PEDRO NUNES E O PROBLEMA HISTÓRICO DA COMPREENSÃO DA MEDIÇÃO DAS FRAÇÕES

Pedro Nunes and the historical problem of fractions measure understanding

Alexandre Medeiros[1]
Cleide Farias de Medeiros[2]
Francisco Nairon Monteiro Junior[3]

Resumo: Este texto enfoca a invenção histórica do Nônio, instrumento destinado a medir, com precisão, as frações em uma escala. Inventado por Pedro Nunes, em meio à problemática do desenvolvimento das grandes navegações portuguesas do século XVI, seu aperfeiçoamento por Clavius e seu desenvolvimento por Vernier, conduziu à criação do paquímetro. No ano de 2002 foram comemorados os 500 anos de nascimento do grande matemático que foi Pedro Nunes. Rever a forma de aparecimento do Nônio, entendendo o seu princípio de funcionamento, pode levar-nos a prestar uma justa homenagem a este importante personagem da história da Matemática. Para além da homenagem, esse resgate histórico pode dar-nos, também, uma idéia não apenas do funcionamento deste importante instrumento matemático, que é o paquímetro, como também, ilustrar a íntima ligação entre os desenvolvimentos científicos e a temática social que os cerca. Este resgate histórico propicia, ainda, o desvelar de um interessante modo de ilustrar a problemática educacional da representação das frações.

Unitermos: História na Educação Matemática, Nônio, Paquímetro, Pedro Nunes.

Abstract: *This text focuses on the invention of the Vernier, a very useful instrument in Engineering and used to measure fractions with great precision on a scale. Invented by Pedro Nunes at the time of the development of the great Portuguese navigations in the XVIth Century, its improvement by Clavius led to the development of the calliper by Vernier. In 2002 the 500th anniversary of the great Portuguese engineer Pedro Nunes was celebrated and his invention of the Vernier is remembered. Understanding the foundations of such a technological tool is a means of justifiably honouring him.. Beyond this honour, this historical study can give us an idea not only about the working of this important instrument but also serve as an illustration of the intimate relationship between scientific concepts and the social fabric around them. Such a historical study may also lead us to an interesting way to illustrate the educational problem of the representation of fractions.*

Keywords: *History in Mathematics Education, Vernier, Calliper, Pedro Nunes.*

Introdução

Pedro Nunes foi o maior matemático português do século XVI e é tido por muitos como o maior vulto da Ciência portuguesa em todos os tempos. Autêntico personagem renascentista, suas contribuições científicas foram muito amplas e inseridas em uma produção cultural ainda mais vasta, que incluiu até mesmo a poesia. Destacou-se, entretanto, principalmente como matemático, ao desenvolver as suas atividades como professor e como cosmógrafo real.

[1] *PhD (Centre for Studies in Science and Mathematics Education – University of Leeds). MSc (Feusp). Consultor científico da Scienco.*
[2] *PhD (Centre for Studies in Science and Mathematics Education – University of Leeds). Mestre em Psicologia da Educação (Pontifícia Universidade Católica de São Paulo). Professora do Departamento de Educação da Universidade Federal Rural de Pernambuco*
[3] *Mestre em ensino de Ciências (UFRPE). Professor do Departamento de Física e Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco*

Nascido em 1502, de origem judaica, Nunes dedicou-se, inicialmente, ao estudo e ao exercício da Medicina, tendo transitado da mesma para a Matemática. Detalhes biográficos um pouco mais consistentes, assim como uma discussão do valor educacional de sua obra matemática, podem ser encontrados em outros trabalhos (MARTYN, 1996; CARVALHO, 1996; MEDEIROS & MEDEIROS, 2002). Neste presente texto, interessa-nos, apenas, mostrar em maiores detalhes a inserção de Pedro Nunes na problemática da navegação e a forma como surgiu, historicamente, o problema da precisão das medições das frações ligado aos instrumentos então utilizados na Náutica. É neste contexto que podemos ressaltar a importância do trabalho instrumental matemático desenvolvido por Nunes e a seqüência do mesmo nas mãos de seu mais famoso discípulo, o jesuíta Chistopher Clavius (AZCONA, 1981, p. 160), e do matemático francês Pierre Vernier.

Pedro Nunes, a Problemática da Navegação Oceânica e a Invenção do Nônio

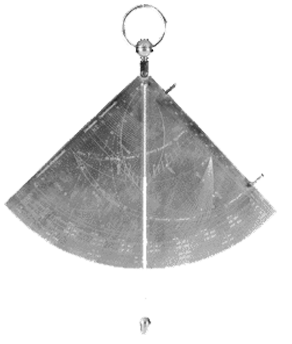
A produção científica de Pedro Nunes está, quase toda, voltada para os problemas da navegação oceânica, da determinação de rotas seguras e da conseqüente necessidade de orientação em alto mar (MARQUES, 1987; ALBUQUERQUE, 1990). Neste sentido, suas principais obras constaram tanto de traduções comentadas de alguns clássicos quanto de obras originais. As traduções ligadas à náutica, foram: o *Tratado da Esfera*, de Sacrobosco; a *Teoria do Sol e da Lua*, de Peurbach e a *Cosmografia, Livro Primeiro*, de Claudio Ptolomeu; todas elas feitas em 1537. Dentre suas obras originais, constam: o *Tratado sobre Certas Dúvidas da Navegação* (1537); o *Tratado em Defesa da Carta de Marear* (1537); o *De arte atque ratione navigandi* (1566 e 1573), o *De Crepusculis* (1542); o *De erratis Orontii Finei* (1546) e o *Libro de Algebra en Arithmetica y Geometría* (1567). As quatro primeiras obras são inteiramente conectadas com os problemas da náutica (VENTURA, 1985).

Além dos trabalhos teóricos realizados, Pedro Nunes inventou vários instrumentos matemáticos de navegação, dentre eles o *anel náutico* e o *instrumento das sombras*. Este último era um dispositivo engenhoso com o qual Nunes conseguia transferir as leituras das alturas do Sol, usualmente tomadas em uma escala vertical, para uma escala horizontal. Esses instrumentos aparecem em sua obra *Arte atque ratione navigandi libri duo* (1573), publicada em conjunto com a segunda edição do *De Crepusculis*, editado na Basiléia. De certo modo, o *Arte atque ratione navegandi* pode ser considerado como parte integrante, ou como uma extensão, do *De Crepusculis*.

O principal instrumento matemático descrito por Pedro Nunes naquele livro é o *Nônio*, cujo nome é uma simples corrutela de Nunes, em sua forma latinizada (Nonius). Os instrumentos desenvolvidos por Pedro Nunes objetivavam auxiliar a navegação no alto mar, claramente um tópico de grande importância em Portugal no século XVI, quando o controle do comércio marítimo era a principal fonte de riqueza daquele país. Neste sentido, Nunes foi um dos precursores da moderna navegação científica.

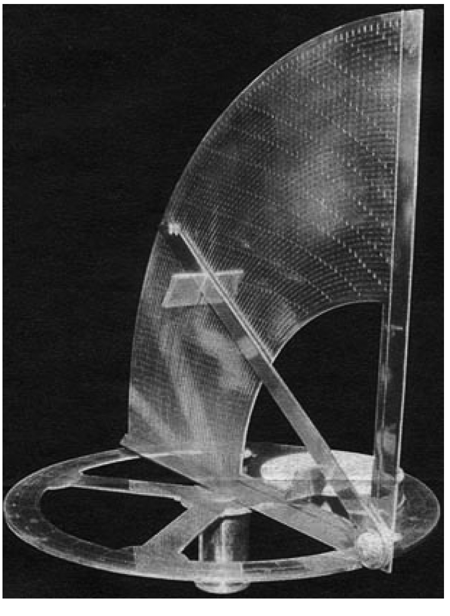
Desde o início do século XV, os portugueses praticavam a navegação orientando-se pelas posições das estrelas no firmamento. Para determinarem as alturas daqueles astros, (ângulos da linha de visada do astro com o horizonte), eles utilizaram, nas viagens oceânicas, dentre outros instrumentos, a Balestilha, o Quadrante e o Astrolábio. A Balestilha era um instrumento muito rudimentar em forma de T, de origem árabe, composto de um braço rígido sobre o qual deslizava um cursor. Era utilizado com o observador mirando diretamente as estrelas, ou de costas, com o auxílio de um pequeno espelho, para tomar a altura do Sol. Era, portanto, basicamente, um dispositivo de medições angulares, conforme mostram as figuras a seguir.

As medições angulares efetuadas com a Balestilha não eram precisas, pois o dispositivo era desprovido de qualquer escala graduada. Os ângulos eram obtidos, assim, por trigonometria, utilizando-se para isso as razões entre os lados dos triângulos formados no instrumento nas visadas dos astros observados. O Quadrante era um instrumento muito antigo utilizado pelos navegadores portugueses, cuja origem era mais remota que a do astrolábio. Ele era, basicamente, um dispositivo de madeira ou latão, em forma de um quarto de círculo, empregado para medir as alturas de astros.

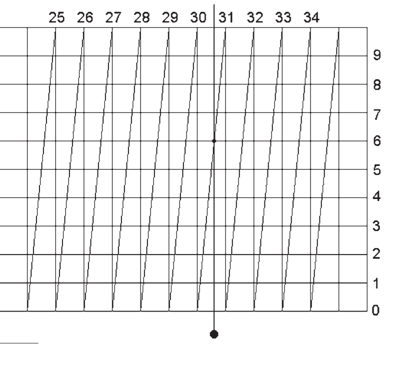


Tinha duas arestas retilíneas, uma das quais continha dois pequenos anteparos com minúsculos orifícios, através dos quais o observador visava o astro. Um fio de prumo era fixo no centro do arco e cruzava a escala graduada de 0º a 90º. O astro era visado pelo lado onde estavam marcados os 90º. A posição da linha de prumo indicava na graduação a altura do astro. O fato de conter uma escala graduada era uma vantagem do Quadrante sobre a Balestilha. O Astrolábio era um instrumento bem mais sofisticado, embora fosse, claramente, uma evolução do Quadrante. Ele era geralmente de bronze e tinha a forma de um círculo com uma trave móvel articulada em seu centro, denominada "*Alidade*". Funcionava baseado no mesmo princípio do Quadrante.

O instrumento era pendurado no dedo do observador por um anel e em seguida um certo astro era alinhado com a trave central móvel do instrumento (a Alidade) e o ângulo era determinado, também, com o auxílio de um fio de prumo que cruzava uma escala graduada. Esse dispositivo era, entretanto, bem mais sofisticado que o antigo Quadrante, pois incorporava, também, várias outras escalas circulares referentes ao Zodíaco, ao calendário, aos trópicos etc. O Astrolábio era, assim, algo como um Quadrante no qual era marcado um mapa do céu. Isso facilitava a obtenção dos resultados finais esperados, pois ele atuava, também, como uma espécie de *régua de cálculo* das posições estelares. Apesar de toda essa sofisticação, tanto o Astrolábio quanto o antigo Quadrante tinham um defeito comum: a imprecisão das medidas efetuadas nas suas escalas. O problema estava ligado à dificuldade de determinar as marcações fracionárias assinaladas pelo fio de prumo na escala graduada. As escalas destes instrumentos eram graduadas de 0º a 90º e os graus não eram subdivididos (REIS, 1999). Assim, as frações desses graus eram estimadas a olho e, portanto, o seu valor dependia de avaliação pessoal. Os valores medidos dependiam de estimativas do observador, face à impossibilidade prática das referidas escalas conterem subdivisões muito menores. Isso limitava drasticamente a precisão das medidas e, como conseqüência, a determinação das posições dos navios em alto mar. Em um país cuja riqueza provinha, quase que exclusivamente, do comércio marítimo, dispensa maiores comentários a compreensão da importância prática da solução do problema das leituras das subdivisões das escalas (as partes fracionárias) contidas naqueles instrumentos náuticos. Atento para o problema, Pedro Nunes tentou encontrar uma solução para o mesmo. Pedro Nunes apresenta em sua obra *De Crepusculis* um aparelho constituído de uma escala composta e que ele ensina com alguma minúcia a construir. Descrito na *Proposição III* da segunda parte do *De Crepusculis*, ele é uma peça acessória, graduada em graus, minutos e segundos, que Pedro Nunes pensou em juntar à linha do astrolábio com a finalidade de medir frações do grau. Ele se destinava, segundo o próprio Pedro Nunes, *às observações dos astros e com o qual se possam determinar rigorosamente as respectivas alturas*. O Pe. Francisco da Costa adaptaria essa idéia ao Quadrante, que, dotado de uma rede de círculos, foi por ele chamado de "Quadrante dos Quadrantes". Por ser Nunes o inventor do sistema, é natural que tenha vindo a ser denominado de Nônio (O'CONNOR.& ROBERTSON, 1998). Sua idéia da construção de uma segunda escala diagonal móvel (o Nônio) superposta à do Astrolábio ou a do Quadrante é muito engenhosa. A idéia corresponde, falando em termos psicológicos modernos, a uma *recentração* do problema (SCHEERER, 1963; MEDEIROS & MEDEIROS, 1999). Enquanto a solução parecia estar contida em uma subdivisão da escala de leitura praticamente impossível, Nunes introduz uma segunda escala com a finalidade de ampliar as leituras a serem efetuadas na primeira escala. Não se trata de nenhuma lente, trata-se de uma outra escala mesmo, colocada perpendicularmente ao Astrolábio. O princípio de funcionamento é muito simples, mas extremamente engenhoso. O referido dispositivo, o Nônio, disposto sobre um Astrolábio, é mostrado na figura ao lado. O seu fundamento matemático (baseado na semelhança de triângulos) é ilustrado na figura abaixo.



As leituras das subdivisões são feitas, agora, sobre a escala do Nônio, perpendicular ao Astrolábio. Assim fazendo, a marcação fica mais simples de ser efetuada, pois a leitura é "ampliada" por uma semelhança de triângulos, tornada mais clara na figura ao lado. Olhando-se para o fio de prumo da figura, percebe-se que o mesmo intercepta a escala horizontal do Astrolábio em um valor entre as marcações 30 e 31. Mas quanto,



mais precisamente, seria a parte fracionária da medida efetuada? Seria 30,5 ou 30,6, por exemplo? O cruzamento das linhas traçadas diagonalmente na figura entre duas escalas horizontais idênticas do Astrolábio, interceptam-se perpendicularmente com as projeções da escala vertical do Nônio fornecendo uma resposta bem mais precisa, no exemplo, 30,6. Eis, portanto, exibido o simples e engenhoso princípio de funcionamento do Nônio de Pedro Nunes. Algumas observações, entretanto, precisam ser feitas. A primeira é que, apesar do conceito da nova escala diagonal móvel ser realmente algo simples e revolucionário, ele já havia sido proposto, independentemente, pelo astrônomo árabe da Idade Média Levi ben Gerson (1288-1344). Entretanto, essa solução de ben Gerson foi descoberta recentemente e é digno de crédito que Pedro Nunes, de fato, não a conhecesse e que tenha chegado à mesma, ainda que tardiamente, de forma completamente independente (REIS, 1999). Se assim não fosse, se esse conhecimento já estivesse facilmente disponível, como justificar a busca incessante de uma solução para o problema?

Há de se salientar, ainda, que apesar da escala móvel encerrar um conceito revolucionário, ela não se mostrou, imediatamente útil, devido ao fato de conter, em verdade, 45 escalas paralelas à principal. Apesar de constituir-se em uma solução engenhosa, tornou-se de difícil utilização. O seu grande mérito foi o de desencadear o estudo do tema, o que veio a conduzir à solução apresentada, em 1631, por Pierre Vernier, com o seu setor móvel (REIS, 1999). A determinação mais precisa da posição em alto mar não teve, em verdade, uma solução prática astronômica imediata. Ela foi obtida, já no século XVIII, por outro caminho bem diverso: com a construção do cronômetro de precisão de Harrison, que possibilitou a comparação entre as marcações de relógios em terra e em alto-mar. Esse, entretanto, é um tópico que foge ao escopo do presente artigo. Daquilo que nos interessa, no momento, cumpre assinalar, mais uma vez, a engenhosidade da proposição da escala móvel e seus decorrentes desenvolvimentos por Clavius e por Vernier. Antes, porém, de passarmos para a análise de tais aperfeiçoamentos, cumpre notar que se o Nônio não mostrou de imediato todo o seu valor em alto-mar, como esperava Pedro Nunes, serviu exemplarmente para melhorar as medições angulares das observações feitas em terra. Um exemplo desta importante contribuição foi a utilização do Nônio por Tycho Brahe, na execução das mais precisas observações astronômicas feitas até a sua época. Tycho credita explicitamente a autoria do referido instrumento a Pedro Nunes. Assim, ainda que de duas formas indiretas, a invenção do Nônio veio a contribuir decisivamente com o avanço da ciência. Em que pese a sua importância, apenas um único Nônio, realmente antigo, é conhecido nos dias atuais e encontra-se guardado no Museu de História da Ciência de Florença.

Christopher Clavius, Pierre Vernier e o Desenvolvimento do Nônio

Chistopher Clavius (1538 – 1612), matemático jesuíta alemão de grande talento, foi aluno de Pedro Nunes na Universidade de Coimbra (AZCONA, *id ibid*). Ele simplificou o Nônio substituindo as 45 escalas do instrumento original por uma única escala móvel, dando a forma que influenciaria os trabalhos de Vernier (CRATO, 2002).

Pierre Vernier (1584 – 1638) foi um geômetra e fabricante de instrumentos científicos francês. Apesar de francês, foi funcionário do Rei da Espanha nos Países Baixos. Seu pai, um engenheiro e advogado da chancelaria do governo espanhol, mostrou-lhe os trabalhos de Clavius e Tycho Brahe. Foi por meio da leitura dos textos desses dois cientistas que Vernier veio a tomar contato com a idéia do Nônio, criado por Pedro Nunes. Tornou-se engenheiro do exército espanhol na Holanda, tendo trabalhado na fortificação de várias cidades. Trabalhou, assim como vários matemáticos da sua época, em cartografia, fazendo mapas e desenvolvendo

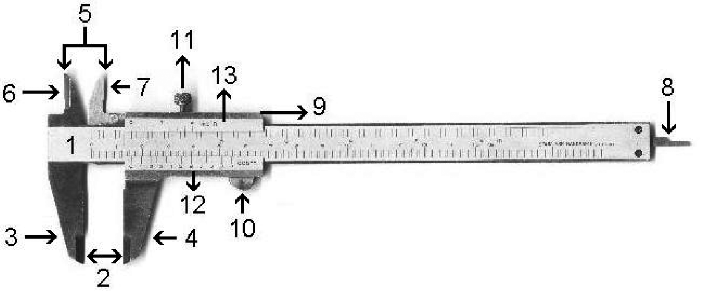
Ciência & Educação, v. 10, n. 3, p. 559-570, 2004

instrumentos de agrimensura. Um dos instrumentos que criou, o *calibrador*, está diretamente baseado no princípio de funcionamento do Nônio, na idéia do uso de uma escala auxiliar móvel para facilitar a leitura das frações. Apresentado em 1631, na sua famosa publicação *La Construction, l'usage, et les propriétés du quadrant nouveau de mathématiques*, o *calibrador* de Vernier trata-se de um instrumento para medir comprimentos com precisão, fazendo uso de duas réguas graduadas que deslizam em paralelo, uma das quais contém subdivisões precisas de uma divisão da outra régua. Este *calibrador* é conhecido também como paquímetro. Na aparência, o Nônio de Pedro Nunes e o *calibrador* de Vernier são instrumentos muito diferentes. O Nônio de Nunes, como já descrito acima, é um dispositivo móvel em forma de quadrante. O *calibrador* de Vernier é composto de duas réguas com duas escalas numa proporção que depende da precisão do instrumento, em que a parte fracionária encontra-se no ponto de interseção das graduações. Apesar de terem formatos consideravelmente distintos, o princípio que fundamenta os dois instrumentos é exatamente o mesmo: a idéia da escala auxiliar móvel, que no *calibrador* de Vernier é denominado também de Nônio ou, alternativamente, de Vernier. Ele permite medir frações das divisões da escala contida na régua principal. A graduação da régua principal é feita em milímetros no corpo da peça, como em uma régua normal. A graduação da parte deslizante, ou Nônio, contém 20 subdivisões quando se trata, por exemplo, de um instrumento para medir com uma aproximação de 0,05 mm, como é o caso do paquímetro abaixo descrito. Neste caso, podemos realizar medições em múltiplos de 5 centésimos de milímetro.

Tendo em mente o problema da medição das frações, é bastante ilustrativo observar os princípios gerais que regem o funcionamento deste instrumento e reconhecer nele o conceito criado com o dispositivo de Pedro Nunes. Além disso, não é tão simples perceber de imediato o fundamento matemático contido no funcionamento do paquímetro, pois o mesmo encontra-se expresso nas relações numéricas entre as duas escalas, sem qualquer apoio geométrico para o pensamento. Neste sentido, o conhecimento do Nônio de Pedro Nunes, pode constituir-se em uma espécie de trampolim geométrico para a compreensão do princípio matemático subjacente ao funcionamento do paquímetro.

Determinação de uma Medida Fracionária Utilizando o Paquímetro

Antes de qualquer discussão acerca da problemática acima descrita, é necessário conhecer o paquímetro como um instrumento matemático de medição de pequenos comprimentos, o qual é composto de diversas partes. Na figura abaixo, temos a descrição destas partes, bem como suas funções no instrumento.



1 –> **<u>Régua principal:</u>** é nela que se encontram as graduações em milímetros (na sua parte inferior) e em polegadas (na sua parte superior), utilizadas nas diversas medições que podem ser feitas com o instrumento.

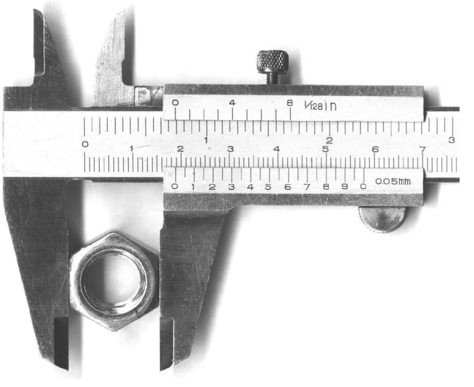
2 –> **Faces para medição externa:** servem para fazer medições em partes externas de peças como, por exemplo, espessuras de varões de metal.
3 –> **Bico fixo:** é solidário à régua principal e compõe uma das faces para medição externa.
4 –> **Bico móvel:** é solidário ao cursor e serve para ajustar-se à dimensão da peça a ser medida.
5 –> **Faces para medição interna:** servem para fazer medições em partes internas de peças como, por exemplo, em espessuras de orifícios.
6 –> **Orelha fixa:** é solidária à régua principal e compõe uma das faces para medição interna.
7 –> **Orelha móvel:** é solidária ao cursor e serve para ajustar-se à parte interna da peça a ser medida.
8 –> **Vareta de profundidade:** por meio do movimento do cursor, sai e entra num determinado orifício, permitindo a medição de sua profundidade.
9 –> **Cursor:** é composto pelo bico móvel, a orelha móvel, o impulsor e o parafuso de fixação; é no cursor que estão impressas as escalas do Vernier (ou Nônio) em milímetros e em polegadas.
10 –> **Impulsor:** serve para movimentar o cursor, manipulado pelo polegar direito, ajustando o paquímetro à dimensão a ser medida numa peça.
11 –> **Parafuso de fixação:** Serve para prender o cursor após a ajustagem do paquímetro à dimensão a ser medida, afim de que a leitura possa ser feita sem que haja alguma movimentação acidental do cursor, o que ocasionaria um erro na medição.
12 –> **Nônio (ou Vernier) em milímetros:** serve para determinar as frações de milímetro de uma determinada medição. No caso do paquímetro da figura, o Vernier permite a medição de 5 em 5 centésimos de milímetro. Porém, existem paquímetros mais precisos que permitem, por exemplo, medições de 1 em 1 centésimo de milímetros. Contudo, para medições mais precisas ainda, utiliza-se um outro instrumento, chamado micrômetro, o qual possui também um Vernier cujas subdivisões do milímetro encontram-se nos milésimos de milímetros, ou seja, 1/1000 mm.
13 –> **Nônio (ou Vernier) em polegadas:** serve para determinar as frações de polegada de uma determinada medição. Na maior parte dos paquímetros, tal fração de medição é de 1/128”.[4]

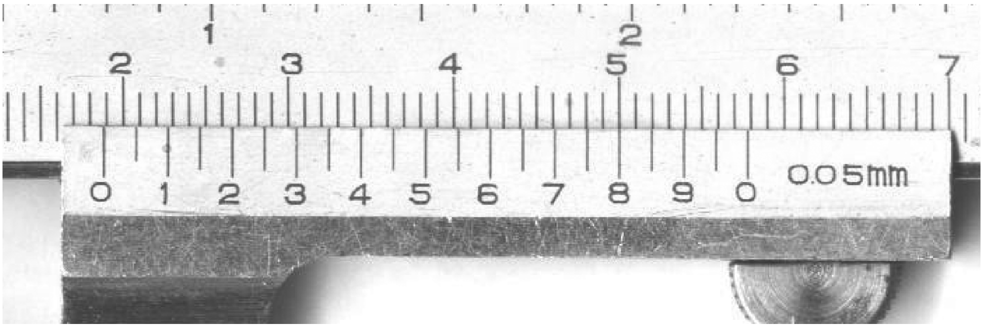
Como podemos ver na descrição acima, o paquímetro permite que uma medição possa ser expressa tanto em milímetros, cuja subdivisão é feita em frações decimais, como também em polegadas, cuja subdivisão é feita, por sua vez, em frações de múltiplos de 1/128 da polegada. Contudo, analisaremos, por uma questão de objetividade, apenas o Vernier, que expressa as medições em milímetros.

Antes de analisarmos e entendermos os princípios matemáticos de funcionamento do Vernier de um paquímetro e como a âncora geométrica foi feita na transposição do Nônio de Pedro Nunes para o Vernier, vamos entender como se procede para se fazer uma medição utilizando este instrumento.

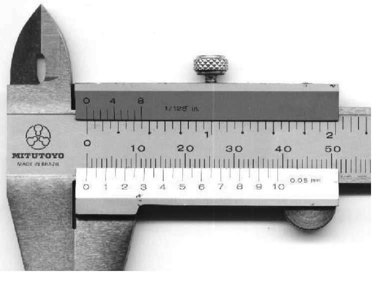
4 O símbolo " é o mais usado para se expressar uma medida em polegada. Porém, tal unidade de medida é também corriqueiramente representada pelo símbolo Pol. Em alguns casos usa-se ainda a breviatura do termo inglês Inch”, ou seja “in”, como se pode ver na escala do paquímetro.

A fim de entender com maior clareza como se procede, na prática, para se fazer a leitura de medições num paquímetro, iremos tomar duas situações, sendo a primeira uma medição em milímetros e a segunda, uma medição em polegadas. Na primeira situação, tomemos a medição externa, em milímetros, da distância entre duas faces opostas de uma porca sextavada, como mostra o detalhe da fotografia ao lado. Como podemos ver na marcação do zero do Vernier de milímetros, seu traço encontra-se situado entre os traços 18 milímetros e 19 milímetros da régua do paquímetro. Assim, tal medida encontra-se entre 18 e 19 milímetros. Podemos concluir que esta medida não é exata e, assim, podemos, por meio do Vernier, determinar sua parte fracionária. Assim, devemos determinar qual dentre os 20 traços do Vernier está em coincidência com algum dos traços da régua em milímetros do paquímetro. A figura abaixo mostra o detalhe ampliado do posicionamento do Vernier na régua do paquímetro na medição do diâmetro da porca sextavada da figura anterior.



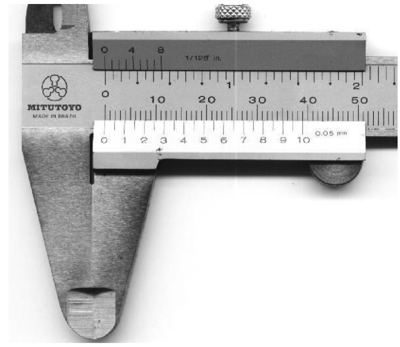


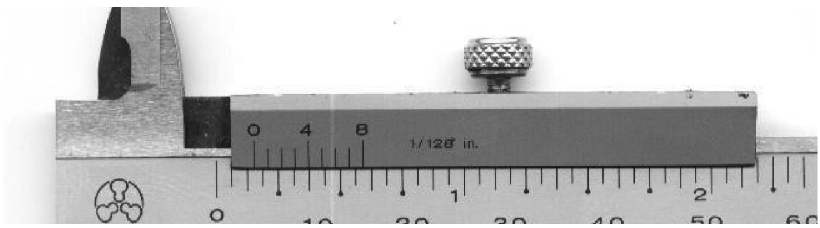
Observando nesta fotografia a escala do Vernier montada sobre o cursor do paquímetro, podemos verificar que o traço de número 8 da escala abaixo (Nônio) é o único que coincide com algum na escala acima (régua principal). Mas o que isso significa? Qual a relação entre esse número e a parte fracionária da medida? Sabemos que cada um dos 20 intervalos do Vernier equivale a $\frac{1}{20}$ do milímetro, ou seja, $\frac{1}{20}$ mm = 0,05 mm que é a precisão do paquímetro utilizado. Assim, podemos concluir que a escala do Vernier, a qual divide um milímetro em 20 partes iguais, é de $\frac{1}{20}$ em $\frac{1}{20}$ mm, ou seja, de 0,05 em 0,05 mm. Desta forma, partindo do zero do Vernier, até o traço 8 temos 16 traços, ou seja 16 x $\frac{1}{20}$ mm = 0,80 mm. Logo, a medida procurada é de 18,80 mm.



Geralmente, a precisão de um paquímetro vem impressa no cursor. Como podemos ver na fotografia acima, a precisão do paquímetro utilizado é de 0,05 mm. Assim, cada traço do Vernier equivale a $\frac{1}{20}$ mm (ou 0,05 mm) que multiplicado por 20 traços (ou 20 intervalos) perfaz 1,00mm.

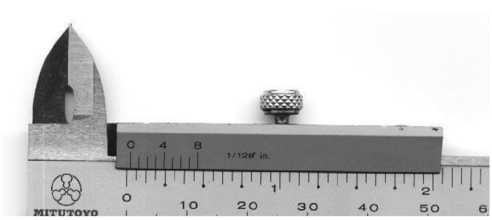
Na escala em polegada, temos uma divisão da unidade em 16 partes, como podemos ver na fotografia ao lado. Desta forma, as medições da régua se dão de $\frac{1}{16}$ em $\frac{1}{16}$ polegadas. O Nônio, por sua vez, possui 8 subdivisões. Portanto, permite uma precisão de $\frac{1}{128}$ polegadas. Para se realizar uma medição em polegadas, o procedimento é muito semelhante ao utilizado na medição em milímetros vista anteriormente. Como podemos ver na fotografia ao lado, enquanto o Nônio da escala em milímetros possui 20 subdivisões, conferindo a esta escala uma precisão de $\frac{1}{20}$ mm = 0,05 mm, o Nônio em polegadas possui 8 subdivisões, conferindo a esta escala, por sua vez, uma precisão de $\frac{^1/_{16''}}{8} = \frac{1''}{128}$ mm, uma vez que a escala em polegadas é dividida em frações de $\frac{1}{16}$ de polegada. Tomemos, por exemplo, a abertura aleatória do paquímetro mostrada na figura abaixo.





De acordo com a marcação zero do Nônio em polegadas, a medida se encontra entre $\frac{2}{16} = \frac{1}{8}$ e $\frac{3}{16}$. Logo o valor da medição será $\frac{1}{8}$ adicionado à parte fracionária determinada pelo Nônio. Tal parte é calculada, determinando-se visualmente qual traço do Nônio se encontra alinhado com algum traço da régua. Observando-se a figura acima, vemos que se trata do quarto traço após o zero. Logo a parte fracionária a ser somada à medida da régua será $4x\,\frac{1}{128} = \frac{1}{32}$. Teremos então que o valor da medição, em polegadas, será $\frac{1}{8} + \frac{1}{32} = \frac{5}{32}$.

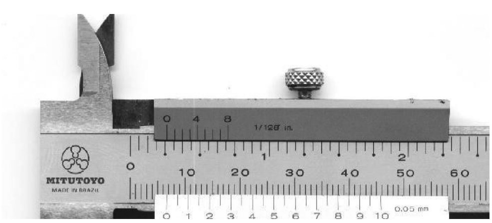
A seguir temos mais dois exemplos, nos quais o paquímetro foi aberto aleatoriamente.



Marcação da régua: 0”

Marcação do Nônio: $3x\,\frac{1}{128} = \frac{3}{128''}$

Valor da medição: $0 + \frac{3}{128} = \frac{3}{128''}$



Marcação da régua: $\frac{4}{16} = \frac{1}{4''}$

Marcação do Nônio: $2x\,\frac{1}{128} = \frac{1}{64''}$

Valor da medição: $\frac{1}{4} + \frac{1}{64''}\ \ \frac{17}{64''}$

Princípio Matemático de Funcionamento do Vernier

Mas por que há sempre a coincidência de apenas um dos 20 traços posteriores ao traço de valor 0,0 do Vernier com um dos traços da régua principal? Por outro lado, por que a parte fracionária da medida pode ser extraída por meio do procedimento apresentado acima? Na verdade, o princípio aí embutido é muito semelhante ao princípio de funcionamento do

Nônio. Trata-se de uma forma de dividir linearmente uma unidade de medida num certo número de unidades de um submúltiplo. Observe na figura anterior que os 20 intervalos do Vernier cobrem 39 intervalos na régua do paquímetro. É fácil observar isso, zerando o paquímetro e observando o último traço do Vernier. Notaremos que este se alinha com o traço da régua de valor 3,9 mm, ou seja 39 traços a partir o zero da régua. Podemos observar ainda que a defasagem entre cada um dos traços do Vernier com o mais próximo da régua principal vai progredindo de uma quantidade de $\frac{1}{20}$ mm, observados a partir do traço zero do Vernier. Desta forma, quando movimentamos o cursor, partindo do zero e percorrendo um intervalo de 0,05 milímetros, acontece o alinhamento do primeiro traço do Vernier após o traço zero. Quando movimentamos o cursor percorrendo um intervalo de 0,1 mm, acontece o alinhamento do segundo traço, defasando o primeiro em 0,05 mm e assim por diante e subsequentemente até que, finalmente, quando movimentamos o cursor, percorrendo um intervalo de 1 mm há o alinhamento do vigésimo traço do Vernier com o quadragésimo traço da régua a partir do traço zero. Simultaneamente, há novamente o alinhamento do traço zero do Vernier, agora com o traço 1 mm da régua, reiniciando tudo novamente.

O Nônio e a Concretização do Conceito de Frações Equivalentes

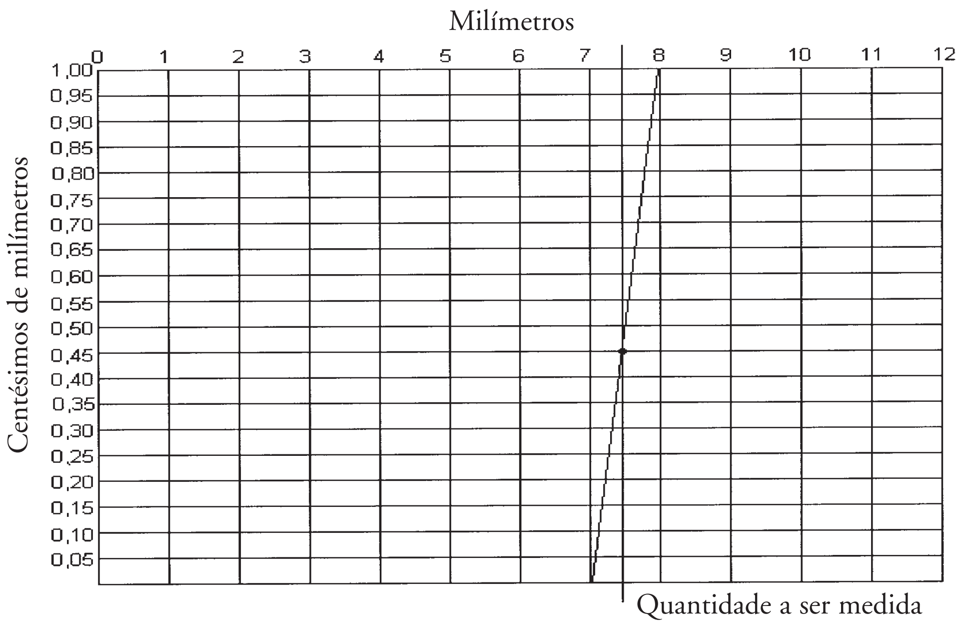
Muitas são as ligações que podem ser feitas entre a teoria e a prática que, no nosso caso, estão corporificadas respectivamente, de um lado, no ensino da geometria e da aritmética e, de outro, na utilização de um importante instrumento de medição. Dentre tais ligações que podem constituir-se em estratégias de ensino em sala de aula de tais conteúdos da matemática, podemos citar algumas a título de reflexão da prática educativa no ensino da matemática que, na maioria de nossas escolas, é caracterizada por um método livresco e predominantemente abstrato.

O primeiro ponto que queremos levantar diz respeito ao ensino das frações equivalentes. Tal conceito, embora simples, comparado a outros conceitos da própria aritmética, é apresentado dissecado de sua importância prática. Como base para se entender, por exemplo, as medições feitas num paquímetro, tal conceito é fundamental. Tomemos como exemplo as medidas das brocas em polegadas. Neste caso, todas as brocas possuem diâmetros que são múltiplos de $\frac{1}{128"}$, porém não são expressos sempre com este mesmo denominador. Antes disto, lançamos mão do uso das frações equivalentes. Uma broca de $\frac{1}{8}$, por exemplo, equivaleria a uma medida de $\frac{16}{128"}$. Contudo a medida de tal broca não vem expressa desta forma e sim, simplesmente $\frac{1}{8}$ da polegada. O quadro abaixo mostra, a título ilustrativo, as medidas de algumas brocas de uso comum, de $\frac{1}{16"}$ a 1", bem como suas frações equivalentes de medida.

BROCA 1					**1/16"**	2/32"	4/64"	8/128"
BROCA 2				**1,8"**	2/16"	4/32"	8/64"	16/128"
BROCA 3					**3/16"**	6/32"	12/64"	24/128"
BROCA 4			**1/4"**	2/8"	4/16"	8/32"	16/64"	32/128"
BROCA 5					**5/16"**	10/32"	20/64"	40/128"
BROCA 6				**3/8"**	6/16"	12/32"	24/64"	48/128"
BROCA 7					**7/16"**	14/32"	28/64"	56/128"
BROCA 8		**1/2"**	2/4"	4/8"	8/16"	16/32"	32/64"	64/128"
BROCA 9					**9/16"**	18/32"	36/64"	72/128"
BROCA 10				**5/8"**	10/16"	20/32"	40/64"	80/128"
BROCA 11					**11/16"**	22/32"	44/64"	88/128"
BROCA 12			**3/4"**	6/8"	12/16"	24/32"	48/64"	96/128"
BROCA 13					**13/16"**	26/32"	52/64"	104/128"

BROCA 14				**7/8"**	14/16"	28/32"	56/64"	112/128"
BROCA 15					**15/16"**	30/32"	60/64"	120/128"
BROCA 16	**1"**	2/2"	4/4"	8/8"	16/16"	32/32"	64/64"	128/128"

Um segundo ponto que queremos ressaltar diz respeito à ligação entre a aritmética e a geometria. Podemos re-engendrar o princípio de funcionamento do Vernier, partindo da conceituação geométrica do Nônio de Pedro Nunes, desenvolvendo uma forma geométrica de explicar o funcionamento do paquímetro. Tal exercício constitui-se, ao nosso ver, numa interessante forma de abordagem dos conteúdos relacionados ao estudo das relações lineares. Tomemos, como exemplo, o paquímetro anteriormente descrito. Vimos que em tal instrumento o milímetro é dividido em 20 partes iguais de 0,05 mm. Observe que seria praticamente impossível colocar as 20 marcações dos cinco centésimos de milímetro entre dois traços de milímetro. É por isso que se faz uso de uma escala auxiliar, onde a distância física entre dois traços referentes a cinco centésimos de milímetro é bem maior do que esta quantidade. Assim, o Vernier é um mecanismo que torna possível a construção na prática de uma tal escala auxiliar ampliada. A figura abaixo representa geometricamente a idéia de uma escala auxiliar contida no Vernier. Imaginemos que o traço vertical entre o 7 e o 8 milímetros da escala horizontal da figura representasse o resultado de uma medição. Para determinar a parte fracionária, relacionamos esta escala horizontal a uma escala vertical, dividida de 5 em 5 centésimos de milímetro, por meio do triângulo formado pelo traço oblíquo. Tal relação é conseqüência da semelhança de triângulos, o que torna possível determinar a proporcionalidade envolvida nestas escalas. Observe que o traço vertical da medida corta o traço oblíquo na quantidade 0,45. Logo, esta seria a parte fracionária da medida, a qual seria 7,45 mm.



Conclusões

A compreensão do Nônio de Pedro Nunes permite, assim, criar uma imagem geométrica do funcionamento do paquímetro. Esta imagem geométrica é caracterizada pelo gráfico da função entre as escalas do paquímetro acima mostradas. O gráfico é, então, apenas uma representação por meio de uma função linear que permite determinar a parte fracionária de uma certa medida. Assim, enquanto no Nônio a imagem geométrica é realmente concreta, no paquímetro esta imagem geométrica é apenas aquela contida no gráfico acima mostrado, não existindo fisicamente no instrumento. Contudo, essa representação geométrica torna mais claro o princípio de funcionamento da escala auxiliar do Vernier. Por outro lado, tal esquema mostra que é possível, por meio de experiências concretas, apresentar os conteúdos matemáticos das frações equivalentes em sala de aula. Pelo exposto, o resgate histórico da construção dessas idéias pode ajudar na compreensão da transição de conteúdos oriundos da Astronomia para o ensino de frações.

Referências

ALBUQUERQUE, L. Pedro Nunes e os Homens do Mar do seu Tempo. **Ler História**, Lisboa, n. 19, p. 5-18, 1990.

CARVALHO, R. **História do ensino em Portugal**. Lisboa: F. C. Gulbenkian, 1996.

CRATO, N. **A física nos tempos de Pombal**. Lisboa: Instituto Camões, 2002.

GILLISPIE, C. C. (Ed.) **Dictionary of Scientific Biography**. New York: Scribner, 1981.

MARQUES, A. O Dr. Pedro Nunes, expoente máximo da ciência portuguesa na época dos descobrimentos. **Revista do Clube Naval**, Rio de Janeiro, ano 97, n. 276, 1987.

MARTYN, J. **Pedro Nunes** *(1502-1578)*: his lost algebra and other discoveries. New York: Peter Lang Publishing, 1996.

MEDEIROS, C. & MEDEIROS, A. Considerações sobre os contextos da descoberta e da justificativa na álgebra de Pedro Nunes. **Episteme**, Porto Alegre, n.15, ago./dez. 2002.

_______, A. Investigando fixações e harmonias ilusórias na aprendizagem da ciência. In: Encontro de Pesquisa em Educação em Ciências, 2, 1999. Valinhos. **Atas...** Valinhos, [s.n.], 1999.

O'CONNOR, J. & ROBERTSON, E. **Pedro Nunes Salaciense**. St. Andrews: University of St Andrews, 1998.

REIS, A. O Nônio de Pedro Nunes. **Oceanos**, Lisboa, v. 38, p. 67-79, abr./jun. 1999.

REIS, A. O Nônio de Pedro Nunes. In: QUEIRÓ, J. F. (Org.). **Sessão evocativa dos 500 anos do nascimento de Pedro Nunes**. Lisboa: FCTUC, 2002.
Disponível em: http://www.mat.uc.pt/enspam02/evocativa.htm. Acesso em: 2 de abril de 2003.

SCHEERER, M. Problem Solving. **Scientific American**, New York, abr. 1963.

VENTURA, M. **Vida e obra de Pedro Nunes**. Lisboa: Instituto de Cultura e Língua Portuguesa, 1985.