,532	0,434	0,348	0,274	0,211	0,159	0,118	12,53
	0,990	**0,973**	**0,950**	**0,925**	**0,900**	**0,875**	**0,851**	**0,825**	**0,802**	**0,777**	**0,753**	**82,00**
2	0,950	0,826	0,616	0,383	0,197	0,084	0,029	0,009	0,002			5,52
	0,990	**0,962**	**0,906**	**0,820**	**0,714**	**0,597**	**0,481**	**0,371**	**0,276**	**0,197**	**0,135**	**15,22**
3	0,950	0,804	0,539	0,265	0,092	0,022	0,004					4,46
	0,990	**0,953**	**0,861**	**0,706**	**0,513**	**0,328**	**0,184**	**0,090**	**0,038**	**0,014**	**0,005**	**9,34**
4	0,950	0,790	0,496	0,209	0,056	0,009	0,001					4,07
	0,990	**0,916**	**0,824**	**0,614**	**0,373**	**0,180**	**0,069**	**0,021**	**0,005**	**0,001**		**7,52**
5	0,950	0,781	0,469	0,178	0,040	0,005						3,87
	0,990	**0,941**	**0,796**	**0,547**	**0,285**	**0,108**	**0,029**	**0,006**	**0,001**			**6,68**
6	0,950	0,775	0,450	0,160	0,032	0,003						3,75
	0,990	**0,937**	**0,774**	**0,498**	**0,229**	**0,071**	**0,015**	**0,002**				**6,21**
7	0,950	0,770	0,437	0,147	0,027	0,002						3,67
	0,990	**0,934**	**0,757**	**0,462**	**0,191**	**0,051**	**0,008**	**0,001**				**5,91**
8	0,950	0,767	0,428	0,138	0,022	0,002						3,62
	0,990	**0,931**	**0,743**	**0,434**	**0,166**	**0,039**	**0,005**					**5,71**
9	0,950	0,764	0,420	0,132	0,021	0,002						3,58
	0,990	**0,929**	**0,732**	**0,413**	**0,147**	**0,031**	**0,004**					**5,56**
10	0,950	0,762	0,414	0,126	0,019	0,001						3,54
	0,990	**0,927**	**0,723**	**0,396**	**0,133**	**0,025**	**0,003**					**5,45**
11	0,950	0,760	0,409	0,122	0,018	0,001						3,52
	0,990	**0,925**	**0,715**	**0,381**	**0,122**	**0,022**	**0,002**					**5,36**
12	0,950	0,758	0,405	0,119	0,017	0,001						3,50
	0,990	**0,924**	**0,708**	**0,370**	**0,114**	**0,019**	**0,002**					**5,29**
13	0,950	0,757	0,401	0,116	0,016	0,001						3,48
	0,990	**0,923**	**0,702**	**0,360**	**0,107**	**0,017**	**0,001**					**5,23**
14	0,950	0,756	0,398	0,114	0,016	0,001						3,46
	0,990	**0,922**	**0,697**	**0,351**	**0,101**	**0,015**	**0,001**					**5,18**
15	0,950	0,755	0,396	0,112	0,015	0,001						3,45
	0,990	**0,921**	**0,693**	**0,344**	**0,096**	**0,014**	**0,001**					**5,14**

(*) ρ é o valor da relação Δ/σ_d, n é o número de graus de liberdade, o valor lido na tabela representando o êrro de 2ª espécie, β. Números em romano, $\alpha = 0{,}05$; em negrito, $\alpha = 0{,}01$.

n \ ρ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	ρ correspondente a $P_{II} = \alpha$
16	0,950	0,754	0,394	0,110	0,015	0,001						3,44
	0,990	**0,920**	**0,689**	**0,338**	**0,092**	**0,013**	**0,001**					**5,11**
17	0,950	0,753	0,392	0,109	0,014	0,001						3,43
	0,990	**0,920**	**0,686**	**0,333**	**0,089**	**0,012**	**0,001**					**5,08**
18	0,950	0,752	0,390	0,108	0,014	0,001						3,42
	0,990	**0,919**	**0,683**	**0,328**	**0,086**	**0,011**	**0,001**					**5,05**
19	0,950	0,752	0,388	0,106	0,014	0,001						3,41
	0,990	**0,919**	**0,680**	**0,323**	**0,084**	**0,011**	**0,001**					**5,03**
20	0,950	0,751	0,387	0,105	0,013	0,001						3,41
	0,990	**0,918**	**0,677**	**0,320**	**0,081**	**0,010**	**0,001**					**5,01**
21	0,950	0,751	0,386	0,105	0,013	0,001						3,40
	0,990	**0,918**	**0,675**	**0,316**	**0,079**	**0,010**						**4,99**
22	0,950	0,750	0,385	0,104	0,013	0,001						3,40
	0,990	**0,917**	**0,673**	**0,313**	**0,078**	**0,009**						**4,97**
23	0,950	0,750	0,384	0,103	0,013	0,001						3,39
	0,990	**0,917**	**0,671**	**0,310**	**0,076**	**0,009**						**4,96**
24	0,950	0,750	0,383	0,102	0,013	0,001						3,39
	0,990	**0,916**	**0,669**	**0,307**	**0,074**	**0,009**						**4,94**
25	0,950	0,749	0,382	0,102	0,012	0,001						3,38
	0,990	**0,916**	**0,668**	**0,305**	**0,073**	**0,008**						**4,93**
26	0,950	0,749	0,381	0,101	0,012	0,001						3,38
	0,990	**0,916**	**0,666**	**0,303**	**0,072**	**0,008**						**4,92**
27	0,950	0,748	0,380	0,100	0,012	0,001						3,38
	0,990	**0,916**	**0,665**	**0,301**	**0,071**	**0,008**						**4,91**
28	0,950	0,748	0,380	0,100	0,012	0,001						3,37
	0,990	**0,915**	**0,664**	**0,299**	**0,070**	**0,008**						**4,90**
29	0,950	0,748	0,379	0,100	0,012	0,001						3,37
	0,990	**0,915**	**0,662**	**0,297**	**0,069**	**0,007**						**4,89**
30	0,950	0,748	0,378	0,099	0,012	0,001						3,37
	0,990	**0,915**	**0,661**	**0,295**	**0,068**	**0,007**						**4,88**
∞	0,950	0,740	0,361	0,088	0,009							3,29
	0,990	**0,908**	**0,628**	**0,250**	**0,047**	**0,003**						**4,65**

QUADRO 2. — Valores de K = a/s_1, segundo Harris e outros, (3) (*)

n \ m	1	2	3	4	5	6	8	12	16	24	32	∞
1	13,8 **57,1**	8,52 **19,5**	7,39 **14,4**	6,93 **12,6**	6,68 **11,6**	6,51 **11,0**	6,31 **10,4**	6,13 **9,85**	6,04 **9,58**	5,96 **9,33**	5,92 **9,21**	5,79 **8,86**
2	5,88 **24,2**	3,51 **7,74**	3,02 **5,60**	2,81 **4,77**	2,70 **4,39**	2,62 **4,15**	2,53 **3,86**	2,45 **3,61**	2,41 **3,49**	2,37 **3,38**	2,35 **3,33**	2,30 **3,19**
3	4,30 **17,6**	2,55 **5,58**	2,20 **4,03**	2,03 **3,39**	1,96 **3,13**	1,91 **2,94**	1,85 **2,74**	1,78 **2,55**	1,75 **2,46**	1,72 **2,39**	1,70 **2,35**	1,65 **2,23**
4	3,55 **14,5**	2,10 **4,58**	1,80 **3,28**	1,67 **2,79**	1,60 **2,56**	1,56 **2,40**	1,50 **2,23**	1,45 **2,08**	1,43 **2,01**	1,40 **1,94**	1,39 **1,91**	1,36 **1,82**
5	3,12 **12,6**	1,85 **3,97**	1,58 **2,88**	1,47 **2,41**	1,41 **2,23**	1,37 **2,09**	1,32 **1,93**	1,28 **1,82**	1,25 **1,76**	1,23 **1,69**	1,22 **1,66**	1,18 **1,58**
6	2,81 **11,2**	1,66 **3,55**	1,43 **2,57**	1,32 **2,17**	1,27 **2,00**	1,23 **1,88**	1,19 **1,73**	1,15 **1,62**	1,13 **1,57**	1,11 **1,52**	1,10 **1,49**	1,07 **1,42**
7	2,56 **10,3**	1,52 **3,26**	1,30 **2,36**	1,21 **1,99**	1,16 **1,83**	1,12 **1,72**	1,08 **1,58**	1,05 **1,48**	1,03 **1,43**	1,02 **1,38**	1,01 **1,36**	0,979 **1,30**
8	2,37 **9,70**	1,41 **3,05**	1,21 **2,19**	1,12 **1,86**	1,07 **1,70**	1,04 **1,60**	1,00 **1,48**	0,972 **1,39**	0,956 **1,34**	0,940 **1,29**	0,932 **1,27**	0,910 **1,21**
9	2,23 **9,12**	1,32 **2,87**	1,14 **2,06**	1,05 **1,75**	1,01 **1,60**	0,978 **1,50**	0,944 **1,39**	0,913 **1,30**	0,898 **1,26**	0,883 **1,21**	0,875 **1,19**	0,854 **1,13**
10	2,11 **8,62**	1,25 **2,72**	1,07 **1,95**	0,993 **1,65**	0,952 **1,51**	0,925 **1,42**	0,893 **1,32**	0,863 **1,23**	0,849 **1,19**	0,835 **1,15**	0,828 **1,13**	0,805 **1,07**
12	1,92 **7,83**	1,14 **2,47**	0,975 **1,77**	0,902 **1,50**	0,865 **1,37**	0,840 **1,29**	0,811 **1,20**	0,784 **1,12**	0,771 **1,08**	0,758 **1,04**	0,752 **1,02**	0,732 **0,971**
14	1,77 **7,22**	1,05 **2,28**	0,899 **1,63**	0,831 **1,38**	0,797 **1,26**	0,775 **1,19**	0,748 **1,11**	0,723 **1,03**	0,710 **0,993**	0,699 **0,959**	0,693 **0,942**	0,676 **0,893**
16	1,65 **6,73**	0,976 **2,13**	0,838 **1,52**	0,775 **1,29**	0,743 **1,18**	0,722 **1,11**	0,697 **1,03**	0,673 **0,959**	0,662 **0,924**	0,651 **0,893**	0,646 **0,878**	0,631 **0,834**
18	1,56 **6,35**	0,921 **2,01**	0,790 **1,44**	0,731 **1,22**	0,701 **1,11**	0,681 **1,04**	0,658 **0,972**	0,635 **0,904**	0,624 **0,872**	0,614 **0,842**	0,609 **0,828**	0,594 **0,785**
20	1,48 **6,02**	0,873 **1,90**	0,750 **1,36**	0,693 **1,15**	0,665 **1,05**	0,646 **0,991**	0,624 **0,921**	0,602 **0,858**	0,592 **0,827**	0,583 **0,798**	0,578 **0,785**	0,563 **0,744**
25	1,32 **5,37**	0,779 **1,70**	0,669 **1,22**	0,619 **1,03**	0,593 **0,940**	0,577 **0,884**	0,557 **0,822**	0,538 **0,765**	0,529 **0,738**	0,520 **0,712**	0,515 **0,700**	0,502 **0,663**
30	1,20 **4,89**	0,708 **1,54**	0,608 **1,11**	0,563 **0,935**	0,540 **0,855**	0,525 **0,804**	0,507 **0,748**	0,489 **0,695**	0,481 **0,671**	0,473 **0,647**	0,469 **0,636**	0,456 **0,605**
40	1,04 **4,23**	0,613 **1,33**	0,526 **0,962**	0,486 **0,809**	0,467 **0,739**	0,454 **0,696**	0,438 **0,646**	0,423 **0,601**	0,416 **0,580**	0,409 **0,560**	0,405 **0,550**	0,395 **0,525**
50	0,925 **3,78**	0,548 **1,19**	0,471 **0,854**	0,435 **0,722**	0,417 **0,661**	0,405 **0,622**	0,391 **0,577**	0,378 **0,537**	0,371 **0,518**	0,365 **0,500**	0,362 **0,492**	0,353 **0,469**
60	0,844 **3,45**	0,499 **1,09**	0,429 **0,778**	0,396 **0,658**	0,380 **0,602**	0,369 **0,567**	0,356 **0,525**	0,344 **0,490**	0,338 **0,472**	0,333 **0,456**	0,330 **0,448**	0,322 **0,428**
80	0,730 **2,98**	0,432 **0,940**	0,371 **0,672**	0,342 **0,569**	0,328 **0,520**	0,319 **0,490**	0,308 **0,454**	0,298 **0,423**	0,292 **0,408**	0,288 **0,395**	0,285 **0,388**	0,278 **0,369**
100	0,652 **2,67**	0,385 **0,840**	0,331 **0,600**	0,306 **0,508**	0,293 **0,465**	0,285 **0,438**	0,275 **0,405**	0,266 **0,378**	0,261 **0,365**	0,257 **0,353**	0,255 **0,347**	0,249 **0,329**

(*) Para testes de uma cauda γ e α = 0,05; para testes de duas caudas γ e α = 0,10. Números em romano, β = 0,80; em negrito, β = 0,95.

Quadro 3. — Valores de Φ correspondentes a uma probabilidade $1 - \beta = 0{,}80$, de constatar a falsidade da hipótese posta a prova. Segundo Lehmer (5) (*)

f_2 \ f_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞	240/f_2
10	2,20 **2,91**	2,10 **2,76**	2,01 **2,65**	1,95 **2,57**	1,90 **2,50**	1,86 **2,46**	1,84 **2,42**	1,81 **2,38**	1,79 **2,36**	1,77 **2,34**	1,74 **2,30**	1,71 **2,26**	1,68 **2,22**	1,66 **2,20**	1,64 **2,17**	1,62 **2,15**	1,60 **2,12**	1,58 **2,09**	1,55 **2,06**	
12	2,16 **2,81**	2,04 **2,64**	1,95 **2,52**	1,88 **2,42**	1,82 **2,35**	1,78 **2,30**	1,75 **2,26**	1,72 **2,22**	1,70 **2,19**	1,68 **2,17**	1,64 **2,12**	1,61 **2,08**	1,57 **2,03**	1,55 **2,01**	1,53 **1,98**	1,50 **1,95**	1,48 **1,92**	1,45 **1,89**	1,42 **1,85**	
14	2,13 **2,75**	2,00 **2,56**	1,90 **2,42**	1,83 **2,33**	1,77 **2,25**	1,72 **2,19**	1,69 **2,15**	1,66 **2,11**	1,63 **2,08**	1,61 **2,05**	1,57 **2,00**	1,54 **1,96**	1,49 **1,90**	1,47 **1,88**	1,44 **1,84**	1,42 **1,81**	1,39 **1,78**	1,36 **1,74**	1,33 **1,70**	
16	2,11 **2,70**	1,97 **2,50**	1,87 **2,36**	1,79 **2,26**	1,73 **2,18**	1,68 **2,12**	1,64 **2,07**	1,61 **2,03**	1,58 **1,99**	1,56 **1,96**	1,52 **1,92**	1,48 **1,87**	1,43 **1,81**	1,41 **1,78**	1,38 **1,74**	1,35 **1,71**	1,32 **1,67**	1,29 **1,63**	1,25 **1,59**	
18	2,10 **2,67**	1,95 **2,46**	1,84 **2,31**	1,76 **2,20**	1,70 **2,12**	1,65 **2,06**	1,61 **2,01**	1,57 **1,97**	1,54 **1,93**	1,52 **1,90**	1,48 **1,85**	1,44 **1,80**	1,39 **1,74**	1,36 **1,70**	1,33 **1,67**	1,30 **1,63**	1,27 **1,59**	1,23 **1,55**	1,19 **1,50**	
20	2,08 **2,64**	1,94 **2,43**	1,82 **2,27**	1,74 **2,16**	1,67 **2,08**	1,62 **2,01**	1,58 **1,96**	1,54 **1,92**	1,52 **1,88**	1,49 **1,85**	1,45 **1,80**	1,40 **1,74**	1,35 **1,68**	1,32 **1,64**	1,29 **1,61**	1,26 **1,57**	1,22 **1,52**	1,19 **1,48**	1,14 **1,42**	12
24	2,06 **2,60**	1,91 **2,38**	1,79 **2,22**	1,70 **2,10**	1,64 **2,02**	1,58 **1,95**	1,54 **1,89**	1,50 **1,85**	1,47 **1,81**	1,44 **1,77**	1,40 **1,72**	1,35 **1,66**	1,30 **1,59**	1,27 **1,56**	1,23 **1,52**	1,20 **1,47**	1,16 **1,42**	1,11 **1,37**	1,06 **1,31**	10
30	2,05 **2,56**	1,89 **2,33**	1,76 **2,16**	1,67 **2,05**	1,60 **1,96**	1,54 **1,88**	1,50 **1,83**	1,46 **1,78**	1,43 **1,74**	1,40 **1,70**	1,35 **1,64**	1,30 **1,58**	1,24 **1,51**	1,21 **1,47**	1,17 **1,42**	1,13 **1,37**	1,09 **1,32**	1,04 **1,26**	0,98 **1,19**	8
40	2,03 **2,52**	1,86 **2,28**	1,73 **2,11**	1,64 **1,99**	1,57 **1,89**	1,51 **1,82**	1,46 **1,76**	1,42 **1,71**	1,38 **1,67**	1,35 **1,63**	1,30 **1,57**	1,25 **1,50**	1,18 **1,42**	1,15 **1,38**	1,11 **1,33**	1,06 **1,27**	1,01 **1,21**	0,95 **1,14**	0,88 **1,06**	6
60	2,01 **2,48**	1,84 **2,24**	1,71 **2,06**	1,61 **1,94**	1,53 **1,84**	1,47 **1,76**	1,42 **1,70**	1,38 **1,64**	1,34 **1,60**	1,31 **1,56**	1,25 **1,49**	1,19 **1,42**	1,12 **1,34**	1,08 **1,29**	1,04 **1,23**	0,99 **1,17**	0,93 **1,10**	0,86 **1,02**	0,77 **0,92**	4
80	2,01 **2,47**	1,83 **2,21**	1,69 **2,04**	1,59 **1,91**	1,51 **1,81**	1,45 **1,73**	1,40 **1,66**	1,35 **1,61**	1,32 **1,56**	1,28 **1,52**	1,23 **1,46**	1,17 **1,38**	1,09 **1,29**	1,05 **1,24**	1,00 **1,18**	0,95 **1,12**	0,88 **1,04**	0,81 **0,95**	0,70 **0,83**	3
120	2,00 **2,45**	1,81 **2,19**	1,68 **2,01**	1,58 **1,88**	1,50 **1,78**	1,43 **1,70**	1,38 **1,63**	1,33 **1,58**	1,30 **1,53**	1,26 **1,49**	1,21 **1,42**	1,14 **1,34**	1,06 **1,25**	1,02 **1,20**	0,97 **1,13**	0,91 **1,06**	0,84 **0,98**	0,75 **0,88**	0,62 **0,73**	2
240	1,99 **2,43**	1,80 **2,17**	1,67 **1,99**	1,56 **1,86**	1,48 **1,75**	1,41 **1,67**	1,36 **1,60**	1,31 **1,55**	1,27 **1,50**	1,24 **1,46**	1,18 **1,38**	1,11 **1,30**	1,03 **1,20**	0,98 **1,15**	0,93 **1,08**	0,87 **1,00**	0,79 **0,91**	0,68 **0,79**	0,51 **0,59**	1
∞	1,98 **2,42**	1,79 **2,15**	1,65 **1,97**	1,54 **1,83**	1,46 **1,73**	1,40 **1,64**	1,34 **1,57**	1,29 **1,51**	1,25 **1,46**	1,22 **1,42**	1,16 **1,35**	1,08 **1,26**	1,00 **1,16**	0,95 **1,10**	0,89 **1,03**	0,82 **0,94**	0,73 **0,84**	0,60 **0,69**	0,00 **0,00**	0

(*) Números em romano, nível de significância $\alpha = 0{,}05$; em negrito, $\alpha = 0{,}01$