Desenvolvendo Flexibilidade no Cálculo Mental

Elisabeth Rathgeb-Schnierer[I]
Michael G. Green[II]

[I]Kassel University (UniKassel), Kassel/HE – Germany
[II]University of North Carolina at Charlotte (UNC Charlotte), Charlotte/NC – United States of America

RESUMO – Desenvolvendo Flexibilidade no Cálculo Mental. A flexibilidade na realização de cálculos mentais tornou-se um foco importante para os educadores em matemática, com pesquisas surgindo nas últimas duas décadas. Resultados de pesquisas contemporâneas oferecem sólido suporte para o desenvolvimento da flexibilidade mental no ensino fundamental. Este estudo concentra-se em três temas inter-relacionados: (1) um modelo de cálculo mental que permite o estudo de processos flexíveis de resolução; (2) uma revisão das definições de flexibilidade e uma síntese da pesquisa reportada; e (3) um exame dos pré-requisitos para promover a flexibilidade mental. A abordagem denominada *Zahlenblickschulung* é apresentada com exemplos de atividades que incentivam os alunos a classificar operações numéricas e a raciocinar sobre a classificação.
Palavras-chave: **Flexibilidade. Cálculo Mental. Abordagem para promover a flexibilidade. Ensino fundamental.**

ABSTRACT – Developing Flexibility in Mental Calculation. Flexibility in performing mental calculations has become an important focus for mathematics educators, with research surging over the past two decades. Contemporary research results lends strong support for the development of mental flexibility in elementary classrooms. This report focuses on three interrelated themes: (1) a model of mental calculation that allows the study of flexible solution processes; (2) a review of definitions of flexibility and summary of reported research; and (3) an examination of the prerequisites for promoting mental flexibility. The approach termed *Zahlenblickschulung* is introduced with examples of activities that encourage students to sort numerical problems and reason about the sorting.
Keywords: **Flexibility. Mental Calculation. Approach to Foster Flexibility. Elementary Classroom.**

http://dx.doi.org/10.1590/2175-623687078

Introdução

> A ênfase no ensino de aritmética transformou-se da educação de calculadoras humanas disciplinadas para o desenvolvimento das habilidades das crianças como solucionadoras flexíveis de problemas (Anghileri, 2001, p. 79).

Nas últimas décadas, importantes pesquisas em ensino de matemática têm visado identificar e compreender as técnicas dos alunos para realizar a adição e a subtração mentais. Nesse contexto, a capacidade dos alunos resolverem operações[1] aritméticas multidígitos, sem usarem cálculos algorítmicos com papel e lápis, tornou-se alvo crescente de investigação entre os pesquisadores (ver, por exemplo, Blöte; Klein; Beishuizen, 2000; Heirdsfield; Cooper, 2004; Rathgeb-Schnierer, 2006; Threlfall, 2009).

No início do século XXI, o *National Council of Teachers of Mathematics* [Conselho Nacional de Professores de Matemática] – *NCTM* – (National..., 2000) argumentou que os alunos deveriam ser capazes de usar uma ampla variedade de estratégias de resolução de operações e que deveriam ser capazes de ajustar estratégias conhecidas bem como de inventar novas. Fundamental para o uso eficaz de estratégias mentais é a flexibilidade cognitiva, uma atitude mental que é ao mesmo tempo adaptável e ágil. Nesse contexto, a década passada apresentou ganhos significativos em nossa compreensão dos processos mentais que contribuem para a flexibilidade mental ou que a complementam (por exemplo, Benz, 2007; Gruessing; Schwabe; Heinze; Lipowsky, 2013; Rathgeb-Schnierer; Green, 2013; Selter, 2009; Threlfall, 2009). Ademais, novas abordagens têm sido inventadas para a condução de pesquisas empíricas sobre estratégias e procedimentos mentalmente flexíveis (por exemplo, Rathgeb-Schnierer; Green, 2013; Threlfall, 2009; Torbeyns; De Smedt; Ghesquière; Verschaffel, 2009).

O notável tratado de Polya (1952) sobre resolução de problemas pressagiava muito do atual estado da pedagogia matemática, o que mais pressupõe do que prova uma superioridade natural da flexibilidade cognitiva *vis-à-vis* a rigidez em uma situação em que ambas as atitudes mentais podem levar a uma resolução lógica, correta e eficiente. No entanto, somente a mente flexível pode imbuir a resolução de problemas simples com significados profundos e conexões que transcendem os cálculos algorítmicos mecânicos desempenhados passo a passo. Por outro lado, é ainda mais vantajoso ter uma atitude flexível bem desenvolvida quando confrontamos problemas do mundo real, que muitas vezes tendem a ser mais complicados, pois envolvem novidade, circunstâncias mal estruturadas e circunstâncias estruturadas de maneira complexa, e situações multidimensionais. Neste artigo, examinamos processos de cálculo mental, avaliamos definições publicadas de flexibilidade em suas semelhanças e diferenças, resumimos a pesquisa relatada, e sugerimos estratégias pedagógicas para promover a flexibilidade mental no ensino fundamental.

Cálculo Mental

Cálculo mental significa resolver operações aritméticas (adição, subtração, multiplicação e divisão) mentalmente sem usar um procedimento padrão escrito. Os procedimentos padrão escritos concentram-se no cálculo com componentes únicos (as unidades, as dezenas, as centenas, etc.); eles exigem o conhecimento de fatos básicos e o conhecimento procedimental do algoritmo padrão apropriado. Em contraste, o cálculo mental, especialmente com números multidígitos, é mais complexo, pois requer que se lide com números inteiros (Krauthausen, 1993). Em tal contexto, é necessário um profundo entendimento de números, de operações e de suas relações, além do conhecimento de fatos básicos e de famílias de fatos (Heirdsfield; Cooper, 2004; Threlfall, 2002).

Várias estratégias de cálculo mental para adição e subtração de multidígitos têm sido formalmente categorizadas, com distintos nomes e em distintas quantidades de categorias (ver, por exemplo, Carpenter; Franke; Jacobs; Fennema, 1997; Fuson; Wearne; Heibert; Murray; Humano; Oliver; Carpenter; Fennema, 1997; Klein; Beishuizen; Treffers, 1998; Thompson, 1999; Threlfall, 2002). Os critérios básicos para classificar estratégias de cálculo mental são semelhantes em todos os autores, e dizem respeito a elementos básicos de divisão de números em dezenas e em unidades (tanto para vários números quanto para apenas um número), arredondamento e compensação. Uma abordagem típica pode ser encontrada em Selter (2000), que descreveu seis estratégias principais para adição e subtração mental (ver Tabela 1).

- Estratégia de salto: o primeiro passo desta estratégia caracteriza-se por manter a primeira parcela, ou o minuendo, e dividir a segunda parcela, ou o subtraendo. No segundo passo, os números divididos são sucessivamente adicionados ou subtraídos.
- Estratégia de divisão: essa estratégia caracteriza-se pela divisão dos dois números do problema e pela adição ou subtração das unidades separadamente. Quanto à adição, essa estratégia fornece uma simplificação efetiva de uma operação multidígitos complexa. Quanto à subtração, também é uma simplificação, mas apenas no caso de operações que não exijam reagrupamento.
- Mescla de divisão e de salto: essa estratégia representa uma mescla de ambas as estratégias descritas acima.
- Estratégia de compensação: nessa estratégia, um número é arredondado para transformar a operação em uma mais fácil. Subsequentemente, o resultado é compensado pelo fator de arredondamento.
- Estratégia de simplificação: a operação é modificada sem alterar o resultado. Para a adição, isso significa alterar as duas parcelas de maneira oposta. Em uma operação de subtração, o minuendo e o subtraendo são modificados da mesma maneira.
- Adição indireta: essa estratégia de subtração recorre à soma do subtraendo até que se alcance o minuendo. A estratégia é muito eficaz, especialmente se minuendo e subtraendo forem próximos (por exemplo, 72-69, 69 +3 = 72).

Tabela 1 – Estratégias para Adição e Subtração Mental

	Adição 56 + 38	Subtração 91 - 46
Estratégia de salto	56 + 30; 86 + 8	91 - 40; 51 - 6
Estratégia de divisão	50 + 30; 6 + 8; 80 + 14	90 - 40; 1 - 6
Mescla de divisão e salto	50 + 30; 86 + 8	90 - 40; 51 - 6
Estratégia de compensação	56 + 38; 56 + 40; 96 - 2	91 - 50; 41 + 4
Estratégia de simplificação	56 + 38; 54 + 40	90 - 45
Adição indireta		46 + ___ = 91

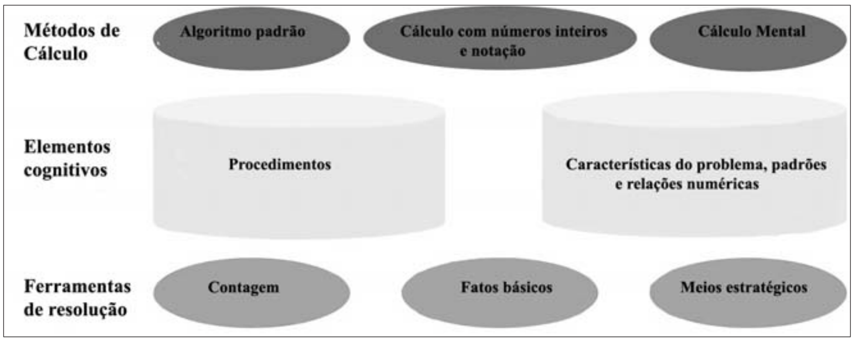
Fonte: Elaborada pelos Autores (2019).

As seis estratégias identificadas na Tabela 1 representam tipos idealizados e não refletem as abordagens, individuais e variadas, de alunos reais para resolução de operações de adição e subtração (Threlfall, 2002). As estratégias podem ser úteis para analisar as soluções dos alunos em geral, mas não são suficientes para fornecer uma visão profunda dos processos mentais de resolução de uma operação.

Um Modelo de Processos de Cálculo Mental

Para analisar e descrever os processos de cálculo mental detalhadamente, Rathgeb-Schnierer (2011) propôs um modelo com domínios distintos, porém inter-relacionados. Cada domínio é caracterizado por uma função diferente e um grau diferente de explicação. A Figura 1 identifica esses elementos como *métodos de cálculo, elementos cognitivos e ferramentas de resolução.*

Figura 1 – Domínios do Processo de Cálculo

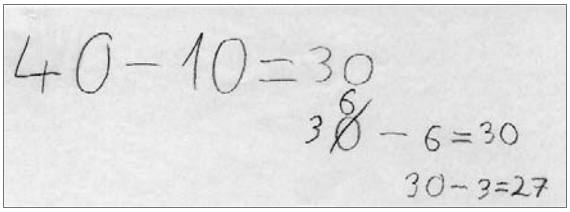


Fonte: Rathgeb-Schnierer e Green (2013, p. 354).

Métodos de Cálculo

Três métodos de cálculo diferentes podem ser usados para resolver determinada operação: (1) o algoritmo padrão de cálculo, (2) cálculo mental com números inteiros e anotação (por exemplo, somas parciais ou métodos com anotações idiossincráticas dos alunos) e (3) cálculo mental (Selter, 2000). Embora os métodos de cálculo possam ser, por vezes, observados diretamente no processo de resolução (consulte a Figura 2), eles não revelam informações detalhadas sobre o processo em si. Cada um dos três métodos descreve apenas uma maneira pela qual uma solução pode ser obtida, mas não os caminhos subjacentes que levam a como uma resposta é determinada com exatidão.

Figura 2 – Michael Resolve a Operação 46-19



Fonte: Rathgeb-Schnierer (2006, p. 230).

A anotação de Michael na Figura 2 baseia-se no método de *cálculo com números inteiros e anotação* e usa a estratégia da *mescla de salto e divisão* (ver Tabela 1). Para obter a solução para 46-19, ele conduziu várias etapas de cálculo. Primeiro, Michael dividiu os números da operação em dezenas e unidades (40-10) e obteve o resultado 30. Então, ele começou a recombinar as dezenas e as unidades (30 + 6) e subtraiu 9 de 36 em duas etapas (36-6 = 30 e 30-3 = 27). Note que o processo real de subtração dos números em cada etapa da resolução não pode ser avaliado observando apenas o método usado. Há, por exemplo, muitas ferramentas de resolução possíveis que Michael poderia ter usado para encontrar a resposta para 40 menos 10, como contar ou implementar meios estratégicos adaptativos combinados com fatos básicos (derivando a resposta do fato básico analógico 4-1, o qual ele sabe de cor). Em síntese, obter a solução de uma operação por si só não esclarece o(s) mecanismo(s) usado(s) para se chegar a essa solução.

Elementos Cognitivos

Elementos cognitivos são definidos como ações mentais específicas que sustentam um processo de resolução (Rathgeb-Schnierer; Green, 2013). Estes podem ser *procedimentos* aprendidos (como algoritmos de cálculo) ou o reconhecimento de *características numéricas* (como padrões numéricos e relações numéricas). Note que o processo de resolução de Michael mostrado na Figura 2 não exibe elementos cognitivos subjacentes. Não se pode dizer, pela anotação, se Michael usou uma solução procedimental, conduzida mentalmente, mas de forma mecânica, ou se ele reconheceu as características numéricas e baseou sua solução em conhecimento numérico e senso numérico. Para julgar com precisão suas habilidades de cálculo mental, seria crucial saber quais elementos cognitivos foram utilizados para obter sua solução.

Ferramentas de Resolução

Para encontrar a resposta para uma operação[1], ferramentas de resolução específicas podem ser usadas e combinadas no contexto. Essas ferramentas para resolução podem ser contar, referir-se a fatos básicos, ou implementar meios estratégicos adaptativos (Rathgeb-Schnierer; Green, 2013). Meios estratégicos "[...] não são estratégias holísticas ou menus cognitivos que completam um percurso de resolução; ao contrário, eles são dispositivos distintos que podem ser combinados de maneiras flexíveis para modificar operações complexas para torná-las mais fáceis" (Rathgeb-Schnierer; Green, 2013, p. 354). Os meios estratégicos são compostos por decomposição e composição (46-19 = 46-10-6-3), transformando uma operação (46-19 = 47-20), derivando a solução de uma operação conhecida (se 46-20 = 26, então a resposta para 46-19 deve ser 27, já que 19 é 20 menos 1), e usando analogias decimais (40-20 é o equivalente em dezenas de 4-2) (ver Threlfall, 2002).

Analisando os Processos de Resolução dos Alunos

Elementos de todos os três domínios podem ser combinados quando os alunos resolvem uma operação mentalmente. Nesse contexto, o modelo pode ser usado para analisar processos de resolução e identificar as competências dos alunos no cálculo mental. Dois exemplos de Rathgeb-Schnierer e Rechtsteiner (2018) ajudam a ilustrar os elementos. Simone (S) e Michael (M) são estudantes alemães no final do segundo ano. Nessa etapa, os estudantes alemães estão familiarizados com a adição e a subtração de números de dois dígitos, mas apenas com base no cálculo com números inteiros. Os algoritmos padrão escritos são introduzidos nas escolas alemãs no terceiro ano. Simone e Michael usaram diferentes estratégias para resolver a operação 71-36 no final do segundo ano. O modelo introduzido acima oferece uma oportunidade para analisar seus processos de solução:

Simone (S) resolve 71-36

> S: *Eu tiro um de 71, e depois 70 menos 36 é qua(…) 40 - (...) - 70 menos 30 é 40 menos 6 é 34 mais 1 é 35.*

Michael (M) resolve 71-36

> M: *Certo, agora eu faço 70 menos 35, e depois eu sei a resposta imediatamente; É 35.*
> I: *E por que você sabe a resposta imediatamente?*
> M: *Porque daí eu tenho (aponta para o número 36) - 35, e 35 é metade de 70, e depois aqui (aponta o número 71) eu tenho 70.*

Métodos de Cálculo

Em relação a esse domínio, a análise é clara. Nenhuma criança usou papel e lápis, nem fez anotação alguma de seus procedimentos de resolução. Ambos confiaram em diferentes formas de cálculo mental.

Ferramentas de Resolução

Ferramentas de resolução não são diretamente visíveis; portanto, elas são mais difíceis de se apreender. Com base nas afirmações de Simone, pode-se presumir que ela modificou a operação para uma relacionada, 70-36. Como ela não foi capaz de resolver a operação reformulada de imediato, ela usou os meios estratégicos de decomposição e encontrou a resposta para 70-30. Não fica óbvio se ela obteve essa resposta derivando-a da operação analógica 7-3 que ela poderia saber de cor. Mas como Simone encontrou a resposta muito rapidamente, pode-se supor que ela não dependia da conta. Ela procedeu subtraindo 6 de 40 e finalmente adicionou 1 para compensar o minuendo. Michael mostrou diferentes ferramentas de resolução. Ele começou simplificando a operação original modificando tanto o minuendo quanto o subtraendo da mesma maneira (subtraindo um de cada número). Após essa modificação, a resposta para a operação ficou clara para Michael, porque ele sabia que 70-35 é um fato de metade e dobro.

Elementos Cognitivos

Simone e Michael recorreram a procedimentos de cálculo aprendidos ou a padrões numéricos e características de operações reconhecidas? A explicação de Michael mostra claramente que seu processo de resolução está vinculado a essa operação específica e às suas características. É plausível que ele tenha reconhecido que 71 é um número próximo de 70 e combinou essa modificação com seu conhecimento do fato metade-dobro. Quanto a Simone, não é tão fácil reconstruir os elementos cognitivos que sustentam sua solução, porque ela não descreve seu raciocínio. Sem perguntar por que ela modificou a operação, não se pode julgar se ela estava utilizando um procedimento aprendido ou as características específicas da operação. Ainda assim, ambos os exemplos ilustram como o modelo permite uma análise detalhada dos processos de resolução dos alunos e uma abordagem para entender seus cálculos mentais.

Flexibilidade no Cálculo Mental

Definindo a Flexibilidade Mental

A pesquisa no campo do cálculo mental flexível reflete não só diferentes interesses e objetivos, mas também diferentes ideias sobre flexibilidade mental que, em última análise, influenciam tanto os métodos de pesquisa quanto a interpretação dos dados. Em suma, existem na literatura atual definições múltiplas e inconsistentes de flexibilidade mental, e estas, por sua vez, resultam em definições operacionais muito diferentes (Star; Newton, 2009). Por exemplo, Star e Newton (2009, p. 558) definem a flexibilidade como o “[...] conhecimento de múltiplas soluções, bem como a habilidade e a tendência de escolher seletivamente as mais adequadas para determinada operação”. Em uma perspectiva diferente, Verschaffel, Luwel, Torbeyns e Van Dooren (2009) distinguem entre *flexibilidade*, para descrever o uso de múltiplas estratégias, e *adaptabilidade*, para a efetiva seleção de escolhas estratégicas apropriadas. Nesse contexto, Selter (2009) estende a ideia de *adaptabilidade* para incluir a ideia de desenvolver e selecionar criativamente uma *estratégia apropriada*. Por fim, outro grupo de pesquisadores afirma que a flexibilidade consiste em "[...] escolher entre diferentes estratégias simplesmente com base nas características [...] em que a flexibilidade estratégica é concebida como a seleção da estratégia que leva a criança mais rapidamente a uma resposta precisa para a operação" (Torbeyns; De Smedt; Ghesquière; Verschaffel, 2009, p. 583).

Existem operações inerentes a essas definições de flexibilidade. Star e Newton (2009) mostraram, por exemplo, que mesmo os especialistas em educação matemática podem falhar em utilizar a estratégia de solução *mais apropriada*. E, embora o tempo e a precisão possam ser considerações importantes, eles não implicam necessariamente flexibilidade cognitiva nos procedimentos de resolução. Para superar tais operações, Rathgeb-Schnierer (2011) e Rathgeb-Schnierer e Green (2013) adotaram uma abordagem mais intuitiva para definir a flexibilidade mental em termos de conhecimento dos alunos e de uso de padrões e relações numéricos. Mais especificamente, eles definiram a flexibilidade como uma combinação de ações cognitivas estratégicas empregadas "[...] para combinar meios estratégicos com padrões e relações numéricos reconhecidos de uma dada operação no contexto do processamento de uma resolução de operação" (Rathgeb-Schnierer; Green, 2013, p. 357). Tal definição reflete a atenção tanto aos métodos de solução quanto aos padrões e relacionamentos numéricos incorporados nas estruturas de operações. Nesse sentido, sua definição incorpora o uso de múltiplas estratégias e reflete o tipo de pensamento dinâmico e adaptativo que Threlfall (2002, p. 29) descreve como "[...] interação entre percepção e conhecimento".

Há um consenso significativo entre todas essas definições na ideia de que a flexibilidade no cálculo mental inclui pelo menos duas características centrais: o conhecimento de diferentes métodos de solução e a capacidade de adaptar esses métodos a uma estrutura de uma operação em particular. Baseado em definições variadas, Threlfall (2009) identificou dois modelos explicativos diferentes para a flexibilidade no cálculo mental: um que reflete a ideia de escolha estratégica consciente ou inconsciente, e um que reflete a ideia de *mirar diretamente* uma solução baseada em conhecimento numérico e compreensão conceitual. Mais recentemente, Rechtsteiner-Merz (2013) analisou sistematicamente as várias noções de flexibilidade na literatura. Ela apontou que muitas definições distinguem explicitamente flexibilidade de adaptabilidade. Considerando que a flexibilidade é consensualmente entendida da mesma maneira, existem três abordagens diferentes para definir a adaptabilidade e como ela pode ser identificada: (1) adequação do percurso de resolução e da característica do empreendimento, (2) adequação da precisão e da velocidade e (3) adequação dos elementos cognitivos que sustentam o processo de solução.

Todas essas três abordagens para definir a flexibilidade mental podem ser vinculadas ao modelo proposto anteriormente (veja a Figura 1). Por exemplo, a primeira e a segunda abordagens focalizam predominantemente um único domínio do processo de cálculo: ou o domínio dos *métodos de cálculo* ou o domínio das *ferramentas de resolução*. A terceira abordagem leva em consideração os elementos cognitivos e examina dois domínios diferentes para identificar o grau de flexibilidade na aritmética mental dos alunos: *ferramentas de resolução* e os *elementos cognitivos* que sustentam os processos de resolução. Nessa abordagem, a evidência de flexibilidade no cálculo mental só pode existir se as ferramentas para resolução estiverem vinculadas de maneira dinâmica a características da operação e a padrões e relações numéricos.

Descobertas em Pesquisas sobre Flexibilidade Mental

Não sem surpresa, diferentes definições de pesquisa levaram a diferentes métodos de pesquisa, que, por sua vez, produziram padrões consistentes de resultados dentro de um amplo espectro de conteúdo:

- Depois que os alunos aprendem um algoritmo padrão de cálculo, eles tendem a deixar de usar estratégias aprendidas anteriormente, mesmo quando elas são mais vantajosas e apropriadas (Selter, 2001).
- Quando os alunos aprendem por meio de exemplos, eles adquirem procedimentos específicos em vez de regras gerais, e esses procedimentos tendem a ter um impacto negativo no desenvolvimento da flexibilidade (Beishuizen; Klein, 1998; Heirdsfield; Cooper 2004; Schütte, 2004b).
- O aprendizado de estratégias pode depender de uma variedade de fatores, como a operação alvo (Torbeyns; De Smedt; Ghesquière; Verschaffel, 2009), características numéricas ou da operação específicas (Blöte; Klein; Beishuizen, 2000; Torbeyns; De Smedt; Ghesquière; Verschaffel, 2009), e o próprio reconhecimento dos alunos das características da operação (Rathgeb-Schnierer, 2006; 2010; Rathgeb-Schnierer; Green, 2015; 2017a).
- O conhecimento flexível e adaptativo no cálculo mental está associado a: compreensão profunda das relações numéricas e operações aritméticas, conhecimento de fatos básicos e famílias de fatos, autoconfiança elevada e uma atitude positiva em relação à matemática (Heirdsfield; Cooper, 2004; Threlfall, 2002).
- O desenvolvimento da flexibilidade no cálculo mental pode ser favorecido por abordagens especiais para a educação matemática. A esse respeito, pesquisadores destacaram a abordagem de solução de operações de forma geral (Heinze; Marschick; Lipowsky, 2009; Gruessing; Schwabe; Heinze; Lipowsky, 2013; Heinze; Arend; Gruessing; Lipowsky, 2018), combinada a atividades específicas para promover o senso numérico e competências metacognitivas (Rathgeb-Schnierer, 2006; 2010; Rechtsteiner-Merz, 2013).

- Os alunos com dificuldades de aprendizagem em aritmética precisam de abordagens instrucionais especiais para que desenvolvam a flexibilidade no cálculo mental (Verschaffel; Torbeyns; De Smedt; Luwel; van Doreen, 2007). Eles demonstram progresso conceitual a partir de uma abordagem particular à educação matemática (*Zahlenblickschulung*), que incorpora oportunidades para descobrir, construir, organizar e avaliar padrões e relações numéricos (Rechtsteiner-Merz, 2013; Rechtsteiner-Merz; Rathgeb-Schnierer, 2015).
- Alunos alemães e americanos do ensino fundamental exibem repertórios e padrões semelhantes de flexibilidade cognitiva com operações multidígitos de adição e subtração (Rathgeb-Schnierer; Green, 2015; 2017a).

A pesquisa relatada no campo do cálculo mental flexível reflete diferentes interesses e objetivos, bem como diferentes definições. Para os educadores de matemática, há também diferentes ênfases em relação à pedagogia e à promoção da flexibilidade no cálculo mental (Selter, 2009; Threlfall, 2009). Segundo Threlfall (2009, p. 552), "[...] a suposição de que é tudo uma questão de escolha estratégica levará a conclusões muito diferentes sobre a ação apropriada a partir da perspectiva que pressupõe a importância da compreensão conceitual e pensa em algum tipo de cálculo como 'mirar direto' em soluções". Duas abordagens de ensino diferentes podem ser derivadas dessas duas premissas distintas sobre flexibilidade no cálculo mental. De um lado, a flexibilidade no cálculo mental pode ser favorecida pela instrução direta, isto é, ensinando estratégias específicas aos alunos (no sentido de todo um percurso de resolução) e encorajando-os a testar e a discutir a adequação de estratégias únicas em contextos específicos de resolução de operações. Por outro lado, o ensino da flexibilidade no cálculo mental enfatiza o desenvolvimento de uma compreensão conceitual sobre números e operações que incorporam um profundo conhecimento sobre números e relações entre números, bem como de meios estratégicos. Nós expandimos a última abordagem na seção seguinte.

Favorecendo a Flexibilidade no Cálculo Mental no Ensino Fundamental

Como a flexibilidade no cálculo mental pode ser favorecida e cultivada no ensino fundamental? Antes de responder a essa questão pedagógica, é crucial refletir acerca dos pré-requisitos para a flexibilidade no cálculo mental. Com base em pesquisa anteriormente citada, quatro elementos identificados na Figura 3 podem ser considerados essenciais para a flexibilidade mental:

- Conhecimento sobre números e operações, como o conhecimento das características e das relações numéricas (por exemplo, valores cardinais e ordinais) (Heirdsfield; Cooper, 2002; 2004; Hope, 1987; Threlfall, 2002).
- Conhecimento de fatos básicos.

- Conhecimento de meios estratégicos que incluem a capacidade de compor e de decompor números, de derivar soluções de uma operação conhecida, de modificar operações e de usar analogias (Threlfall, 2002; Rathgeb-Schnierer, 2006).
- Reconhecimento de padrões numéricos, de características de operações e de relações. Isso significa, no contexto de um procedimento para resolução de uma operação, que os alunos reconhecem os padrões numéricos e as relações de uma determinada operação e adaptam meios estratégicos com base nesse reconhecimento (Macintyre; Forrester, 2003; Rathgeb-Schnierer, 2010; Schütte, 2004b; Threlfall, 2009).

A relevância do quarto elemento tornou-se cada vez mais reconhecida nos últimos anos. Por exemplo, vários pesquisadores sugeriram que os métodos de resolução empregados pelos estudantes podem depender mais das características das operações do que dos tipos de operações (Blöte; Klein; Beishuizen, 2000; Rathgeb-Schnierer, 2010; Torbeyns; De Smedt; Ghesquière; Verschaffel, 2009). Ademais, Rechtsteiner-Merz (2013) relatou que alunos com dificuldades de aprendizado tendem a não desenvolver habilidades de cálculo mental e raramente avançam para além da contagem. Além disso, eles não conseguem atingir um nível básico de reconhecimento e emprego de padrões e relações numéricas na resolução de operações (Rechtsteiner-Merz; Rathgeb-Schnierer, 2015; 2017).

A noção de flexibilidade no cálculo mental como "[...] ação apropriada [que] significa combinar meios estratégicos com padrões numéricos reconhecidos e relações de uma dada operação no contexto de um procedimento para resolução de uma operação" (Rathgeb-Schnierer; Green, 2013, p. 357), bem como os requisitos de flexibilidade descritos acima, fornecem evidências para a pedagogia matemática. Se a flexibilidade no cálculo mental significa que ferramentas para resolução são usadas e combinadas, dependendo de padrões e relações numéricos reconhecidos, então é importante que os educadores matemáticos abordem os quatro elementos identificados acima. Uma vez que confiar nas características da operação, nos padrões numéricos e nas relações é a base para a flexibilidade na aritmética mental, sugerimos que uma importância maior seja dada às atividades relacionadas a este elemento.

Um desenvolvimento promissor nessa frente foi relatado por Schütte (2004b) e Rechtsteiner-Merz (2013), que desenvolveu uma abordagem especial para a educação matemática que enfatiza o reconhecimento das características da operação e das relações numéricas. A abordagem é chamada de *Zahlenblickschulung*. *Zahlenblickschulung* é uma abordagem de longo prazo, que se estende por todo o período do ensino fundamental e que visa o desenvolvimento de conceitos numéricos e o entendimento de operações e de meios estratégicos (Rechtsteiner; Rathgeb-Schnierer, 2017). Os princípios básicos dessa abordagem são:

- Adiar a resolução de operações em favor do enfoque nas características da operação e nas relações entre as operações.

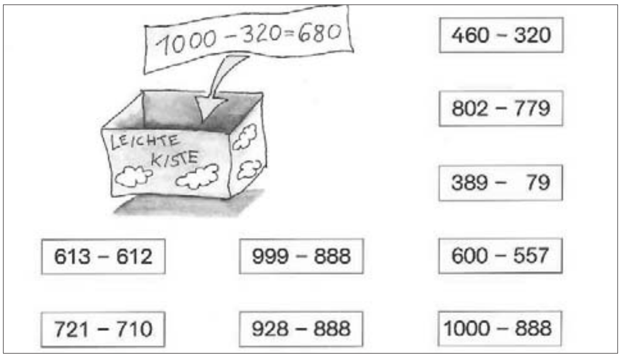
- Desenvolver competências metacognitivas levantando questões cognitivamente desafiadoras para estimular o pensamento e a reflexão dos alunos.

A abordagem *Zahlenblickschulung* ressalta e favorece o desenvolvimento de *Zahlenblick*, que se refere à "[...] competência para reconhecer características de operações e padrões e relações numéricas de imediato e usá-los para resolver uma operação" (Rechtsteiner; Rathgeb-Schnierer, 2017 p. 2). Essa competência complexa pode ser fomentada por atividades que encorajem os alunos a classificar e organizar operações, a fim de reconhecer padrões numéricos, características das operações e relações entre números e operações. Respostas a operações aritméticas não são computadas durante essas atividades porque o foco é nas características numéricas e nas operações. Em tais situações, os alunos têm a oportunidade de descobrir estruturas e relações inerentes (Rechtsteiner; Rathgeb-Schnierer, 2017).

Classificando Operações: uma atividade para *Zahlenblickschulung*

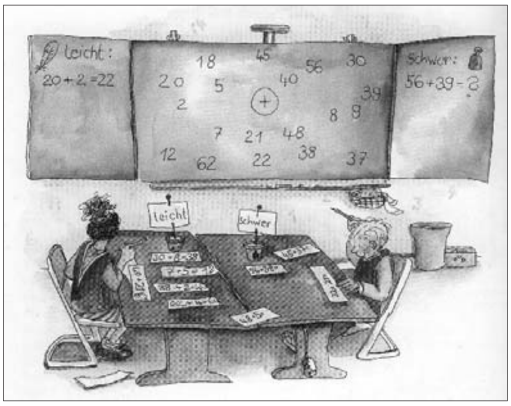
Classificar operações, juntamente com o raciocínio sobre a classificação, é um tipo comum de atividade que chama a atenção dos alunos para as características e as relações das operações. A atividade pode ser usada para favorecer e desenvolver a flexibilidade, e pode ainda ser um método para investigar e identificar a flexibilidade cognitiva em alunos do ensino fundamental (Rathgeb-Schnierer; Green, 2017a; 2017b). A ideia básica é encorajar os alunos a classificar operações aritméticas em várias categorias e a discutir seu raciocínio sobre a classificação. Nesse contexto, é fundamental não resolver a operação antes de classificar, mas, ao invés disso, basear a decisão de classificação em características de operações reconhecidas. Para a atividade de classificação, o professor pode empregar um entre dois cenários. A Figura 3 ilustra o primeiro cenário, no qual os alunos classificam operações predeterminadas em categorias de *fácil* e *difícil*. A Figura 4 ilustra o segundo cenário, no qual os alunos, trabalhando com uma operação específica e um determinado conjunto de números, usam esses elementos para construir operações *fáceis* ou operações *difíceis*. Em ambos os cenários, os alunos discutem entre si e com o professor o raciocínio por trás das decisões de classificar como *fáceis* e *difíceis*.

Figura 3 – Classificação das Operações de Subtração nas Categorias *Fácil* e *Difícil*



Fonte: Schütte (2005, p. 54).

Figura 4 – Inventando e Classificando Operações de Adição em Categorias *Fácil* e *Difícil*



Fonte: Schütte (2004a, p. 28).

Dependendo da série, essas atividades podem ser adaptadas ao currículo de matemática apropriado. Ademais, as categorias para classificação podem ser variadas:

- *Operações fáceis* e *operações difíceis*.
- *Eu conheço a operação de cor*; *eu preciso contar a operação*; e *eu conheço um truque para resolver a operação*.
- *Operações que exigem reagrupamento ou renomeação* e *operações que não exigem reagrupamento e renomeação*.

Os dois primeiros exemplos mostram categorias subjetivas de classificação que levam a resultados de classificação diferentes entre os alunos. Estes também são vantajosos na criação de ações que promovem a flexibilidade. O último exemplo representa categorias objetivas que devem gerar os mesmos resultados de classificação quando os alunos classificam operações semelhantes.

Depois de classificar as operações, os alunos podem ser encorajados a comparar suas operações em cada categoria e discutir os motivos de sua classificação. Nessa fase, questões cognitivamente desafiadoras devem estimular os estudantes a raciocinar sobre suas escolhas e as dos demais, dessa forma, levando em conta as características e as relações das operações. Exemplos de questões desafiadoras incluem:

- Por que uma operação é fácil ou difícil para você? Existem características especiais que tornam as operações fáceis ou difíceis?
- Qual a razão para colocar várias operações diferentes na mesma categoria? As operações em uma mesma categoria têm semelhanças?
- Existem operações fáceis que podem te ajudar a resolver operações difíceis?
- Por que você conhece algumas operações de cor, e por que você precisa contar para outras operações?
- Existem tipos especiais de operações que podem ser resolvidas pelo mesmo truque? Quais operações podem ser facilmente modificadas e tornadas mais simples?

Há evidências crescentes de que todos os alunos se beneficiam da abordagem *Zahlenblickschulung* no que diz respeito ao desenvolvimento da flexibilidade no cálculo mental (Rechtsteiner-Merz, 2013; Rechtsteiner; Rathgeb-Schnierer, 2017). Para os alunos que têm dificuldades de aprendizado em matemática, aprender a atentar às características da operação e às relações numéricas é uma condição crítica para que eles desenvolvam ferramentas de resolução que vão além da simples conta (Rechtsteiner; Rathgeb-Schnierer, 2017). Rathgeb-Schnierer e Green (2015; 2017a) também ressaltam a importância de se analisar o raciocínio do aluno como principal indicador de flexibilidade na aritmética mental (como método de pesquisa) e como uma abordagem fundamental da pedagogia em salas de aula do ensino fundamental.

Recebido em 30 de setembro de 2018
Aprovado em 28 de dezembro de 2018

Nota

1 Nota de Tradução: No original, o termo utilizado é *problem*. No entanto, como se refere à resolução de cálculos aritméticos, optou-se por utilizar a palavra operação.

Referências

ANGHILERI, Julia. Intuitive Approaches, Mental Strategies and Standard Algorithms. In: ANGHILERI, Julia (Ed.). **Principles and Practices in Arithmetic Teaching**: innovative approaches for the primary classroom. Suffolk: St. Edmundsbury Press, 2001. P. 79-94.

BEISHUIZEN, Meindert; KLEIN, Anton S. The Empty Number Line in Dutch Second Grades: realistic versus gradual program design. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, v. 29, n. 4, p. 443-464, 1998.

BENZ, Christiane. Die Entwicklung der Rechenstrategien bei Aufgaben des Typs ZE +/- ZE im Verlauf des zweiten Schuljahrs [The development of computation strategies for addition and subtraction problems with two-digit numbers during grade 2]. **Journal für Mathematik-Didaktik**, Berlin, v. 28, n. 1, p. 49-73, 2007.

BLÖTE, Anke W.; KLEIN, Anton S.; BEISHUIZEN, Meindert. Mental Computation and Conceptual Understanding. **Learning and Instruction**, Amsterdam, v. 10, n. 3, p. 221-247, 2000.

CARPENTER, Thomas P.; FRANKE, Megan L.; JACOBS, Victoria R.; FENNEMA, Elizabeth; EMPSON Susan B. A Longitudinal Study of Invention and Understanding in Children's Multidigit Addition and Subtraction. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, v. 29, n. 1, p. 3-20, 1997.

FUSON, Karen C.; WEARNE, Diana; HIEBERT, James C.; MURRAY, Hanlie G.; HUMAN, Pieter G.; OLIVER, Alwyn I.; CARPENTER, Thomas P.; Elizabeth FENNEMA, Elizabeth. Children's Conceptual Structures for Multidigit Numbers and Methods of Multidigit Addition and Subtraction. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, v. 28, n. 2, p. 130-162, 1997.

GRUESSING, Meike; SCHWABE, Julia; HEINZE, Aiso; LIPOWSKY, Frank. The Effects of Two Instructional Approaches on 3rd-Graders' Adaptive Strategy use for Multi-digit Addition and Subtraction. In: LINDMEIER, Anke M; HEINZE, Aiso (Ed.). **Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education** (v. 2). Kiel: PME, 2013. P. 393-401.

HEINZE, Aiso; AREND, Julia; GRUESSING, Meike; LIPOWSKY, Frank. Instructional approaches to foster third graders' adaptive use of strategies: an experimental study on the effects of two learning environments on multi-digit addition and subtraction. **Instructional Science**, Dordrecht, p. 1-23, 2018.

HEINZE, Aiso; MARSCHICK, Franziska; LIPOWSKY, Frank. Addition and Subtraction of Three-Digit Numbers: adaptive strategy use and the influence of instruction in German third grade. **ZDM - The International Journal on Mathematics Education**, Berlin, v. 41, n. 5, p. 591-604, 2009.

HEIRDSFIELD, Ann M.; COOPER, Tom J. Flexibility and Inflexibility in Accurate Mental Addition and Subtraction: two case studies. **Journal of Mathematical Behavior**, New York, v. 21, n. 1, p. 57-74, 2002.

HEIRDSFIELD, Ann M.; COOPER, Tom J. Factors Affecting the Process of Proficient Mental Addition and Subtraction: case studies of flexible and inflexible computers. **Journal of Mathematical Behavior**, New York, v. 23, n. 4, p. 443-463, 2004.

HOPE, John A. A Case Study of a Highly Skilled Mental Calculator. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, v. 18, n. 5, p. 331-342, 1987.

KLEIN, Anton S.; BEISHUIZEN, Meindert; TREFFERS, Adri. The Empty Number Line in Dutch Second Grades: realistic versus gradual program design. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, v. 29, n. 4, p. 443-464, 1998.

KRAUTHAUSEN, Günter. Kopfrechnen, halbschriftliches Rechnen, schriftliche Normalverfahren, Taschenrechner: Für eine Neubestimmung des Stellenwertes der vier Rechenmethoden [Mental arithmetic, informal strategies, written algorithms, calculators: A new role of routine procedures]. **Journal für Mathematik-Didaktik**, Berlin, v. 14, n. 3/4, p. 189-219, 1993.

MACINTYRE, Tom; FORRESTER, Ruth. Strategies for Mental Calculation. In: WILLIAMS, Julian (Ed.). **Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics**, Oxford, v. 23, n. 2, p. 49-54, 2003.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (NCTM). **Principles and Standards for School Mathematics**. Reston: NCTM, 2000.

POLYA, George. **How to Solve it**: A new aspect of mathematical method. 2. ed. Princeton: Princeton University Press, 1952.

RATHGEB-SCHNIERER, Elisabeth. **Kinder auf dem Weg zum flexiblen Rechnen**: Eine Untersuchung zur Entwicklung von Rechenwegen von Grundschulkindern auf der Grundlage offener Lernangebote und eigenständiger Lösungsansätze [Students Develop Flexibility in Mental Math: study on development of calculation strategies based on an open approach]. Hildesheim; Berlin: Franzbecker, 2006.

RATHGEB-SCHNIERER, Elisabeth. Entwicklung flexibler Rechenkompetenzen bei Grundschulkindern des 2. Schuljahrs [The development of flexible mental calculations of second graders]. **Journal für Mathematik-Didaktik**, Berlin, v. 31, n. 2, p. 257-283, 2010.

RATHGEB-SCHNIERER, Elisabeth. Warum noch rechnen, wenn ich die Lösung sehen kann? Hintergründe zur Förderung flexibler Rechenkompetenzen [Why counting when I see the solution? Theoretical framework of teaching flexible mental calculation]. In: HAUG, Reinhold; HOLZÄPFEL, Lars (Ed.). **Beiträge zum Mathematikunterricht**. Münster: WTM-Verlag, 2011. P. 15-22.

RATHGEB-SCHNIERER, Elisabeth; GREEN, Michael. Flexibility in Mental Calculation in Elementary Students from Different Math Classes. In: UBUZ, Behiye; HASER, Çiğdem; MARIOTTI, Maria Alessandra (Ed.). **Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education**. Ankara: Middle East Technical University, 2013. P. 353-362.

RATHGEB-SCHNIERER, Elisabeth; GREEN, Michael. Cognitive Flexibility and Reasoning Patterns in American and German Elementary Students when sorting Addition and Subtraction Problems. In: KRAINER, Konrad; VONDROVA, Nada (Ed.). **Proceedings of CERME 9 - Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education**. CERME: Prague, 2015. P. 339-345.

RATHGEB-SCHNIERER, Elisabeth; GREEN, Michael. Profiles of Cognitive Flexibility in Arithmetic Reasoning: a cross country comparison of German and American elementary students. **Journal of Mathematics Education**, Ikere-Ekiti, v. 10, n. 2, p. 1-16, 2017a.

RATHGEB-SCHNIERER, Elisabeth; GREEN, Michael. Mental Arithmetic and Cognitive Flexibility in Elementary Students. In: INTERNATIONAL TECHNOLOGY, EDUCATION, AND DEVELOPMENT CONFERENCE, 11. 2017. Valencia. **Proceedings...** Valencia, Spain: INTED, 2017b. P. 492-499.

RATHGEB-SCHNIERER, Elisabeth; RECHTSTEINER, Charlotte. **Rechnen lernen und Flexibilität entwickeln**: Grundlagen – Förderung – Beispiele (Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II). Heidelberg: Springer Spektrum, 2018.

RECHTSTEINER-MERZ, Charlotte. **Flexibles Rechnen und Zahlenblickschulung**: Eine Untersuchung zur Entwicklung von Rechenkompetenzen bei Erstklässlern, die Schwierigkeiten beim Rechnenlernen zeigen [Flexible calculation and number sense - a study on numeracy skills of first graders with disabilities in learning math]. Münster: Waxmann, 2013.

RECHTSTEINER-MERZ, Charlotte; RATHGEB-SCHNIERER, Elisabeth. Flexible Mental Calculation and "Zahlenblickschulung". In: KRAINER, Konrad; VONDROVA, Nada (Ed.). **Proceedings of CERME 9 - Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education**. CERME: Prague, 2015. P. 354-360.

RECHTSTEINER-MERZ, Charlotte; RATHGEB-SCHNIERER, Elisabeth. "Zahlenblickschulung" as Approach to Develop Flexibility in Mental Calculation in all Students. **Journal of Mathematics Education**, Ikere-Ekiti, v. 10, n. 1, p. 1-16, 2017.

SCHÜTTE, Sybille. **Die Matheprofis 2** [Math-Experts, Textbook 2nd grade]. München; Düsseldorf; Stuttgart: Oldenbourg, 2004a.

SCHÜTTE, Sybille. Rechenwegsnotation und Zahlenblick als Vehikel des Aufbaus flexibler Rechenkompetenzen [Notation of calculation processes and number sense as a vehicle to develop flexible arithmetic competencies]. **Journal für Mathematik-Didaktik**, Berlin, v. 25, n. 2, p. 130-148 2004b.

SCHÜTTE, Sybille. **Die Matheprofis 3** [Math-Experts, Textbook 3rd grade]. München; Düsseldorf; Stuttgart: Oldenbourg, 2005.

SELTER, Christoph. Vorgehensweise von Grundschüler(inne)n bei Aufgaben zur Addition und Subtraktion im Zahlenraum bis 1000 [Strategies of primary students in addition and subtraction of three-digit numbers]. **Journal für Mathematik-Didaktik**, Berlin, v 21, n. 3/4, p. 227-258, 2000.

SELTER, Christoph. Addition and Subtraction of Three-Digit Numbers: German elementary children's success, methods and strategies. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 47, n. 2, p. 145-173, 2001.

SELTER, Christoph. Creativity, Flexibility, Adaptivity, and Strategy use in Mathematics. **ZDM - The International Journal on Mathematics Education**, Berlin v. 41, n. 5, p. 619-625, 2009.

STAR, Jon; NEWTON, Kristie. The Nature and Development of Experts' Strategy Flexibility for Solving Equations. **ZDM - The International Journal on Mathematics Education**, Berlin, v. 41, n. 5, p. 557-567, 2009.

THOMPSON, Ian. Mental Calculation Strategies for Addition and Subtraction Part 1. **Mathematics in School**, Leicester, v. 28, n. 5, Nov. 1999.

THRELFALL, John. Flexible Mental Calculation. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 50, n. 1, p. 29-47, 2002.

THRELFALL, John. Strategies and Flexibility in Mental Calculation. **ZDM - The International Journal on Mathematics Education**, Berlin, v. 41, n. 5, p. 541-555, 2009.

TORBEYNS, Joke; DE SMEDT, Bert; GHESQUIÈRE, Pol; VERSCHAFFEL, Lieven. Jump or compensate? Strategy flexibility in the number domain up to 100. **ZDM - The International Journal on Mathematics Education**, Berlin, v. 41, n. 5, p. 581-590, 2009.

VERSCHAFFEL, Lieven; LUWEL, Koen; TORBEYNS, Joke; VAN DOOREN, Wim. Conceptualizing, Investigating, and Enhancing Adaptive Expertise in Elementary Mathematics Education. **European Journal of Psychology of Education**, Lisbon, v. 24, n. 3, p. 335-359, 2009.

VERSCHAFFEL, Lieven; TORBEYNS, Joke; DE SMEDT, Bert; LUWEL, Koen; VAN DOOREN, Wim. Strategy Flexibility in Children with Low Achievement in Mathematics. **Educational and Child Psychology**, Leicester, v. 24, n. 2, p. 16-27, 2007.

Elisabeth Rathgeb-Schnierer é Professora Titular no Instituto de Matemática (Departamento de Educação Matemática) na Universidade de Kassel (Alemanha). Seus interesses de pesquisa são a aprendizagem de números e operações nos anos iniciais, o desenvolvimento de flexibilidade na aritmética mental e os processos de aprendizagem da matemática em estudantes com baixo desempenho.
ORCID: http://orcid.org/0000-0002-1347-1667
E-mail: rathgeb-schnierer@mathematik.uni-kassel.de

Michael G. Green é Professor Emérito no Colleague of Education (Departamento de Leitura e Educação Elementar na Universidade da Carolina do Norte em Charlotte (Estados Unidos). Seus interesses de pesquisa são teorias da aprendizagem e desenvolvimento humanos, desenvolvimento da compreensão e raciocínio matemáticos e pedagogia da matemática.
ORCID: http://orcid.org/0000-0002-3810-7255
E-mail: mggreen@carolina.rr.com