



## GRÁFICOS DE CONTROLE $\bar{X}$ PARA PROCESSOS ROBUSTOS

**Antonio Fernando Branco Costa**

UNESP – Campus de Guaratinguetá – Dpto. de Produção  
12500-000 – C. Postal 205 – Guaratinguetá – SP  
email: fbranco@provale.com.br

### *Resumo*

---

*O avanço tecnológico tem tornado os processos produtivos cada vez mais robustos (robustos no sentido de produzirem itens cada vez mais iguais). Neste contexto, pequenas alterações no processo podem ser críticas, devendo portanto ser eliminadas com rapidez. Tradicionalmente, são utilizados os gráficos das somas acumuladas ou das médias móveis para controlar tais processos. O objetivo deste trabalho é mostrar que os gráficos de Shewhart também podem ser utilizados para controlar processos robustos, bastando variar seus parâmetros de projeto de maneira apropriada.*

**Palavras-chave:** *processos robustos, controle de processos, gráficos de Shewhart com parâmetros variáveis.*

### **1. Introdução**

A simplicidade operacional dos gráficos de Shewhart tem sido a principal motivação para o seu uso intenso no monitoramento de processos produtivos. Contudo, esta simplicidade operacional, isto é, de se tomar amostras de tamanho  $n$  a cada  $h$  horas e investigar o processo

somente quando um ponto amostral cai fora dos limites de controle, faz dos gráficos de Shewhart um dispositivo lento na detecção de pequenas alterações no processo. Por conta disto, os gráficos de Shewhart vem sendo gradualmente substituídos por outros gráficos, tais como os gráficos das somas acumuladas ou os gráficos das médias móveis, operacionalmente mais

complexos, porém ágeis na detecção de pequenas mudanças no processo. O avanço tecnológico vem intensificando esta tendência, visto que os processos estão cada vez mais robustos (robustos no sentido de produzirem itens cada vez mais iguais em termos de peso, dimensões, composição, etc.). Neste contexto, pequenas alterações no processo podem ser críticas, devendo portanto serem eliminadas com rapidez.

Nestes últimos dez anos, especial atenção tem sido devotada aos gráficos de Shewhart visando a sua utilização no monitoramento de processos robustos. A idéia básica consiste em se variar os parâmetros de projeto dos gráficos de Shewhart de maneira apropriada, entre um valor mínimo e um valor máximo. Estes parâmetros são o tamanho da amostra  $n$ , o intervalo de tempo entre retirada de amostras  $h$ , e o fator de abertura  $k$  dos limites de controle (no caso particular do gráfico  $\bar{X}$ , os limites de controle são dados por  $\mu \pm k\sigma/\sqrt{n}$ , onde  $\mu$  e  $\sigma$  são respectivamente a média e o desvio padrão da variável  $X$ ). Assim, quando há suspeitas de que o processo se alterou, o controle se torna mais rígido, caso contrário ele é relaxado. Suspeitas de que o processo se alterou são obtidas quando um ponto amostral cai na chamada região de advertência do gráfico (veja Figura 1). Nestas condições, o controle se torna mais rígido porque se toma uma, duas ou todas das seguintes medidas:

- a) redução no tempo de espera para a retirada da próxima amostra (valor mínimo de  $h$ );
- b) aumento do tamanho da próxima amostra (valor máximo de  $n$ );
- c) estreitamento dos limites de controle (valor mínimo de  $k$ ).

Um ponto amostral na região central do gráfico é uma indicação de que o processo não sofreu alterações. Nestas condições, o controle é relaxado porque se toma uma, duas ou todas das seguintes medidas:

- a) aumento no tempo de espera para a retirada da próxima amostra (valor máximo de  $h$ );
- b) redução do tamanho da próxima amostra (valor mínimo de  $n$ );

- c) alargamento dos limites de controle (valor máximo de  $k$ ).

Os gráficos de Shewhart com o intervalo entre retirada de amostras variável são chamados de gráficos de controle com  $h$  variável. Analogamente, quando o tamanho das amostras e o intervalo entre retirada de amostras são variáveis, temos os gráficos de controle com  $n$  e  $h$  variáveis, etc.

A idéia de variar o intervalo entre retirada de amostras foi primeiro explorada com os gráficos  $\bar{X}$  (REYNOLDS, *et al.*, 1988; RUNGER & PIGNATIELLO, 1991; AMIN & MILLER, 1993; RUNGER & MONTGOMERY, 1993; BAXLEY, 1995; REYNOLDS, ARNOLD & BAIK, 1996; REYNOLDS, 1996), mas logo se estendeu para outros gráficos (REYNOLDS, AMIN & ARNOLD, 1990; SACCUCCI, AMIN & LUCAS, 1992). Por sua vez, PRABHU, RUNGER & KEATS (1993) e COSTA, (1994) estudaram os gráficos  $\bar{X}$  com o tamanho das amostras variável. O próximo passo foi então estudar os gráficos  $\bar{X}$  com  $n$  e  $h$  variáveis (PRABHU, MONTGOMERY & RUNGER, 1994; COSTA, 1997). Recentemente, COSTA (1999a; 1999b; 1998a) estudou os gráficos conjuntos  $\bar{X}$  e  $R$  com  $n$  e  $h$  variáveis e o gráfico  $\bar{X}$  isolado e em conjunto com o gráfico  $R$  tendo todos parâmetros variáveis. Uma revisão recente e bastante completa sobre o assunto, englobando cerca de sessenta artigos, todos em inglês, foi elaborada por TAGARAS (1998).

## 2. Descrição dos Gráficos $\bar{X}$ com Parâmetros Variáveis

Ao longo deste trabalho, assume-se que os gráficos  $\bar{X}$  com parâmetros variáveis são empregados para monitorar um processo onde as observações da característica de interesse  $X$  têm distribuição normal com média  $\mu$  e desvio padrão conhecido  $\sigma$ . Considera-se também que a produção se inicia com a média do processo (média de  $X$ ) ajustada no alvo ( $\mu = \mu_0$ ), mas após algum tempo de funcionamento esta sofre um deslocamento indo de  $\mu_0$  para  $\mu_1$ , com

0. Até antes da média se deslocar, o processo permanece em um estado de controle estatístico (abreviadamente, “sob controle”). A função primeira do gráfico  $\bar{X}$  é detectar alterações na média, assinalando assim os instantes apropriados em que o processo deve sofrer ajustes.

Quando o processo está sendo monitorado por um gráfico convencional do tipo  $\bar{X}$  (i.e., com parâmetros constantes), uma amostra de tamanho  $n_0$  é escolhida aleatoriamente a cada  $h_0$  horas. Então, os valores da variável  $\bar{X}$  vindos das amostras são plotados em um gráfico com limites de controle dados por  $\mu_0 \pm k_0\sigma/\sqrt{n_0}$ , (também conhecidos como limites de ação). Um valor de  $\bar{X}$  além dos limites de controle é uma indicação de que o processo necessita de ajustes. Quando a média do processo está centrada no alvo ( $= \mu_0$ ) dificilmente um valor de  $\bar{X}$  cai fora do intervalo  $\mu_0 \pm k_0\sigma/\sqrt{n_0}$ ; se isto acontecer tem-se um alarme falso, pois o gráfico indevidamente assinala um desajuste. A probabilidade  $\alpha_0$  de um alarme falso é dada por  $\alpha_0 = \Pr[|Z| > k_0 | Z \sim N(0,1)]$ .

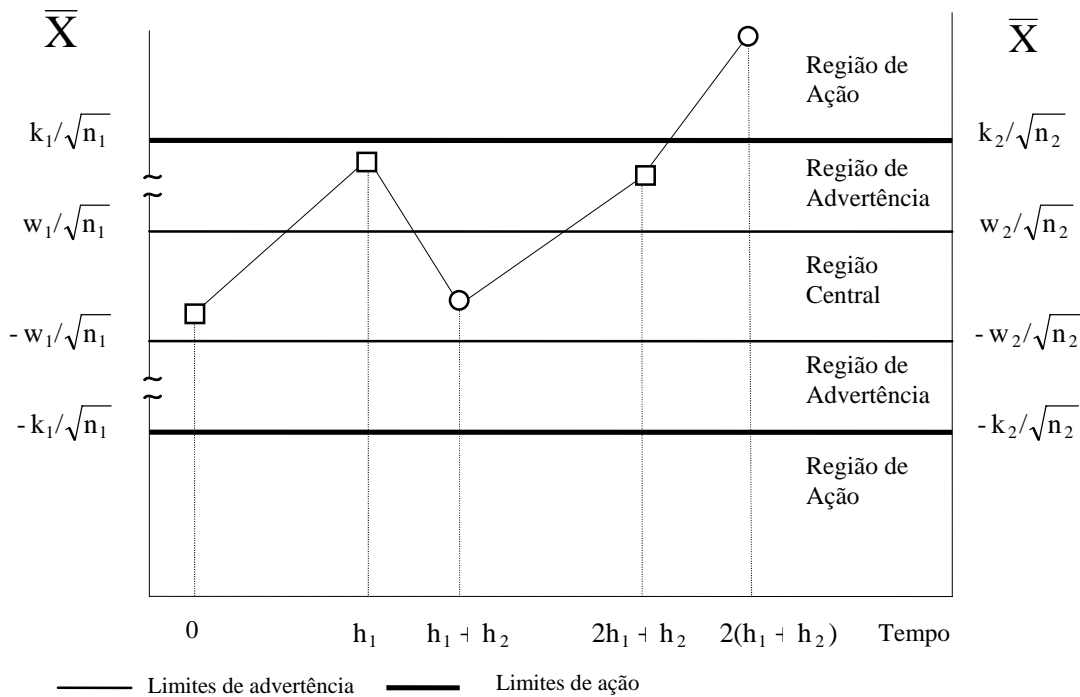
O gráfico  $\bar{X}$  com parâmetros variáveis é uma modificação do gráfico  $\bar{X}$  na qual os parâmetros de projeto  $n$ ,  $h$  e  $k$  variam entre dois valores como função da mais recente informação do processo. Deste modo, a posição de cada ponto amostral no gráfico estabelece o tamanho da próxima amostra e o instante de sua amostragem (veja Figura 1). Se o ponto amostral cair dentro da região de advertência então a próxima amostra será grande, isto é  $n_2 > n_0$ , e ela será extraída após um curto período de espera, isto é  $h_2 < h_0$ . Por outro lado, se o ponto amostral cair dentro da região central então a próxima amostra será pequena, isto é  $n_1 < n_0$ , e ela será extraída após um longo período de espera, isto é  $h_1 > h_0$ . Além disso, os valores de  $\bar{X}$  serão plotados em um gráfico com limites de advertência e ação dados por  $\mu_0 \pm w_1\sigma/\sqrt{n_1}$  e  $\mu_0 \pm k_1\sigma/\sqrt{n_1}$  respectivamente, onde  $i=1$  ( $i=2$ ) se  $\bar{X}$  veio de

uma amostra pequena (grande),  $k_1 > k_0 > k_2$  e  $w_1 > w_2$ .

Com isto, os limites de ação (e de advertência) para amostras pequenas e para amostras grandes não coincidem. Para evitar o uso de dois gráficos de controle, um para cada tamanho de amostra, ou a plotagem de dois conjuntos de limites em um mesmo gráfico, o que poderia ser fator de confusão, o usuário pode, para fazer os limites de ação (ou de advertência) para ambos os tamanhos de amostra coincidirem em uma mesma linha, construir o gráfico  $\bar{X}$  com duas escalas, uma do lado esquerdo e outra do lado direito. Resta porém o problema que ao ajustar as escalas para fazer os limites de ação coincidirem, os limites de advertência não coincidirão (e, analogamente, se as escalas forem escolhidas de modo a fazer coincidirem os limites de advertência, os limites de ação não coincidirão).

Este impasse pode ser solucionado por meio de uma “quebra” em uma das escalas, como ilustrado na Figura 1 (no exemplo dessa figura, a “quebra” ocorre na região de advertência, na escala da esquerda). Obviamente, o usuário terá dificuldades para plotar os pontos amostrais (vindos das amostras pequenas) quando estes caem na região de advertência. A sugestão aqui é plotar esses pontos em qualquer lugar dentro da região de advertência, uma vez que a exata posição dentro desta região não é exigida pelo critério de decisões adotado. (Comentário: dependendo dos valores de  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $w_1$  e  $w_2$  o usuário pode considerar mais conveniente “quebrar” a escala da direita, ou mesmo manter a “quebra” na região central).

O gráfico  $\bar{X}$  com parâmetros variáveis produz um sinal quando um ponto amostral cai na região de ação. Se o processo está operando apropriadamente com  $\mu = \mu_0$ , então este sinal é um alarme falso; caso contrário trata-se de um alarme verdadeiro. Dificilmente a média do processo sofre alterações logo no início da produção, portanto é razoável retirar a primeira amostra (de tamanho  $n_1$ ) no instante de tempo  $h_1$ . Após as investigações que se seguem a cada alarme falso, o processo é reinicializado.



$\square \Rightarrow$  valores de  $\bar{X}$  vindos das amostras de tamanho  $n_1$  (plotados no gráfico considerando a escala da esquerda).  
 $\circ \Rightarrow$  valores de  $\bar{X}$  vindos das amostras de tamanho  $n_2$  (plotados no gráfico considerando a escala da direita).  
 Obs.: para não sobrecarregar o desenho, os limites de controle foram obtidos considerando  $\mu_0 = 0$  e  $\sigma = 100$ .

Figura 1 – Gráfico  $\bar{X}$  com parâmetros variáveis

### 3. Propriedades dos Gráficos $\bar{X}$ com Parâmetros Variáveis

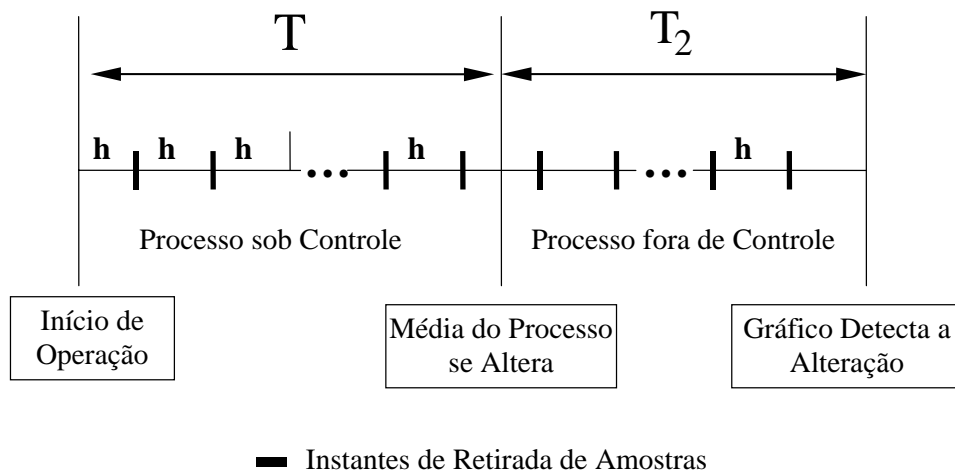
A velocidade com que um gráfico de controle detecta mudanças na média do processo mede a sua eficiência estatística. Quando o intervalo entre amostras é variável a velocidade é medida pelo AATS (*Adjusted Average Time to Signal*), que representa o valor esperado de  $T_2$ , o tempo entre os instantes em que a média do processo muda e o gráfico de controle detecta tal mudança (veja Figura 2). O AATS permite comparar a eficiência de diferentes gráficos de controle. No entanto, esta comparação só é apropriada se os gráficos a serem comparados produzirem a mesma frequência de alarmes falsos (ANFA, *Average Number of False Alarms*) e requererem a mesma frequência de amostras (ANS, *Average Number of Samples*) e

de itens a inspecionar (ANI, *Average Number of Items*) durante o período em que a média do processo permanece ajustada no alvo ( $\mu = \mu_0$ ). Muitos autores têm adotado a distribuição exponencial para descrever o instante de tempo  $T$  em que a média do processo se altera (veja por exemplo DUNCAN, 1956; MONTGOMERY, 1997; COSTA, 1993). Com esta hipótese, é possível determinar o AATS, ANS, ANFA e ANI para o gráfico  $\bar{X}$  com parâmetros fixos. A probabilidade  $p_i$  da média do processo se alterar no  $i$ -ésimo intervalo  $h$  é dada por

$$p_i = \Pr[(i-1)h < T < ih] = \int_{(i-1)h}^{ih} \lambda e^{-\lambda t} dt \quad (1)$$

onde  $\lambda = 1/E(T)$ . Portanto

$$ANS = \sum_{i=1}^{\infty} ip_i = \left( \frac{e^{-\lambda h}}{1 - e^{-\lambda h}} \right) \quad (2)$$



**Figura 2 – Fases do processo**

$$ANFA = \left( \frac{e^{-\lambda h}}{1 - e^{-\lambda h}} \right) \alpha_0 \quad (3)$$

$$ANI = \left( \frac{e^{-\lambda h}}{1 - e^{-\lambda h}} \right) n_0 \quad (4)$$

$$ATC = \left( \frac{e^{-\lambda h}}{1 - e^{-\lambda h}} + \frac{1}{p} \right) h_0 \quad (5)$$

O ATC (*Average Time of the Cycle*) representa o tempo médio entre o início da produção e o instante em que o gráfico de controle detecta uma mudança na média do processo, sendo  $p = \Pr[|Y| > k_0 | Y \sim N(\delta\sqrt{n_0}, 1)]$  a probabilidade de detecção. Portanto  $ATC = E(T+T_2) = 1/p + ANFA$  (veja Figura 2), o que permite obter o AATS, a partir de (5).

O ANS, ANFA, ANI e AATS para o caso do gráfico  $\bar{X}$  com parâmetros variáveis podem ser obtidos por meio de cadeias de Markov (uma abordagem interessante que dispensa qualquer hipótese sobre a distribuição da variável T tem sido adotado por COSTA, 1999b). Assim, a cada amostragem, um dentre quatro estados transientes é alcançado de acordo com as condições do processo (sob ou fora de controle) e o tamanho da amostra (pequena ou grande), isto é

Estado 1: o processo está sob controle e a amostra é pequena;

Estado 2: o processo está sob controle e a amostra é grande;

Estado 3: o processo está fora de controle e a amostra é pequena;

Estado 4: o processo está fora de controle e a amostra é grande.

Alternativamente, os estados transientes da cadeia de Markov podem ser definidos em função da situação do processo (sob controle ou fora de controle) quando a amostra (i+1) é extraída e da posição do ponto amostral (i) no gráfico de controle (veja Tabela 1). O gráfico de controle produz um alarme quando um ponto amostral cai na região de ação. Se o estado corrente for o estado 1 ou 2 (3 ou 4) o alarme será falso (verdadeiro). O estado absorvente (estado 5) é alcançado quando um alarme verdadeiro ocorre.

A matriz de probabilidades de transição da cadeia de Markov associada ao gráfico de controle em estudo é a seguinte:

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{14} & 0 \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & P_{24} & 0 \\ 0 & 0 & P_{33} & P_{34} & P_{35} \\ 0 & 0 & P_{43} & P_{44} & P_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_{55} \end{bmatrix}$$

Tabela 1 – Os estados da cadeia de Markov

amostra (i)	amostra (i+1)	
Posição do Ponto Amostral (Região)	Situação do Processo	Estado da Cadeia de Markov
Advertência	Sob controle	2
Advertência	Fora de controle	4
Central	Sob controle	1
Central	Fora de controle	3

$$\text{com} \quad \text{ANS} = \mathbf{b}'(I - Q)^{-1}\mathbf{r} \quad (7)$$

$$p_{i1} = \{1 - \Pr[w_i < |Z| < k_i | Z \sim N(0,1)]\}e^{-\lambda h_1}, \quad i = 1, 2; \quad \text{ANFA} = \mathbf{b}'(I - Q)^{-1}\mathbf{s} \quad (8)$$

$$p_{i2} = \Pr[w_i < |Z| < k_i | Z \sim N(0,1)]e^{-\lambda h_2}, \quad i = 1, 2; \quad \text{ANI} = \mathbf{b}'(I - Q)^{-1}\mathbf{v} \quad (9)$$

$$p_{i3} = \{1 - \Pr[w_i < |Z| < k_i | Z \sim N(0,1)]\}(1 - e^{-\lambda h_1}), \quad i = 1, 2;$$

$$p_{i4} = \Pr[w_i < |Z| < k_i | Z \sim N(0,1)](1 - e^{-\lambda h_2}), \quad i = 1, 2;$$

$$p_{33} = P_r \left\{ |Y| < w_1 \mid Y \sim N(\delta\sqrt{n_1}, 1) \right\}$$

$$p_{34} = P_r \left\{ w_1 < |Y| < k_1 \mid Y \sim N(\delta\sqrt{n_1}, 1) \right\}$$

$$p_{43} = P_r \left\{ |Y| < w_2 \mid Y \sim N(\delta\sqrt{n_2}, 1) \right\}$$

$$p_{44} = P_r \left\{ w_2 < |Y| < k_2 \mid Y \sim N(\delta\sqrt{n_2}, 1) \right\}$$

$$p_{35} = P_r \left\{ |Y| > k_1 \mid Y \sim N(\delta\sqrt{n_1}, 1) \right\}$$

$$p_{45} = P_r \left\{ |Y| > k_2 \mid Y \sim N(\delta\sqrt{n_2}, 1) \right\}$$

Das propriedades elementares de cadeias de Markov tem-se:

$$\text{ATC} = \mathbf{b}'(I - Q)^{-1}\mathbf{t} \quad (6)$$

onde  $\mathbf{b}' = (1, 0, 0, 0)$ ,  $I$  é a matriz identidade de ordem 4,  $Q$  é a matriz de probabilidades de transição retirados os elementos associados ao estado absorvente,  $\mathbf{t}' = (h_1, h_2, h_1, h_2)$ ,  $\mathbf{r}' = (1, 1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{s}' = (\alpha_1, \alpha_2, 0, 0)$ ,  $\mathbf{v}' = (n_1, n_2, 0, 0)$  e  $\alpha_i = \Pr[|Z| > k_i | Z \sim N(0,1)]$ ,  $i = 1, 2$ .

As Tabelas 2 e 3 apresentam valores do AATS (=ATC-1/) para o gráfico padrão  $\bar{X}$  (com  $h_0 = 1$ ;  $n_0 = 4,5$ ; e  $k_0 = 3,00$ ) e para o gráfico  $\bar{X}$  com parâmetros variáveis, ( $\lambda = 0,0001$ ). Os valores do AATS são praticamente independentes do valor de  $\lambda$ , exceto para  $\lambda$  grande ( $\lambda > 0,01$ ), ou seja, quando o processo se desajusta com frequência. O gráfico  $\bar{X}$  é tanto mais eficiente quanto menor for o  $h_2$ ; no entanto, são as condições reais que definem o valor deste parâmetro. Com amostras pequenas tem-se pouca chance de detectar mudanças na média do processo, portanto é interessante adotar valores grandes para  $k_1$  (por exemplo  $k_1 = 6,00$ ) de modo a se reduzir os riscos com alarmes falsos. Fixados  $h_2$ ,  $n_1$ ,  $n_2$  e  $k_1$ , os parâmetros  $k_2$ ,  $w_1$ ,  $w_2$  e  $h_1$  são determinados de modo a se igualar o ANS (dado pelas expressões (2) e (7)), ANFA (dado pelas expressões (3) e (8)) e o ANI (dado pelas expressões (4) e (9)). Ou seja

**Tabela 2 – Valores do AATS para o gráfico  $\bar{X}$  com parâmetros variáveis e com parâmetros fixos\* ( $n_0 = 4$ )**

$\lambda = 0,0001$	$\delta\sqrt{n_0}$												
	$(n_1, n_2)$	$(h_1, h_2)$	$(w_1, w_2)$	$(k_1, k_2)$	0,0	0,50	0,75	1,00	1,25	1,50	2,00	3,00	4,00
* (4;4)	(1,00;1,00)	(3,00;3,00)	(3,00;3,00)		370	155	80,7	43,4	24,5	14,5	5,80	1,50	0,69
(1; 8)	(1,71;0,05)	(0,790;79)	(6,00;2,73)		370	87,7	32,1	12,6	5,88	3,45	2,07	1,39	1,10
** (1; 12)	(1,36;0,10)	(1,10;1,08)	(6,00;2,59)		370	65,8	22,3	8,99	4,76	3,25	2,21	1,42	1,04
(1; 16)	(1,20;0,25)	(1,28;1,25)	(6,00;2,49)		370	54,1	18,2	7,95	4,75	3,54	2,52	1,59	1,16
(1;8)	(1,71;0,05)	(0,79;0,79)	(3,00;3,00)		370	127	48,7	18,2	7,52	3,92	2,10	1,38	1,09
(1; 12)	(1,36;0,10)	(1,09;1,09)	(3,00;3,00)		370	118	40,1	13,7	5,88	3,51	2,23	1,40	1,02
(1; 16)	(1,20;0,25)	(1,28;1,28)	(3,00;3,00)		370	111	34,7	11,7	5,57	3,72	2,52	1,56	1,10
(1; 8)	(1,00;1,00)	(0,79;0,79)	(3,00;3,00)		370	139	59,9	25,9	12,2	6,54	2,76	1,30	1,04
(1; 12)	(1,00;1,00)	(1,06;1,06)	(3,00;3,00)		370	127	47,3	18,0	8,15	4,62	2,46	1,54	1,25
(1; 16)	(1,00;1,00)	(1,28;1,28)	(3,00;3,00)		370	117	39,0	14,0	6,62	4,18	2,63	1,76	1,38
(4; 4)	(2,00;0,05)	(0,65;0,65)	(3,00;3,00)		370	141	65,3	30,1	14,2	7,00	2,28	1,06	0,99
(4; 4)	(2,00;0,10)	(0,63;0,63)	(3,00;3,00)		370	141	66,0	30,7	14,6	7,35	2,45	1,08	0,97
(4; 4)	(2,00;0,25)	(0,56;0,56)	(3,00;3,00)		370	143	68,1	32,5	16,1	8,43	2,98	1,15	0,95

\* Gráfico  $\bar{X}$  com parâmetros fixos,  $n_0 = 4$ ,  $h_0 = 1,00$  e  $k_0 = 3,00$  ( $\alpha_0 = 0,0027$ ).

\*\* Esquema adotado no exemplo ilustrativo.

$$k_2 = \Phi^{-1} \left\{ \frac{[(n_2 - n_1)\Phi(k_0) - (n_2 - n_0)\Phi(k_1)]}{(n_0 - n_1)} \right\}$$

$$w_i = \Phi^{-1} \left\{ \Phi(k_i) - [\Phi(k_i) - 1/2] \left( \frac{n_0 - n_1}{n_2 - n_1} \right) e^{-\lambda(h_0 - h_2)} \right\}$$

$i = 1, 2$

$$h_1 = h_2 - \frac{1}{\lambda} \ln \left\{ \frac{[2\Phi(k_1) - 1]e^{-\lambda(h_0 - h_2)} - 2[\Phi(k_1) - \Phi(w_1)]}{2\Phi(w_1) - 1} \right\}$$

É notória a rapidez com que o gráfico de controle  $\bar{X}$  com parâmetros variáveis detecta alterações no processo, em alguns casos o tempo de detecção (AATS) se reduz a menos de um

quarto quando comparado com o gráfico de controle  $\bar{X}$  com parâmetros fixos.

É importante comparar o gráfico  $\bar{X}$  de parâmetros variáveis com os gráficos CUSUM (somadas acumuladas) e EWMA (média móvel ponderada exponencialmente), uma vez que estes gráficos são indicados para a detecção de pequenas alterações na média do processo. A Tabela 4 fornece o AATS para o gráfico  $\bar{X}$  com parâmetros variáveis, e para os gráficos CUSUM e EWMA. Os três primeiros gráficos das somadas acumuladas foram obtidos por GAN (1991); os dois últimos por REYNOLDS, AMIN & ARNOLD (1990); e os três gráficos da média móvel ponderada exponencialmente por LUCAS e SACCUCCI (1990). Os parâmetros de cada gráfico de controle  $\bar{X}$ , a ser comparado com um

**Tabela 3 – Valores do AATS para o gráfico  $\bar{X}$  com parâmetros variáveis e com parâmetros fixos\* ( $n_0 = 5$ )**

$\lambda = 0,0001$				$\delta\sqrt{n_0}$								
				0,0	0,50	0,75	1,00	1,25	1,50	2,00	3,00	4,00
$(n_1, n_2)$	$(h_1, h_2)$	$(w_1, w_2)$	$(k_1, k_2)$									
(5; 5)	(1,00;1,00)	(3,00;3,00)	(3,00;3,00)	370	155	80,7	43,4	24,5	14,5	5,80	1,50	0,69
(1; 10)	(1,71;0,05)	(0,77;0,76)	(6,00;2,73)	370	87,5	32,1	12,7	5,96	3,56	2,20	1,53	1,21
(1; 15)	(1,36;0,10)	(1,07;1,05)	(6,00;2,59)	370	65,4	22,2	9,01	4,84	3,38	2,39	1,58	1,16
(1; 20)	(1,20;0,25)	(1,25;1,23)	(6,00;2,49)	370	53,6	18,0	7,97	4,85	3,69	2,72	1,78	1,29
(1; 10)	(1,71;0,05)	(0,96;0,96)	(3,00;3,00)	370	122	43,7	15,4	6,37	3,55	2,11	1,36	1,02
(1; 15)	(1,36;0,10)	(1,06;1,06)	(3,00;3,00)	370	117	39,6	13,6	5,93	3,63	2,40	1,57	1,14
(1; 20)	(1,20;0,25)	(1,25;1,25)	(3,00;3,00)	370	110	34,1	11,6	5,65	3,87	2,72	1,75	1,24
(1; 10)	(1,00;1,00)	(0,76;0,76)	(3,00;3,00)	370	138	59,5	25,7	12,2	6,52	2,77	1,33	1,08
(1; 15)	(1,00;1,00)	(1,06;1,06)	(3,00;3,00)	370	126	46,7	17,8	8,10	4,63	2,52	1,61	1,32
(1; 20)	(1,00;1,00)	(1,25;1,25)	(3,00;3,00)	370	116	38,4	13,8	6,62	4,24	2,74	1,88	1,49
(5; 5)	(2,00;0,05)	(0,65;0,65)	(3,00;3,00)	370	141	65,3	30,1	14,2	7,00	2,28	1,06	0,99
(5; 5)	(2,00;0,10)	(0,63;0,63)	(3,00;3,00)	370	141	66,0	30,7	14,6	7,35	2,45	1,08	0,97
(5; 5)	(2,00;0,25)	(0,56;0,56)	(3,00;3,00)	370	143	68,1	32,5	16,1	8,43	2,98	1,15	0,95

\* Gráfico  $\bar{X}$  com parâmetros fixos,  $n_0 = 5$ ,  $h_0 = 1,00$  e  $k_0 = 3,00$  ( $\alpha_0 = 0,0027$ ).

determinado gráfico CUSUM ou EWMA, foram escolhidos de modo a garantir a ambos os gráficos uma mesma frequência de alarmes falsos, de amostras e de itens a inspecionar durante o período em que a média do processo permanece ajustada no alvo ( $\mu = \mu_0$ ). Da Tabela 4 conclui-se que sempre é possível obter um gráfico  $\bar{X}$  com parâmetros variáveis mais eficiente que o gráfico das somas acumuladas ou da média móvel ponderada exponencialmente (em termos da velocidade com que estes dispositivos detectam alterações no processo). Esta observação é de importância prática, uma vez que em muitas situações pode ser mais fácil monitorar o processo com um gráfico de controle  $\bar{X}$  de parâmetros variáveis. Por fim, o usuário tem agora três dispositivos diferentes para o controle de processos sujeitos a pequenas alterações.

#### 4. Exemplo Ilustrativo

Considere um processo de engarrafamento no qual a quantidade de líquido em cada garrafa é o característico de qualidade de interesse. As garrafas contém em média 300 ml (média do processo  $\mu_0 = 300,00$ ) com um desvio padrão de 2 ml (desvio padrão do processo  $\sigma = 2,00$ ). Ocasionalmente, o líquido apresenta algumas impurezas as quais entopem parcialmente o bocal por onde o líquido flui, alterando a média do processo. A eliminação por completo de tais impurezas demanda um investimento exorbitante portanto, a alternativa encontrada foi a de implantar um gráfico de controle  $\bar{X}$  para monitorar a quantidade de líquido em cada garrafa. Em função das características do



**Tabela 4 – Valores do AATS para o gráfico  $\bar{X}$  com parâmetros variáveis; gráfico CUSUM; e gráfico EWMA**

			$\delta\sqrt{n_0}$							
			0,00	0,50	1,00	1,50	2,00	3,00	4,00	
$(\bar{n}, n_1, n_2)$	Vp $\bar{X}$ Chart									
	$(h_0, h_1, h_2)$	$(k_0, k_1, k_2)$								
$(1,30;1; 8)$	$(1,30;1,35;0,13)$	$(2,80;5,00;1,55)$	250	40,6	9,0	4,0	2,2	1,1	0,8	
	CUSUM(0,75;3,08)		250	41,1	9,5	4,3	2,7	1,5	0,9	
$(1,70;1; 11)$	$(1,70;1,82;0,17)$		250	30,3	8,1	4,0	2,4	1,3	1,1	
	$(2,71;5,00;1,66)$		250	30,3	8,7	4,6	3,1	1,8	1,4	
$(3,00;1; 12)$	$(3,00;3,60;0,30)$		250	23,6	8,0	4,8	3,3	2,2	2,0	
	$(2,51;5,00;1,84)$		250	25,4	9,9	6,0	4,3	2,7	2,0	
$(3,30;1; 14)$	$(3,30;3,96;0,17)$		370	25,0	8,8	5,2	3,5	2,3	1,8	
	$(2,62;4,00;1,96)$		370	25,1	9,4	5,6	4,0	2,5	1,8	
$(1,30;1;4)$	$(1,30;1,43;0,13)$		370	61,7	8,6	2,9	1,7	1,0	0,8	
	$(2,92;4,00;2,12)$		370	68,0	12,8	4,8	2,7	1,3	0,8	
$(4,00;3;9)$	$(1,00;1,18;0,10)$		300	98,4	15,5	3,4	1,5	0,8	0,6	
	$(2,94;3,00;2,72)$		300	113	18,9	3,7	1,5	0,8	0,6	
$(4,00;1;16)$	$(1,00;1,23;0,10)$		500	65,3	8,4	3,6	2,5	1,5	1,1	
	$(3,09;6,00;2,58)$		500	65,8	13,0	5,2	3,0	1,6	1,0	
$(4,00;1;18)$	$(1,00;1,20;0,10)$		1000	93,4	9,3	3,8	2,7	1,6	1,1	
	$(3,29;6,00;2,77)$		1000	97,7	16,1	6,1	3,4	1,7	1,1	

$\bar{n}$  = tamanho médio da amostra durante o período sob controle ( $n_0 = \bar{n}/h_0$ )

CUSUM (a, b), a = valor de referência; b = intervalo de decisão

EWMA(a,b,c), a = intervalo de decisão; b = valor de referência; c = fator de abertura

processo optou-se por retirar uma amostra de tamanho quatro (quatro garrafas,  $n_0 = 4$ ) a cada vinte minutos ( $h_0 = 0:20$ ) e plotar no gráfico o valor de  $\bar{X}$  (o líquido das quatro garrafas dividido por quatro), veja Figura 3. Seguindo a tradição, os limites do gráfico de controle  $\bar{X}$  foram estabelecidos a três desvios padrões amostrais da média alvo (300 ml), ou seja, limites de controle superior e inferior respectivamente iguais a 303 ml e 297 ml.

O gráfico de controle  $\bar{X}$  se mostrou veloz na detecção de deslocamentos grandes da média do processo (em torno de  $\pm 3,0$  ml), sinalizando tais deslocamentos em apenas meia hora após a ocorrência (AATS=1,5 $h_0$ , veja primeira linha da Tabela 2) e ineficiente na detecção de pequenos deslocamentos (em torno de  $\pm 1,0$  ml) sinalizando apenas após quatorze horas e meia (AATS=43,4 $h_0$ ). A baixa velocidade com que o gráfico de controle  $\bar{X}$  sinaliza pequenas

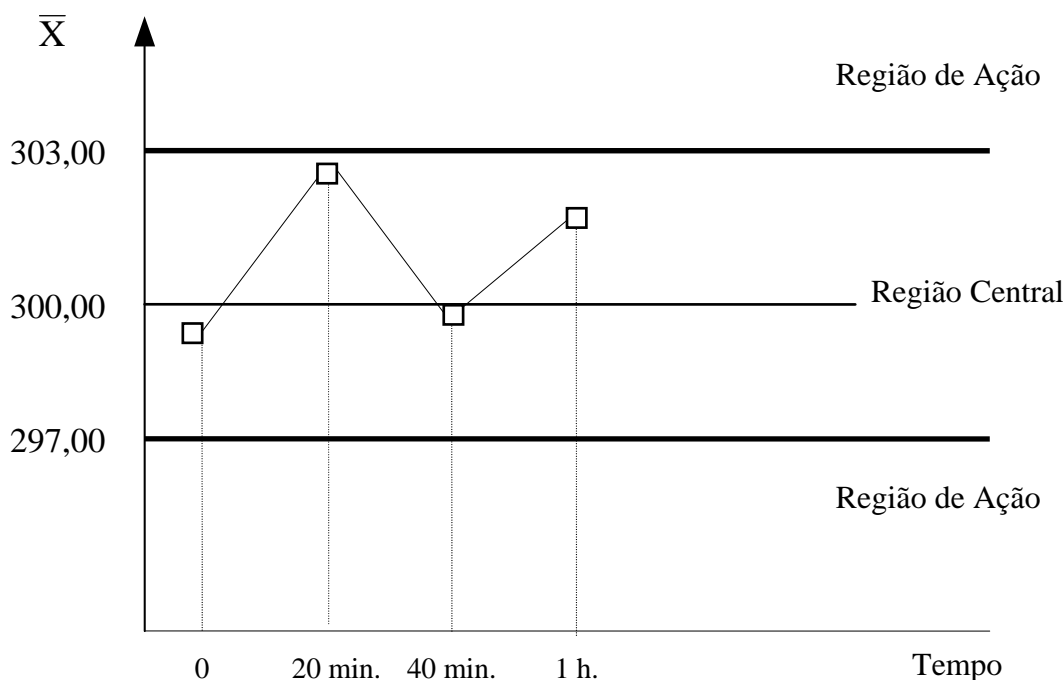


Figura 3 – Gráfico  $\bar{X}$  com parâmetros fixos,  $n_0 = 4$ ,  $h_0 = 0:20$  e  $k_0 = 3,00$

alterações na média do processo levou o responsável pelo processo a inovar. A nova proposta consiste em construir o gráfico  $\bar{X}$  com uma região de advertência (veja Figura 4) e em variar os parâmetros de projeto ( $n$ ,  $h$ ,  $w$  e  $k$ ) entre dois valores  $(n_1, n_2)$ ,  $(h_1, h_2)$ ,  $(w_1, w_2)$ ,  $(k_1, k_2)$ , dados por  $(1;12)$ ,  $(1,36h_0;0,10h_0)$ ,  $(1,10;1,08)$ ,  $(6,00;2,59)$  respectivamente (veja terceira linha da Tabela 2). Assim quando um ponto  $\bar{X}$  cai na região de advertência uma nova amostra de tamanho 12 ( $n_2 = 12$ ) é retirada do processo quase que imediatamente (2 minutos após, isto é,  $h_2 = 0,10 h_0 = 2$  minutos). Caso contrário, se o  $\bar{X}$  cai na região central do gráfico, um tempo longo de espera de 27 minutos ( $h_2 = 1,36 h_0 = 27$  minutos) é estabelecido até a retirada da próxima amostra que será de tamanho unitário ( $n_1 = 1$ ).

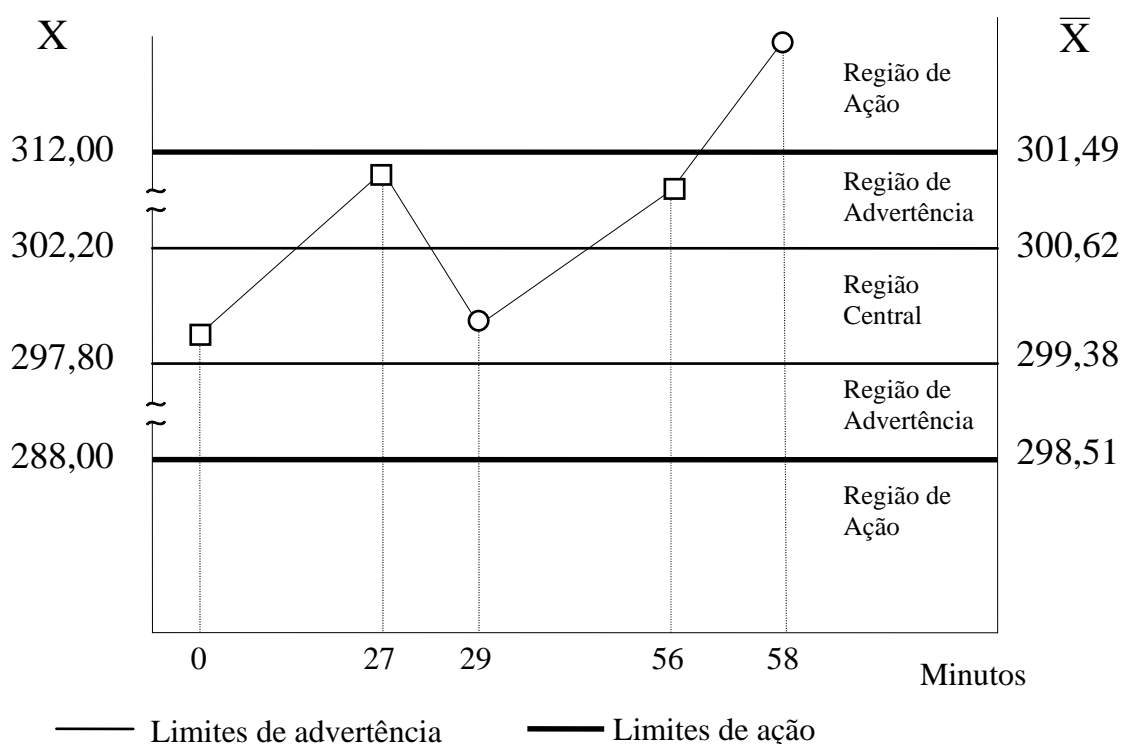
Os valores de  $\bar{X}$  vindos das amostras pequenas (neste caso particular, como  $n_1 = 1$ ,  $\bar{X}$  se reduz a  $X$ , quantidade de líquido em uma garrafa) são plotados no gráfico considerando a escala da esquerda, onde os limites de advertência são dados por  $\mu_0 \pm w_1\sigma/\sqrt{n_1}$  (297,80;302,20) e os

de ação por  $\mu_0 \pm k_1\sigma/\sqrt{n_1}$  (288,00;312,00). Por outro lado, os valores de  $\bar{X}$  vindos das amostras grandes são plotados no gráfico considerando a escala da direita, onde os limites de advertência são dados por  $\mu_0 \pm w_2\sigma/\sqrt{n_2}$  (299,38;300,62) e os de ação por  $\mu_0 \pm k_2\sigma/\sqrt{n_2}$  (298,51;301,49).

O gráfico de controle  $\bar{X}$  com parâmetros variáveis detecta pequenos deslocamentos na média do processo (em torno de  $\pm 1,5$  ml) em apenas três horas (AATS=8,99 $h_0$ , veja linha três da Tabela 2). Ou seja, o gráfico de controle proposto reduz em onze horas e meia o tempo que o processo permanece fora de controle (de quatorze horas e meia para apenas três horas).

## 5. Conclusões

Com o auxílio de cadeias de Markov foi possível determinar as propriedades do gráfico  $\bar{X}$  de parâmetros variáveis (AATS, ANFA, ANS e ANI). Na verdade, neste estudo alternou-se os parâmetros de projeto ( $n$ ,  $h$  e  $k$ )



□ => valores de  $\bar{X}$  vindos das amostras de tamanho  $n_1 = 1$  (plotados no gráfico considerando a escala da esquerda).

○ => valores de  $\bar{X}$  vindos das amostras de tamanho  $n_2 = 12$  (plotados no gráfico considerando a escala da direita).

**Figura 4 – Gráfico  $\bar{X}$  com parâmetros variáveis**  
 ( $n_1 = 1$ ;  $n_2 = 12$ ), ( $h_1 = 0:27$ ;  $h_2 = 0:02$ ), ( $k_1 = 6,00$ ;  $k_2 = 2,59$ )

entre apenas dois valores fixos, de modo a não se comprometer a operacionalidade do gráfico. Neste sentido, a Figura 4 apresenta um gráfico  $\bar{X}$  com duas escalas que evita o tédio de se ter de utilizar dois gráficos, um para amostras pequenas e outro para amostras grandes. A rapidez com que o gráfico  $\bar{X}$  de parâmetros variáveis detecta pequenas alterações no processo valida o seu uso no monitoramento de processos robustos. Por exemplo, o gráfico  $\bar{X}$  de parâmetros fixos, com  $n_0 = 4$ ,  $k_0 = 3,00$  e  $n_0 = 1,00$ , necessita, em média, de 43,4 intervalos h para detectar um deslocamento na média do processo de meio desvio padrão ( $\delta\sqrt{n_0} = 1,00$ ), veja linha um da Tabela 2. Já o gráfico  $\bar{X}$  de parâmetros variáveis, com  $n_1 = 1$ ,  $n_2 = 12$ ,  $h_1 = 1,35$ ,  $h_2 = 0,10$ ,  $k_1 = 6,00$  e  $k_2 = 2,59$  (terceira linha da Tabela 1),

detecta este mesmo deslocamento, em média, em apenas 9,00 intervalos h (aproximadamente 5 vezes mais rapidamente).

Em aplicações onde é complicado ou mesmo impossível eliminar os instantes fixos de amostragens (por exemplo, a cada meia hora), uma alternativa consiste em se manter a retirada de amostras regulares a cada meia hora mas com a possibilidade da extração de amostras adicionais entre amostras regulares. Detalhes desta proposta podem ser encontrados em COSTA (1998b).

#### Agradecimentos

Este trabalho recebeu o apoio do CNPq a partir do projeto 521919/97-5. O autor agradece aos revisores pelas úteis sugestões e correções.

## Referências Bibliográficas

- AMIN, R.W. & MILLER, R.W.:** “A Robustness Study of  $\bar{X}$  Charts with Variable Sampling Intervals.” *Journal of Quality Technology*, vol.25, pp.36-44, 1993.
- BAXLEY, R.V., Jr.:** “An Application of Variable Sampling Interval Control Charts.” *Journal of Quality Technology*, vol. 27, p.275-282, 1995.
- COSTA, A.F.B.:** “Joint Economic Design of  $\bar{X}$  and R Control Charts for Processes Subject to Two Independent Assignable Causes.” *IIE Transactions*, vol.25, pp.27-33, 1993.
- COSTA, A.F.B.:** “ $\bar{X}$  Charts with Variable Sample Size.” *Journal of Quality Technology*, vol.26, pp.155-163, 1994.
- COSTA, A.F.B.:** “ $\bar{X}$  Charts with Variable Sample Sizes and Sampling Intervals.” *Journal of Quality Technology*, vol.29, pp.197-204, 1997.
- COSTA, A.F.B.:** “Joint  $\bar{X}$  and R Charts with Variable Parameters.” *IIE-Transactions*, vol.30, pp.505-514, 1998a.
- COSTA, A.F.B.:** “VSSI  $\bar{X}$  Charts with Sampling at Fixed Times.” *Communications in Statistics – Simulation and Computation*, vol.27, Issue 11, 1998b.
- COSTA, A.F.B.:** “Joint  $\bar{X}$  and R Charts with Variable Sample Sizes and Sampling Intervals.” aceito para publicação no *Journal of Quality Technology*, vol.31, 1999a.
- COSTA, A.F.B.:** “ $\bar{X}$  Charts with Variable Parameters.” aceito para publicação no *Journal of Quality Technology*, vol.31, 1999b.
- DUNCAN, A.J.:** “The Economic Design of  $\bar{X}$  Control Charts to Maintain Current Control of a Process.” *Journal of the American Statistical Association*, vol.51, pp.228-242, 1956.
- GAN, F.F.:** “An Optimal Design of CUSUM Quality Control Chart.” *Journal of Quality Technology*, vol.23, pp.279-286, 1991.
- LUCAS, J.M., & SACCUCCI, M.S.:** “Exponentially Weighted Moving Average Control Scheme: Properties and Enhancements.” *Technometrics*, vol.32, pp.371-384, 1990.
- MONTGOMERY, D.C.:** *Introduction to Statistical Quality Control*. John Wiley & Sons, Inc., third edition, 1997.
- PRABHU, S.S.; RUNGER, G.C. & KEATS, J.B.:** “An Adaptive Sample Size  $\bar{X}$  Chart.” *International Journal of Production Research*, vol.31, pp.2895-2909, 1993.
- PRABHU, S.S.; MONTGOMERY, D.C. & RUNGER, G.C.:** “A Combined Adaptive Sample Size and Sampling Interval  $\bar{X}$  Control Scheme.” *Journal of Quality Technology*, vol.26, pp.164-176, 1994.
- REYNOLDS, M.R., Jr.; AMIN, R.W.; ARNOLD, J.C. & NACHLAS, J.A.:** “ $\bar{X}$  Charts with Variable Sampling Intervals.” *Technometrics*, vol.30, pp.181-192, 1988.
- REYNOLDS, M.R., Jr.; AMIN, R.W. & ARNOLD, J.C.:** “CUSUM Charts with Variable Sampling Intervals.” *Technometrics*, vol.32, pp.371-384, 1990.
- REYNOLDS, M.R., Jr.; ARNOLD, J.C. & BAIK, J.W.:** “Variable Sampling Interval  $\bar{X}$  Charts in the Presence of Correlation.” *Journal of Quality Technology*, vol.28, pp.1-28, 1996.
- REYNOLDS, M.R., Jr.:** “Shewhart and EWMA Variable Sampling Interval Control Charts with Sampling at Fixed Times.” *Journal of Quality Technology*, vol.28, pp.199-212, 1996.
- RUNGER, G.C. & MONTGOMERY, D.C.:** “Adaptive Sampling Enhancements for Shewhart Control Charts.” *IIE Transactions*, vol.25, pp.41-51, 1993.
- RUNGER, G.C., & PIGNATIELLO, J.J., Jr.:** “Adaptive Sampling for Process Control.” *Journal of Quality Technology*, vol.23, pp.135-155, 1991.
- SACCUCCI, M.S.; AMIN, R.W. & LUCAS, J.M.:** “Exponentially Weighted Moving Average Control Schemes With Variable Sampling Intervals.” *Communications in Statistics – Simulation and Computation*, vol.21, pp.627-657, 1992.
- TAGARAS, G.:** “A Survey of Recent Development in the Design of Adaptive Control Charts.” *Journal of Quality Technology*, vol.30, pp.212-231, 1998.

---

## ***STATISTICAL CONTROL OF ROBUST PROCESSES***

### ***Abstract***

*Technological development has reduced the variability between items produced on a large scale. Today, a small change in the process can be critical, requiring rapid action to eliminate it. Traditionally, the CUSUM and the moving mean are the charts used to control these processes that we call robust processes. The aim of this paper is to show that the Shewhart chart can also be used to control robust processes, if the constraint of fixed design parameters is relaxed.*

***Key words: robust processes, process control, variable parameter Shewhart charts.***