filosofia unisinos | ISSN 1984-8234
Unisinos Journal of Philosophy

Filosofia Unisinos
Unisinos Journal of Philosophy
25(2): 1-15, 2024 | e25202

Unisinos – doi: 10.4013/fsu.2024.252.02

Artigo

Modalidades bivalentes e modalidades polivalentes: o caso das lógicas modais trivaloradas

Bivalent modalities and multiple-valued modalities: the case of trivalued modal logics

Edson Bezerra
https://orcid.org/0000-0002-0865-5197
Sociedad Argentina de Análisis Filosófico, SADAF, Buenos Aires, Argentina. Email: edson.vinber92@gmail.com

RESUMO

A conexão entre lógicas multivaloradas e lógicas modais é antiga. As investigações pioneiras de Łukasiewicz em 1920 acerca de futuros contingentes por meio de lógicas multivaloradas foram tentativas de caracterizar modalidades por meio de valores de verdade. Embora lógicas modais e as multivaloradas constituam campos autônomos de investigação, suas interações são muito prolíficas. Neste artigo, investigamos lógicas modais trivaloradas baseadas nas lógicas trivaloradas **LP**, $\mathbf{K}_3$, **TS** e **ST**. Mais especificamente, discutimos duas possíveis maneiras de interpretar sentenças modais: (i) sentenças modais $\Box A$ e $\Diamond A$ podem receber somente verdadeiro ou falso; e (ii) sentenças modais também podem receber valores intermediários. Argumentamos que ambas caracterizações possuem virtudes e problemas. No caso (i), argumentamos que elas validam princípios modais que contrariam suas próprias inferências a nível proposicional. Já no caso (ii), argumentamos que sua proximidade com a lógica clássica impõe certas dificuldades em algumas aplicações dessas lógicas.

Palavras-chave: lógicas modais, lógicas multivaloradas, lógicas subestruturais.

ABSTRACT

The connection between many-valued logics and modal logics is old. Łukasiewicz›s pioneering investigations in 1920 about future contingents through multivalued logics attempted to characterize modalities through truth values. Although modal and multivalued logics constitute autonomous fields of investigation, their interactions are very prolific. In this article, we investigate three-valued modal logics based on the three-valued logics **LP**, $\mathbf{K_3}$, **TS** and **ST**. More specifically, we discuss two possible ways to interpret modal sentences: (i) modal sentences $\Box$A and $\Diamond$A can receive only true or false; and (ii) modal sentences can also receive intermediate values. We argue that both characterizations have virtues and problems. In case (i), we argue that they validate modal principles that contradict their inferences at the propositional level. In case (ii), we argue that its proximity to classical logic imposes certain difficulties in some applications of these logics.

Keywords: modal logics, many-valued logics, substructural logics.

1 Introdução

A conexão entre lógicas multivaloradas e lógicas modais é antiga. De fato, como Kneale e Kneale (1962), Rescher (1969) e Ballarin (2010) apontam, as investigações pioneiras de Łukasiewicz em 1920 acerca de futuros contingentes por meio de lógicas multivaloradas foram tentativas de caracterizar modalidades por meio de valores de verdade. É sabido que na lógica $Ł_3$, o valor intermediário ½ foi introduzido para formalizar o conceito de "possibilidade" ($\Diamond$). Desse modo, uma sentença do tipo $\Diamond A$ é verdadeira (i.e., recebe o valor 1) no caso em que A recebe o valor ½. Por outro lado, a introdução de um valor de verdade para capturar o conceito de possibilidade enfrentou problemas. Por exemplo, Dugundji (1940) mostra que lógicas modais de implicação estrita de Lewis & Langford (1932) não podem ser caracterizadas por tabelas de verdade finitas.[1] Além disso, Suszko (1977) e Haack (1978) argumentam contra a ideia de que o conceito de possibilidade seja adequadamente caracterizado por um valor de verdade. Embora a caracterização de Łukasiewicz falhe em capturar modalidades por meio de valores de verdade, ela mostra que um dos tratamentos pioneiros das lógicas multivaloradas possui uma forte conexão com lógicas modais.

Tanto as lógicas modais quanto as multivaloradas constituem campos autônomos de investigação e que possuem aplicações filosóficas interessantes na literatura filosófica. No caso das lógicas multivaloradas, encontramos aplicações na análise dos paradoxos semânticos (Priest, 1979; Kripke, 1976; Cobreros et al. 2013; Murzi e Rossi, 2021; *etc*), e em aplicações epistêmicas (Belnap, 1977; Carnielli, 1990; Carnielli e Lima Marques, 1999; Kubyshkina e Zaitsev, 2016; *etc*). Já as lógicas modais possuem aplicações epistêmicas (Stalnaker, 2006), temporais (Prior, 1957), deônticas (Chellas, 1980), aléticas (Kripke, 1963), entre outras. Dado que as lógicas modais e as multivaloradas são filosoficamente prolíficas, o estudo de modalidades em lógicas multivaloradas permite a análise de interessantes problemas filosóficos, tais como o estudo de predicados modais em teorias formais aritméticas (Égré, 2005) e no estudo do conceito de vagueza (Priest, 2008).

O estudo de lógicas modais multivaloradas também não é novo na literatura. De fato, os trabalhos de Segerberg (1967), Schotch et al. (1978) e Morikawa (1979) são pioneiros nesse estudo. Nesses trabalhos, encontramos duas maneiras de caracterizar semanticamente as modalidades $\Box$ e $\Diamond$ nessas lógicas: (i) sentenças modais $\Box A$ e $\Diamond A$ podem ser somente verdadeiras ou falsas, e (ii) sentenças mo-

[1] Como observam Coniglio & Peron (2014), o resultado de Dugundji possui limitações, uma vez que existe uma lista considerável de lógicas modais que estão fora do escopo do resultado original de Dugundji. Além disso, eles estendem o resultado original, mostrando que o resultado vale também para uma lista de lógicas modais normais, com os operadores modais $\Box$ e $\Diamond$, e uma lista de lógicas modais cuja lógica proposicional de base difere da lógica proposicional clássica.

dais podem receber valores intermediários. Claramente, não são caracterizações incompatíveis. Como Sergerberg mostra, é possível acomodar ambas caracterizações em um mesmo sistema lógico. Por outro lado, essas duas maneiras de interpretar sentenças modais trazem problemas filosóficos interessantes. Neste artigo, mostramos que ambas caracterizações possuem virtudes e problemas. No caso das modalidades trivaloradas, argumentamos que elas validam princípios modais que contrariam suas próprias inferências a nível proposicional. Por exemplo, no caso de lógicas paraconsistentes que falham em validar a regra de inferência Modus Ponens (MP), essas modalidades validam o axioma K, que por sua vez internaliza uma forma de MP.

Já no caso das modalidades bivaloradas, argumentamos que sua proximidade com a lógica clássica impõe certas dificuldades em algumas aplicações dessas lógicas. Por exemplo, Cobreros *et al.* (2012) argumentam que a lógica **ST** é adequada para formalizar raciocínios contendo conceitos vagos. De acordo com Priest (2008), se aceitamos que conceitos vagos podem ter propriedades essenciais/acidentais, então a lógica modal que estende uma lógica tal como **ST** deve admitir interpretações nas quais $\Box A$ e $\Diamond A$ recebem valores intermediários. Outra dificuldade que essas lógicas modais com modalidades bivalentes podem encontrar é na análise de sentenças autorreferenciais. Como Solovay (1976), Skyrms (1978), Smorynsky (1980), Egré (2005), Naumov (2012), Stern (2014, 2015) e Stern e Nicolai (2021) mostram, lógicas modais são ferramentas interessantes na análise de sentenças autorreferenciais. Por outro lado, muitas lógicas modais não são adequadas nessa análise pois muitas são inconsistentes com sentenças autorreferenciais. Como Egré (2005) sugere, lógicas modais não-clássicas poderiam ser adequadas nessa análise. O problema é que se as sentenças modais dessas lógicas modais recebem somente valores clássicos, há o risco de que esses métodos de autorreferência também sejam inconsistentes com essas lógicas.

Este artigo é organizado como segue. Na seção 2, introduzimos as lógicas multivaloradas que serão analisadas neste trabalho. Particularmente, nos focaremos nas lógica **LP** (Asenjo, 1966; Priest, 1979), $\mathbf{K_3}$ (Kleene, 1938), **TS** (French, 2016) e **ST** (Cobreros *et al.*, 2012). As razões pela qual apresentaremos essas lógicas são que elas partilham uma estrutura semântica, e que são lógicas amplamente adotadas na literatura filosófica sobre paradoxos semânticos. Além disso, são lógicas que não foram suficientemente exploradas do ponto de vista modal, especialmente as lógicas **TS** e **ST**. Desse modo, este trabalho é uma contribuição no estudo de lógicas modais multivaloradas. Na seção 3, introduzimos as extensões modais dessas lógicas. Na seção 3.1, apresentamos as lógicas modais cujas modalidades são interpretadas recebendo valores intermediários. Nesta seção, discutimos as virtudes e os problemas dessa caracterização. Na seção 3.2, apresentamos as lógicas modais cujas modalidades recebem somente verdadeiro e falso, e também discutimos suas virtudes e suas limitações. Na seção 4, encerramos a discussão, delineando direções futuras para pesquisa.

2 Lógicas multivaloradas, lógicas subestruturais e suas extensões modais

As lógicas **L** com as quais nos ocuparemos nesta seção possuem a linguagem $L_{\mathbf{L}} = \{\mathcal{V}, \neg, \wedge, \vee\}$, onde $\mathcal{V} = \{p_i \mid i \in N\}$ é um conjunto enumerável de variáveis proposicionais, $\neg$, $\wedge$ e $\vee$ são os conectivos de negação, conjunção e disjunção, respectivamente. Neste trabalho, utilizaremos p, q, r ... ao invés de p_1, p_2, p_3, ... por uma questão de conveniência. Além disso, utilizaremos as letras maiúsculas A, B, C, ... como metavariáveis para fórmulas. O conjunto de fórmulas $For_{\mathbf{L}}$ é definido recursivamente da maneira usual. Do ponto de vista semântico, essas lógicas são caracterizadas pelas matrizes da forma $M_{\mathbf{L}} = \langle\{1, ½, 0\}, \neg, \wedge, \vee, D_1, D_2\rangle$, onde $\{1, ½, 0\}$ é o conjunto de valores de verdade $\neg$, $\wedge$ e $\vee$ são as funções de verdade correspondentes aos conectivos anteriormente mencionados e que são interpretados de acordo com as seguintes tabelas de verdade:

	¬
1	0
½	½
0	1

∧	1	½	0
1	1	½	0
½	½	½	0
0	0	0	0

∨	1	½	0
1	1	1	1
½	1	½	½
0	1	½	0

D_1, D_2 ⊆ {1, ½, 0} são *standards*, onde é possível que $D_1 = D_2$. Um *standard* determina o que significa para uma valoração *v*: For_L → {1, ½, 0} confirmar ou refutar uma inferência. Quando $D_1 = D_2$, os valores de verdades que pertencem a esse conjunto são chamados de *distinguidos*. As valorações *v* que respeitam as tabelas de verdade acima são chamadas de *valorações Kleene Forte* (doravante, valorações-KF). O conjunto de todas as valorações de uma lógica **L** é denotado por Sem_L.

Dadas as tabelas de verdade acima, o condicional material → é definido como segue:

$$A \rightarrow B := \neg A \vee B.$$

$$A \leftrightarrow B := (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$$

Consequentemente, as tabelas de verdade de → e ↔ são como segue:

→	1	½	0
1	1	½	0
½	1	½	½
0	1	1	1

↔	1	½	0
1	1	½	0
½	½	½	½
0	0	½	1

A partir desse aparato semântico, podemos definir diferentes lógicas, que são apresentadas pelas seguintes definições:

Definição 2.1. A Lógica do Paradoxo **LP** (Asenjo, 1966; Priest, 1979) é caracterizada pela matrix M_{LP} = ⟨{1, ½, 0}, ¬, ∧, ∨, {1, ½}⟩. Dizemos que $v \in Sem_{LP}$ *satisfaz A* se *v*(A) ∈ {1, ½}. *A* é uma *tautologia* ($\models_{LP} A$) se todo $v \in Sem_{LP}$ satisfaz *A*. Uma fórmula *A* é *consequência lógica* de um conjunto de fórmulas Γ ($\Gamma \models_{LP} A$) se e somente se para todas as valorações $v \in Sem_{LP}$:

Se *v* satisfaz γ, para todo γ ∈ Γ, então *v* satisfaz *A*.

Como podemos ver, a lógica **LP** não valida a inferência $A, \neg A \models_{LP} B$, para todo $B \in For_{LP}$. Essa inferência é conhecida como *Princípio de Explosão*. Para ver que **LP** não valida essa inferência, considere uma valoração $v \in Sem_{LP}$ tal que *v*(¬*A*) = ½ e *v*(*B*) = 0. Claramente, *v*(*A*) = *v*(¬*A*) = ½. Consequentemente, $A, \neg A \not\models_{LP} B$ (*i.e.*, não- $A, \neg A \models_{LP} B$). Por não validar o referido princípio, **LP** é uma *lógica paraconsistente*. Uma outra inferência que não é validada por **LP** é o *Modus Ponens* (MP): $A, A \rightarrow B \models_{LP} B$. A mesma valoração que invalida o Princípio de Explosão pode ser utilizada para invalidar MP.

Definição 2.2. A lógica de Kleene $\mathbf{K_3}$ (Kleene, 1938) é caracterizada pela matrix M_{K3} = ⟨{1, ½, 0}, ¬, ∧, ∨, {1}⟩. Dizemos que $v \in Sem_{K3}$ satisfaz *A* se *v*(*A*) = 1. Uma fórmula *A* é *consequência lógica* de um conjunto de fórmulas Γ ($\Gamma \models_{K3} A$) se e somente se para todas as valorações $v \in Sem_{K3}$:

Se *v* satisfaz γ, para todo γ ∈ Γ, então *v* satisfaz *A*.

Da Definição 2.2, é imediato que $\mathbf{K_3}$ não valida $\models_{K3} A \vee \neg A$, o *Princípio do Terceiro Excluído*. Considere uma valoração $v \in Sem_{K3}$ tal que *v*(*A*) = ½. Logo, *v*(¬*A*) = ½. Por conseguinte, *v*(*A* ∨ ¬*A*) = ½. Consequentemente, $\not\models_{K3} A \vee \neg A$. Por não validar esse princípio, $\mathbf{K_3}$ é uma *lógica paracompleta*. A lógica $\mathbf{K_3}$ não possui tautologias. Como podemos ver, a matriz M_{K3} não possui operações *c* tais que *c*(½, ½) ∈ {1,0}. Assim, toda fórmula receberá ½ em alguma valoração $v \in Sem_{K3}$. Uma vez que o valor ½ não é distinguido em $\mathbf{K_3}$, nenhuma fórmula é uma tautologia.

Como podemos ver, a relação $\Gamma \models A$ vigora em ambas **LP** e $\mathbf{K_3}$ quando há preservação de valores de verdade de um mesmo *standard* das premissas à conclusão. Ou seja, $\Gamma \models A$ vigora quando há pre-

servação de valores distinguidos das premissas à conclusão. Como Łos & Suszko (1958), uma relação $\models_L$ definida como preservação de um mesmo subconjunto de valores de verdade do conjunto de premissas à conclusão satisfaz as seguintes propriedades:
(Reflexividade) $\Gamma, A \models_L A$;
(Monotonicidade) Se $\Gamma \models_L A$ e $\Gamma \subseteq \Delta$, então $\Delta \models_L A$;
(Corte) Se $\Gamma \models_L A$ e $\Delta, A \models_L B$, então $\Gamma, \Delta \models_L B$.

Apresentaremos agora duas lógicas cujas relações de consequência possuem *standards* distintos para as premissas e para a conclusão.

Definição 2.3. A Lógica **TS** (French, 2016) é caracterizada pela matriz $M_{TS} = \langle\{1, ½, 0\}, \neg, \wedge, \vee, \{1, ½\}, \{1\}\rangle$. Dizemos que $v \in Sem_{TS}$ é um *modelo* para A se $v(A) = 1$. A é uma *tautologia* se todo $v \in Sem_{TS}$ é um modelo para A. Uma fórmula A é *consequência lógica* de um conjunto de fórmulas Γ ($\Gamma \models_{TS} A$) se e somente se para todas as valorações $v \in Sem_{TS}$:

$$\text{Se } v(\gamma) \in \{1, ½\}, \text{ para todo } \gamma \in \Gamma, \text{ então } v(A) = 1.$$

A lógica **TS** é não-reflexiva. Considere uma valoração $v \in Sem_{TS}$ tal que $v(p) = ½$. Da definição de $\models_{TS}$, concluímos que $p \not\models_{TS} p$ (*i.e.*, não é o caso que $p \models_{TS} p$). French (2017) mostra que a lógica **TS** não possui nem tautologias nem inferências válidas. Por outro lado, valida todas as *metainferências* clássicas. Uma metainferência é uma inferência que possui outras inferências como premissas. A propriedade de (Corte) é um exemplo claro de metainferência.

Definição 2.4. A Lógica **ST** (Cobreros et al. 2012; Ripley, 2012, 2013) é caracterizada pela matrix $M_{ST} = \langle\{1, ½, 0\}, \neg, \wedge, \vee, \{1\}, \{1, ½\}\rangle$. Dizemos que $v \in Sem_{ST}$ é um *modelo* para A se $v(A) \in \{1, ½\}$. A é uma *tautologia* se todo $v \in Sem_{ST}$ é um modelo para A. Uma fórmula A é *consequência lógica* de um conjunto de fórmulas Γ ($\Gamma \models_{ST} A$) se e somente se para todas as valorações $v \in Sem_{ST}$:

$$\text{Se } v(\gamma) = 1, \text{ para todo } \gamma \in \Gamma, \text{ então } v(A) \in \{1, ½\}.$$

A lógica **ST** não possui a propriedade de corte. Suponha $\Gamma = \{p\}$, $\Delta = \emptyset$, $A = q$, $B = r$, e que toda valoração $v \in Sem_{ST}$ seja tal que $v(p) = 1$, $v(q) = ½$ e $v(r) = 0$. Logo, $p \models_{ST} q$ e $q \models_{ST} r$, mas $p \not\models_{ST} r$. Por outro lado, tanto **ST** quanto a lógica proposicional clássica (doravante, **LPC**) validam as mesmas tautologias e inferências válidas. Uma vez que falha a propriedade de (Corte), **ST** e **LPC** diferem em suas metainferências. Em função da falha (Corte), **ST** falha em validar a versão metainferencial do MP (Meta-MP):

$$\frac{\models A \qquad \models A \rightarrow B}{\models B}$$

Por não validarem (Reflexividade) e (Corte), respectivamente, **TS** e **ST** são chamadas na literatura de *lógicas subestruturais*. Aqui é importante fazer uma ressalva. A terminologia *subestrutural*, no presente caso, é proveniente de cálculo de sequentes. Nesses sistemas de dedução, as propriedades de (Reflexividade), (Monotonicidade) e (Corte) são *regras estruturais*. Desse modo, um cálculo de sequentes para **TS** e para **ST** não possuem, respectivamente, a regra de (Reflexividade) e a de (Corte). Aqui escolhemos manter essa terminologia por uma questão de uniformidade bibliográfica com a literatura que apresenta essas lógicas, embora estejamos cientes que o conceito de estruturalidade é proveniente dos trabalhos de Tarski sobre a noção de consequência lógica.

A razão pela qual apresentamos as lógicas **LP**, $\mathbf{K_3}$, **TS** e **ST** dá-se pelo fato de que são lógicas vem sendo amplamente estudadas na literatura filosófica. Elas são comumente empregadas como soluções para os paradoxos semânticos que envolvem tanto o predicado de verdade quanto o predicado de validade. No caso da lógica **LP**, por exemplo, encontramos teorias da verdade e da validade que a adotam como lógica de base (Goodship, 1996; Priest, 2006; Pailos, 2020). Já a lógica $\mathbf{K_3}$ pode ser aplicada à teoria da verdade de pontos fixos de Kripke (1976). No caso de **TS**, encontramos aplicações nos trabalhos (French, 2016; Murzi e Rossi, 2021). Finalmente, no caso de **ST**, encontramos aplicações em (Cobreros *et al.*, 2012, Ripley 2012, 2013; Barrio *et al.*, 2015, 2016).

Antes de prosseguirmos, é importante dizer que a investigação feita neste trabalho é puramente semântica. Embora seja perfeitamente possível apresentar sistemas de dedução para as lógicas modais aqui investigadas, isso será deixado para investigação futura. A razão pela qual nos ocuparemos somente dos aspectos modelos teóricos dessas lógicas levanta é que esses aspectos são por si só interessantes para discussão. Desse modo, apresentaremos ambas caracterizações e discutiremos suas particularidades. Na Conclusão, faremos observações acerca da construção desses sistemas dedutivos.

3 Lógicas modais

Nesta seção, apresentaremos extensões modais para as lógicas **LP**, **K_3**, **TS** e **ST**. A linguagem modal $L_L(\Box\Diamond)$, para **L** ∈ {**LP**, **K_3**, **TS**, **ST**} é obtida a partir da extensão de **L** com os operadores unários □ e ◇. O conjunto de fórmulas $For_L(\Box\Diamond)$ de $L_L(\Box\Diamond)$ é definido de maneira usual.

Definição 3.1 A extensão modal da lógica **L** é denotada por **L(M).**

Dado que as lógicas acima apresentadas foram semanticamente caracterizadas mediante matrizes finitamente valoradas, surge a questão de como caracterizar as modalidades □ e ◇ das lógicas **L(M)**. Na literatura sobre lógicas modais baseada em lógicas que possuem mais de dois valores de verdade, *multivaloradas*, encontramos diferentes caracterizações. Sergerberg (1967), Schotch *et al.* (1978), Morikawa (1989) e Priest (2008), por exemplo, apresentam caracterizações que permitem que □ e ◇ recebam valores intermediários. Já Sergerberg (1967), Schotch *et al*. (1978), Morikawa (1989) e Bezerra e Venturi (2022) apresentam caracterizações bivalentes dessas modalidades. Isto é, fórmulas tais como □*A* e ◇*A* recebem somente os valores 1 e 0. No que segue, apresentamos ambas caracterizações e apresentaremos algumas características interessantes sobre elas. As lógicas **L(M)** caracterizadas pelos modelos que atribuem valores intermediários para fórmulas tais como □*A* e ◇*A* serão chamadas de **L(M3)**, ao passo que as caracterizadas pelos modelos que somente atribuem 1 ou 0 para fórmulas □*A* e ◇*A* serão chamadas de **L(M2)**.

3.1.2 As lógicas L(M3)

Definição 3.1.2. Um *frame* $F = \langle W, R\rangle$ é um par onde W é um conjunto não-vazio de mundos, e $R \subseteq W \times W$ é a relação de acessibilidade entre mundos em W. Um *modelo* baseado em F é uma estrutura $\mathfrak{M}_3 = \langle F, M_L, v\rangle$ onde M_L é a matriz de **L**, e *v* é uma atribuição tal que, para todo w ∈ W, $v_w(p_i) \in \{1, ½, 0\}$. A atribuição *v* é recursivamente estendida como segue:
(i) Os valores de $v_w(\neg A)$ e $v_w(A\ c\ B)$, onde $c \in \{\wedge, \vee\}$, são dados pelas tabelas de verdade de ¬, ∧, e ∨.
(ii) $v_w(\Box A) = \text{Inf}\{v_y(A) \mid wRy\}$.
(iii) $v_w(\Diamond A) = \text{Sup}\{v_y(A) \mid wRy\}$.
As noções de verdade e validade nos modelos modais são definidas como segue:
LP(M3): Dizemos que $A \in For_{LP}(\Box\Diamond)$ é *verdadeira* em um modelo $\mathfrak{M}_3 = \langle F, M_{LP}, v\rangle$ se para todo w ∈ W, $v_w(A) \in \{1, ½, 0\}$. *A* é *válida* em um frame *F* se é verdadeira em todo modelo $\mathfrak{M}_3$ baseado em *F*. A relação $\Gamma \models_{LP(M3)} A$ é definida como segue. Para todo modelo $\mathfrak{M}_3 = \langle F, M_{LP}, v\rangle$ baseado em *F*, para todo w ∈ W: se $v_w(\gamma) \in \{1, ½\}$, para todo $\gamma \in \Gamma$, então $v_w(A) \in \{1, ½\}$.
K_3(M3): Dizemos que $A \in For_{LP}(\Box\Diamond)$ é *verdadeira* em um modelo $\mathfrak{M}_3 = \langle F, M_{K3}, v\rangle$ se para todo w ∈ W, $v_w(A) = 1$. *A* é *válida* em um frame *F* se é verdadeira em todo modelo $\mathfrak{M}_3$ baseado em *F*. A relação $\Gamma \models_{K3(M3)} A$ é definida como segue. Para todo modelo $\mathfrak{M}_3 = \langle F, M_{K3}, v\rangle$ baseado em *F*, para todo w ∈ W: se $v_w(\gamma) = 1$, para todo $\gamma \in \Gamma$, então $v_w(A) = 1$.
TS(M3): Dizemos que $A \in For_{TS}(\Box\Diamond)$ é *verdadeira* em um modelo $\mathfrak{M}_3 = \langle F, M_{TS}, v\rangle$ se para todo w ∈ W, $v_w(A) = 1$. *A* é *válida* em um frame *F* se é verdadeira em todo modelo $\mathfrak{M}_3$ baseado em *F*. A relação $\Gamma \models_{TS(M3)} A$ é definida como segue. Para todo modelo $\mathfrak{M}_3 = \langle F, M_{TS}, v\rangle$ baseado em *F*, para todo w ∈ W: se $v_w(\gamma) \in \{1, ½\}$, para todo $\gamma \in \Gamma$, então $v_w(A) = 1$.

ST(M3): Dizemos que $A \in For_{ST}(\Box\Diamond)$ é *verdadeira* em um modelo $\mathfrak{M}_3 = \langle F, M_{ST}, v\rangle$ se para todo w ∈ W, $v_w(A) = 1$. A é *válida* em um frame F se é verdadeira em todo modelo $\mathfrak{M}_3$ baseado em F. A relação $\Gamma \models_{ST(M3)} A$ é definida como segue. Para todo modelo $\mathfrak{M}_3 = \langle F, M_{ST}, v\rangle$ baseado em F, para todo w ∈ W: se $v_w(\gamma) = 1$, para todo $\gamma \in \Gamma$, então $v_w(A) \in \{1, ½\}$.

Quando **L** é a **LPC**, obtemos a lógica modal **K** (Hughes e Cresswell, 1996), que é caracterizada pelos seguintes axiomas e regras:
(Taut) Todas as tautologias proposicionais.
(K) $\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$.
(Nec) se A é válido, então $\Box A$ é válido.
(MP) De A e $A \to B$, inferimos B.

Como podemos ver, os operadores modais são definidos de maneira análoga aos quantificadores das lógicas multivaloradas de primeira ordem (Priest, 2008). Isto é, uma fórmula $\Box A$ recebe o valor 1 em um mundo w somente no caso de A receber o valor 1 em todos os mundos y acessados por w. $\Box A$ recebe o valor ½ em um mundo w no caso de (i) A receber o valor ½ em todos os mundos y acessados por w; ou (ii) A recebe 1 em alguns mundos y e ½ em alguns mundos z, ambos acessados por w. $\Box A$ recebe o valor 0 no caso de A receber 0 em ao menos um mundo y acessado por w. Já $\Diamond A$ recebe o valor 1 em w no caso de A receber 1 em ao menos um mundo y acessado por w; $\Diamond A$ recebe o valor ½ em w no caso de (i') A receber o valor ½ em todos os mundos y acessados por w; ou (ii) A recebe 0 em alguns mundos y e ½ em alguns mundos z, ambos acessados por w; $\Diamond A$ recebe o valor 0 em w no caso de A receber 0 em todos os mundos y acessados por w.

Da Definição 3.1.2, obtemos o seguinte resultado:

Teorema 3.1.3. (a) (K) é válido em **LP(M3)** e **ST(M3)**, e não é válido em **K_3(M3)** e **TS(M3)**.
(b) $\Box A \leftrightarrow \neg\Diamond\neg A$ (Def$\Box$) e $\Diamond A \leftrightarrow \neg\Box\neg A$ (Def$\Diamond$) são válidos em **LP(M3)** e **ST(M3)**, e não são válidos em **K_3(M3)** e **TS(M3)**.
(c) $\Box A =||= \neg\Diamond\neg A$ (Def*$\Box$) e $\Diamond A =||= \neg\Box\neg A$ (Def*$\Diamond$) são válidos em **LP(M3)**, **ST(M3)** e **K_3(M3)**.
(d) **K_3(M3)** e **TS(M3)** não possuem fórmulas válidas e **TS(M3)** não possui inferências válidas.
(e) (Nec) é válida em **LP(M3)**, **ST(M3)**, **K_3(M3)** e **TS(M3)**.

Prova: Mostraremos alguns itens. Os demais ficam a cargo do leitor. Mostraremos agora o item (a). Suponha que $\Box(A \to B)$ e $\Box A$ sejam válidos em um frame F. Então, para todo modelo $\mathfrak{M}_3 = \langle F, M_{ST}, v\rangle$ baseado em F, para todo w ∈ W, $v_w(\Box(A \to B)) \in \{1, ½, 0\}$, $v_w(\Box A) \in \{1, ½, 0\}$. Analisaremos agora os possíveis casos. (I) Se $v_w(\Box(A \to B)) = v_w(\Box A) = 1$, então, para todo y ∈ W, é o caso que $v_y(A \to B) = v_y(A) = 1$. Nesse caso, é imediato que $v_y(B) = 1$. Então, $v_w(\Box B) = 1$. Portanto, $v_w(\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)) = 1$. (II) Se $v_w(\Box(A \to B)) = 1$ e $v_w(\Box A) = ½$, então $v_y(B) = 1$, para todo y ∈ W. Logo, $v_w(\Box B) = 1$. Portanto, $v_w(\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)) = 1$. (III) Se $v_w(\Box(A \to B)) = ½$ e $v_w(\Box A) = 1$, sabemos que $v_y(B) \in \{1, ½\}$, para todo y ∈ W. Logo, $v_w(\Box B) = ½$. Daqui, $v_w(\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)) = ½$. (IV) Se $v_w(\Box(A \to B)) = v_w(\Box A) = ½$, temos as seguintes possibilidades: (IVa) $v_y(B) = 0$, para algum y ∈ W; (IVb) $v_y(B) = 0$, para todo y ∈ W; (IVc) algum z ∈ W tal que $v_y(B) = ½$ e algum z ∈ W tal que $v_y(B) = 1$; e (IVd) $v_y(B) = ½$, para todo y ∈ W. Em qualquer caso, $v_w(\Box A \to \Box B) = ½$. Portanto, $v_w(\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)) = ½$, para todo modelo $\mathfrak{M}_3 = \langle F, M_{ST}, v\rangle$ baseado em F. Logo, (K) é válido em **LP(M3)** e **ST(M3)**. Essa fórmula não é válida em **K_3(M3)** e em **TS(M3)** em virtude do valor ½.

Mostraremos agora o item (b). Considere que $A = p$. Seja F um frame e $\mathfrak{M}_3 = \langle F, M_{K3}, v\rangle$ um modelo baseado em F, onde para todo w, y ∈ W tal que wRy, $v_w(p) = v_y(p) = ½$. Então, $v_w(\Box p) = v_w(\neg\Diamond\neg p) = ½$. Portanto, $v_w(\Box p \leftrightarrow \neg\Diamond\neg p) = ½$. Uma vez que ½ não é distinguido em **K_3** e não torna uma sentença verdadeira em **TS**, então (Def$\Box$) não é válido em **K_3(M3)** e em **TS(M3)**. A partir desse mesmo modelo, obtemos que $v_w(\neg p) = v_y(\neg p) = ½$. Então, $v_w(\Diamond p) = v_w(\Box\neg p) = v_w(\neg\Box\neg p) = ½$. Daqui, $v_w(\Diamond p \leftrightarrow \neg\Box\neg p) = ½$. Portanto, (Def$\Diamond$) não é válido em **$K_3$(M3)** e em **TS(M3)**. Dado que o valor é distinguido em **LP(M3)** e torna a sentença verdadeira em **ST(M3)**, (Def$\Box$) e (Def$\Diamond$) são válidos em **LP(M3)** e em **ST(M3)**.

Em relação ao item (d), mostramos anteriormente que as lógicas **K_3** e **TS** não possuem tautologias em virtude do valor ½. Uma vez que as modalidades também podem receber ½, **K_3(M3)** e em **TS(M3)** não possuem fórmulas válidas. Que **TS(M3)** não possui inferências válidas se segue do fato de **TS** também não possuí-las.

Em relação ao item (e), notamos que (Nec) é vacuamente válida em $\mathbf{K_3}$**(M3)** e **TS(M3)**, pois o antecedente da regra nunca é satisfeito. Isso conclui a prova. *Q.E.D.*[2]

Como podemos ver, nenhuma restrição foi imposta em R. Ou seja, todas as validades das lógicas **LP(M3)**, **ST(M3)**, $\mathbf{K_3}$**(M3)** e **TS(M3)** valem para a classe de todos os frames. É sabido que, ao restringirmos R com certas propriedades, obtemos lógicas modais mais fortes. Para os propósitos deste artigo, os frames reflexivos e/ou transitivos são suficientes. Considere a seguinte definição:

Definição 3.1.4. Seja R um conjunto e $R \subseteq W \times W$ uma relação em W.
(a) Dizemos que R é *reflexiva* se, e somente se, para todo $w \in W$: wRw.
(b) Dizemos que R é *transitiva* se, e somente se, para todo $x,y,z \in W$: se xRy e yRz, então xRz.

As lógicas obtidas a partir dessas restrições são definidas a seguir.

Definição 3.1.5. (a) **LP(M3T)**, **ST(M3T)**, $\mathbf{K_3}$**(M3T)** e **TS(M3T)** são as lógicas caracterizadas por frames reflexivos.
(b) **LP(M34)**, **ST(M34)**, $\mathbf{K_3}$**(M34)** e **TS(M34)** são as lógicas caracterizadas por frames transitivos.
(c) **LP(M3T4)**, **ST(M3T4)**, $\mathbf{K_3}$**(M3T4)** e **TS(M3T4)** são as lógicas caracterizadas por frames reflexivos e transitivos.

Claramente, se a lógica proposicional da base é **LPC**, então as lógicas obtidas dessas restrições são: (a) **KT**, (b) **K4** e (c) **KT4** (= **S4**). Da Definição 3.1.5, temos o seguinte resultado:

Teorema 3.1.6. (a) $\Box A \rightarrow A$ (T) e $\Box A \rightarrow \Diamond A$ (D) são válidos em **LP(M3T)**, **LP(M3T4)**, **ST(M3T)**, e em **ST(M3T4)** mas não são em $\mathbf{K_3}$**(M3T)**, $\mathbf{K_3}$**(M3T4)**, **TS(M3T)**, e em **TS(M3T4)**.
(b) $\Box A \models A$ (T*) e $\Box A \models \Diamond A$ (D*) são válidos em **LP(M3T)**, **LP(M3T4)**, **ST(M3T)**, **ST(M3T4)**, $\mathbf{K_3}$**(M3T)**, $\mathbf{K_3}$**(M3T4)**, mas não em **TS(M3T)** e **TS(M3T4)**.
(c) $\Box A \rightarrow \Box\Box A$ (4) é válido em **LP(M34)** e em **ST(M34)**, mas não é em $\mathbf{K_3}$**(M34)** e em **TS(M3T)**.
(d) $\Box A \models \Box\Box A$ (4*) é válido em **LP(M34)**, **LP(M3T4)**, **ST(M34)**, **ST(M3T4)**, $\mathbf{K_3}$**(M34)**, e $\mathbf{K_3}$**(M3T4)**.

Essas lógicas modais possuem aplicações filosóficas interessantes. No caso de $\mathbf{K_3}$**(M3)**, Priest (2008) mostra que ela pode ser aplicada na análise de futuros contingentes e na análise do conceito de vagueza. O mesmo se aplica à lógica **ST(M3)** e suas extensões, visto que **ST** foi originalmente proposta para formalizar predicados vagos (Cobreros *et al.*, 2012). As lógicas **LP(M3)**, **TS(M3)** e **ST(M3)** podem ser aplicadas na análise de predicados modais. Egré (2005) apresenta uma série de resultados de inconsistência envolvendo predicados que estendem a linguagem aritmética e que satisfazem princípios modais, tais como (K), (T) e (Nec).[3] Ele mostra que a sentença $A \leftrightarrow \neg\Box A$ torna inconsistente uma quantidade considerável de teorias aritméticas estendidas com predicados modais. Uma vez que as lógicas **LP**, **TS** e **ST** são lógicas adotadas na análise de paradoxos semânticos, suas extensões modais podem trazer resultados interessantes.

Embora essas lógicas possam ter aplicações interessantes, elas enfrentam dificuldades ao nível conceitual. Um dos problemas que ressaltamos aqui é que algumas dessas lógicas modais validam princípios modais que contrariam suas próprias inferências a nível proposicional. Consideremos os casos das lógicas **LP(M3)** e **ST(M3)** e suas extensões. Essas lógicas validam o axioma (K). O axioma (K) diz que MP preserva necessidade (alética, epistêmica, lógica, deôntica, etc.). Entretanto, **LP(M3)** não valida MP e tanto **LP(M3)** quanto **ST(M3)** também falham em validar Meta-MP:

$$\frac{\models A \qquad \models A \rightarrow B}{\models B}$$

Nesse sentido, por validarem o axioma (K) e não validarem Meta-MP, podemos dizer que os princípios modais internalizam inferências que não são válidas proposicionalmente.

---

[2] Abreviação de *Quod Erat Demonstrandum.*

[3] Esses resultados de inconsistência envolvendo predicados modais na linguagem aritmética foram originalmente demonstrados por Montague (1956) e Myhill (1960).

Essa dissimetria entre os princípios modais validados e as inferências não-modais, tal como expressa na relação entre o princípio (K) e a regra MP, é conceitualmente problemática para alguém que proponha essas lógicas como ferramentas para analisar certos conceitos filosóficos. Por exemplo, de acordo com a interpretação epistêmica das lógicas modais (Stalnaker, 2006), o axioma (K) enuncia o *princípio da onisciência lógica*, que diz que nosso conhecimento é fechado mediante consequência lógica. Se adotássemos lógicas que estendem **LP(M3)** ou **ST(M3)**, enfrentaríamos a dificuldade de explicar o porquê do axioma (K) valer ao passo que MP e Meta-MP não valem. O mesmo se aplicaria numa interpretação de $\Box$ como necessidade lógica (Skyrms, 1978; Burgess, 1999). De acordo com essa última interpretação, (K) diz que validade lógica é preservada diante MP. A falha dessa regra seria uma dificuldade para quem defende a aplicação das lógicas **LP(M3)** ou **ST(M3)**. Desse modo, é preciso uma maneira distinta para caracterizar semanticamente os operadores modais.

Dentre as possíveis interpretações das modalidades, as interpretações de $\Box$ e $\Diamond$ enquanto verdade lógica e possibilidade lógica, respectivamente, não parecem ser compatível com atribuições do valor ½ às sentenças que são antecedidas por operadores modais. Conceitos tais como, verdade lógica, provabilidade aritmética, entre outros, parecem requerer uma interpretação clássica. Como Pailos (2020) ressalta, uma asserção de validade é exclusivamente verdadeira ou falsa. Se ½ é interpretado como "verdadeiro e falso" (Priest, 1979) e $\Box$ é interpretado como "é demonstrável que", é adequado permitir que uma fórmula $\Box A$ receba o valor ½? Para que tal possibilidade faça sentido, é necessário admitir que os conceitos metalógicos tais como validade, provabilidade, e consistência possam ser caracterizados por lógicas não clássicas (Bacon, 2013). Como se trata de um problema em aberto, não tomaremos partido.[4] No que segue, apresentaremos as lógicas **L(M2)**, nas quais as modalidades são interpretadas como recebendo somente 1 e 0.

3.2 As lógicas L(M2)

No que segue, definimos os modelos que atribuem somente valores clássicos para fórmulas modais.

Definição 3.2.1 Seja F um frame. Um *modelo* $\mathfrak{M}_2 = \langle F, M_L, v\rangle$ é definido como um modelo $\mathfrak{M}_3 = \langle F, M_L, v\rangle$ da Definição 3.1.2, exceto no que diz respeito às cláusulas modais, que são definidas como segue:

- Para $\mathbf{K_3}$**(M2)** e **TS(M2)**:

(i) $v_w(\Box A) = 1$ se e somente se para todo y ∈ W tal que wRy, $v_y(A) = 1$; caso contrário, $v_w(\Box A) = 0$.

(ii) $v_w(\Diamond A) = 1$ se e somente se para algum y ∈ W tal que wRy, $v_y(A) = 1$; caso contrário, $v_w(\Diamond A) = 0$.

- Para **LP(M2)** e **ST(M2)**:

(i) $v_w(\Box A) = 1$ se e somente se para todo y ∈ W tal que wRy, $v_y(A) \in \{1, ½\}$; caso contrário, $v_w(\Box A) = 0$.

(ii) $v_w(\Diamond A) = 1$ se e somente se para algum y ∈ W tal que wRy, $v_y(A) \in \{1, ½\}$; caso contrário, $v_w(\Diamond A) = 0$.

As definições de verdade e validade são as mesmas da Definição 3.1.2.

Da mesma maneira que na Definição 3.1.2, à relação R não foi imposta restrição alguma. Restrições a R nos darão lógicas mais fortes. Da Definição 3.2.1 obtemos o seguinte resultado:

Teorema 3.2.2 (a) (K) é válido em $\mathbf{K_3}$**(M2)** e **TS(M2)**, e não é válido em **LP(M2)** e **ST(M2)**.

(b) (Def$\Box$) e (Def$\Diamond$) não são válidos nas **L(M2)**.

(c) (Nec) é válido nas **L(M2)**.

Prova. (a) Uma vez que nem $\mathbf{K_3}$**(M2)** nem **TS(M2)** possuem fórmulas válidas, (K) vale vacuamente. Agora, sejam $A = p$ e $B = q$. Considere agora um frame $F = \langle W, R\rangle$, onde W = {w, y} e R = {<x, y>} e $\mathfrak{M}_2 = \langle F, M_{LP}, v\rangle$ um modelo baseado em F, onde $v_w(p) = v_y(p) = ½$ e $v_w(q) = v_y(q) = 0$. Pela tabela de verdade de →,

[4] Claramente, isso não quer dizer que essas lógicas são inviáveis conceitualmente. Como Priest (2008) mostra, modalidades que recebem valores intermediários podem ter aplicações filosóficas interessantes. Nosso ponto nesse artigo foi o de apontar que, para as lógicas **LP(M3)** e **ST(M3)**, a interpretação trivalorada das modalidades é problemática. Algumas dessas lógicas são analisadas no contexto de teorias não-clássicas da verdade (Stern e Nicolai, 2021).

$v_w(p \to q) = v_y(p \to q) = ½$. Pela definição semântica de □, $v_w(\Box(p \to q)) = v_w(\Box p) = 1$ e $v_w(\Box q) = 0$. Assim, $v_w(\Box p \to \Box q) = 0$. Portanto, $v_w(\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)) = 0$. O mesmo vale para **ST(M2)**.
(b) Seja $A = p$ e considere agora um frame $F = \langle W, R\rangle$ onde W = {w, y} e R = {<x, y>} e $\mathfrak{M}_2 = \langle F, M_{LP}, v\rangle$ um modelo baseado em F, onde $v_w(p) = v_y(p) = ½$. Logo, $v_w(\Box p) = 1$, $v_w(\neg p) = ½$, e $v_w(\Diamond\neg p) = 1$. Então, $v_w(\neg\Diamond\neg p) = 0$. Claramente, $v_w(\Box p \leftrightarrow \neg\Diamond\neg p) = 0$. O mesmo raciocínio se aplica às demais **L(M2)** analisadas neste artigo.
(c) segue o mesmo raciocínio do Teorema 3.1.3. Isso conclui a prova. *Q.E.D.*

Como dissemos anteriormente, a adição de restrições à relação R nos dá extensões das lógicas **LP(M2)**, **ST(M2)**, **K_3(M2)** e **TS(M2)**, que são apresentadas na seguinte definição.

Definição 3.2.3 (a) **LP(M2T)**, **ST(M2T)**, **K_3(M2T)** e **TS(M2T)** são as lógicas caracterizadas por frames reflexivos.

(b) **LP(M24)**, **ST(M24)**, **K_3(M24)** e **TS(M24)** são as lógicas caracterizadas por frames transitivos.

(c) **LP(M2T4)**, **ST(M2T4)**, **K_3(M2T4)** e **TS(M2T4)** são as lógicas caracterizadas por frames reflexivos e transitivos.

Da Definição 3.2.3, obtemos o seguinte:

Teorema 3.2.4. (a) (T) e (D) são válidos em **LP(M2T)**, **LP(M2T4)**, **ST(M2T)**, **ST(M2T4)**, **K_3(M2T)**, **K_3(M2T4)**, **TS(M2T)**, e em **TS(M2T4)**.
(b) (T*) e (D*) são válidos em **LP(M2T)**, **LP(M2T4)**, **ST(M2T)**, **ST(M2T4)**, **K_3(M2T)**, e **K_3(M2T4)**, **TS(M2T)** e **TS(M2T4)**.
(c) (4) é válido em **LP(M24)** e em **ST(M24)**, **K_3(M24)** e em **TS(M2T)**.
(d) (4*) é válido em **LP(M24)**, **LP(M2T4)**, **ST(M24)**, **ST(M2T4)**, **K_3(M24)**, e **K_3(M2T4)**, e em **TS(M2T4)**.

Como podemos ver, a razão pela qual as lógicas **K_3(M2T)**, **K_3(M2T4)**, **TS(M2T)**, e em **TS(M2T4)** possuem mais validades que suas contrapartes trivaloradas deve-se ao fato de os antecedentes dos condicionais dos princípios modais serem falsos. Daí, a fórmula vale vacuamente. No que diz respeito às lógicas **TS(M2T)** e **TS(M2T4)**, elas possuem inferências válidas uma vez que fórmulas antecedidas por operadores modais não podem receber o valor ½.

Essas lógicas também possuem aplicações interessantes. Por exemplo, pode ser mostrado que os operadores □ e ◇ de **ST(M2T4)** capturam os conceitos de derivabilidade e consistência (em teorias não-aritméticas), generalizando os resultados de Skyrms (1978) e Burgess (1999) com respeito à lógica **S4**. Outra aplicação interessante dessas modalidades é na recuperação de inferências clássicas. Uma vez que essas modalidades atribuem somente valores clássicos às fórmulas, podemos recuperar inferências perdidas nessas lógicas dado certas hipóteses acerca das variáveis proposicionais. No que segue, apresentaremos esses resultados de recuperação:

Teorema 3.2.5. Seja $\Gamma \subseteq For_{L1}(\Box\Diamond)$ um conjunto de fórmulas contendo um número finito de variáveis proposicionais, para $L_1 \in \{$**TS(M2T)**, **K_3(M2T)**$\}$. Então para qualquer $A \in For_{L1}(\Box\Diamond)$:

$$\Gamma \models_{KT} A \text{ se e somente se } \Gamma, \Box p_1 \vee \Box\neg p_1, ..., \Box p_n \vee \Box\neg p_n \models_{L1} A,$$

Onde $\{p_1, ..., p_n\}$ é o conjunto de variáveis proposicionais que ocorrem em $\Gamma \cup \{A\}$.
Prova. Suponha que $\Gamma \models_{KT} A$ e que $\{p_1, ..., p_n\}$ é o conjunto de variáveis proposicionais que ocorrem em $\Gamma \cup \{A\}$. Por definição, para todo modelo $\mathfrak{M}_2 = \langle F, M_{LPC}, v\rangle$ baseado em F, para todo w ∈ W e para todo $\gamma \in \Gamma$, $v_w(\gamma) = 1$ implica $v_w(A) = 1$. Claramente, é o caso que $v_w(p_i) \in \{1,0\}$, para $p_i \in \{p_1, ..., p_n\}$. Agora, considerando modelos $\mathfrak{M}_2 = \langle F, M_{L1}, v^*\rangle$, temos os seguintes casos:

(1) Para todo y ∈ W, $v_y{}^*(p_i) = 1$;

(2) Para todo y ∈ W, $v_y{}^*(p_i) = 0$;

(3) Para alguns u, z, x ∈ W, $v_x{}^*(p_i) = 1$, $v_u{}^*(p_i) = 0$ e $v_z{}^*(p_i) = ½$;

(4) Para todo y ∈ W, $v_y{}^*(p_i) = ½$.

Para os casos (1) e (2), $v_w{}^*(\Box p_i \vee \Box\neg p_i) = 1$, para wRy, e assim o resultado segue porque todas as variáveis proposicionais recebem somente valores clássicos em todos os mundos em W. Os casos (3) e (4) são imediatos dado que $v_w{}^*(\Box p_i \vee \Box\neg p_i) = 0$. Logo, $\Gamma, \Box p_1 \vee \Box\neg p_1, ..., \Box p_n \vee \Box\neg p_n \models_{L1} A$.

Agora, suponha que Γ, $\Box p_1 \vee \Box\neg p_1$, ..., $\Box p_n \vee \Box\neg p_n \models_{\mathbf{L1}} A$. Então:

(A) Se $\mathbf{L_1}$ = **TS(M2T)**, então, para todo modelo $\mathfrak{M}_\mathbf{2} = \langle F, M_{TS}, v^*\rangle$ baseado em F, para todo w ∈ W e para todo $\gamma \in \Gamma$, $v_w^*(\gamma) \in \{1, ½\}$ implica $v_w^*(A) = 1$.

(B) Se $\mathbf{L_1}$ = **K$_3$(M2T)**, então, para todo modelo $\mathfrak{M}_\mathbf{2} = \langle F, M_{K3}, v^*\rangle$ baseado em F, para todo w ∈ W e para todo $\gamma \in \Gamma$, $v_w^*(\gamma) = 1$ implica $v_w^*(A) = 1$.

Em ambos os casos, dada a definição de verdade para o operador modal $\Box$, temos os seguintes casos:

(1) Todas as variáveis $p_i \in \{p_1, ..., p_n\}$ recebem 1 em todos os mundos y ∈ W tais que wRy.

(2) Todas as variáveis $p_i \in \{p_1, ..., p_n\}$ recebem 0 em todos os mundos y ∈ W tais que wRy.

Já que, em ambos os casos, as variáveis recebem somente valores clássicos em todos os mundos acessíveis a w, incluindo o próprio w, temos que $\Gamma \models_{\mathbf{KT}} A$. *Q.E.D.*

Para o caso das lógicas **LP(M2T)** e **ST(M2T)**, devemos enunciar uma versão do Teorema 3.2.5 de uma forma ligeiramente, dado que uma sentença da forma $\Box p$ pode ser verdadeira em w em casos em que p receba 1 ou ½ nos mundos y acessíveis a w. Então, enunciamos a versão do Teorema 3.2.5 para **LP(M2T)** e **ST(M2T)** como segue:

Teorema 3.2.6. Seja $\Gamma \subseteq For_{\mathbf{L1}}(\Box\Diamond)$ um conjunto de fórmulas contendo um número finito de variáveis proposicionais, para $\mathbf{L_2} \in \{$**LP(M2T)**, **ST(M2T)**$\}$. Então para qualquer $A \in For_{\mathbf{L2}}(\Box\Diamond)$:

$$\Gamma \models_{\mathbf{KT}} A \text{ se e somente se } \Gamma, \neg\Diamond\neg p_1 \vee \neg\Diamond\neg p_1, ..., \neg\Diamond\neg p_n \vee \neg\Diamond\neg p_n \models_{\mathbf{L2}} A,$$

Onde $\{p_1, ..., p_n\}$ é o conjunto de variáveis proposicionais que ocorrem em $\Gamma \cup \{A\}$.

A prova do Teorema 3.2.6 é análoga à prova do Teorema 3.2.5. Ambos os teoremas mostram que as modalidades bivalentes podem funcionar como *conectivos de recuperação*, tal como desenvolvido em (Da Costa, 1974; Marcos, 2005; Carnielli *et al.*, 2007; Carnielli *et al.*, 2016, 2020; Coniglio e Perón, 2014; Ciuni e Carrara, 2020; Bezerra e Venturi, 2022). Como o nome sugere, esses conectivos cumprem papel de resgatar inferências clássicas em lógicas não-clássicas na medida que se supõe que as variáveis proposicionais envolvidas recebem somente valores clássicos. As referências mencionadas neste parágrafo apresentam uma série de resultados interessantes acerca desses conectivos. O fato de as modalidades bivalentes poderem funcionar como conectivos de restauração mostra uma interessante aplicação desses sistemas modais.

Outra característica interessante desses sistemas modais é que os princípios modais validados por esses sistemas são fidedignos às inferências proposicionais (não-modais). Por exemplo, vimos que a **LP** não valida a regra de MP. Precisamente pela falha de MP, o Teorema 3.2.2 (a) apresenta um modelo que invalida o axioma (K). De fato, com as modalidades bivalentes, é possível mostrar que elas capturam conceitos bem definidos de tautologicidade (Bezerra e Venturi, 2022).[5]

Embora tenham aplicações muito interessantes, essas lógicas também possuem limitações conceituais. Uma vez que fórmulas precedidas por operadores modais só podem receber 1 ou 0 nos modelos $\mathfrak{M}_\mathbf{2}$, fórmulas que contêm iterações de modalidades comportam-se da mesma maneira que nas lógicas modais baseadas em **LPC**. Por exemplo, embora

$$(\Box A \wedge \Box\neg A) \rightarrow \Box B$$

Não seja válida em **LP(M2)**, a fórmula

$$(\Box\Box A \wedge \Box\neg\Box A) \rightarrow \Box\Box B$$

É válida nessa lógica. Ou seja, essas lógicas modais validam muitos princípios clássicos quando consideramos fórmulas que possuem subfórmulas contendo iterações de modalidades. Agora, em que sentido isso é um problema? A classicalidade das modalidades $\Box$ e $\Diamond$ impõe dificuldades a quem propõe analisar paradoxos envolvendo modalidades. Como dissemos anteriormente, sentenças au-

[5] No caso do conceito de tautologicidade, é mostrado que as lógicas modais são consideravelmente fracas (Pietruszczak, 2012). São sublógicas do sistema modal **S0.5** (Lemmon, 1952, 1957).

torreferenciais do tipo $A \leftrightarrow \neg\Box A$ são problemáticas em teorias aritméticas clássicas que formalizam predicados modais. Embora essas sentenças não sejam problemáticas em lógicas do tipo **LP(M2T)** e **ST(M2T)**, é necessário impor restrições na formulação dessas sentenças autorreferenciais. Por exemplo, se estendermos a linguagem dessas lógicas com princípios autorreferenciais de modo que sentenças do tipo $A \leftrightarrow \neg\Box A$ sejam formuláveis, tal como é feito em (Smorynski, 1980) e (Égré, 2005), é necessário restringir A da seguinte maneira: A não possui subfórmulas contendo modalidades. Mais precisamente, considere a seguinte Definição:

Definição 3.2.7. (Smorynski, 1980) Seja $L_{\mathbf{L}}(\Box\Diamond)$ a linguagem modal de **L(M)**. A *extensão diagonal* de **LM**, chamada de **(LM)*** é obtida de **L** ao estender $L_{\mathbf{L}}(\Box\Diamond)$ a $(L_{\mathbf{L}}(\Box\Diamond))^*$ de modo que, para toda fórmula $A(p, q_1, ..., q_n)$, onde p ocorre no escopo de algum operador modal, existe um operador $\delta_A(p, q_1, ..., q_n)$ tal que

$$\text{(Diag) } \delta_A(p, q_1, ..., q_n) \leftrightarrow A(\delta_A(q_1, ..., q_n), q_1, ..., q_n).$$

Como Smorynski (1980) e Égré (2005) mostram, $p \leftrightarrow \neg\Box p$ é um caso particular do esquema (Diag). Nesse caso, estamos tratando o operador $\delta_A(p, q_1, ..., q_n)$ como uma variável proposicional. No nosso presente caso, é necessário impor que nenhuma fórmula modal ocorra do nado esquerdo do referido esquema. Do contrário, poderíamos obter fórmulas do tipo:

$$\Box p \leftrightarrow \neg\Box\Box p.$$

Uma vez que $\Box p$ recebe somente valores clássicos, a sentença acima possui efeitos catastróficos em **(LP(M2T))*** e **(ST(M2T))***, por exemplo. Essa restrição não é necessária no caso das lógicas modais que atribuem o valor intermediário às fórmulas modais. Ou seja, a classicalidade dos operadores modais das lógicas caracterizadas pelos modelos $\mathfrak{M}_2$ pode impor dificuldades em aplicações interessantes dessas lógicas.[6] Obviamente, alguém poderia questionar se essa restrição constitui uma dificuldade de fato, uma vez que muitas das sentenças problemáticas, tal como $A \leftrightarrow \neg\Box A$, já são bloqueadas por **(LP(M2T))*** e **(ST(M2T))***. Dado que essa é uma discussão que transcende os propósitos desse artigo, deixá-la-emos em aberto. Nosso ponto principal foi o de mostrar que, embora modalidades bivalentes tenham aplicações interessantes, elas podem ter limitações em outras aplicações igualmente importantes.

4 Conclusão

Neste artigo, apresentamos duas maneiras distintas de caracterizar semanticamente lógicas modais multivaloradas. Ambas caracterizações possuem virtudes e problemas, de maneira que a escolha de uma delas depende diretamente do problema a ser analisado.

Embora não tenhamos nos ocupado de sistemas dedutivos para essas lógicas, pensamos que é perfeitamente possível apresentar sistemas dedutivos para elas. As lógicas proposicionais aqui analisadas são comumente apresentadas via cálculo de sequentes. No que diz respeito às lógicas **LP** e $\mathbf{K_3}$, encontramos sistemas de sequentes para ambas em (Beall, 2013). Já no que diz respeito às lógicas **TS** e **ST**, encontramos tais sistemas dedutivos em (Murzi e Rossi 2021) e (Ripley, 2013), respectivamente. No caso das lógicas **L(M3)**, pensamos que as extensões usuais com as regras modais para sequentes (Negri, 2011) é suficiente para obter sistemas corretos e completos para as referidas lógicas. Já no caso das lógicas **L(M2)**, pensamos que é preciso adotar sequentes de três lados (Baaz *et al.*, 1993a, 1993b, 1994), pois as modalidades bivalentes demandam uma distinção mais fina no sistema de prova, dado que elas

[6] Algo similar ocorre com algumas soluções paraconsistentes (não-modais) dos paradoxos semânticos. Barrio *et al.* (2017) mostram que é possível bloquear paradoxos semânticos utilizando lógicas paraconsistentes que possuem em sua linguagem conectivos de restauração. Eles mostram que é possível bloquear os paradoxos semânticos na medida que todos os enunciados autorreferenciais sejam instância de um esquema muito similar a (Diag). A chave da estratégia de (Barrio *et al.*, 2017) é utilizar um bicondicional fraco o suficiente para bloquear a possibilidade de trivialização da teoria. Por outro lado, Rosenblatt (2021) argumenta que essa estratégia incorre em certas arbitrariedades, uma vez que enunciados autorreferenciais podem também ser formulados com símbolo de identidade '=' que, por sua vez é incompatível com a proposta de Barrio *et al.* O problema é que nenhuma razão filosófica é oferecida para formular enunciados autorreferenciais com o bicondicional ao invés da identidade.

possuem comportamento clássico. Uma outra possibilidade é apresentar sistemas de tablôs rotulados para essas lógicas. Bezerra (2021) estende os tablôs rotulados para lógicas multivaloradas (Carnielli, 1987) para o caso modal. Em (Bezerra, 2021) encontramos tablôs para as lógicas modais baseadas em **LP**, $\mathbf{K_3}$, e **ST**. A extensão desses tablôs para as lógicas apresentadas neste trabalho é direta. Além disso, permite traçar relações com cálculos de sequentes de três lados para lógicas modais.[7]

Referências

ASENJO, F. G. 1966. A calculus of antinomies. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, **7**(1): p. 103-105.

BAAZ, M.; FERMÜLLER, C. G.; OVRUTCKI, A.; ZACH, R. 1993a. MULTLOG: A system for axiomatizing many-valued logics. In: *Logic Programming and Automated Reasoning: 4th International Conference, LPAR'93 St. Petersburg, Russia, July 13–20, 1993 Proceedings* **4**: p. 345-347. Springer Berlin Heidelberg.

BAAZ, M.; FERMÜLLER, C. G.; ZACH, R. 1993b. *Dual systems of sequents and tableaux for many--valued logics*.

BAAZ, M.; FERMÜLLER, C. G.; ZACH, R. 1994. *Elimination of cuts in first-order finite-valued logics.*

BACON, A. 2013. Non-classical metatheory for non-classical logics. *Journal of Philosophical Logic*, **42**: p. 335-355.

BALLARIN, R. 2010 "Modern Origins of Modal Logic", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, Edward N. Zalta & Uri Nodelman (eds.), URL = <https://plato.stanford.edu/archives/win2022/entries/logic-modal-origins/>.

BARRIO, E.; ROSENBLATT, L.; TAJER, D. 2015. The logics of strict-tolerant logic. *Journal of Philosophical Logic*, **44**(5): p. 551-571.

BARRIO, E.; ROSENBLATT, L.; TAJER, D. 2016. Capturing naive validity in the cut-free approach. *Synthese*, p. 1-17.

BARRIO, E. A.; PAILOS, F. M.; SZMUC, D. E. 2017. A paraconsistent route to semantic closure. *Logic Journal of the IGPL*, **25**(4): p. 387-407.

BELNAP, N. D. 1977. A useful four-valued logic. In: *Modern uses of multiple-valued logic*, p. 5-37. Springer.

BEZERRA, E. 2021. *A Modal Approach to Logical Consistency* (Em português: *Uma abordagem modal para consistência lógica*). Universidade Estadual de Campinas.

BEZERRA, E; VENTURI, G. 2022. Many-valued logics and bivalent modalities. *Logic and Logical Philosophy*, **31**(4): p. 611-636.

BURGESS, J. P. 1999. Which modal logic is the right one? *Notre Dame Journal of Formal Logic*, **40**(1): p. 81–93.

CARNIELLI, W. A. 1987. Systematization of finite many-valued logics through the method of tableaux. *The Journal of Symbolic Logic*, **52**(2): p. 473-493.

CARNIELLI, W.; CONIGLIO, M. E.; MARCOS, J. 2007. Logics of formal inconsistency. In *Handbook of philosophical logic*, p. 1-93. Springer.

CARNIELLI, W.; CONIGLIO, M. E.; RODRIGUES, A. 2020. Recovery operators, paraconsistency and duality. *Logic Journal of the IGPL*, **28**(5): p. 624–656.

CARNIELLI, W. 1990. Many-valued logics and plausible reasoning. In: *Proceedings of the Twentieth International Symposium on Multiple-Valued Logic*, p. 328-329. IEEE Computer Society.

[7] O autor agradece o apoio financeiro de *Agencia Nacional de Promoción de la Investigacion, el Desarolllo Tecnológico y la Innovación* (Agencia I + D + I, MinCyT).

CARNIELLI, W.; CONIGLIO, M. E. 2016. *Paraconsistent logic: Consistency, contradiction and negation,* **40**: Springer.

CARNIELLI, W.; LIMA-MARQUES, M. 1999. Society semantics and multiple-valued logics. *Advances in Contemporary Logic and Computer Science*, **235**: p. 33–52.

CHELLAS, B. F. 1980. *Modal logic: an introduction*. Cambridge university press.

CIUNI, R.; CARRARA, M. 2020. Normality operators and classical recapture in many-valued logic. *Logic Journal of the IGPL*, **28**(5): p. 657–683.

COBREROS, P.; Egré, P.; RIPLEY, D.; VAN ROOIJ, R. 2012. Tolerant, classical, strict. *Journal of Philosophical Logic*, **41**(2): p. 347–385.

CONIGLIO, M. E.; PERON, N. M. 2013. Modal extensions of sub-classical logics for recovering classical logic. *Logica Universalis*, **7**(1): p. 71-86.

CONIGLIO, M. E.; PERON, N. M. 2014. Dugundji's theorem revisited. *Logica Universalis*, **8**: p. 407-422.

DA COSTA, N. C. 1974. On the theory of inconsistent formal systems. *Notre dame journal of formal logic*, **15**(4): p. 497-510.

DUGUNDJI, J. 1940. Note on a property of matrices for Lewis and Langford's calculi of propositions. *The Journal of Symbolic Logic*, **5**(4): p. 150-151.

ÉGRÉ, P. 2005. The knower paradox in the light of provability interpretations of modal logic. *Journal of Logic, Language and Information*, **14**(1): p. 13-48.

FRENCH, R. 2016. Structural reflexivity and the paradoxes of self-reference. *Ergo, an Open Access Journal of Philosophy*, **3**.

GOODSHIP, L. 1996. On dialethism. *Australasian Journal of Philosophy*, **74**(1): p. 153-161.

HAACK, S. 1978. *Philosophy of logics*. Cambridge University Press.

HUGHES, G. E.; CRESSWELL, M. J. 1996. *A new introduction to modal logic*. Psychology Press.

KLEENE, S. C. 1938. On notation for ordinal numbers. *The Journal of Symbolic Logic*, **3**(4): p. 150–155.

KNEALE, W.; KNEALE, M. 1962. *The development of logic*. Oxford University Press.

KRIPKE, S. 1976. Outline of a theory of truth. *The journal of philosophy*, **72**(19): p. 690-716.

KRIPKE, S. A. 1963. Semantical analysis of modal logic I: normal modal propositional calculi. *Mathematical Logic Quarterly*, **9**(5-6): p. 67-96.

KUBYSHKINA, E; ZAITSEV, D. V. 2016. Rational agency from a truth-functional perspective. *Logic and Logical Philosophy*, **25**(4): p. 499-520.

LEMMON, E. J. 1957. New foundations for Lewis modal systems. *The Journal of Symbolic Logic*, **22**(2): p. 176-186.

LEMMON, E. J. 1959. Is there only one correct system of modal logic? *Proceedings of the Aristotelian Society,* Supplementary Volumes, **33**: p. 23-56.

LEWIS, C. I.; LANGFORD, C. H. 1932. *Symbolic logic*. New York: Dover publications.

MARCOS, J. 2005. Nearly every normal modal logic is paranormal. *Logique et Analyse*, **48**(189/192): p. 279–300.

MONTAGUE, R. 1963. Syntactical treatments of modality, with corollaries on reflexion principles and finite axiomatizability. *Acta Philosophica Fennica*.

MORIKAWA, O. 1989. Some modal logics based on a three-valued logic. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, **30**(1): p. 130–137.

MURZI, J.; ROSSI, L. 2021. Naïve validity. *Synthese*, **199**: p.819–841.

MYHILL, J. 1960. Some remarks on the notion of proof. *The Journal of Philosophy*, **57**(14): p. 461-471.

NAUMOV, P. 2006. On modal logic of deductive closure. *Annals of Pure and Applied Logic*, **141**(1-2): p. 218-224.

NICOLAI, C.; STERN, J. 2021. The modal logics of Kripke–Feferman truth. *The Journal of Symbolic Logic*, **86**(1): p. 362–396.

PAILOS, F. M. 2020. Validity, dialetheism and self-reference. *Synthese*, **197**(2): p. 773-792.

PIETRUSZCZAK, A. 2012. Semantical investigations on some weak modal logics. Part II. *Bulletin of the Section of Logic*, **41**(3/4).

PRIEST, G. 1979. The logic of paradox. *Journal of Philosophical logic*, **8**(1): p. 219-241.

PRIEST, G. 2006. *In Contradiction*. Oxford University Press.

PRIEST, G. 2008. *An introduction to non-classical logic: From if to is*. Cambridge University Press.

PRIOR, A. N. 2003. *Time and modality*. John Locke Lecture.

RESCHER, N. 1969. *Many-valued logic*. New York: McGraw Hill.

RIPLEY, D. 2012. Conservatively extending classical logic with transparent truth. *The Review of Symbolic Logic*, **5**(2): p. 354-378.

RIPLEY, D. 2013. Paradoxes and failures of cut. *Australasian Journal of Philosophy*, **91**(1): p. 139-164.

ROSENBLATT, L. 2021. Expressing consistency consistently. *Thought: A Journal of Philosophy*, **10**(1): p. 33-41.

SCHOTCH, P. K.; JENSEN, J. B.; LARSEN, P. F.; MACLELLAN, E. J. 1978. A note on three-valued modal logic. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, **19**(1): p. 63-68.

SEGERBERG, K. 1967. Some modal logics based on a three-valued logic. *Theoria*, **33**(1): p. 53-71.

SKYRMS, B. 1978. An immaculate conception of modality or how to confuse use and mention. *The Journal of Philosophy*, **75**(7): p. 368–387.

SMORYNSKI, C. 1985. *Self-reference and modal logic*. Springer Verlag.

SOLOVAY, R. M. 1976. Provability interpretations of modal logic. *Israel journal of mathematics*, **25**: p. 287-304.

STALNAKER, R. 2006. On logics of knowledge and belief. *Philosophical studies*, **128**(1): p. 169-199.

STERN, J. 2014. Montague's theorem and modal logic. *Erkenntnis*, **79**: p. 551-570.

STERN, J. 2015. *Toward predicate approaches to modality* **44**. Springer.

SUSZKO, R. 1977. The Fregean Axiom and Polish mathematical logic in the 1920's. *Studia Logica*, **36**(4) p. 377–380.

ŁOS, J.; SUSZKO, R. 1958. Remarks on sentential logics. *Indagationes Mathematicae*, **20**(2): p. 177-183.

Submetido em 19 de julho de 2023.

Aceito em 30 de abril de 2024.