Estudos de Psicologia 2008, 13(1), 13-21

Nem todo material concreto é igual: a importância dos referentes na resolução de problemas

Adriana Maria da Silva Barbosa Batista
Secretaria de Educação da Cidade do Recife
Alina Galvão Spinillo
Universidade Federal de Pernambuco

Resumo

A partir da distinção entre material concreto definido e material concreto indefinido, examinou-se como diferentes suportes concretos de representação influenciam a resolução de problemas de divisão e de multiplicação. Quarenta crianças de 8 anos resolveram os mesmos problemas. Às crianças do Grupo 1 (concreto indefinido) foram disponibilizadas fichas plásticas; e às do Grupo 2 (concreto definido) objetos que tinham relação com os referentes das quantidades presentes no enunciado dos problemas (jarros e flores, carrinhos e caixas). O material concreto definido favoreceu a compreensão das relações lógico-matemáticas, facilitando o desempenho e o uso de procedimentos apropriados, o mesmo não ocorrendo com o material concreto indefinido. Concluiu-se que a compreensão da criança é influenciada pelos suportes de representação e que nem todo material concreto tem o mesmo efeito sobre a resolução de problemas, sendo necessário considerar, além de seu caráter manipulativo, a relação entre os referentes das quantidades e o material disponibilizado.

Palavras-chave: crianças; resolução de problemas; suportes de representação

Abstract

Not all concrete materials are the same: the importance of referents in problem solving. This study examines how different types of concrete materials (specific and non-specific) influence children's comprehension when solving multiplication and division problems. Forty 8-year-old children were divided into two groups, and asked to solve the same problems. The children in Group 1 (non-specific) were given plastic tokens. The children in Group 2 (specific) were given objects which had a direct relation to the referents of the quantities mentioned in the problems (e.g., vases and flowers, toy cars and boxes). The specific concrete materials favoured performance and the use of more appropriate procedures than non-specific concrete materials. The conclusion was that the child's comprehension is influenced by the representational support available to him/her, and that not all concrete materials have the same effect on problem solving. It is necessary to consider not only the manipulative nature of the material, but the relation between the referents of the quantities and the representational support available as well.

Keywords: children; problem solving; representational support

Uma compreensão psicológica dos conceitos matemáticos, segundo Vergnaud (1982; 1991; 1998; 2003), requer considerar os esquemas de ação, as situações de uso e os suportes de representação. Uma outra consideração necessária, dentro desse enfoque teórico, é a idéia de campo conceitual. De forma breve, campo conceitual pode ser definido como "um conjunto de situações cujo domínio requer uma variedade de conceitos, procedimentos e representações simbólicas firmemente unidos uns aos outros" (Vergnaud, 1982, p.12). Dois grandes campos conceituais são apontados – o campo das estruturas aditivas e o das estruturas multiplicativas, os quais apresentam níveis crescentes de complexidade. O campo das estruturas aditivas envolve regras operatórias que implicam no uso de operações de natureza aditiva (adição e subtração) e no estabelecimento de relações que incluem duas variáveis que, adicionadas, formam um todo. Por outro lado, o campo das estruturas multiplicativas envolve regras operatórias relativas à divisão, à multiplicação ou à combinação de ambas. As relações parte-todo estabelecidas entre as variáveis são complexas (exemplo: correspondência um-para-muitos)[1], implicando raciocinar em termos multiplicativos. O domínio desses campos pela criança é gradual, estando associado a esquemas de ação, situações de uso e suportes de representação.

Suportes de representação podem ser entendidos como signos, ferramentas e materiais usados durante a resolução de uma situação-problema, tais como material concreto (dedos, fichas, palitos, pedrinhas, jarros, flores, etc.) ou recursos gráficos diversos (desenhos, marcas icônicas, diagramas, gráficos, tabelas, etc.). Considerados como um significante, os suportes de representação são elementos que, inseridos em uma dada situação, conferem sentido ao conceito e influenciam as formas de resolução (Anghileri, 1998).

São complexas as relações entre suportes de representação, a situação em que o problema se insere e a capacidade cognitiva do indivíduo. A situação em que o problema se insere influencia a forma como o indivíduo interpreta e representa o problema, tendo repercussões sobre as estratégias que adota para resolvê-lo (e.g., Carraher, Carraher, & Schliemann, 2003; Da Rocha Falcão, 2005; Lautert & Spinillo, 1999; Nunes, 1994, 1997; Nunes & Bryant 1997). A representação, como afirma Nunes (1994, 1997), pode também determinar o tipo de esquema a ser acionado em uma situação-problema; estruturando, assim, os processos de raciocínio. Segundo a autora, os sistemas de signos possibilitam a construção de diferentes modos de representar um determinado conceito; os quais, por sua vez, influenciam a atividade matemática e a resolução de problemas. Nesta perspectiva, enfatiza-se a noção de ação mediada para compreender o pensamento matemático, onde as ferramentas assumem papel essencial na construção do pensamento. Desta forma, as representações tanto influenciam a situação como são por ela influenciadas.

Na realidade, os suportes de representação disponibilizados para resolver um problema fazem parte da situação, podendo ser entendidos como ferramentas que não apenas auxiliam na expressão das formas de raciocinar, mas que também as influenciam. É nesta perspectiva teórica que se discutem os suportes de representação neste estudo, cujo foco recai sobre os suportes de representação e a resolução de problemas inseridos no campo das estruturas multiplicativas – problemas de isomorfismo de medidas envolvendo as operações de multiplicação e de divisão; buscando-se examinar o papel desempenhado por esses suportes no processo de resolução.

Na maioria das vezes, como mostra a literatura, o papel desempenhado pelos suportes de representação é investigado a partir de problemas inseridos no campo das estruturas aditivas (e.g., Higino, 1997; Hughes, 1986; Kamii, Lewis, & Kirkland, 2001; Sinclair, Mello, & Siegrist, 1989; Vasconcelos, 1998; Zunino, 1995); sendo raras as pesquisas que examinam o efeito dos suportes de representação sobre a resolução de problemas de natureza multiplicativa (Lautert & Spinillo, 1999; Selva, 1998).

Em estudos clássicos a respeito dos procedimentos adotados por crianças na resolução de problemas de divisão e de multiplicação verifica-se que o suporte de representação disponibilizado são fichas (e.g., Kouba, 1989; Mulligan, 1992; Mulligan & Mitchelmore, 1997; Mulligan & Wright, 2000). Nesses estudos, de modo geral, foram identificados estratégias e níveis de conhecimento que ilustram o desenvolvimento dos conceitos de multiplicação e de divisão entre as idades de 5 e 8 anos. Apesar da grande relevância dessas investigações, em nenhum momento os autores se posicionaram a respeito da influência do material disponibilizado sobre os procedimentos adotados e sobre os níveis identificados. Na realidade o que se observa é que existe uma ênfase em examinar como o conhecimento matemático é representado, ou se expressa, a partir dos suportes de representação; quando além dessa possibilidade existe a perspectiva de examinar como o suporte de representação influencia o conhecimento matemático.

Os poucos estudos que especificamente investigam o efeito dos suportes de representação sobre a resolução de problemas com estrutura multiplicativa fazem comparações entre material concreto e lápis e papel. Um exemplo é a pesquisa realizada por Selva (1998) em que crianças (6 a 8 anos) resolviam problemas de divisão inexata em três situações distintas: material concreto (fichas), papel e lápis, e cálculo oral. Como esperado, o desempenho foi melhor com lápis e papel e com material concreto do que por meio do cálculo oral. Os dados mostraram que o uso de fichas e de lápis e papel levava a um desempenho semelhante, porém, superior àquele observado na situação sem material; indicando que a situação gráfica favorecia o desempenho da mesma forma que o material concreto. Observou-se, ainda, que as representações gráficas produzidas com lápis e papel propiciavam estratégias mais flexíveis e apropriadas do que a manipulação das fichas. Enquanto as fichas levavam as crianças a fazer uma representação direta do enunciado do problema, as representações gráficas favoreciam o uso de estratégias que contemplavam, de forma mais efetiva, os elementos do problema e suas relações.

Lautert e Spinillo (1999) obtiveram resultados semelhantes aos de Selva (1998) ao comparar a resolução de operações de divisão por um mesmo grupo de crianças (5 a 8 anos) por meio de lápis e papel e por meio de fichas. Os dados foram analisados em função da natureza dos grafismos adotados (idiossincrático, pictográfico, icônico e simbólico) e do grau de detalhamento dos procedimentos de resolução. Um dos dados mais interessantes obtidos neste estudo, e que interessa à discussão levantada na presente investigação, foi que havia crianças que quando usavam as fichas faziam representações elementares (imprecisas e restritas ao enunciado da operação) e que, estas mesmas crianças, quando na situação gráfica, produziam representações mais elaboradas em que detalhavam com precisão os procedimentos utilizados. Através dos grafismos as crianças tendiam a adotar procedimentos mais flexíveis e apropriados do que quando fichas plásticas eram disponibilizadas. Diferenças entre as situações, entretanto, tendiam a diminuir entre as crianças mais velhas que passavam a produzir representações mais elaboradas em ambas as situações. A principal conclusão foi que aquilo que a criança representa não expressa apenas suas habilidades lógico-matemáticas, mas também expressa os limites e as possibilidades representacionais conferidas pela própria situação, ou seja, pelos suportes de representação oferecidos.

Na realidade, as pesquisas fazem a distinção apenas entre grafismos e material concreto, tendendo a considerar o material concreto de maneira geral, sem atentar para algumas especificidades que, a nosso ver, são relevantes e que merecem ser discutidas. Observa-se, como mencionado, que na grande maioria das vezes o material concreto disponibilizado são fichas a serem manipuladas pelas crianças. A idéia por trás é que a manipulação é o fator-chave no processo de resolução. Se é manipulação, então, tanto faz fichas como outros objetos manipuláveis (jarros e flores, carrinhos e caixas). Mas seria a manipulação o único fator a ser considerado a respeito do material concreto? Será que todo material concreto é igual? Será que todo material concreto desempenha o mesmo papel no processo de resolução de problemas?

Segundo nossa análise, as perguntas acima são respondidas de forma negativa. Tal negativa se baseia em dados derivados de uma série de investigações conduzidas por Hughes (1986) sobre adição e subtração em crianças de 3 a 7 anos de idade. Em um desses estudos, o autor contrastou duas situações: hipotética e escolar. Na situação hipotética, sem nenhum material presente, era perguntado à criança: "Se existisse uma criança em uma loja e mais duas crianças chegassem, quantas crianças haveria na loja?"; "Se estivessem três crianças em uma loja e duas saíssem, quantas crianças ficariam na loja?". Na situação escolar, sem nenhum material presente e envolvendo a linguagem matemática formal, era perguntado à criança: "Quanto é um mais dois?"; "Quanto é três menos dois?". Os resultados mostraram que a situação hipotética foi mais fácil do que a situação escolar. A explicação para este resultado foi que, apesar de ambas as situações não envolverem material concreto, o melhor desempenho na situação hipotética deveu-se à presença de referentes para as quantidades mencionadas no enunciado das perguntas (duas crianças, três crianças); enquanto na situação escolar, os referentes estavam ausentes (dois, três). Segundo o autor, os referentes desempenham papel essencial na resolução de operações aritméticas e que a dificuldade em lidar com a linguagem matemática desaparece quando o referente é fornecido.

Schliemann (1998) comenta que adolescentes e adultos com pouca ou nenhuma escolarização também têm dificuldades em compreender expressões do tipo "Quanto é 27 mais 19?", embora compreendam e respondam adequadamente a perguntas do tipo "Se você tivesse 27 reais e alguém lhe desse mais 19 reais, com quantos reais você ficaria?", mesmo na ausência de moedas ou cédulas. Ao que parece, o uso de números acompanhados de referentes permite atribuir significados que facilitam a compreensão.

Tais considerações nos levam a questionar a idéia de que é a natureza manipulativa do material concreto que confere a ele o poder de facilitar a resolução de problemas. O que ocorre é que muitos objetos além de serem manipuláveis, possuem também uma clara relação com os referentes das quantidades presentes no enunciado dos problemas. Como separar, então, do ponto de vista metodológico, o caráter de manipulação e de representação que parecem estar associados ao material concreto? Uma possibilidade é manter constante o caráter manipulativo dos objetos e variar o seu caráter representacional: objetos com uma relação definida com os referentes das quantidades presentes no enunciado dos problemas (jarros e flores) e objetos com uma relação indefinida com os referentes (fichas). Apesar de manipuláveis e concretos, tais suportes são de natureza distinta.

Essa discussão acerca do caráter mais explícito ou menos explícito da relação entre suporte de representação e o enunciado do problema foi levantada anteriormente por Spinillo (2001), em estudo sobre operações e problemas de divisão (problemas de partição e de quotição, divisão exata e inexata) em crianças. A autora comenta que é possível supor que fichas ou palitos são materiais concretos indefinidos, uma vez que não indicam de imediato e de forma clara a que quantidades eles se referem em um dado problema ou operação. Entretanto, carrinhos e caixas, que também são suportes concretos e manipuláveis, indicam de forma clara a que quantidades eles se referem em um dado problema: carrinhos são o dividendo e as caixas o divisor; ou que carrinhos são o multiplicando e caixas o multiplicador. Essas relações, entretanto, não ficam claras quando o material concreto disponibilizado são fichas. Consideradas como um material indefinido, as fichas tanto podem representar o divisor como o dividendo na divisão; e na multiplicação podem tanto representar o multiplicando como o multiplicador. A natureza do material concreto merece, portanto, uma análise mais acurada sobre o efeito que pode ter sobre o processo de resolução, reflexão esta que vai além da simples dicotomia entre concreto e gráfico e sobre a idéia de que todo material, dado seu caráter manipulativo, é igual.

A partir dessas considerações, o presente estudo tem por objetivo investigar se e como diferentes suportes concretos de representação influenciam a forma como crianças resolvem problemas inseridos no campo das estruturas multiplicativas (multiplicação e divisão). De forma mais específica, examina-se a possibilidade de que nem todo material concreto tem o mesmo efeito sobre a resolução de problemas. A hipótese é de que material concreto com uma relação clara e definida com os referentes das quantidades presentes no enunciado dos problemas (carrinhos e caixas, jarros e flores) auxiliaria na resolução mais do que material concreto indefinido, cuja relação com os referentes não é evidente (fichas plásticas). A idéia por trás dessa hipótese é que não é apenas o caráter manipulativo dos objetos que facilitaria a resolução de problemas, mas o fato do material concreto apresentar uma relação definida com os referentes das quantidades presentes no enunciado do problema.

Método

Participantes

Quarenta crianças de classe média, alunas da 2ª série do primeiro ciclo do ensino fundamental de escolas particulares na cidade do Recife, com idade média de 8 anos e 2 meses foram igualmente divididas em dois grupos. Às crianças do Grupo 1 (material concreto indefinido) foram disponibilizadas fichas plásticas e para as crianças do Grupo 2 (material concreto definido), objetos que estavam relacionados diretamente aos referentes das quantidades contidas no enunciado dos problemas (carrinhos e caixas, flores e jarros).

Procedimento e planejamento experimental

Os participantes foram individualmente entrevistados em uma única sessão, sendo solicitados a resolver, um por vez, dois problemas de isomorfismo de medidas, sendo um de divisão e outro de multiplicação. Metade das crianças em cada grupo resolvia inicialmente o problema de multiplicação e depois o de divisão; a outra metade resolvia os problemas na ordem inversa. Os problemas eram: Problema 1 (multiplicação): "Maria tem 3 jarros e quer colocar 5 flores em cada jarro. Quantas flores ela precisa comprar?"; e Problema 2 (divisão): "João ganhou 18 carrinhos e quer guardar os carrinhos em 6 caixas. Quantos carrinhos ele vai colocar em cada caixa?"

Cada problema era apresentado por escrito em uma cartela, sendo lido em voz alta pelo examinador, juntamente com a criança, ficando a cartela disponível para consulta. Após a resolução de cada problema, o examinador, através de uma entrevista clínica, solicitava que a criança explicasse como havia solucionado cada problema. As entrevistas foram registradas em vídeo e posteriormente transcritas em protocolos individuais.

Material

Grupo 1 (material concreto indefinido): 30 fichas plásticas circulares (4cm de diâmetro), todas na cor vermelha.

Grupo 2 (material concreto definido): 25 carrinhos plásticos, 12 caixas de papelão (11cm x 16cm x 5cm), 25 flores plásticas em tamanho reduzido, 12 jarros plásticos em tamanho reduzido.

Em ambos os grupos disponibilizava-se uma quantidade de elementos (fichas, carrinhos, flores, jarros, caixas) maior do que aquelas presentes no enunciado dos problemas.

Análise dos dados e Resultados

Os dados foram analisados em função do número de respostas corretas e em função dos procedimentos de resolução adotados.

Respostas corretas

No geral, como mostra a Tabela 1, e confirmado pelo Teste de Wilcoxon (z = -2,4990; p = 0,025), o desempenho no Problema 1 (multiplicação: 90 %) foi melhor que no Problema 2 (divisão: 72,5%).

Tabela 1
Porcentagem de respostas corretas em cada problema e em cada grupo

Grupos	Problema 1 (multiplicação)	Problema 2 (divisão)	Total
Grupo 1 (fichas)	80	60	70
Grupo 2 (objetos)	100	85	92,5
Média	90	72,5	

Diferenças entre os grupos também foram detectadas (Teste Kruskal-Wallis, p = 0,0048): as crianças do Grupo 1 (indefinido: 70%) tiveram um desempenho inferior ao das crianças do Grupo 2 (definido: 92,5%).

O desempenho entre os grupos em cada problema foi comparado por meio do Teste de Kruskal-Wallis, encontrando-se diferenças significativas entre os grupos tanto em relação à multiplicação (p = 0,010) como em relação à divisão (p = 0,026). O Teste U de Mann-Whitney detectou diferenças entre os grupos tanto em relação ao Problema 1 (multiplicação) (U = 125; p = 0,0268) como em relação ao Problema 2 (divisão) (U = 106; p = 0,0078). Nota-se que o padrão de resultados era o mesmo em ambos os problemas: o desempenho foi melhor entre as crianças do Grupo 2 (definido) do que entre as crianças do Grupo 1 (indefinido). Esses resultados sugerem que tanto em problemas de multiplicação como de divisão, o material concreto definido propiciava um maior número de acertos.

Análises foram conduzidas em cada grupo separadamente, por meio do Teste de Wilcoxon, apontando diferenças significativas entre os problemas apenas em relação ao Grupo 1 (indefinido) (z = -2.0000; p = 0,046). Isso ocorreu porque o Problema 1 (multiplicação) foi mais fácil que o Problema 2 (divisão), obtendo-se 80% e 60% de respostas corretas, respectivamente. Diferenças entre os problemas não foram detectadas entre as crianças do Grupo 2 (objetos) (z = -1.732; p = 0,083).

Assim, no Grupo 2 (definido) o desempenho foi igualmente bom nos dois problemas, sobretudo no Problema 1 (multiplicação) em que se observou um acerto sistemático das crianças (Tabela 1). O mesmo não se observou em relação ao Grupo 1 (indefinido) em que o percentual de acertos no problema de divisão foi menor que no problema de multiplicação.

Os procedimentos de resolução

A análise dos protocolos das crianças, feita conjuntamente por dois juizes, permitiu identificar diversos procedimentos de resolução os quais tomaram por base as pesquisas de Mulligan e colaboradores (Mulligan, 1992; Mulligan & Mitchelmore, 1997; Mulligan & Wright, 2000) e de Selva (1998). Os procedimentos de resolução identificados são descritos e exemplificados a seguir[2].

Uso da adição e da subtração: a criança adiciona ou subtrai os números presentes no enunciado do problema.

> Exemplo 1: Problema 2 (divisão), Grupo 1 (indefinido).
> C – (pega 18 fichas, uma por vez. Retira 6 fichas, ficando 12). É 18 menos 6, 12.
> E – Você acha que é de menos?
> C – É.
> E – E ai? Quantos carrinhos ele vai colocar em cada caixa?
> C – 12

> Exemplo 2: Problema 1 (multiplicação), Grupo 2 (definido).
> C – (conta nos dedos 3 mais 5 e pega 8 flores).
> E – Como fez?
> C – Contei 3 e 5 dá 8.
> E – Oito o quê?
> C – Oito flores.

Contagem unitária e distribuição unitária: quando o problema envolve a multiplicação, a criança conta de um em um para descobrir o todo (ver Exemplo 3); quando o problema envolve a divisão, ela realiza uma distribuição unitária através de correspondência um-para-um (ver Exemplo 4).

> Exemplo 3: Problema 1 (multiplicação), Grupo 2 (definido)
> C –3 jarros (pega os jarros), ai bota 5 flores em cada um (coloca de uma vez cinco flores em cada jarro). É 15.

E – E como chegou em 15?
C – Ai eu sai contando assim: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 (conta cada flor).

Exemplo 4: Problema 2 (divisão), Grupo 2 (definido).
C – (pega 18 carrinhos e 6 caixas. Distribui, um a um, cada carrinho até acabar os 18 carrinhos). Dá 3 em cada caixa.
E – Me explica como fez.
C – Fui botando um, fui botando um, fui botando outro e mais outro, e mais outro até acabar tudo (aponta ora para um carrinho em uma caixa, ora para outro carrinho em outra caixa); todos os carrinhos. Ai dá 18. Pode contar.
E – E por que foi que botou de 1 em 1?
C – Porque é melhor.
E – Melhor como? Me explica.
C – Porque eu só sei quanto vai na caixa depois que dividir tudinho.
E – Então, quantos carrinhos João vai botar em cada caixa?
C – 3.

Ensaio e erro: de início, a criança estima uma quantidade de elementos em cada parte ou estima quantas partes poderá haver. Através de tentativas, vai fazendo ajustes em que aumenta ou diminui essa quantidade, até que o total de elementos corresponda ao dividendo. Esse procedimento foi adotado apenas no Problema 2 (divisão).

Exemplo 5: Problema 2 (divisão), Grupo 2 (definido).
C – (Pega 6 caixas. Coloca 8 carrinhos na sexta caixa. Coloca mais 4 carrinhos na primeira caixa. Retira 2 carrinhos da sexta caixa e os coloca na primeira caixa, coloca mais carrinhos, de forma que a primeira e a sexta caixas ficam com 6 carrinhos cada. Em seguida, retira 2 carrinhos de cada caixa, ficando cada uma com 4 carrinhos. Coloca 4 carrinhos na quinta caixa, 4 carrinhos na segunda caixa, 2 carrinhos na terceira caixa. Tira 1 carrinho da segunda caixa e coloca na terceira caixa. Retira 1 carrinho da primeira, da sexta e da quinta caixa, ficando cada uma das cinco caixas com 3 carrinhos e a quarta caixa fica vazia. Conta todos os carros e coloca 3 carros na quarta caixa.) Pronto!
E – Quantos carrinhos ele vai colocar em cada caixa?
C – 3.

Adição repetida[3]: a criança adiciona sucessivamente uma mesma quantidade tantas vezes quantas forem necessárias até chegar no multiplicando. Este procedimento foi adotado apenas no Problema 1 (multiplicação).

Exemplo 6: Problema 1 (multiplicação), Grupo 1 (indefinido).
C – (pega 5 fichas) 5 (coloca mais 5 fichas), mais 5 e mais 5 (coloca mais 5). Ao todo comprou 15.
E – E fez como? Como pensou?
C – Colocando 5 mais 5 mais 5. Maria comprou ao todo 15 flores.

Exemplo 7: Problema 1 (multiplicação), Grupo 2 (definido).
C – (Coloca 5 flores em cada jarro).
E – Então, quantas flores ela precisa comprar?
C – 5 mais 5 mais 5. Ai faz 15 (aponta cada jarro com 5 flores cada).

Contagem em múltiplos: a criança conta com base em agrupamentos, gerando múltiplos. Este procedimento foi adotado apenas no Problema 1 (multiplicação).

Exemplo 8: Problema 1 (multiplicação), no Grupo 2 (definido).
C – (Coloca 5 flores em cada jarro).
E – Quantas flores vai precisar?
C – 5, 10, 15 (apontando cada jarro com 5 flores cada).

Misto: a criança combina procedimentos distintos durante a resolução de um mesmo problema, como mostra o Exemplo 9, ilustrado na Figura 1 (contagem em múltiplos associada à adição repetida) e o Exemplo 10 (correspondência um-para-muitos[4] associada ao uso da operação de multiplicação).

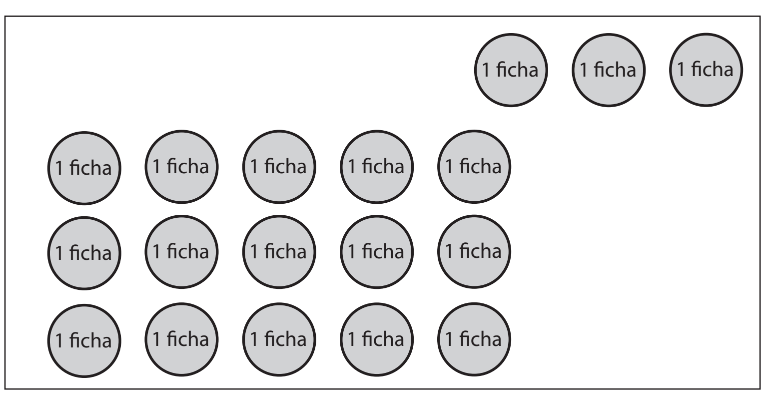

Figura 1. Resolução do Problema 1 (multiplicação), Grupo 1 (fichas)

Exemplo 9: Problema 1 (multiplicação), Grupo 1 (indefinido)
C – 15. (Ao longo da entrevista diz que as três fichas acima à direita são os jarros e que as demais fichas são as flores)
E – 15? Como foi que pensou, que descobriu que eram 15?
C – 5, 10, 15. (Coloca as fichas sobre a mesa uma a uma. Primeiro, forma uma linha com 5 fichas; em seguida faz o mesmo, formando uma outra linha e depois, dessa mesma maneira, forma uma terceira linha). Cinco mais 5 mais 5 (apontando para cada linha).
E – Por que foi que colocou 5, 5 e 5?

C – Ela não disse que tinha que colocar 5 flores? Então eu botei 5 flores!
E – E essas 5 flores vão pra onde?
C – Pra cada um dos jarros.
E – Quantas flores ela precisa comprar?
C – 15.

Exempo 10: Problema 1 (multiplicação), Grupo 2 (definido)
C – 15.
E – Como sabe que são 15?
C – 3 ligados a cada 5 (Pega os 3 jarros, coloca 5 flores no primeiro jarro, depois 5 flores no segundo jarro e 5 no terceiro jarro)
E – Como foi que você fez, me explica, como foi que pensou?
C – Porque 5 vezes 3 é 15.

Uso da multiplicação e da divisão: a criança usa as operações de divisão e de multiplicação.

Exemplo 10: Problema 1 (multiplicação), Grupo 2 (definido).
C – 15 (pega 15 flores)
E – Como foi que você pensou?
C – 5 vezes 3 é 15 flores.

Exemplo 11: Problema 2 (divisão), Grupo 1 (indefinido).
C – (pega 6 fichas)
E – Como foi que você pensou?
C – Por que 18 dividido por 3 dá 6.
E – Esse 3 é o que? De onde saiu esse 3?
C – São as caixas. Não, são os carrinhos.
E – 6 o quê?
C - 6 carrinhos em cada caixa.

Exemplo 12: Problema 1 (divisão), Grupo 2 (definido).
C – 3 (pega 3 carros).
E – Por quê? Me explica. Como foi que tu pensou?
C – 18 dividido por 6, 3.
E – 18 é o quê?
C – É a quantidade de carros.
E – E o 6?
C – É a quantidade de caixas.
E – E o 3?
C – É a quantidade que vai ficar em cada caixa.

Como se pode ver na Tabela 2, os procedimentos mais freqüentes foram: a contagem ou distribuição unitária (25%), a adição repetida (21,3%), o ensaio e erro (17,5%) e o uso da multiplicação e da divisão (13,8%).

Tabela 2
Porcentagem de procedimentos em cada problema

Procedimentos	Problema 1 (multiplicação)	Problema 2 (divisão)
Operação de adição e subtração (n = 9)	45,8	54,2
Contagem ou distribuição unitária (n = 20)	24	76
Ensaio e erro (n = 14)	0	100
Adição repetida (n = 17)	100	0
Contagem em múltiplos (n = 3)	100	0
Misto (n = 6)	100	0
Operação de multiplicação e divisão (n = 11)	31,6	68,4

Dado haver muitas células vazias (freqüência igual à zero), não foi possível proceder a um tratamento estatístico. No entanto, conforme a Tabela 2, alguns procedimentos estavam presentes em ambos os tipos de problema (adição e subtração, contagem ou distribuição unitária, uso de multiplicação e divisão); enquanto outros procedimentos apareciam apenas na resolução do problema de divisão (ensaio e erro por ajustes) ou no problema de multiplicação (adição repetida).

A Tabela 3 mostra que os procedimentos de resolução variam em função do suporte de representação disponibilizado.

Tabela 3
Porcentagem de procedimentos por grupo

Procedimentos	Grupo 1 (fichas)	Grupo 2 (objetos)
Operação de adição e subtração (n = 9)	77,7	22,3
Contagem ou distribuição unitária (n = 20)	60	40
Ensaio e erro (n = 14)	42,8	57,2
Adição repetida (n = 17)	23,5	76,5
Contagem em múltiplos (n = 3)	33,3	66,7
Misto (n = 6)	50	50
Operação de multiplicação e divisão (n = 11)	63,6	36,4

O procedimento de contagem e distribuição unitárias se concentra no Grupo 1 (indefinido); enquanto os procedimentos ensaio e erro e adição repetida são mais freqüentes no Grupo 2 (definido).

Com o objetivo de melhor examinar as relações entre procedimentos de resolução e suportes de representação em relação a cada problema, foi conduzida uma análise tomando por base cada grupo separadamente.

Tabela 4
Porcentagem de procedimentos em cada grupo e em cada problema

Procedimentos	Problema 1 (multiplicação)	Problema 2 (divisão)
Grupo 1 (fichas)		
Operação de adição e subtração (n = 7)	57,1	42,9
Contagem ou distribuição unitária (n = 12)	41,7	58,3
Ensaio e erro (n = 6)	0	100
Adição repetida (n = 4)	100	0
Contagem em múltiplos (n = 1)	100	0
Mista (n = 3)	100	0
Operação de multiplicação e divisão (n = 7)	42,9	57,1
Grupo 2 (objetos)		
Operação de adição e subtração (n = 2)	0	100
Contagem ou distribuição unitária (n = 8)	0	100
Ensaio e erro (n = 8)	0	100
Adição repetida (n = 13)	100	0
Contagem em múltiplos (n = 2)	100	0
Mista (n = 3)	100	0
Operação de multiplicação e divisão (n = 4)	50	50

O Teste de Wilcoxon, aplicado aos dados no Grupo 1 (indefinido), não detectou diferenças significativas entre os problemas em nenhum dos procedimentos. Isso mostra que as fichas parecem não propiciar o uso mais freqüente de um tipo particular de procedimento. Na realidade, como pode ser visto na Tabela 3 e na Tabela 4, ao usar as fichas, a tendência das crianças é adotar, tanto em um problema como em outro, a contagem e a distribuição unitária, e usar operações.

Em relação ao Grupo 2 (definido), o Teste de Wilcoxon mostrou haver diferenças entre os problemas quanto ao uso: (a) da contagem e distribuição unitária (z = -2,5205; p = 0,0117); (b) do ensaio e erro por ajustes (z = -2,5205; p = 0,0117); e (c) da adição repetida (z = -3,1798; p = 0,0015). A contagem e distribuição unitária e a estratégia de ensaio e erro por ajustes foram utilizadas apenas nos problemas de divisão; enquanto a adição repetida aparecia apenas nos problemas de multiplicação.

Discussão e conclusões

As duas principais conclusões derivadas deste estudo decorrem das relações entre suporte de representação e desempenho, e entre suporte de representação e procedimento de resolução.

A primeira conclusão é que as crianças que tinham como suporte de representação material concreto definido (caixas, carros, jarros, flores) apresentavam um melhor desempenho do que aquelas que resolviam os problemas com o apoio de material concreto indefinido (fichas). O uso de objetos definidos permite que a criança identifique o divisor e o dividendo, no caso da divisão; e o multiplicando e o multiplicador no caso da multiplicação, podendo facilitar a compreensão dos invariantes envolvidos na divisão e na multiplicação; fato este que não ocorre quando o material concreto são objetos indefinidos como fichas. O fato de o material concreto definido facilitar o desempenho mais do que o material concreto indefinido mostra que os referentes, mais do que a possibilidade de manipulação, têm papel importante na resolução de problemas.

Uma segunda conclusão é que a natureza do material concreto tem influência sobre os procedimentos de resolução adotados. Material concreto que favorece a identificação dos termos das operações envolvidas na resolução do problema, como é o caso dos objetos definidos, auxilia a criança a manter em mente, durante o processo de resolução, o significado de suas ações e aquilo que o problema solicita. Esse tipo de suporte promove o uso de procedimentos de resolução mais compatíveis com os conceitos multiplicativos que requerem o estabelecimento de relações de agrupamentos como a contagem em múltiplos, a adição repetida e a relação um-para-muitos. Por exemplo, no caso particular do problema de multiplicação, quando o suporte de representação eram as fichas, a contagem unitária foi o procedimento mais adotado. As fichas eram entendidas como elementos isolados que eram manipulados um a um. Por outro lado, quando o suporte de representação eram os objetos, o procedimento mais comum era a contagem em múltiplos e a adição repetida. Tais procedimentos, como mencionado, mostram que a criança tende a lidar com os elementos de forma agrupada e não de forma isolada. É possível que tais agrupamentos sejam, em certo sentido, os precursores do esquema um-para-muitos, esquema esse essencial aos conceitos inseridos no campo das estruturas multiplicativas como a divisão e a multiplicação.

Assim, nem todo material concreto é igual; há aqueles que favorecem mais o desempenho e o uso de procedimentos mais apropriados que outros. Comparando-se materiais concretos distintos, como feito neste estudo, fica claro que a manipulação (contrariamente ao que se tende a pensar) não é o fator essencial, mas o fato do material permitir estabelecer uma relação com os referentes das quantidades sim, gerando uma compreensão acerca das relações necessárias à resolução dos problemas. Com o material concreto definido, o que se manipula são relações que precisam ser estabelecidas em problemas inseridos no campo das estruturas multiplicativas; enquanto que com as fichas o que se manipula são elementos isolados.

Separar essas duas propriedades do material concreto (seu caráter manipulativo e representacional) é algo relevante também do ponto de vista educacional. Como criticado por diversos autores (e.g., Schliemann, 1998; Schliemann, Santos, & Costa, 1992; Spinillo & Magina, 2004), a crença de que a manipulação é fator crucial para a compreensão matemática deve ser cuidadosamente considerada, uma vez que as relações matemáticas são operações mentais, não estando materializadas nos objetos e nem deles emanam. Na realidade, o conhecimento matemático não se deriva do uso do material concreto, porém se constrói a partir dos significados atribuídos à situação, das ações e reflexões da criança sobre a situação. Embora o material concreto possa auxiliar a estabelecer uma relação entre as ações realizadas e a formalização matemática, ele não é a chave da compreensão. Essas considerações estão em estreita relação com a perspectiva teórica de Vergnaud, conferindo ao material concreto (e a outros suportes de representação) papel relevante tanto nas representações como nas situações, instâncias essas constitutivas do conceito. O material concreto, seja ele definido ou indefinido, caracteriza, portanto, uma dada situação. Esta dimensão é bastante distinta da clássica dicotomia concreto-abstrato ou da clássica seqüência do concreto para o abstrato. Da mesma forma, esta dimensão se afasta de propostas que sugerem uma aceitação incondicional ou um abandono do material concreto, se aproximando de posições em que ao material concreto são atribuídas tanto possibilidades como limitações (ver Schliemann, Santos, & Costa, 1992; Spinillo & Magina, 2004). Este tipo de reflexão só é possivel quando o material concreto é entendido, como no presente estudo, como um suporte de representação.

Também merece ser comentado o fato de que as crianças usam o material concreto de duas maneiras distintas: (1) ele é usado para resolver o problema; e (2) ele é usado para comunicar, ou seja, para explicar para o examinador como resolveu o problema. Na presente investigação não foi possível dizer se essas formas variavam com o tipo de suporte ou não. No entanto, nota-se que as crianças que resolviam os problemas por meio da operação de multiplicação e de divisão tendiam a utilizar o material concreto para explicar como haviam resolvido o problema. Talvez, usar o suporte de representação dessa forma seja derivado de um domínio que a criança já possui acerca das operações; prescindindo, em certo sentido, do apoio do material concreto durante a resolução do problema.

Para finalizar, é necessário considerar, tanto na pesquisa como em situações em sala de aula, o efeito da natureza do material concreto sobre a compreensão da criança. Assim, a forma de raciocinar não é produto apenas da lógica da criança, mas da interação da criança com os suportes que lhes são disponibilizados no momento da resolução. O suporte de representação é, de fato, uma instância do próprio processo de raciocínio. Isso não significa reduzir a lógica aos suportes de representação, mas inserir nesta lógica esses suportes.

Referências

Anghileri, J. (1998). Uses of couting in multiplication and division. In I. Thompson (Org.), *Language in mathematical education* (pp. 95-104). Buckingham: Open University Press.

Carraher, T. N., Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2003). *Na vida dez, na escola zero*. São Paulo: Cortez.

Da Rocha Falcão, J.T. (2005). Elementos para uma abordagem psicológica do desenvolvimento de conceitos científicos e matemáticos. In M. G. Dias & A. G. Spinillo (Orgs.), *Psicologia Cognitiva* (2ª ed., pp. 137-162). Recife: Editora da Universidade Federal de Pernambuco.

Higino, Z. (1997). Desenvolvimento da compreensão da notação escrita do sistema de numeração [Resumo]. In *II Semana de Estudos em Psicologia da Educação Matemática.* Resumos (pp. 46-53). Recife, Brasil.

Hughes, M. (1986). *Children and number: difficulties in learning mathematics.* Oxford: Basil Blackwel.

Kamii, C., Lewis, B., & Kirkland, L. (2001). Manipulatives. When are they useful? *Journal of Mathematical Behavior,* 20*,* 21-30.

Kouba, V. L. (1989). Children's solution strategies for equivalent set multiplication and division word problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, *20*(2), 147- 158.

Lautert, S., & Spinillo, A. G. (1999). Como crianças representam a operação de divisão: da linguagem oral para outras formas de representação. *Temas em Psicologia*, *7*(1), 23-36.

Mulligan, J. (1992). Children's solutions to multiplication and division word problems: a longitudinal study. In W. Geeslin & K. Graham (Orgs.), *Proceedings of the Sixteenth International Conference of Psychology of Mathematics Education*, *4*(1), 24-41.

Mulligan, J., & Mitchelmore, M. (1997). Young children's intuitive models of multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, *28*(3), 309-329.

Mulligan, J., & Wright, M (2000). Interview-based assessment of early multiplication and division [Resumo]. In International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME – Hiroshima, Japão) (Org.), *Proceedings of the 24th Conference*, *4*, 17-24.

Nunes, T. (1994). O papel da representação na resolução de problemas. *Dynamics*, *1*(7), 19-27.

Nunes, T. (1997). Systems of signs and mathematical reasoning. In T. Nunes, & P. Bryant (Orgs.), *Learning and teaching mathematics* (pp. 29-44). Hove: Psychology Press.

Nunes, T., & Bryant, P. (1997). *Crianças fazendo matemática.* Porto Alegre: Artes Médicas.

Piaget, J. (1965). *The child´s conception of number*. Nova York: Norton.

Schliemann, A. D. (1998). Da matemática da vida diária à matemática da escola. In A. D. Schliemann & D. W. Carraher (Orgs.), *A compreensão de conceitos aritméticos: ensino e pesquisa* (pp. 11-38). Campinas: Papirus.

Schliemann, A. D., Santos, C. M. dos, & Costa, S. C. da (1992). Da compreensão do sistema decimal à construção de algoritmos. In E. S. de Alencar (Org.), *Novas contribuições da psicologia aos processos de ensino e aprendizagem* (pp. 97-118). São Paulo: Cortez.

Selva, A. C. V. (1998). Discutindo o uso de materiais concretos na resolução de problemas de divisão. In A. D. Schliemann & D. W. Carraher (Orgs.), *A compreensão de conceitos aritméticos: ensino e pesquisa* (pp. 95-119). Campinas: Papirus.

Sinclair, A., Mello, D., & Siegrist, F. (1989). A notação numérica na criança. In A. Sinclair (Org.), *A produção de notações na criança* (pp. 71-96). São Paulo: Cortez.

Spinillo, A. G. (2001). *Papel dos referentes e dos mediadores na compreensão dos conceitos de divisão*. Relatório de pesquisa não-publicado, PIBIC/CNPq/UFPE.

Spinillo, A. G., & Magina, S. (2004). Alguns "mitos" sobre a educação matemática e suas conseqüências para o ensino fundamental. In M. R. Pavanello (Org.), *Matemática nas séries iniciais do ensino fundamental* (pp. 7-35). São Paulo: Biblioteca do Educador Matemático.

Vasconcelos, L. (1998). Problemas de adição e de subtração: modelos teóricos e práticas de ensino. In A. Schliemann & D. Carraher (Orgs.), *A compreensão de conceitos matemáticos: ensino e pesquisa* (pp. 53-72). Campinas: Papirus.

Vergnaud, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. In T. P. Carpenter, J. M. Moser, & T. A. Romberg (Orgs.), *Addition and subtraction: a cognitive perspective* (pp. 141-161). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum.

Vergnaud, G. (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad: problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escula primaria.* México: Trillas.

Vergnaud, G. (1998). Multiplicative structures. In J. Hiebert & M. Behr (Orgs.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 141-161). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum.

Vergnaud, G. (2003). A gênese dos campos conceituais. In E. P. Grossi (Org.), *Por que ainda há quem não aprende? A teoria* (pp. 21-64). Rio de Janeiro: Vozes.

Zunino, D. L. (1995). *A matemática na escola: aqui e agora*. Porto Alegre: Artes Médicas.

Notas

[1] Uma ampla discussão sobre correspondência um-para-muitos é conduzida por Nunes e Bryant (1997). Um exemplo de correspondência um-para-muitos é o caso da correspondência feita por crianças entre um vaso e um buquê com dez rosas ou entre uma camisa branca e três bermudas de cores diferentes. Tais relações entre conjuntos de objetos diferentes estariam, segundo Piaget (1965), envolvidas nas primeiras noções das crianças acerca da multiplicação.

[2] C – fala da criança; E – fala do examinador. Entre parênteses constam as ações e gestos das crianças.

[3] Mulligan e Wright (2000) identificaram um procedimento análogo a este, denominado de subtração repetida que era adotado apenas nos problemas de divisão. No entanto, subtração repetida não foi procedimento adotado pelas crianças na presente investigação.

[4] O procedimento um-para-muitos foi adotado apenas quando combinado a outro procedimento, estando incluído, portanto, no que denominamos de procedimento misto. O procedimento um-para-muitos é considerado essencial ao raciocínio multiplicativo, como mencionado na parte inicial deste artigo.

Adriana Maria da Silva Barbosa Batista, mestre em Psicologia Cognitiva pela Universidade Federal de Pernambuco, é pedagoga na Secretaria de Educação da Prefeitura do Recife. Endereço para correspondência: Rua Dr. Geraldo de Andrade, 334, Espinheiro; Recife, PE; CEP: 52021-220. Tel.: (81) 3241-2893; 9216-1897. E-mail: amsbbatista@yahoo.com.br

Alina Galvão Spinillo, doutora em Psicologia do Desenvolvimento pela Universidade de Oxford, Inglaterra, é professora associada na Pós-Graduação em Psicologia Cognitiva, Universidade Federal de Pernambuco. E-mail: spin@ufpe.br

Recebido em 15.mar.07
Reformulado em 06.mar.08
Aceito em 28.abr.08