

---

# PROJETO DE CONTROLADORES ROBUSTOS COM ESPECIFICAÇÕES TEMPORAIS

**Fabrizio Leonardi** <sup>†\*</sup>  
fabrizio@lac.usp.br

**José Jaime Da Cruz** <sup>†</sup>  
jaime@lac.usp.br

\*Escola Politécnica da USP-PTC Av. Professor Luciano Gualberto, Travessa. 03, no 158 CEP 05508-900 – São Paulo – SP

<sup>†</sup>Departamento de Engenharia Elétrica do Centro Universitário da FEI Av. Humberto de Alencar Castelo Branco, no 3972 CEP 09850-901 – São Bernardo do Campo – SP

---

## ABSTRACT

The robust design of compensators with time domain specifications aiming setpoint tracking and disturbance rejection is discussed in this paper from a perspective of loop shaping. The constraints to provide robust disturbance rejection are derived as functions of reference models, which contain the associated time domain specifications. It is shown that the larger is the distance between the nominal plant model and the reference models to be followed the more restrictive the design constraints will be. The problems can be posed as model matching compensators and the proposed procedure may reduce the conservativeness normally associated with their design. The plant model is assumed subject to unstructured uncertainties and the design specifications are written in the usual form of loop shape constraints. Hence techniques like  $H_\infty$  and LQG/LTR can be applied as design tools. In order to illustrate the use of the proposed methodology we consider a multivariable mixture tank as an example.

**KEYWORDS:** Disturbance, Model Tracking, 2-D Control, Robust Control, Loop Shaping, Time Specifications.

## RESUMO

O projeto de compensadores robustos com especificações no

domínio do tempo visando ao acompanhamento do sinal de referência e a rejeição de distúrbios é discutido neste artigo do ponto de vista freqüencial. As condições de projeto são obtidas em função de modelos de referência, os quais contêm as especificações temporais associadas. Mostra-se que quanto maior for a distância entre o modelo nominal da planta e o modelo de referência a ser seguido, mais restritivas serão as condições de projeto. Os problemas podem ser formulados como casos de *model matching* e o procedimento proposto pode reduzir o conservadorismo normalmente associado com esse tipo de projeto. Admite-se que a planta esteja sujeita a incertezas não estruturadas e as condições de projeto são escritas na forma usual de restrições sobre o diagrama de Bode. Desta forma, ferramentas de projeto como  $H_\infty$  e LQG/LTR podem ser aplicadas. Para ilustrar o uso da metodologia proposta, considera-se como exemplo um tanque de misturas multivariável.

**PALAVRAS-CHAVE:** Distúrbios, Model Tracking, Controle 2-D, Controle Robusto, Loop Shaping, Especificações Temporais.

## 1 INTRODUÇÃO

Atualmente a maioria das técnicas de projeto de controle são conduzidas no domínio da freqüência. Inúmeros livros contêm uma apresentação exaustiva do tema (Green e Limebeer, 1995; Helton e Merino, 1998; Skogestad e Postlethwaite, 1996; Zhou, 1998). Contudo, em muitas situações práticas, parte das especificações é fornecida no domínio do tempo.

---

Artigo submetido em 20/10/2003

1a. Revisão em 29/04/2004;

2a. Revisão em 03/08/2005;

Aceito sob recomendação do Ed. Assoc. Prof. Liu Hsu

Para sistemas escalares muitas destas especificações podem ser traduzidas para o domínio da frequência, mas este não é, em geral, o caso para sistemas multivariáveis.

O uso das teorias  $H_2$  e  $H_\infty$  requer que especificações no domínio do tempo (como, por exemplo, sobressinal, tempo de subida, etc.) sejam expressas no domínio da frequência antes que possam ser aplicadas. Nos problemas de acompanhamento da referência (problema servo), especificações temporais são um tanto intuitivas. Elas são também bastante naturais em vários problemas regulatórios.

Várias abordagens podem ser usadas no projeto de controladores que incorporam especificações temporais. Talvez a técnica mais simples seja a alocação de pólos por meio da realimentação de estados. Embora a liberdade para a alocação de pólos dependa exclusivamente da controlabilidade do modelo da planta, a técnica não permite a alocação de zeros e, portanto, o desempenho temporal só pode ser efetivamente verificado a posteriori. Um inconveniente adicional nessa abordagem é a necessidade de se medirem todas as componentes do vetor de estados, o que muitas vezes pode ter um impacto significativo sobre o custo do sistema de controle. As contribuições nesta linha têm sido na solução do chamado problema de alocação de auto-estruturas (*eigenstructures*). O artigo (Liu et al., 2000), por exemplo, trata do problema de alocação robusta de auto-estruturas usando uma abordagem mista, temporal e frequencial. Apesar das dificuldades mencionadas acima, alguns problemas importantes podem ser resolvidos, como, por exemplo, o desacoplamento em sistemas multivariáveis.

Outra abordagem usada é a técnica de alocação de zeros. No artigo (Moore e Bhattacharyya, 1990) apresenta-se uma dessas técnicas baseada numa formulação por programação linear que busca um controlador que produza o mínimo sobressinal na resposta. As principais limitações associadas com essa técnica são: i) a planta deve ter uma única entrada; ii) não são tratados os erros de modelagem; iii) o controlador obtido é de ordem elevada. A programação linear também é usada por (Vethecan e Hill, 1998) num problema de otimização com restrições temporais. Embora o problema tratado seja multivariável, não é considerada a questão da robustez.

O *model matching* e o controle 2-D são duas abordagens que podem ser usadas para lidar indiretamente com especificações no domínio do tempo em problemas servo e que podem ser adaptadas para lidar também com a rejeição de distúrbios com especificações temporais. A idéia é aproximar as matrizes de transferência entrada/saída e distúrbio/saída por matrizes de transferência que contenham as especificações temporais dadas, denominadas modelo de referência e modelo de referência do distúrbio, respectivamente. Nessa linha, o artigo (Prempain e Postlethwaite, 2001) propõe uma maneira

de projetar a parcela do filtro de avanço de um controlador com dois graus de liberdade.

O artigo (Oya e Hagino, 2002) propõe uma maneira de diminuir o erro entre a resposta desejada e a da planta real. A especificação temporal é definida por uma lei de controle do tipo realimentação de estados e uma segunda lei, baseada num observador de estados, corrige o vetor de entrada. Desta forma a especificação temporal é garantida mesmo na presença de erros de modelagem, mas a definição prévia do comportamento temporal não é considerada explicitamente no projeto e sim verificada a posteriori.

O termo “especificações temporais” pode ter os mais diversos significados, desde restrições no máximo valor da saída, como é típico no problema de controle de sistema críticos (Liu et al., 1995), até especificações detalhadas do comportamento temporal da resposta de cada canal de um sistema multivariável (Jonckheere e Yu, 1999). O objetivo da abordagem de projeto apresentada neste artigo é principalmente garantir, com uma precisão pré-estabelecida (no domínio da frequência) e na presença de erros de modelagem, que o acompanhamento do sinal de referência e a rejeição de distúrbios possam ser realizados com restrições temporais fixadas a priori. Deve-se notar que a inclusão das especificações temporais é considerada no procedimento de projeto de uma forma indireta por meio de um modelo de referência dado no domínio da frequência. Funções de transferência de primeira e segunda ordens são bastante apropriadas para isso pois podem exprimir especificações como constante de tempo, tempo de acomodação, máximo sobressinal, etc., de maneira imediata. Em particular, propõe-se uma técnica de projeto e argumenta-se que ela pode ser menos conservadora que usualmente.

Supõe-se que o modelo da planta esteja sujeito a incertezas não estruturadas e, no caso regulador, a atenção é restrita ao caso em que o distúrbio pode ser medido.

As especificações de projeto são escritas na forma usual de restrições sobre o ganho de malha. Desta forma técnicas como  $H_\infty$  ou LQG/LTR (Athans, 1986; Doyle e Stein, 1981) podem ser aplicadas como ferramentas de projeto.

Este artigo é estruturado da seguinte forma.

A seção 2 contém uma discussão preliminar do problema de *model tracking* considerado neste artigo.

Na seção 3, as condições de projeto do problema servo robusto são escritas tanto na forma de restrições sobre a sensibilidade de malha como em termos de restrições sobre o ganho de malha. Faz-se também uma análise do esforço de controle necessário e apresenta-se um exemplo numérico para ilustrar a metodologia proposta.

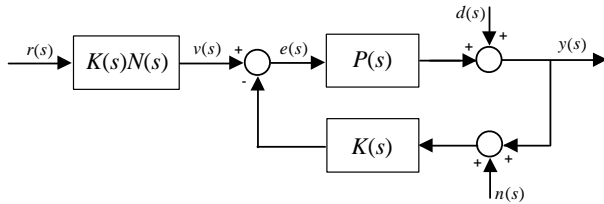


Figura 1: Estrutura de controle 2-D

Na seção 4, apresentam-se as condições de projeto relativas ao caso regulador e um exemplo ilustrativo.

As condições para a rejeição robusta do erro de medida são apresentadas na seção 5.

No que se segue o símbolo  $\|\cdot\|$  representa a norma Euclidiana de vetores complexos. Os símbolos  $\sigma_i[\cdot]$ ,  $\sigma_{\min}[\cdot]$  e  $\sigma_{\max}[\cdot]$  denotam o *i*-ésimo, o mínimo e o máximo valores singulares, respectivamente.

## 2 DISCUSSÃO PRELIMINAR

Considere o sistema representado pela Fig. 1 (Skogestad e Postlethwaite, 1996). As matrizes de transferência  $P(s)$  e  $K(s)$  são, respectivamente, da planta e do compensador. A matriz de transferência  $N(s)$  no pré-filtro será denominada de modelo de referência, sendo comumente escolhida como diagonal para que o sistema em malha fechada resulte desacoplado. O sinal  $d(s)$  é o distúrbio refletido na saída da planta,  $n(s)$  é o erro de medida,  $r(s)$  é a entrada do sistema e  $y(s)$ , a saída. Todos os sinais e matrizes de transferência supõem-se terem dimensões compatíveis.

O projeto visando *matching*, neste caso, pode ser reduzido a fazer a matriz de transferência de  $v(s)$  para  $y(s)$  próxima à  $K^{-1}(s)$ , na faixa de frequências em que o casamento entre  $N(s)$  e a matriz de transferência de  $r(s)$  para  $y(s)$  é buscado. (Kwakernaak, 1996).

Na página 14 da referência (Maciejowski, 1989), o autor escreve a respeito da escolha do pré-filtro: “podemos considerar primeiro o problema de projetar  $K(s)$  para obter as matrizes  $S(s)$  e  $T(s)$  desejadas e, subseqüentemente projetar  $N(s)$  para fornecer uma conveniente” matriz de transferência de  $r(s)$  para  $y(s)$ . Um ganho elevado de malha é exigido para obter-se uma matriz de transferência de malha fechada próxima à  $K^{-1}(s)$ . A escolha de quão grande o ganho é escolhido pode produzir um projeto conservador se ele é tomado maior do que o necessário. Uma definição clara de qual é o nível de ganho necessário para garantir uma determinada precisão não é apresentada. Esta é a motivação principal do presente trabalho.

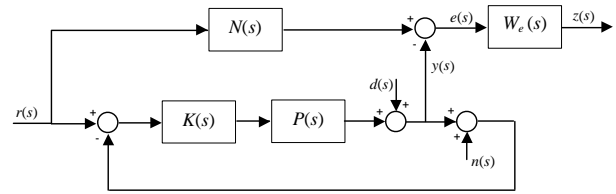


Figura 2: Estrutura de controle *signal-based*

A referência (Skogestad e Postlethwaite, 1996) contém um abordagem *model matching* do problema de aproximar a matriz de transferência entrada/saída do sistema por uma dada  $N(s)$ . Considera-se o sistema de controle mostrado na Fig. 2, denominado estrutura de controle *signal-based*. O objetivo é minimizar a norma da matriz de transferência de  $r(s)$  para  $z(s)$ . A matriz de ponderação  $W_e(s)$  reflete o conteúdo em frequência do erro de rastreamento.

Existem, contudo, alguns problemas com esta estrutura. Primeiramente, o erro de rastreamento  $e(s)$  não é realimentado. Como conseqüência, o modelo de referência  $N(s)$  não é uma parte explícita do compensador – ele é somente usado no projeto. Em segundo lugar, admita-se que o distúrbio  $d(s)$  deva ser rejeitado numa dada faixa de frequências. Isto implica que o ganho de malha  $\sigma_{\min}[P(j\omega)K(j\omega)]$  deve ser grande. Conseqüentemente a matriz de transferência de malha fechada de  $r(s)$  para  $y(s)$  resultará próxima à identidade e a capacidade de rastreamento do modelo pode ser deficiente, uma vez que  $e(s)$  é dada aproximadamente por  $(N - I)r$  nesta faixa de frequências.

Uma outra estrutura é proposta por (Lee e Hwang, 1997) e usada na guiagem de um míssil. Da mesma forma que no projeto do controlador da Fig. 2, utiliza-se a formulação *mixed-sensitivity* da teoria de controle  $H_\infty$ . A diferença básica dessa estrutura em relação àquela da Fig (2) é a utilização de um segundo controlador, inserido no ramo de realimentação. Como as matrizes de ponderação também são colocadas fora da realimentação, os controladores têm a desvantagem de não incorporarem explicitamente o modelo de referência.

Uma versão diferente deste problema é considerada na referência (Jonckheere e Yu, 1999) para resolver um problema de controle de propulsão de uma aeronave. A estrutura do sistema de controle é representada na Fig. 3.

Essa é a estrutura que será utilizada neste artigo. Note-se que  $e(s)$  é realimentado e, como conseqüência, o modelo de referência  $N(s)$  é uma parte explícita do sistema de controle. Além disso, será mostrado que tanto a rejeição de distúrbio como o acompanhamento do modelo de referência podem ser atingidos simultaneamente.

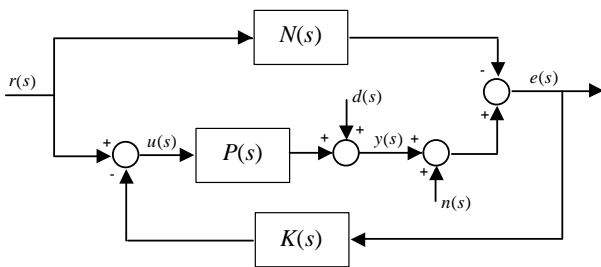


Figura 3: Estrutura *model tracking*

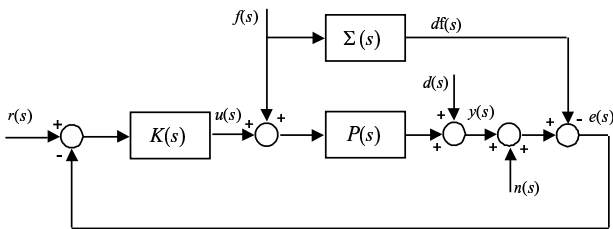


Figura 4: Problema de rejeição de distúrbios.

O *problema servo* é considerado neste artigo no seguinte sentido. Procuramos um compensador  $K(s)$  tal que a norma da matriz de transferência de  $r(j\omega)$  para  $e(j\omega)$  (veja Fig. 3) esteja abaixo de um valor pré-estabelecido, numa faixa dada de frequências. Adicionalmente desejamos que contribuições para a saída  $y(j\omega)$  tanto do distúrbio  $d(j\omega)$  como do erro de medida  $n(j\omega)$  estejam abaixo de certos valores pré-fixados numa faixa dada de frequências. Como é usual, denominaremos estes últimos de rejeição de distúrbio e rejeição de erro de medida, respectivamente.

Sem perda de generalidade, o compensador será considerado no ramo de realimentação. Com esta escolha, expressões matemáticas mais elucidativas podem ser obtidas no que se segue. Entretanto, um desenvolvimento similar pode ser realizado para  $K(s)$  no ramo direto.

Considere agora o sistema representado na Fig. 4. A matriz de transferência  $\Sigma(s)$  é um filtro e será chamado *modelo de referência do distúrbio*. O sinal  $f(s)$  é o distúrbio, suposto mensurável, refletido na entrada da planta.

Quando não houver distúrbio mensurável ( $f(s) = 0$ ), o problema de projeto recai no caso clássico. Por outro lado, tomando-se somente o distúrbio mensurável, ou seja, para  $r(s) = d(s) = 0$ , o diagrama de blocos da Fig. 4 é idêntico a aquele mostrado na Fig. 3, substituindo-se apenas  $N(s)$  por  $\Sigma(s)$ . Note-se que o problema de controle caracterizado na Fig. 3 é, de fato, um problema de dois graus de liberdade. Por meio de simples manipulação algébrica daquele diagrama de blocos obtém-se o diagrama da Fig. 1 – o controle 2-D com

um pré-filtro (Leonardi e Da Cruz, 2002).

Portanto, o projeto visando rejeição do distúrbio mensurável com especificações no domínio do tempo pode ser visto como um problema de acompanhamento do modelo de referência.

O *problema regulador* é considerado neste artigo com o seguinte sentido. Procura-se um compensador  $K(s)$  tal que a norma da matriz de transferência de  $f(j\omega)$  para  $e(j\omega)$  (veja Fig. 4 esteja abaixo de um valor pré-estabelecido numa dada faixa de frequências. Adicionalmente, deseja-se que as contribuições para a saída  $y(j\omega)$  tanto do distúrbio não medido  $d(j\omega)$  como do erro de medida  $n(j\omega)$  estejam abaixo de certos valores pré-estabelecidos nos conjuntos dados de frequências.

No que se segue toma-se um conjunto de matrizes de transferência representativas da planta real, considerando a representação do erro de modelagem multiplicativo. Admitimos que um limite superior é dado para a norma espectral da matriz do erro multiplicativo na forma de uma função escalar  $e_M(\omega)$  (Doyle e Stein, 1981).

### 3 O PROBLEMA SERVO

Admita-se que as dinâmicas da planta sejam dadas pelo seu modelo nominal. Então, para o sistema representado na Fig. 3 vale o seguinte conjunto de equações:

$$y(s) = S(s)d(s) + S(s)P(s)(I + K(s)N(s))r(s) - S(s)P(s)K(s)n(s), \quad (1)$$

$$e(s) = S(s)d(s) + S(s)(P(s) - N(s))r(s) + S(s)n(s), \quad (2)$$

$$u(s) = -(I + K(s)P(s))^{-1}K(s)d(s) + (I + K(s)P(s))^{-1}(I + K(s)N(s))r(s) - (I + K(s)P(s))^{-1}K(s)n(s). \quad (3)$$

em que  $S(s) = (I + P(s)K(s))^{-1}$  é a matriz de sensibilidade.

Neste ponto, como estamos obviamente admitindo que  $N(s)$  é estável, deve ficar claro que a estabilidade do sistema é determinada somente pela malha fechada que contém  $P(s)$  e  $K(s)$ . Como esta é uma situação clássica, a estabilidade não será discutida neste artigo. As condições para se garantir tanto a rejeição do distúrbio como a rejeição do erro de medida também são conhecidas (Da Cruz, 1996). Contudo, elas foram incluídas no que se segue para se expor o procedimento de projeto em forma completa.

### 3.1 Especificação Temporal

Admita que  $\alpha_r > 0$  (tipicamente  $\alpha_r \ll 1$ ) é um número dado que quantifica a precisão do acompanhamento do modelo de referência num conjunto de frequências dadas  $\Omega_r$  tal que  $\|e(j\omega)\|/\|r(j\omega)\| \leq \alpha_r$  ( $\omega \in \Omega_r$ ). Tipicamente, esse conjunto é do tipo  $\Omega_r = \{\omega \in R : \omega \leq \omega_r\}$  para uma dada  $\omega_r$ . Admitindo-se que  $d(s) = n(s) = 0$ , para garantir o acompanhamento do modelo de referência temos a seguinte condição, obtida da equação (2):

$$\sigma_{\max} [S(j\omega)] \leq \frac{\alpha_r}{\sigma_{\max} [P(j\omega) - N(j\omega)]} \quad (\omega \in \Omega_r) \quad (4)$$

Assim como era esperado, a sensibilidade precisa ser menor quando a distância entre a planta e o modelo de referência (medida por  $\sigma_{\max} [P(j\omega) - N(j\omega)]$ ) aumenta. O mesmo ocorre quando  $\alpha_r$  é menor.

Quando o lado direito da equação (4) é muito menor que 1, esta condição pode ser reescrita aproximadamente como

$$\sigma_{\min} [P(j\omega)K(j\omega)] \geq \frac{\sigma_{\max} [P(j\omega) - N(j\omega)]}{\alpha_r} \quad (\omega \in \Omega_r). \quad (5)$$

De maneira análoga, esta condição mostra que o ganho de malha precisa aumentar tanto com a distância entre  $P$  e  $N$  como com o inverso de  $\alpha_r$ .

Para comparar nossos resultados com o projeto 2-D tradicional (veja Fig. 1), adotou-se o seguinte procedimento de projeto 2-D. Considere o sistema representado na Fig. 1. É imediato perceber que se desejamos  $\|y(j\omega) - N(j\omega)r(j\omega)\|/\|N(j\omega)r(j\omega)\| \leq \alpha_r$  ( $\omega \in \Omega_r$ ), então é suficiente fazer

$$\sigma_{\max} [S(j\omega)] \leq \alpha_r \quad (\omega \in \Omega_r) \quad (6)$$

Comparando as desigualdades (4) e (6), concluímos que a abordagem proposta pode resultar em menores ganhos de malha sempre que  $\sigma_{\max} [P(j\omega) - N(j\omega)]$  é menor que 1.

Na prática, uma situação comum corresponde àquela em que o modelo de referência é escolhido como  $N(j\omega) = I$ , em baixas frequências. Neste caso recomenda-se normalizar as variáveis de entrada da planta de tal forma a tornar  $P(j\omega)$  próxima à identidade em baixas frequências. Os exemplos numéricos ilustram esta questão.

### 3.2 Robustez do Desempenho

Primeiramente, como o erro de modelagem foi usado na forma multiplicativa, a condição de estabilidade robusta é

dada por (Doyle e Stein, 1981):

$$\sigma_{\max} [T(j\omega)] < e_M(\omega) \quad (\forall \omega) \quad (7)$$

Admitindo-se que  $e_M(\omega) < 1$  para  $\omega \in \Omega_r$ , então a condição (4) se modifica para

$$\sigma_{\max} [S(j\omega)] \leq \frac{\alpha_r [1 - e_M(\omega)]}{\sigma_{\max} [P(j\omega) - N(j\omega)]} \quad (\omega \in \Omega_r) \quad (8)$$

e a condição (5) para (Da Cruz, 1996)

$$\sigma_{\min} [P(j\omega)K(j\omega)] \geq \frac{\sigma_{\max} [P(j\omega) - N(j\omega)]}{\alpha_r [1 - e_M(\omega)]} \quad (\omega \in \Omega_r). \quad (9)$$

Como esperado, o efeito da incerteza do modelo torna as condições sobre  $S$  e  $PK$  mais restritivas.

### 3.3 Esforço de Controle

Nesta seção restringimos a análise para a planta nominal, desconsiderando portanto qualquer aspecto relativo às incertezas do modelo.

Da equação (3) é imediato verificar que

$$u(s) - r(s) = K(s) [I + P(s)K(s)]^{-1} [N(s) - P(s)] r(s) \quad (10)$$

Admita-se que  $P$ ,  $N$  e  $\alpha_r$  são tais que  $\sigma_{\max} [P(j\omega) - N(j\omega)]/\alpha_r \gg 1$  para  $\omega \in \Omega_r$ . Assim, se a condição (5) for satisfeita, então  $\sigma_{\min} [P(j\omega)K(j\omega)] \gg 1$ . Neste caso a equação (10) leva a:

$$u(j\omega) - r(j\omega) \cong P(j\omega)^{-1} [N(j\omega) - P(j\omega)] r(j\omega) \quad (11)$$

admitindo-se que  $P$  e  $K$  sejam quadradas e que exista  $P^{-1}$ .

Da equação (8) segue-se imediatamente que

$$\sup_{\|r \neq 0\|} \frac{\|u(j\omega) - r(j\omega)\|}{\|r(j\omega)\|} \cong \sigma_{\max} [P^{-1}(j\omega) [N(j\omega) - P(j\omega)]] \quad (12)$$

Esta equação mostra que o pior caso do incremento relativo do esforço de controle é aproximadamente o mesmo que a distância relativa entre a planta e o modelo de referência. Assim, modelos de referência que são distantes do modelo da planta requerem mais esforço de controle para serem seguidos. Isto está em concordância com a condição (4) que mostra que quanto maior for a distância entre a planta e o modelo

de referência, mais restritiva será a condição de acompanhamento do modelo de referência.

Da equação (1) nota-se que  $S(s)P(s)(I + K(s)N(s))$  não possui dinâmica arbitrária nas altas frequências onde, em geral,  $P(s)$ ,  $N(s)$  e  $K(s)$  exibem baixo ganho. Desta forma, a matriz de transferência de  $r(s)$  para  $y(s)$  torna-se aproximadamente igual a  $P(s)$ . Por causa disto, o valor de  $\omega_r$  não é arbitrário e sim está relacionado a  $P(s)$  e  $N(s)$ . Isto significa que a condição (4) não implica necessariamente em *model matching*. Esta é a razão pela qual denominamos a estrutura do diagrama da Fig. 3 de *model tracking*. Simulações realizadas até agora indicam que é razoável esperar por um bom desempenho até uma década além da banda passante do modelo de referência. Em geral isto é suficiente para garantir um bom acompanhamento do modelo de referência.

### 3.4 Exemplo Numérico

Para ilustrar a aplicação da metodologia proposta, consideramos o tanque de misturas da referência (Kwakernaak e Sivan, 1970). Seu modelo nominal linearizado na forma de estados é dado por

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -0,01 & 0 \\ 0 & -0,02 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -0,25 & 0,75 \end{bmatrix} u(t) \\ y &= \begin{bmatrix} 0,01 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned} \quad (13)$$

Como estamos interessados em ilustrar o problema de acompanhamento do modelo de referência, as demais especificações de projeto foram omitidas neste exemplo. Considerem-se como especificações do sistema de controle que ambos os canais devam apresentar respostas à entrada tipo degrau com sobressinal de 4,6% e tempo de acomodação de 8,6s. Estas especificações podem ser atendidas por um modelo de referência de de 2ª ordem com uma frequência natural não amortecida de 0,5 rad/s e coeficiente de amortecimento igual a 0,7. Arbitrou-se uma tolerância de 10% (isto é,  $\alpha_r = 0.1$ ) na faixa de frequências que vai até uma década além da banda passante do modelo de referência (isto é,  $\omega_r = 5$  rad/s) – é evidente que valores menores de  $\alpha_r$  produziram respostas mais próximas às do modelo de referência. É oportuno enfatizar que são usuais especificações deste tipo, em que o modelo de referência é diagonal, para que o sistema em malha fechada resulte desacoplado.

Da especificação temporal temos

$$N(s) = \begin{bmatrix} N_{11}(s) & 0 \\ 0 & N_{22}(s) \end{bmatrix} \quad (14)$$

em que

$$N_{ii}(s) = \frac{0.25}{s^2 + 0.7s + 0.25}$$

A formulação *mixed-sensitivity* do controle  $H_\infty$  será usada para se obter  $K(s)$ . (Green e Limebeer, 1995; Skogestad e Postlethwaite, 1996; Zhou e Doyle, 1998).

Por simplicidade supomos que as incertezas do modelo já foram consideradas na definição da matriz de ponderação

$$W_1(s) = 10 \cdot [P(s) - N(s)]. \quad (15)$$

Uma vez que a planta  $P(s)$  aparece também no lado direito de (4), suas variáveis de entrada podem ser normalizadas de forma a torná-la próxima à identidade em frequências baixas. Neste caso, a condição (4) pode ser reescrita como

$$\sigma_{\max} [S(j\omega)] \leq \frac{\alpha_r}{\sigma_{\max} [P(j\omega)S_u(j\omega) - N(j\omega)]} \quad (\omega \in \Omega_r), \quad (16)$$

e a condição (5) como:

$$\sigma_{\min} [P(j\omega)K(j\omega)] \geq \frac{\sigma_{\max} [P(j\omega)S_u(j\omega) - N(j\omega)]}{\alpha_r} \quad (\omega \in \Omega_r), \quad (17)$$

em que  $S_u$  é uma matriz quadrada não singular de dimensões compatíveis.

Por simplicidade considera-se aqui

$$S_u = \lim_{s \rightarrow 0} P^{-1}(s), \quad (18)$$

ou seja,  $S_u$  é tomado constante e igual à inversa da planta em baixas frequências. Numericamente,

$$S_u = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -12,5 & 37,5 \end{bmatrix}.$$

Note-se que, como mostra a equação

$$\varepsilon_M(s) = [P_R(s)S_u - P(s)S_u] [P(s)S_u]^{-1} \quad (19)$$

em que  $P_R$  representa a planta real, a normalização das variáveis de entrada da planta não altera o erro de modelagem multiplicativo  $\varepsilon_M(s)$ . Desta forma tanto a condição de desempenho robusto como a de estabilidade robusta não são afetadas.

A Fig. 5 mostra os diagramas de Bode dos valores singulares das matrizes relevantes ao projeto para o acompanhamento do modelo de referência. A matriz  $W_1(s)$  é a matriz de ponderação do procedimento *mixed-sensitivity*. Note-se que  $\sigma_i [W_1(j\omega)]$  está situada 20 db acima de  $\sigma_{\max} [P(j\omega) - N(j\omega)]$ .

Usando a mesma especificação, um projeto 2-D foi realizado com base na condição (6). Mesmo sabendo-se que a planta

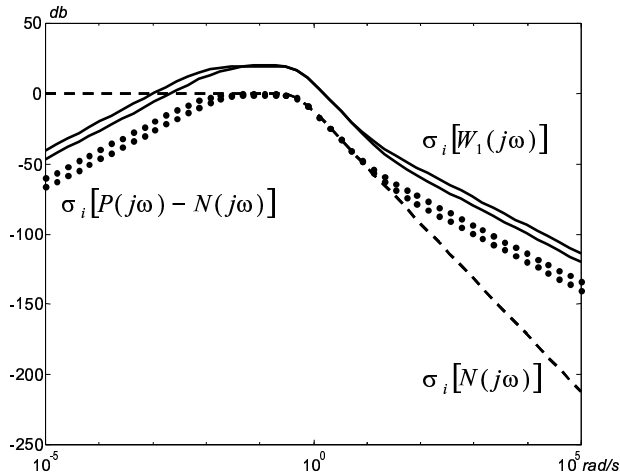


Figura 5: Diagramas de Bode para o acompanhamento do modelo de referência.

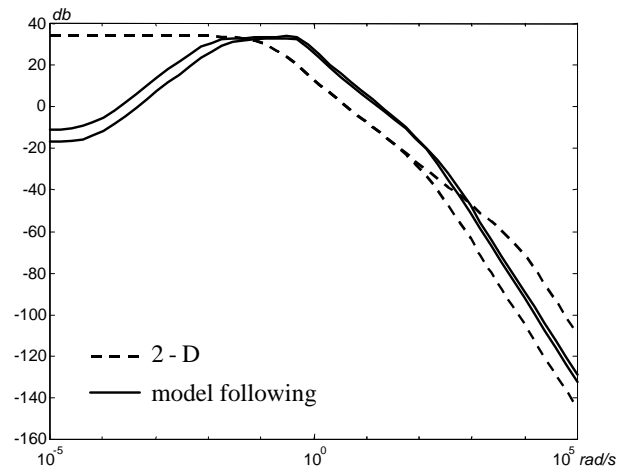


Figura 7: Ganhos de malha para o acompanhamento do modelo de referência e para o controlador 2-D.

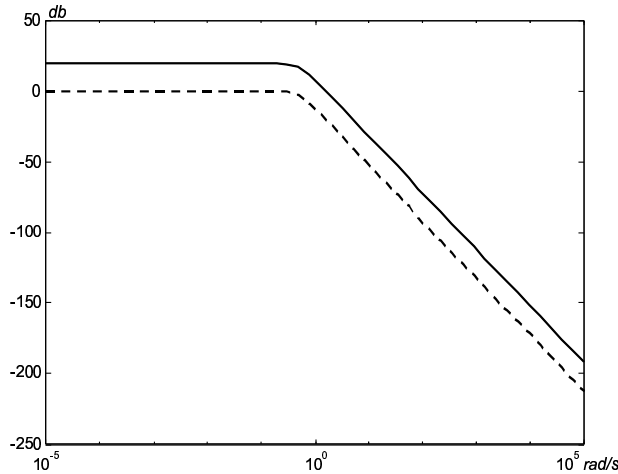


Figura 6: Diagramas de Bode do controle 2-D.

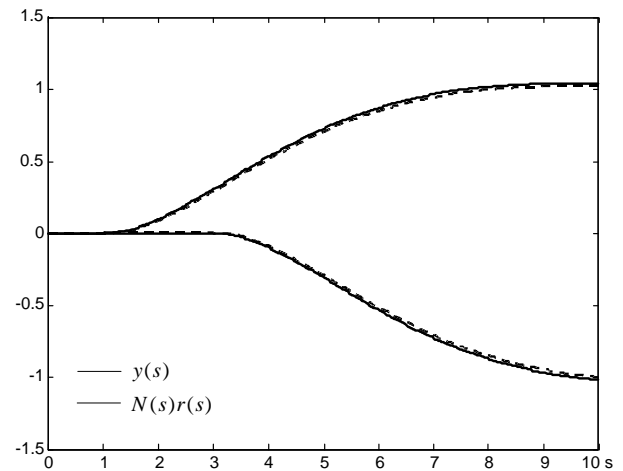


Figura 8: Resposta temporal de malha fechada.

$P(s)$  não aparece no lado direito de (6), tentou-se normalizar as variáveis de entrada da planta, buscando melhorar o projeto 2D. Como esperado, isto não foi útil e os resultados foram praticamente os mesmos que sem a normalização. A Fig. 6 mostra os diagramas de Bode relevantes. Note-se que  $\sigma_i [W_1(j\omega)]$  está situada 20 dB acima de  $\sigma_{\max} [N(j\omega)]$ .

A Fig. 7 mostra os ganhos de malha resultantes do projeto para o acompanhamento do modelo de referência e do projeto 2-D. Note-se que, como proposto, em baixas frequências, os ganhos de malha do projeto de acompanhamento do modelo de referência são muito menores que aqueles do controle 2-D. Além disso, embora ambos os controladores tenham dinâmicas dominantes similares, o controlador 2-D resultante exibe pólos de alta frequência que podem causar dificuldades numéricas na sua síntese.

Como ilustração, mostra-se a resposta temporal do sistema de malha fechada e as variáveis de controle.

Dois sinais do tipo degrau unitário são considerados nos instantes 1s e 3s, um em cada entrada, com amplitudes positiva e negativa, respectivamente. Os resultados da simulação são apresentados na Fig. 8. Como pode ser visto, as saídas do processo acompanham de perto as do modelo de referência. O comportamento temporal das variáveis de controle é mostrado na Fig. 9.

Embora não tenham sido mostrados aqui, os resultados obtidos com o projeto 2-D são indistinguíveis visualmente daqueles apresentados acima.

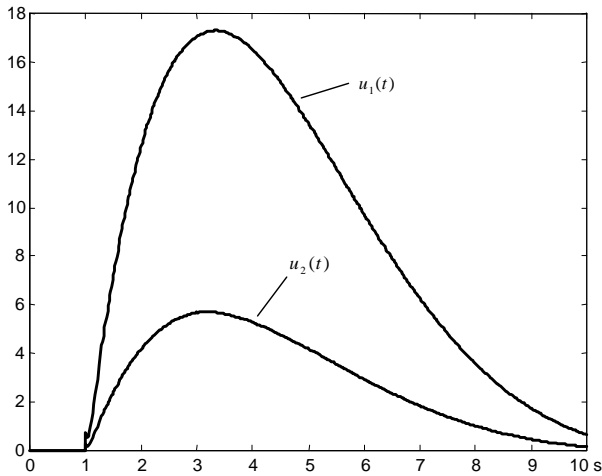


Figura 9: Histórico temporal do controle.

## 4 O PROBLEMA REGULADOR

Por causa da equivalência entre os problemas de acompanhamento do modelo de referência e de rejeição de distúrbios mencionada na seção 1, considere-se no que se segue a Fig. 3 e as equações (1), (2) e (3), substituindo  $N(s)$  por  $\Sigma(s)$  e  $r(s)$  por  $f(s)$ , respectivamente.

### 4.1 Especificação Freqüencial

Suponha-se que  $\Omega_d = \{\omega \in R : \omega \leq \omega_d\}$  é um conjunto de freqüências em que o distúrbio  $d(s)$  tem predominantemente sua energia. Admita também que  $r(s) = 0$  e  $n(s) = 0$ . Para um dado  $\alpha_d > 0$  (tipicamente  $\alpha_d \ll 1$ ), exprime-se a condição de rejeição de distúrbios como

$$\frac{\|e(j\omega)\|}{\|d(j\omega)\|} \leq \alpha_d \quad (\omega \in \Omega_d) \quad (20)$$

Da equação (2) obtém-se a seguinte e bem conhecida condição suficiente:

$$\sigma_{\max} [S(j\omega)] \leq \alpha_d \quad (\omega \in \Omega_d), \quad (21)$$

que leva à seguinte condição aproximada (Da Cruz, 1996):

$$\sigma_{\min} [P(j\omega)K(j\omega)] \geq \frac{1}{\alpha_d} \quad (\omega \in \Omega_d) \quad (22)$$

sempre que  $\alpha_d \ll 1$ .

### 4.2 Especificação Temporal

Admita-se que  $\alpha_f > 0$  (tipicamente  $\alpha_f \ll 1$ ) seja um número dado que quantifica a precisão desejada para a rejeição

do distúrbio num conjunto de freqüências dadas  $\Omega_f$  representando  $\|e(j\omega)\|/\|f(j\omega)\| \leq \alpha_f$  ( $\omega \in \Omega_f$ ). Tipicamente  $\Omega_f = \{\omega \in R : \omega \leq \omega_f\}$  para uma dada  $\omega_f$ . Admitindo-se que  $d(s) = n(s) = 0$ , para garantir o acompanhamento do modelo de referência do distúrbio temos a seguinte condição, obtida da Eq. (2):

$$\sigma_{\max} [S(j\omega)] \leq \frac{\alpha_f}{\sigma_{\max} [P(j\omega) - \Sigma(j\omega)]} \quad (\omega \in \Omega_f) \quad (23)$$

Assim, como era esperado, a sensibilidade deve ser menor quando a distância entre a planta e o modelo de referência do distúrbio aumenta. O mesmo ocorre quando  $\alpha_f$  diminui.

Quando o lado direito da equação (23) é muito menor que 1, esta condição pode ser reescrita aproximadamente como

$$\sigma_{\min} [P(j\omega)K(j\omega)] \geq \frac{\sigma_{\max} [P(j\omega) - \Sigma(j\omega)]}{\alpha_f} \quad (\omega \in \Omega_f). \quad (24)$$

De maneira análoga ao problema servo, esta condição mostra que o ganho de malha deve aumentar tanto com a distância entre  $P$  e  $\Sigma$  como com o inverso de  $\alpha_f$ .

### 4.3 Robustez do Desempenho

Admitindo-se que  $e_M(\omega)$  para  $\omega \in \Omega_d$ , então a condição (21) se modifica para (Green e Limebeer, 1995):

$$\sigma_{\max} [S(j\omega)] \leq \alpha_d [1 - e_M(\omega)] \quad (\omega \in \Omega_d) \quad (25)$$

e a condição (22) para (Da Cruz, 1996):

$$\sigma_{\min} [P(j\omega)K(j\omega)] \geq \frac{1}{\alpha_d [1 - e_M(\omega)]} \quad (\omega \in \Omega_d) \quad (26)$$

Como esperado, o efeito da incerteza do modelo torna as condições sobre  $S$  e  $PK$  mais restritivas.

### 4.4 Esforço de Controle

Nesta seção restringe-se a análise para a planta nominal, desconsiderando portanto qualquer aspecto relativo às incertezas do modelo.

De maneira análoga à seção 3.3, admitindo-se que  $P$ ,  $\Sigma$  e  $\alpha_f$  são tais que  $\sigma_{\max} [P(j\omega) - \Sigma(j\omega)]/\alpha_f \gg 1$  para  $\omega \in \Omega_f$  e que a condição (24) seja satisfeita, então

$$\sup_{\|f \neq 0\|} \frac{\|u(j\omega) - f(j\omega)\|}{\|f(j\omega)\|} \cong \sigma_{\max} [P^{-1}(j\omega) (\Sigma(j\omega) - P(j\omega))] \quad (27)$$

Aplica-se, portanto, o mesmo comentário do final da seção 3.3.



## 4.5 Exemplo Numérico

Considere-se o mesmo exemplo da seção 3.4.

Como o objetivo aqui é ilustrar a rejeição de distúrbios com especificações do domínio do tempo, as demais especificações de projeto são desconsideradas neste exemplo. Além disso, como as incertezas do modelo tornam as condições de projeto apenas mais restritivas, elas foram omitidas nesta ilustração e podem ser consideradas já incluídas nas especificações de projeto.

Considere como especificações do sistema de controle que os distúrbios em ambos os canais devam ter sua influência nas saídas rejeitadas com um comportamento temporal próximo à resposta do sistema de segunda ordem:

$$\Sigma_{ii}(s) = \frac{0.25 s}{s^2 + 0.7s + 0.25} \quad (i = 1, 2) \quad (28)$$

com uma tolerância de 10% (ou seja,  $\alpha_f = 0.1$ ) na faixa de frequências que se estende até uma década além da banda passante do modelo de referência.

Das especificações no domínio do tempo temos portanto que

$$\Sigma(s) = \begin{bmatrix} \Sigma_{11}(s) & 0 \\ 0 & \Sigma_{22}(s) \end{bmatrix}, \quad (29)$$

A formulação *mixed-sensitivity* da teoria de controle  $H_\infty$  será usada para se obter  $K(s)$  (Green e Limebeer, 1995; Helton e Merino, 1998; Skogestad e Postlethwaite, 1996).

Por simplicidade supomos que as incertezas do modelo já foram consideradas na definição da matriz de ponderação

$$W_1(s) = 10 \cdot [P(s) - \Sigma(s)]. \quad (30)$$

Da mesma forma que no caso servo, as variáveis de entrada podem ser normalizadas e, por simplicidade, a matriz de normalização  $S_u$  é considerada também aqui como constante e igual à inversa da planta em baixas frequências.

A Fig. 10 mostra os diagramas de Bode dos valores singulares das matrizes relevantes ao projeto de acompanhamento do modelo de referência do distúrbio.  $W_1(s)$  é a matriz de ponderação do procedimento *mixed-sensitivity*. Note-se que  $\sigma_i[W_1(j\omega)]$  está situada 20 dB acima de  $\sigma_{\max}[P(j\omega) - \Sigma(j\omega)]$ .

Como ilustração, apresentam-se a resposta temporal do sistema em malha fechada e as variáveis de controle.

Dois sinais do tipo degrau unitário são considerados nos instantes 10s e 30s, um em cada entrada, com amplitudes positiva e negativa, respectivamente. Os resultados da simulação

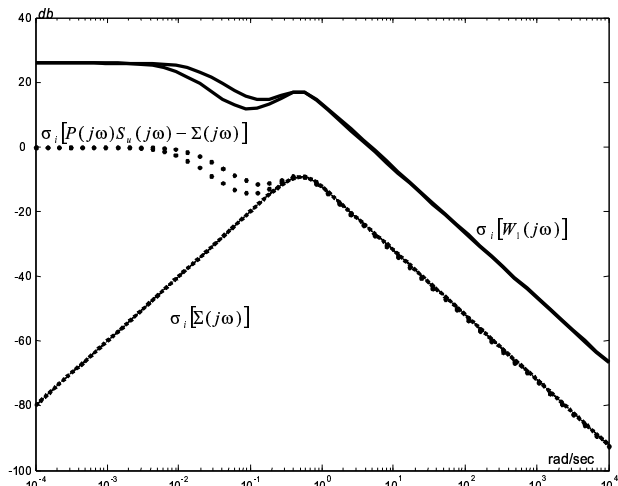


Figura 10: Diagramas de Bode para o acompanhamento do modelo de referência do distúrbio.

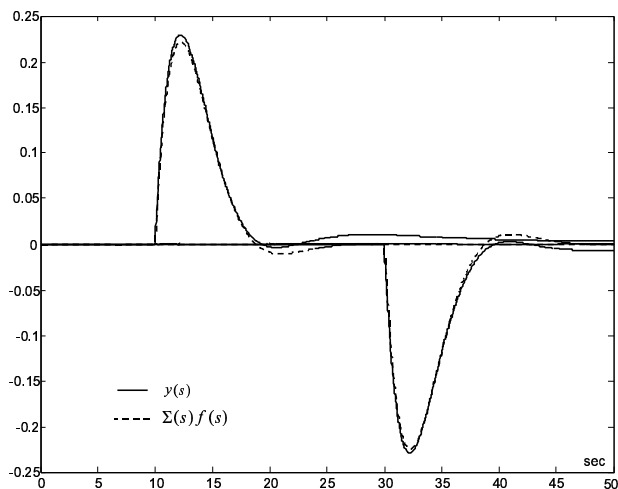


Figura 11: Resposta de malha fechada.

são apresentados na Fig. 11. Como pode ser visto, as saídas do processo acompanham de perto as do modelo de referência do distúrbio. O comportamento das variáveis de controle é mostrado na Fig. 12.

## 5 ERRO DE MEDIDA

### 5.1 Especificação Freqüencial

Suponha-se que  $\Omega_n = \{\omega \in R : \omega \geq \omega_n\}$  é um conjunto de frequências em que o erro de medida tem predominantemente sua energia. Admita também que  $r(s) = 0$  e  $d(s) = 0$ . Para um dado  $\alpha_n > 0$  (tipicamente  $\alpha_n \ll 1$ ), exprime-se a

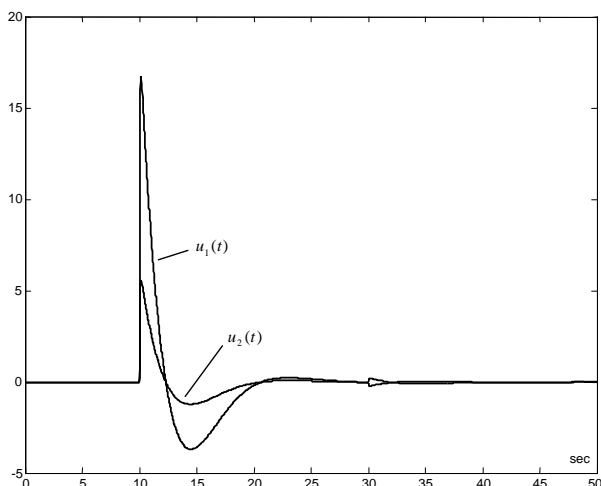


Figura 12: Histórico temporal do controle.

condição de rejeição do erro de medida como:

$$\frac{\|y(j\omega)\|}{\|n(j\omega)\|} \leq \alpha_n \quad (\omega \in \Omega_n). \quad (31)$$

Da equação (1) obtém-se então a condição para a rejeição do erro de medida

$$\sigma_{\max} [T(j\omega)] \leq \alpha_n \quad (\omega \in \Omega_n), \quad (32)$$

em que

$$T(s) = (I + P(s)K(s))^{-1} P(s)K(s). \quad (33)$$

Alternativamente, da equação (1) segue-se a seguinte condição aproximada (Da Cruz, 1996):

$$\sigma_{\max} [P(j\omega)K(j\omega)] \leq \alpha_n \quad (\omega \in \Omega_n). \quad (34)$$

sempre que  $\alpha_n \ll 1$ .

## 5.2 Robustez do Desempenho

Supondo-se que  $\alpha_n \ll 1$ , as condições (32) e (34) podem ser reescritas da seguinte forma aproximada (Da Cruz, 1996):

$$\sigma_{\max} [T(j\omega)] \leq \frac{\alpha_n}{1 + e_M(\omega)} \quad (\omega \in \Omega_n). \quad (35)$$

$$\sigma_{\max} [P(j\omega)K(j\omega)] \leq \frac{\alpha_n}{1 + e_M(\omega)} \quad (\omega \in \Omega_n). \quad (36)$$

Como esperado, o efeito da incerteza do modelo torna as condições sobre  $T$  e  $PK$  mais restritivas.

## 6 CONCLUSÕES

Este trabalho discutiu o projeto robusto para o acompanhamento do modelo de referência e acompanhamento do modelo de referência do distúrbio.

A metodologia proposta resulta como uma maneira natural de se lidar com especificações no domínio do tempo num contexto de projeto freqüencial tanto para problemas do tipo servo como para reguladores.

Mostrou-se que as condições de acompanhamento do modelo de referência e do modelo de referência do distúrbio dependem diretamente da distância entre o modelo de referência e o modelo nominal da planta – distâncias maiores entre esses modelos geram condições mais restritivas. Mostrou-se também que o incremento relativo no esforço de controle para manter o acompanhamento dos modelos de referência é aproximadamente o mesmo que a distância relativa entre a planta e cada modelo de referência. Portanto, como esperado, a amplitude do controle aumenta com a distância entre os modelos.

Uma vez que os modelos de referência  $N(s)$  e  $\Sigma(s)$  são partes explícitas do compensador, pequenos ajustes podem em geral ser feitos depois de terminado o projeto. Esta possibilidade pode ser útil em aplicações práticas nas quais ajustes finos são necessários durante o comissionamento do sistema de controle.

A formulação *mixed-sensitivity* da teoria de controle  $H_\infty$  foi usada no exemplo numérico para ilustrar a aplicação da metodologia. Entretanto, uma vez que as condições estão descritas como restrições sobre o diagrama de Bode do sistema, qualquer técnica de *loop-shaping* pode igualmente ser usada.

## AGRADECIMENTO

J. J. Da Cruz é grato ao CNPq pelo apoio financeiro parcial a esta pesquisa (Proc. No. 66.2015/1998-3).

## REFERÊNCIAS

- Athans, M. (1986). A Tutorial On The LQG/LTR Method. *Proc. American Control Conference*, Seattle, WA.
- Da Cruz, J. J. (1996). *Controle Robusto Multivariável*. Edusp, São Paulo, SP.
- Doyle, J. C. and Stein, G. (1981). Multivariable Feedback Design: Concepts for a Classical / Modern Synthesis. *IEEE Transactions on Automatic Control*, volume 26, pp. 4-16.
- Green, M. and Limebeer, D. J. N. (1995). *Linear Robust Control*. Prentice Hall, New Jersey.

- Helton, J. W. and Merino, O. (1998). *Classical Control Using  $H_\infty$  Methods*. SIAM, Philadelphia.
- Jonckheere, E. A. and Yu, G. R. (1999). Propulsion Control of Crippled Aircraft by  $H_\infty$  Model Matching. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, volume 7(2), pp. 142-159.
- Kwakernaak, H. and Sivan, R. (1970). *Linear Optimal Control Systems*. Wiley, New York.
- Kwakernaak, H. (1996). How Robust are  $H_\infty$ -Optimal Control Systems?, *Anais do XI Congresso Brasileiro de Automática*, São Paulo, pp. 25-36.
- Lee, H. P. and Hwang, H. Y. (1997). Design of Two-Degree-of-Freedom Robust Controllers for a Seeker Scan Loop System. *Int. J. Control.*, volume 66, pp. 517-537.
- Leonardi, F. and Da Cruz, J. J. (2002). Robust Model Tracking and 2-D Control Design. *Proc. of the 10th Mediterranean Conference on Control and Automation*, Lisbon.
- Liu, G. P. and Unbehauen, H. (1995). Robust Control of Multivariable Critical Systems. *Int. J. Systems SCI.*, volume 26, pp. 1907-1918.
- Liu, G. P., Duan, G. R. and Patton, R. J. (2000). Mixed Time and Frequency Domain Robust Eigenstructure Assignment. *Int. J. Systems Science.*, volume 31, pp. 63-71.
- Maciejowski, J. M. (1989). *Multivariable Feedback Design*. Addison Wesley, Wokingham.
- Moore, K. L. and Bhattacharyya, S. P. (1990). A Technique for Choosing Zero Locations for Minimal Overshoot. *IEEE Transactions on Automatic Control*, volume 35, pp. 577-580.
- Oya, H. and Hagino, K. (2002). Observer-Based Robust Control Giving Consideration to Transient Behavior for Linear Systems With Structures Uncertainties. *Int. J. Control.*, volume 75, pp. 1231-1240.
- Prempain, E. and Postlethwaite, I. (2001). Feedforward Control: a Full-Information Approach. *Automatica*, volume 37, pp. 17-28.
- Skogestad, S. and Postlethwaite, I. (1996). *Multivariable Feedback Control: Analysis and Design*. John Wiley & Sons.
- Vethecan, J. K. and Hill, R. D. (1998). On the Time-Domain Performance of Multivariable Systems in Response to Fixed Inputs. *Int. J. Control.*, volume 71, pp. 437-458.
- Zhou, K. and Doyle, J. C. (1998). *Essentials of Robust Control*. Prentice Hall, New Jersey.