



Otimização da programação da produção de bebidas à base de frutas por meio de modelos de programação inteira mista

Optimizing the production scheduling of fruit juice beverages using mixed integer programming models

Marina Sanches Pagliarussi¹
Reinaldo Morabito¹
Maristela Oliveira Santos²

Resumo: Neste estudo, considera-se um problema de dimensionamento e programação de lotes de produção de bebidas não alcoólicas à base de frutas. O problema é caracterizado por horizonte de planejamento com múltiplos períodos, processo de produção com máquinas distintas, restrições de capacidades de produção e tempos de preparação das máquinas independentes da sequência de produção, além de condições especiais de preparações, como limpezas obrigatórias das máquinas dentro de limitações de tempo de produção. Para tratar o problema, propõe-se uma abordagem de solução baseada em modelos de programação matemática e uso de *softwares* de otimização. Os modelos são modificações de modelos de programação linear inteira mista conhecidos na literatura de dimensionamento e programação de lotes de produção. Porém, ao invés de considerar múltiplas máquinas em paralelo, os modelos propostos exploram outras possíveis configurações de máquinas para representar apropriadamente os processos de produção envolvidos na produção de bebidas à base de frutas. A abordagem proposta é validada por meio de um estudo realizado em uma fábrica de sucos e néctares de frutas no interior do Estado de São Paulo, em que as soluções obtidas pelos modelos foram testadas e analisadas em situações realistas da empresa. Os resultados mostram que a abordagem tem bom potencial de aplicação prática.

Palavras-chave: Indústria de bebidas não alcoólicas; Planejamento da produção; Programação inteira mista; Dimensionamento de lotes.

Abstract: *This study considers a production lot-sizing and scheduling problem of non-alcoholic fruit juice beverages. The problem is characterized by a multi-period planning horizon, a production process with different machines, capacity constraints and setup times independent from the production sequence, as well as special conditions regarding required machines clean-in-place (CIP) within production time periods. To deal with this problem, we propose a solution approach based on mathematical programming and using optimization software. The models are modifications of mixed integer programming models known in the lot sizing and scheduling literature. However, instead of considering multiple parallel machines, the proposed models explore other possible configurations of machines to properly represent the production processes involved in producing fruit beverages. The proposed approach is validated by a study carried out in a fruit juice company located in the interior of Sao Paulo State, Brazil, in which the solutions obtained by the models were tested and analyzed in real situations at the company. The results show that the approach is potentially good for practical applications.*

Keywords: *Non-alcoholic fruit juice beverage industry; Production planning; Mixed integer programming; Lot sizing and scheduling problem.*

1 Introdução

Nos últimos anos tem-se observado um crescimento importante da produção de bebidas não alcoólicas no Brasil (ABIR, 2010; Diário Econômico, 2011). O aumento potencial de consumo desses produtos,

o crescimento do número de itens produzidos pelas fábricas e a concorrência e as exigências desse mercado aumentaram a preocupação das empresas em melhorar seus processos produtivos, principalmente nas áreas

¹ Departamento de Engenharia de Produção, Universidade Federal de São Carlos – UFSCar, Rod. Washington Luiz, Km 235, CEP 13565-905, São Carlos, SP, Brasil, e-mail: mari.paglia@gmail.com; morabito@ufscar.br

² Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo – USP, Av. Trabalhador São-Carlense 400, CEP 13560-970, São Carlos, SP, Brasil, e-mail: mari@icmc.usp.br

diretamente envolvidas com a produção, como no planejamento e controle da produção. Para 2015, a estimativa é que haja um crescimento na produção do setor de bebidas como um todo, de acordo com o Sistema de Controle de Produção de Bebidas (SICOBEB, 2005). Um dos desafios recorrentes neste setor é a determinação de programas de produção eficientes, que considerem os tempos disponíveis para produção, as disponibilidades de insumos, as demandas de cada período, as máquinas a serem preparadas para produção, os tempos de troca de itens e ainda a sincronia entre os dois principais estágios de produção: o preparo dos xaropes e o envase das bebidas. Alguns estudos sobre indústrias de bebidas não alcoólicas no Brasil, especificamente na produção de refrigerantes e outras bebidas carbonatadas (Toledo et al., 2007; Ferreira et al., 2009) e bebidas à base de frutas (Leite, 2008) ressaltam a dificuldade dos programadores de produção das empresas na determinação (em geral manual) de programas eficientes.

Durante o desenvolvimento desta pesquisa, foram realizadas várias visitas a empresas típicas do setor de bebidas no Estado de São Paulo, nas quais os gerentes e programadores da produção das empresas reafirmaram a dificuldade em realizar o dimensionamento e o sequenciamento de lotes de produção. Isso também foi observado em linhas de produção de bebidas à base de frutas, objeto deste estudo. Com a colaboração de uma dessas empresas, escolheu-se uma dessas linhas para o desenvolvimento deste estudo, que tem características típicas de outras linhas de empresas desse setor. A linha de produção de bebidas à base de frutas foi selecionada devido ao fato de que esse tipo de bebida tem apresentado tendência de crescimento nos últimos anos (ABIR, 2010). O consumo de bebidas à base de frutas prontas para beber ainda está abaixo do consumo de refrigerantes, porém isso é visto por alguns autores como indicação do seu potencial de crescimento (Pirillo & Sabio, 2009).

O problema de dimensionamento e programação de lotes de produção de bebidas à base de frutas consiste basicamente em planejar a produção de diferentes tipos de bebidas (itens) para atender às demandas em um horizonte de planejamento com múltiplos períodos e finito. As características de produto e de manufatura fazem com que as preparações das máquinas desta linha de produção não dependam da sequência de produção dos lotes, o que não acontece na maioria das linhas que produzem bebidas, como as linhas de refrigerantes e outras bebidas carbonatadas estudadas em Toledo et al. (2007) e Ferreira et al. (2009). Além disso, considerações de limpezas obrigatórias dos tanques e máquinas de envase dentro de limitações de tempo de produção são importantes na programação da produção e, para o caso da linha estudada, é obrigatório que se faça uma limpeza

(chamada CIP- *Clean in Place*) após certo tempo de produção, independentemente de haver troca de sabor ou não. Caso haja troca de item, a mesma limpeza é necessária, e o tempo de limpeza não varia de acordo com o sabor do produto. Um estudo preliminar em uma linha de produção de bebidas à base de frutas aparece em Leite (2008), nele as preparações das máquinas para a produção também não dependem da sequência dos lotes de produção.

Problemas de dimensionamento de lotes de produção e suas extensões têm sido amplamente investigados pela comunidade científica e por consultores ligados às empresas, motivados pelas suas aplicações nos meios industriais. Revisões compreensivas sobre problemas de dimensionamento de lotes podem ser encontradas em Drexler & Kimms (1997), Karimi et al. (2003), Jans & Degraeve (2008), Buschkuhl et al. (2010) e Glock et al. (2014). Dentre os modelos para o problema de dimensionamento de lotes, destacam-se o CLSP (*Capacitated lot sizing problem*) e o GLSP (*General lot sizing and scheduling problem*). O CLSP é denominado *big bucket*, ou seja, vários itens podem ser produzidos durante cada período do problema (por exemplo, cada semana). O problema considera limitações de capacidade para produção dos itens e para as preparações das máquinas (*setup*). O CLSP com tempos de *setup* foi estudado, por exemplo, por Trigeiro et al. (1989). O GLSP foi proposto por Fleischmann & Meyr (1997) e Meyr (2002) e integra decisões de dimensionamento e sequenciamento de lotes de vários itens e restrições de capacidade. Os períodos do problema são divididos em subperíodos (ou número de preparos do período) e, em cada subperíodo, apenas um item pode ser produzido. Dessa forma, obtém-se, em cada período, a ordem em que os lotes serão produzidos por meio dos subperíodos.

Os problemas de dimensionamento e programação de lotes têm sido amplamente aplicados em diversos setores produtivos (veja, por exemplo, Araujo et al., 2008; Almada-Lobo et al., 2008; Luche et al., 2009; Toso et al., 2009; Santos & Almada-Lobo, 2012; Marinelli et al., 2007; Kopanos et al., 2010, entre muitos outros). Alguns estudos também são encontrados na produção de bebidas não alcoólicas, como refrigerantes, águas, chás, sucos, mas a maioria desses trabalhos considera linhas de produção de refrigerantes. Por exemplo, Toledo et al. (2007) apresentaram um modelo integrado de programação da produção e dimensionamento de lotes para a produção de refrigerantes baseado no modelo GSLPPL (GSLP com máquinas paralelas) de Meyr (2002). A produção envolvia dois níveis interdependentes com decisões relativas à armazenagem das matérias-primas e ao engarrafamento das bebidas, e o objetivo era determinar simultaneamente o dimensionamento e a programação das matérias-primas nos tanques para produzir os xaropes e o envasamento de bebidas nas

linhas, em que tempos e custos de trocas dependiam do tipo de item previamente armazenado e envasado. Outros estudos relacionados aparecem em Toledo et al. (2009, 2014, 2015).

Clark (2003) explorou várias abordagens heurísticas para resolver um modelo de programação inteira mista, baseado no modelo CLSP, para auxiliar no planejamento da produção de bebidas de uma empresa que envasava latas e garrafas (mas o processo de envase por latas foi escolhido para o projeto piloto). Rangel & Ferreira (2003) apresentaram modelos de programação inteira mista para o dimensionamento de lotes e a programação da produção de refrigerantes com tempos e custos de *setup* dependentes da sequência. Os modelos também foram baseados no GLSP. Em Ferreira et al. (2009), estes estudos foram estendidos para casos de fábricas de refrigerantes com várias linhas de envase e vários tanques disponíveis para o preparo dos xaropes. O gargalo de produção podia estar tanto no estágio de envase quanto no estágio de preparo do xarope e, por isso, o sequenciamento dos xaropes nos tanques também precisava ser considerado. Outros estudos relacionados aparecem em Ferreira et al. (2010, 2012) e Defalque et al. (2011).

Leite (2008) foi o único trabalho encontrado na literatura que estudou a programação da produção de uma linha de bebidas à base de frutas. Um estudo preliminar foi realizado em uma fábrica desse setor de bebidas, para conhecer as particularidades das linhas de produção envolvidas, e um modelo baseado em Ferreira et al. (2009) e no GLSP foi aplicado para analisá-lo. Naquele estudo, havia três máquinas idênticas de envase estudadas por um único tanque; assim, as três máquinas embalavam apenas um tipo de sabor de bebida por vez.

No presente trabalho, consideramos um problema de dimensionamento de lotes e programação da produção em fábricas de bebidas à base de frutas com algumas similaridades com o estudado em Leite (2008). Porém, apesar das características do produto serem as mesmas consideradas (com tempos e custos de preparação independentes da sequência da produção), os atributos da linha de produção são diferentes, uma vez que o processo produtivo é diferente e envolve máquinas diferentes de envase e mais tanques, misturadores e pasteurizadores, como é visto adiante. O problema foi inicialmente representado por um modelo baseado no GLSPPL (Meyr, 2002), utilizado para contornar o problema da restrição de lote máximo existente nessas empresas, devido às limpezas obrigatórias dentro de limitações de tempo de produção. As soluções obtidas por este modelo determinam os tamanhos dos lotes e os sequenciamentos da produção; entretanto, esses lotes podem ser permutados dentro de cada período sem perda de generalidade, devido ao fato de que as preparações independem da sequência de produção. Então, com base nessa modelagem anterior,

também se desenvolveu um modelo mais simples para representar o problema, baseado no CLSP, que também considera as características específicas desse processo produtivo além das limpezas obrigatórias, mas simplifica as decisões de sequenciamento dos lotes. Os dois modelos são resolvidos por meio de *software* CPLEX para exemplares realistas da empresa com horizontes de planejamento de algumas semanas.

Este trabalho está organizado da seguinte maneira: a próxima seção descreve resumidamente o processo de produção de bebidas à base de frutas de acordo com a realidade da empresa estudada e também apresenta informações sobre como a programação da produção é realizada nesta empresa. Os modelos matemáticos propostos são apresentados na Seção 3. Os testes computacionais com os modelos são apresentados na Seção 4. Finalmente, na Seção 5 são discutidas as conclusões e perspectivas para pesquisa futura.

2 O processo produtivo das bebidas à base de frutas

Esta pesquisa contou com a colaboração de uma fábrica do interior do Estado de São Paulo, que produz refrigerantes e bebidas à base de frutas. Observou-se no setor de planejamento, programação e controle da produção da empresa a necessidade de programações de produção rápidas e eficazes, devido às características da demanda e do tipo de produto, em particular na linha relacionada à gama de produtos não carbonatados feitos à base de frutas. Essa linha, líder de mercado em seu segmento, é aqui chamada de Linha 1.

A Linha 1 produz 5 sabores diferentes de bebidas à base de frutas (abacaxi, laranja, maracujá, morango e uva) e é distinta das outras linhas da fábrica, devido ao fato de que seu tempo de preparação não depende da sequência de produção, diferentemente das linhas de refrigerantes, por exemplo. Por outro lado, o produto tem características que requerem que haja limpeza dos tanques e das máquinas de envase a cada 48 horas, o que não é imperativo para outras bebidas. O processo de lavagem consiste em diversos ciclos que são recirculados através dos tanques, bombas, válvulas e outros equipamentos no fluxo do processo. É importante ressaltar que, uma vez feita a limpeza da linha, deve-se iniciar a produção o mais rápido possível, pois a linha não é perfeitamente hermética. A produção pode ser continuada, ou seja, o produto que estava sendo produzido antes da produção pode ter sua produção restabelecida no mesmo período.

A produção das bebidas à base de frutas é dividida em dois estágios fundamentais de produção. O estágio 1 é composto pela xaroparia, processo da fábrica em que o xarope (matéria-prima para a produção das bebidas) é preparado a partir dos concentrados da bebida, água e açúcar. O estágio 2 é o processo em que está a área

de envase que produz o item final. Os dois estágios estão representados na Figura 1. O xarope e a água são colocados na *mixer*, que serve para homogeneização dos dois componentes, de onde seguem para o tanque preparatório e, posteriormente, para o tanque pulmão. O tanque preparatório e o tanque pulmão mantêm a mistura homogênea, de forma que ambos possuem hélices no fundo do tanque. O propósito do tanque preparatório é manter constantemente o tanque pulmão abastecido, de forma que este último funcione como um estoque intermediário. Em outras palavras, apesar de limitado, é como se o tanque pulmão tivesse capacidade suficientemente grande (infinita), porque é continuamente abastecido pelo tanque preparatório. O primeiro abastecimento do tanque preparatório leva em torno de duas horas e o abastecimento do tanque pulmão, aproximadamente cinquenta minutos. Depois disso, o abastecimento é contínuo. O *gargalo* dessa linha de produção são as máquinas de envase. Na Figura 1, as quatro máquinas de envase são denotadas por L1, L2, L3 e L4.

Observe na Figura 1 que o tanque preparatório tem uma capacidade de 12 m^3 e abastece dois tanques pulmões, com capacidades de 12 m^3 cada. O tanque pulmão 1 atende apenas às máquinas L1, L2 e L3, cada uma com capacidade de envase de 6000 embalagens/hora, e o tanque pulmão 2 abastece a

máquina L4, com capacidade de 7500 embalagens/hora. Os pasteurizadores 1 e 2 da figura, cujas funções são a destruição de bactérias, têm capacidades variáveis, as máximas chegam a 18700 embalagens/hora e 32500 embalagens/hora, respectivamente. Porém essas capacidades máximas não são atingidas, uma vez que as máquinas L1, L2 e L3 possuem capacidade nominal total de 18000 embalagens/hora. O processo de lavagem dessas máquinas de envase em geral acontece simultaneamente e é sempre mais demorado do que o dos tanques, de forma que quando as máquinas estiverem prontas para funcionamento, o tanque pulmão estará cheio.

Neste trabalho, também estudamos uma mudança do processo produtivo descrito na Figura 1, contendo uma nova máquina de envase, a máquina L5, com capacidade de envase de 11200 embalagens/hora e abastecida pelo tanque pulmão 2, junto com a máquina L4. Este processo com a máquina L5 entrou em fase de adaptação na empresa durante o desenvolvimento deste estudo, portanto também é considerada no estudo. No entanto, nem todas as combinações de máquinas são viáveis para operação na configuração da Figura 1, ou nesta segunda configuração do processo produtivo com a máquina L5. Por exemplo, não é viável produzir com capacidade limitada a menos de 12000 embalagens/hora, o que

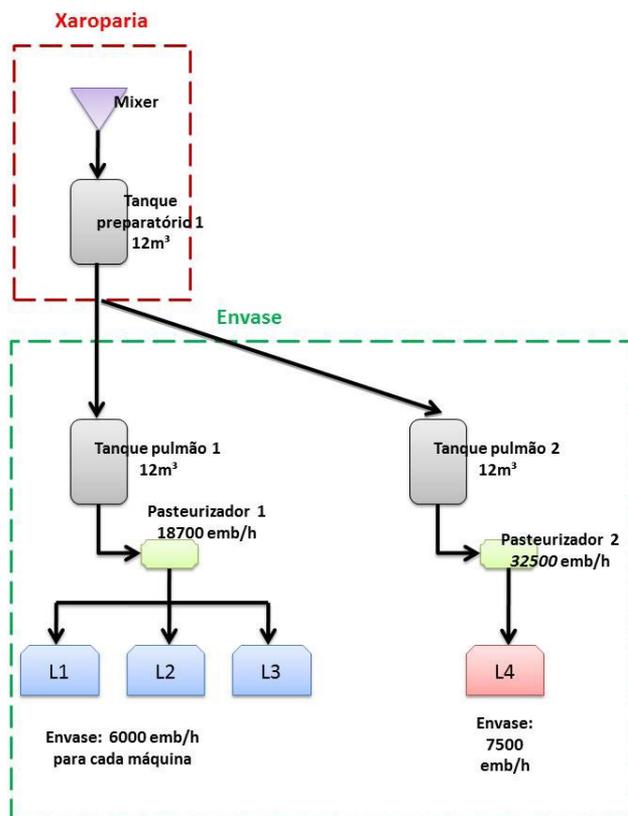


Figura 1. Linha 1.

significa que, no mínimo, duas das máquinas L1, L2 ou L3 devem estar ligadas (se as máquinas L4 e L5 estiverem desligadas). Similarmente, não é viável produzir com apenas a máquina L4 ou apenas a máquina L5 ligadas (se as máquinas L1, L2 e L3 estiverem desligadas), ambas com capacidades menores que 12000 embalagens/hora.

Conforme exposto, o tanque pulmão 1 abastece as máquinas de envase L1, L2 e L3, e o tanque pulmão 2 abastece a máquina L4 na configuração da Figura 1 e as máquinas L4 e L5 na configuração modificada. Deve-se ressaltar que, embora os tanques pulmões tenham a mesma capacidade, as capacidades dos pasteurizadores são diferentes: o pasteurizador ligado às máquinas L1, L2 e L3 tem capacidade máxima para processar 18700 embalagens de 200 mL por hora, enquanto o pasteurizador ligado às máquinas L4 e L5 tem a capacidade de processamento de 32500 embalagens por hora. O processo de lavagem de todas as máquinas em geral é realizado ao mesmo tempo e demora quatro horas. Segundo o programador de produção, para fazer a limpeza em apenas uma máquina, seriam necessárias aproximadamente duas horas, ao passo que o tempo de limpeza de todas as máquinas é de quatro horas. Portanto, não se justificava executar o processo de lavagem de uma única máquina por vez.

Os tanques pulmões abastecem dois conjuntos distintos de máquinas de envase. Uma vez que consideramos que a capacidade dos tanques é suficientemente grande, para os propósitos da programação da produção, o problema considerado neste artigo pode ser considerado como monoestágio, ou seja, considera-se que sempre exista xarope suficiente para abastecer as máquinas de envase. Desta forma, aborda-se o problema de dimensionar e programar os lotes de produção de diferentes produtos nas máquinas de envase, com um *mixer* e um tanque preparatório que abastecem dois tanques pulmões conforme ilustrado pela Figura 1.

A programação da produção na empresa é realizada manualmente. Os dados de demanda dos 5 produtos são obtidos de uma segunda empresa (ligada ao mesmo grupo empresarial) que adquire os produtos da Linha 1. Em posse dos dados de demanda, o programador de produção distribui a demanda agregada do mês em semanas. Essas quantidades, por sua vez, são passadas para o setor de xaroparia, que calcula a quantidade necessária de *kits* para atender à demanda. Uma característica relevante da Linha 1 é que os lotes duram em geral 48 h e a flexibilização do número de produtos é feita pelo número de máquinas designadas àquele *batch* e pela velocidade do pasteurizador, sem que o custo de estoque influencie a programação.

O estoque gerado pelo plano de produção é controlado por uma segunda empresa do grupo que observa e limita os níveis de estoque e distribuição de mão de

obra dentro da fábrica. Portanto, o programador, ao realizar o plano de produção, não tem como foco o controle de estoque, apenas visa o atendimento da demanda. O programador de produção procura não programar lotes com duração inferior a 48 horas para evitar preparações não obrigatórias, embora isso não seja impreterível. A flexibilidade do tamanho de lote de produção se resume a colocar uma das máquinas de envase em manutenção e diminuir a velocidade do pasteurizador, para que não se perca o produto por excesso de cozimento e, dessa forma, possibilite que o lote de 48 horas resulte em menor número de produtos. O programador encaminha a programação para a supervisão da linha de produção, que condiciona as quantidades em lotes de 48 h. Porém, nem sempre é possível acondicionar a demanda em lotes de 48 h. Nesse caso, o supervisor de produção solicita que se produza o menor múltiplo mais próximo da demanda e consulta o programador sobre a possibilidade de produção de mais um lote.

Na fábrica, é possível trabalhar com frações de *kits*, que é a medida de xarope utilizada. A fração mínima é pré-definida em 0,25 *kit*, pois deve haver uma quantidade mínima de líquido no tanque para que a hélice do misturador possa girar. Porém, a fração normalmente utilizada pelo programador de produção é 0,5 *kit*, com exceção dos sabores morango e laranja. As correspondências podem ser vistas na Tabela 1. Tais frações são utilizadas porque os tanques têm capacidade máxima de 12 m³. Se a quantidade calculada não der um número inteiro de frações de *kits* ou de *batches*, o gestor da xaroparia faz o maior número inteiro de *batches* contido na quantidade calculada e consulta o programador sobre fazer um *batch* a mais para cobrir a fração ou deixar para a próxima semana, ou seja, faz o arredondamento para cima ou para baixo.

Por exemplo, considere que o programador passou para o líder da xaroparia a produção de 120000 caixas do sabor uva, o que é equivalente a $12 \times 120 \times 10^3$ unidades de 200mL = 1440000 embalagens de bebida sabor uva (288000 litros). De acordo com a Tabela 1, seriam necessários 14,4 *kits*. Nesse exemplo, o líder da xaroparia consultaria o programador para saber se utilizaria 14,5 *kits* ou 14 *kits* do sabor uva. Em *batches*, isso significaria 29 ou 28 *batches*, respectivamente.

Tabela 1. Correspondência entre os sabores, *kits* e *batches*.

Sabor	Quantidade produzida por kit (L)	Batch (fração do kit no tanque)
Laranja	12000	1
Uva	20000	0,5
Maracujá	24000	0,5
Abacaxi	24000	0,5
Morango	16000	0,75

Para mais detalhes deste processo de produção de bebidas à base de frutas, o leitor pode consultar Pagliarussi (2013).

3 Modelagem do problema

Esta seção apresenta os modelos matemáticos para o problema de programação de produção e dimensionamento de lotes de bebidas à base de frutas. O Modelo I foi baseado no modelo GLSPPL e o Modelo II foi baseado no CLSP. O Modelo I pode abordar o problema de forma a maximizar a margem de contribuição ao lucro (neste caso chamado de Modelo Ia), conforme sugerido pelo gerente de produção da empresa, ou minimizar o custo de produção, considerando os custos de estocagem, atraso e preparação das máquinas (chamado Modelo Ib), como é mais usual na literatura de dimensionamento de lotes. Note que a única diferença dos Modelos Ia e Ib é a função objetivo. O Modelo II também minimiza o custo de produção, similarmente ao Modelo Ib. As soluções dos modelos determinam planos de produção factíveis para a empresa, otimizando os critérios definidos e determinando quanto produzir de cada bebida em cada período, de maneira a atender às demandas dos itens. Para que ocorra produção, devem-se preparar as máquinas de envase, que consomem tempos de preparação independentes da sequência de produção.

Na configuração descrita na Figura 1, assim como na configuração modificada contendo a máquina L5, é possível envasar os líquidos prontos utilizando duas ou mais máquinas (devido à restrição de produção mínima de aproximadamente 12000 embalagens/hora), por exemplo, com as duas máquinas L1 e L2 ligadas. Assim, nos modelos matemáticos a seguir, considera-se M como sendo o conjunto de *combinações* possíveis de máquinas ligadas. Tomando-se como exemplo a configuração da Figura 1 com as quatro máquinas L1, L2, L3 e L4, as possíveis combinações estão apresentadas na Figura 2, todas com capacidade de produção maior ou igual a 12000 embalagens/hora (as possíveis combinações para a configuração modificada com máquina L5 são definidas de maneira similar). Note que, como as máquinas L1, L2 e L3 são iguais, algumas combinações são simétricas e podem ser desconsideradas (e.g., a combinação L2

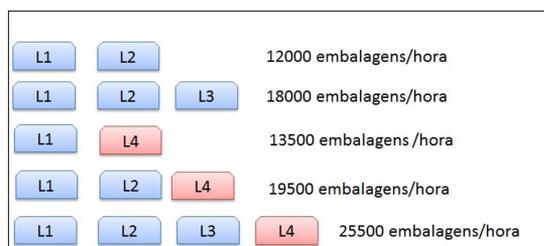


Figura 2. Combinações possíveis para 4 máquinas de envase.

e L3, dado que M já contém a combinação L1 e L2), sem perda de generalidade. Dessa forma, tem-se que a cardinalidade do conjunto M é 5, isto é: $M = \{(L1, L2); (L1, L2, L3); (L1, L4); (L1, L2, L4); (L1, L2, L3, L4)\}$.

Outro aspecto que deve ser considerado nos modelos é a sincronização da produção das máquinas. Segundo o programador de produção, as produções das máquinas sempre começam juntas, mas pode haver quebras ou paradas de algumas máquinas durante a produção. As máquinas L1, L2 e L3 estão sincronizadas a maior parte do tempo, uma vez que estão ligadas ao mesmo pasteurizador, mas a sincronização das máquinas L4 e L5 com L1, L2 e L3 foi uma combinação adotada na modelagem, por simplicidade.

Parâmetros dos Modelos I e II

T	conjunto de períodos, $t \in T$
J	conjunto de bebidas, $j \in J$
S_t	conjunto de possíveis subperíodos no período t , $s \in S_t$
M	conjunto de combinações de máquinas
a_m	tempo necessário para a produção de uma unidade de bebida na combinação de máquinas $m \in M$ (não depende da bebida)
$Lmax$	limite máximo de produção da bebida, em unidades de tempo
d_{jt}	demanda da bebida j no período t
b_j	tempo necessário para fazer a troca de uma bebida j para outra
q_j	lote mínimo da bebida j necessário para homogeneização no tanque
Kt	capacidade máxima do período em unidades de tempo no período t

3.1 Modelo I

Para representar o problema de dimensionamento e programação de lotes de produção de bebidas à base de frutas, inicialmente foi desenvolvido um modelo baseado no GLSPPL (Meyr, 2002), modificado para considerar a restrição de lote máximo. Esse modelo representa a situação em que há um tanque preparatório, ligado a dois tanques pulmão que se ligam aos respectivos pasteurizadores. Uma vez que a bebida à base de frutas foi pasteurizada, o próximo estágio do processo são as três máquinas de envase, chamadas L1, L2 e L3, para o pasteurizador 1, e as máquinas L4 e L5, para o pasteurizador 2. Inicialmente consideram as informações obtidas, por exemplo, o fato de a empresa não ter muitos problemas com estoque em excesso, nem com capacidade ociosa, e que os custos de um possível atraso ainda estavam sendo negociados. Desta forma, a função objetivo maximiza a margem de contribuição das bebidas produzidas (Modelo Ia), conforme sugerido pelo

gerente de produção da empresa. Posteriormente considerou-se outra função objetivo minimizando os custos de produção, conforme discutido adiante (Modelo Ib).

Parâmetros adicionais do Modelo Ia

p_j prioridade ou margem de contribuição da bebida j

Variáveis do Modelo I

x_{jmts} produção da bebida j , na combinação de máquinas m no subperíodo s do período t ;

I_{jt} quantidade em estoque da bebida j no período t ;

z_{jmts} 1, se o item j é produzido na combinação m no subperíodo s do período t ; 0, caso contrário

Modelo Ia

$$\max \sum_{j \in J} \sum_{m \in M} \sum_{t \in T} \sum_{s \in S_t} p_j x_{jmts} \tag{1}$$

Sujeito a:

$$I_{j(t-1)} + \sum_{m \in M} \sum_{s \in S_t} x_{jmts} = I_{jt} + d_{jt} \quad \forall j \in J, \forall t \in T, \tag{2}$$

$$\sum_{m \in M} \sum_{j \in J} \sum_{s \in S_t} a_m x_{jmts} + \sum_{m \in M} \sum_{j \in J} \sum_{s \in S_t} b_j z_{jmts} \leq K_t, \quad \forall t \in T, \tag{3}$$

$$x_{jmts} \geq q_j z_{jmts}, \quad \forall j \in J, \forall m \in M, \forall s \in S_t, \quad \forall t \in T, \tag{4}$$

$$\sum_{m \in M} \sum_{j \in J} z_{jmts} \leq 1, \quad \forall s \in S_t, \quad \forall t \in T, \tag{5}$$

$$x_{jmts} \leq \left(\frac{L \max}{a_m} \right) z_{jmts} \quad \forall j \in J, \forall m \in M, \forall s \in S_t, \quad \forall t \in T, \tag{6}$$

$$z_{jmts} \in \{0,1\}, x_{jmts} \geq 0, I_{jt} \geq 0, \quad \forall j \in J, \forall m \in M, \forall s \in S_t, \quad \forall t \in T. \tag{7}$$

A função objetivo (1) maximiza a margem de contribuição total. As restrições (2) são de balanço de fluxo dos itens. As restrições (3) referem-se às limitações de capacidade em cada período, ou seja, o tempo gasto com produção, mais o tempo gasto com o *setup*, não pode ultrapassar o tempo disponível daquele período. As restrições (4) estabelecem um limite mínimo de produção para atender à restrição de volume mínimo do tanque preparatório para a hélice girar. As restrições (5) são de unicidade de escolha de máquina e produto por subperíodo, ou seja, só pode ser produzido um sabor de bebida em um conjunto de máquinas por subperíodo. As restrições (6) impedem que haja produção por tempo maior que *Lmax*, e que só haverá produção se z_{jmts} for igual 1. Ou seja, sempre que um sabor tiver que ser produzido por um período maior que *Lmax*, haverá limpeza obrigatória após esse período, para

então a produção poder continuar. Estas restrições garantem também a limpeza quando houver troca de produtos. As restrições (7) referem-se ao domínio das variáveis.

Para evitar soluções simétricas nos subperíodos, também foi adicionada a seguinte restrição no modelo:

$$\sum_{j \in J} \sum_{m \in M} z_{jmt(s-1)} \geq \sum_{j \in J} \sum_{m \in M} z_{jmts} \quad \forall t \in T, s > 1 \tag{8}$$

Essa restrição foi proposta por Fleischmann & Meyr (1997) para evitar a redundância indesejável no GLSP original: se uma sequência de microperíodos dentro de um macroperíodo é designada para um mesmo produto, a quantidade produzida (ou parte dela) poderia ser distribuída arbitrariamente dentro de tais microperíodos, sem mudar a programação e o valor da função objetivo (subperíodos ociosos distribuídos).

Convém ressaltar que no Modelo Ia a variável z_{jmts} indica, por meio das restrições (4), que só haverá produção se seu valor for igual a 1. Porém, apesar de ser descrita como uma variável binária indicadora de produção ou não, nas restrições (3) está atrelada ao tempo de *setup*, o que garante que cada vez que houver produção, haverá também limpeza dos tanques e, também, será contabilizado o tempo de preparação da máquina dentro da capacidade. Para ilustrar o funcionamento do Modelo Ia, tomou-se inicialmente um exemplo hipotético bem pequeno, com apenas 2 produtos, 2 máquinas de mesma capacidade, 2 combinações de máquinas, 3 períodos (com 10 subperíodos cada) e $K = 144$ h. Uma vez que as duas máquinas têm a mesma capacidade e considerando que $(L1,L2) = (L2,L1)$, tem-se que: $M = \{(L1); (L1, L2)\}$.

O parâmetro a_m , que é a velocidade de produção da combinação de máquinas $m \in M$, foi calculado utilizando o resultado da divisão de 1 pelas capacidades nominais da combinação de máquinas, em embalagens por hora, e então multiplicadas por 12, uma vez que o problema considera como unidades das variáveis de decisão caixas com 12 unidades. Uma vez que os valores resultaram em números muito pequenos, a velocidade foi multiplicada por 1000, ou seja, os valores correspondem à velocidade de produção de mil caixas de 12 unidades. Considerando o primeiro elemento do conjunto na Figura 2, ou seja, a combinação (L1, L2), determina-se o parâmetro a_2 , que significa quanto tempo é necessário para produzir mil caixas de 12 unidades. Nesta combinação, tem-se a duração de 1 hora.

$$a_2 = \frac{1}{(6000 + 6000)} \times 12 \times 1000 = 1h.$$

Logo, para o Modelo Ia, tem-se $(a_1, a_2) = (0,5; 1)$. A solução do Modelo Ia para o exemplo ilustrativo é mostrada na Figura 3. Note que essa solução

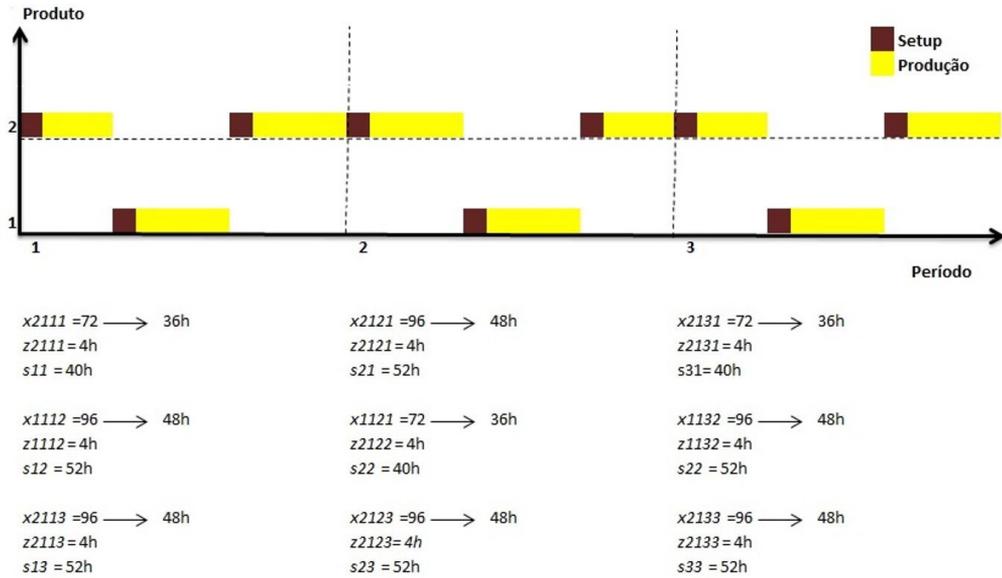


Figura 3. Solução do Modelo Ia.

utiliza a capacidade total (144 h) e está representada graficamente pela Figura 3, que também contém as respectivas variáveis de decisão e os tamanhos dos subperíodos. O valor absoluto da variável x , em caixas de 12 unidades, também está apresentado. Em seguida, seu valor em tempo é identificado, multiplicando-se seu valor por 0,5, que é a velocidade de produção escolhida pelo Modelo Ia neste exemplo.

É importante destacar que, apesar de o modelo mostrar soluções tanto de dimensionamento de lotes como de sequenciamento desses lotes, as soluções de sequenciamento podem ser *permutadas* dentro do período, devido ao fato de que o *setup* independe da sequência. Outra observação é que as produções são colocadas nos primeiros subperíodos (1, 2 e 3, neste caso), o que é garantido pela restrição (8), que evita soluções simétricas. O valor da função objetivo neste exemplo foi de 792 caixas de 12 unidades de 200mL de produto. Esse valor pode ser conferido ao se somar todas as produções x_{jmts} indicadas na Figura 3.

Os testes computacionais reportados na Seção 4 aplicando o Modelo Ia mostram que muitos dos exemplares testados não têm solução factível, isto é, não têm programas de produção que satisfaçam toda a demanda sem atrasos, o que motivou a mudança da função objetivo do modelo para permitir ruptura de estoque (atraso de entrega de produtos), conforme discutido a seguir.

3.2 Modelo Ib

Conforme mencionado antes, o Modelo Ib corresponde ao Modelo Ia com critério de minimizar os custos de produção, ou seja, o custo de *setup*, o custo de estoque e o custo de atraso.

- h_j custo de estocagem da bebida j
- g_j custo de atraso da bebida j
- cs_j custo de *setup* da bebida j

Variáveis adicionais do Modelo Ib:

- U_{jt} quantidade em atraso da bebida j no período t

Modelo Ib

$$\min \sum_{j \in J} \sum_{m \in M} \sum_{t \in T} \sum_{s \in St} cs_j z_{jmts} + \sum_{j \in J} \sum_{t \in T} (g_j U_{jt} + h_{jt} I_{jt}) \quad (9)$$

sujeito às restrições (3), (4), (5), (6), (8) e:

$$I_{j,t-1} - U_{j,t-1} + \sum_{m \in M} \sum_{s \in St} x_{jmts} = I_{jt} - U_{jt} + d_{jt}, \forall j \in J, \forall t \in T, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} z_{jmts} &\in \{0,1\}, x_{jmts} \geq 0, I_{jt} \geq 0, U_{jt} \geq 0 \\ &\forall j \in J, \forall m \in M, \forall s \in St, \forall t \in T. \end{aligned} \quad (11)$$

Note que a função objetivo (9) agora minimiza a soma dos custos de *setup*, estoque e atrasos nas entregas. E as restrições (10) são de balanço de fluxo dos itens, agora contabilizando tanto o estoque quanto o atraso no atendimento da demanda. A restrição 11 é de domínio das variáveis.

3.3 Modelo II

Apesar de os Modelos Ia e Ib mostrarem soluções tanto de dimensionamento de lotes como de sequenciamento, conforme já comentado, as soluções de sequenciamento podem ser *permutadas* dentro do período sem perda de factibilidade, devido ao fato de que o *setup* independe da sequência. Assim, a seguinte pergunta torna-se pertinente: por que usar

um modelo baseado em GLSPPL, que, no caso mais geral, prevê decisões de sequenciamento com *setup* dependente, ao invés de basear-se diretamente em outro modelo mais simples como o CLSP, que não inclui tais decisões? Dessa forma, foi desenvolvido um modelo simplificado, representando a mesma situação-problema, mas retirando-se as decisões de sequenciamento. Os parâmetros e variáveis do Modelo II continuam os mesmos do Modelo I, com exceção de:

Variáveis

x_{jmt} produção da bebida j na combinação de máquinas m no período t $\left(x_{jmt} = \sum_{s \in St} x_{jmts} \right)$;

z_{jmt} número de *setups* realizados para produção da bebida j na combinação de máquinas m do período t $\left(z_{jmt} = \sum_{s \in St} z_{jmts} \right)$.

Ou seja, não haverá mais consideração de subperíodos neste modelo, uma vez que a sequência em que os lotes são produzidos no período pode ser alterada sem perda de generalidade. Note que as variáveis do Modelo II podem ser vistas como simples substituições das variáveis x_{jmts} e z_{jmts} do Modelo I.

Modelo II:

$$\min \sum_{j \in J} \sum_{m \in M} \sum_{t \in T} cs_j z_{jmt} + \sum_{j \in J} \sum_{t \in T} (g_j U_{jt} + h_{jt} I_{jt}), \quad (12)$$

$$I_{j(t-1)} + \sum_{m \in M} x_{jmt} + U_{jt} = I_{jt} + d_{jt} + U_{j,t-1} \quad \forall j \in J, \forall t \in T, \quad (13)$$

$$\sum_{m \in M} \sum_{j \in J} a_m x_{jmt} + \sum_{m \in M} \sum_{j \in J} b_j z_{jmt} \leq K_t, \quad \forall t \in T, \quad (14)$$

$$x_{jmt} \geq q_j z_{jmt}, \quad \forall j \in J, \forall m \in M, \quad \forall t \in T, \quad (15)$$

$$x_{jmt} \leq \left(\frac{L \max}{a_m} \right) z_{jmt} \quad \forall j \in J, \forall m \in M, \quad \forall t \in T, \quad (16)$$

$$z_{jmt} \in \mathbb{1}, z_{jmt} \geq 0; x_{jmt} \geq 0, I_{jt} \geq 0, U_{jt} \geq 0 \quad \forall j \in J, \forall m \in M, \quad \forall t \in T. \quad (17)$$

A função objetivo (12) minimiza a soma dos custos de *setup*, estoque e atrasos nas entregas, similarmente ao Modelo I. As restrições (13) são de balanço de fluxo. As restrições (14) são de capacidade, relacionadas ao tempo. Note que as restrições (5) de unicidade de escolha de máquina e produto por subperíodo do Modelo I são desconsideradas no Modelo II, uma vez que há possibilidade de produzir vários produtos em várias máquinas no período. As restrições (17) são do domínio de variáveis.

As restrições (15) e (16) merecem uma discussão mais detalhada. Ao substituir as variáveis $x_{jmt} = \sum_{s \in St} x_{jmts}$ e $z_{jmt} = \sum_{s \in St} z_{jmts}$, as restrições (15) e (16) de lote mínimo e de lote máximo (similares a (4) e (6)) ficaram do tipo restrições *surrogate* ou substitutas dos subperíodos s . Por esse motivo, são relaxações do Modelo I e aparentemente não garantem que cada um dos lotes dos produtos j no mesmo período t terá tamanho do lote mínimo q_j e, no máximo, $\left(\frac{L \max}{a_m} \right)$. Neste caso, o Modelo II poderia produzir uma solução inactivel para o problema definido na Seção 2.

Porém, não se encontrou nenhum exemplo numérico em que isso ocorresse. De fato, sempre é possível dividir um lote grande x_{jmt} da solução do Modelo II (caso ultrapasse o valor máximo) pelo número de *setups* realizados nessa solução, ou seja, z_{jmt} e, assim, obter lotes menores que $\left(\frac{L \max}{a_m} \right)$. O mesmo argumento é

válido para a restrição de lote mínimo q_j .

Considere o seguinte exemplo numérico: seja $q_j = 2$ (lote mínimo), $\left(\frac{L \max}{a_m} \right) = 10$. Supondo que se obteve como solução um lote $x_{jmt} = 24$ e o número de *setups*, $z_{jmt} = 3$, tem-se que o resultado imediato do quociente é 8. Esse número é maior que o lote mínimo 2 e menor que o lote máximo 10, portanto, satisfaz as restrições de lote máximo e mínimo. Ainda, deve-se considerar a interpretação do programador, que pode escolher fazer dois lotes máximos (iguais a 10) mais um lote menor (igual a 4). Ou seja, esse simples pós-processamento na solução do Modelo II produz novos lotes (menores), que sempre serão factíveis do ponto de vista dos lotes mínimo e máximo.

Deve-se ressaltar que o Modelo II não pode ser considerado como um CLSP clássico, devido ao fato de que a variável z_{jmt} é agora inteira e positiva, ao invés de binária, como considerado no CLSP.

Os Modelos Ia, Ib e II se distinguem do modelo em Leite (2008) por representarem um processo de produção diferente e por tratarem as máquinas como combinações de máquinas, ao invés de apenas uma configuração como em Leite (2008), possibilitando, dessa maneira, deixar uma máquina parada, caso seja mais vantajoso. Além disso, diferentemente do modelo em Leite (2008), as máquinas de envase são consideradas o gargalo da produção, enquanto os tanques pulmão são supostos com capacidade suficientemente grande, como discutido anteriormente. O modelo em Leite (2008) ainda considera que as produções devem ser múltiplas de um valor inteiro, referente ao tamanho do *kit* e quantos litros de bebida ele produz (Tabela 1). Para tratar esta questão, considera-se nos Modelos I e II uma restrição de lote mínimo.

4 Estudo computacional

Os dados coletados na fábrica de bebidas à base de frutas são referentes às demandas de produtos, tempos de trocas de bebidas nas máquinas de envase, capacidade das máquinas e tanques, produção, entre outros necessários para resolver o problema. Para realização do estudo computacional dos Modelos I e II, utilizou-se um computador com processador Intel® Core™ i5-2450M CPU 2.50GHz e memória RAM de 6 GB. Os modelos foram resolvidos utilizando o *software* IBM ILOG CPLEX OPTIMIZATION STUDIO 12.6, com o tempo de resolução limitado a 3600s. Para testar os Modelos Ia, Ib e II, geraram-se problemas teste a partir de um exemplar fornecido pela empresa.

4.1 Geração de problemas teste

O exemplar da empresa continha informações sobre a demanda e a programação da produção e dimensionamento dos lotes das bebidas durante dois meses consecutivos. Assim, implementou-se um gerador aleatório para variar a demanda das bebidas em um horizonte de tempo de até 13 semanas, com base nos valores do exemplar da empresa. Nestas semanas, a demanda variou de 110 mil caixas, com 12 unidades de 200 ml, até 216 mil caixas, que foram os limitantes inferior e superior do gerador. Como raramente havia pedidos de mais de 2 sabores diferentes na mesma semana, o gerador foi construído para ficar o mais próximo possível dessas condições, ou seja, com demanda não nula para apenas 2 produtos em cada período.

Foram gerados problemas teste com até 13 semanas ($T = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$), embora o horizonte de planejamento típico seja de apenas 8 semanas, e com até 10 produtos ($J = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$), embora sejam apenas 5 sabores, e o número de subperíodos para cada período foi igual a 10 ($S = 10$). O lote máximo foi limitado a 48 h ($L_{max} = 48$ h) e o tempo de limpeza das máquinas foi de 4 horas ($b_j = 4 \forall j \in J$). A capacidade em cada período foi de $K_t = 144$ h, $\forall t \in T$, uma vez que não havia produção aos domingos. O parâmetro q_j foi calculado de acordo com a Tabela 1, que mostra a correspondência entre os sabores e as frações mínimas para produção (lote mínimo) utilizadas. Os valores da Tabela 1 foram convertidos em mil caixas de 12 unidades de 200ml de bebidas. O parâmetro a_m foi calculado conforme descrito anteriormente.

Para o Modelo Ia, a prioridade ou margem de contribuição, por simplicidade, foi considerada igual a 1 para todos os produtos ($p_j = 1 \forall j \in J$). A empresa não forneceu dados dos custos de produção, estoque e atrasos, o que limitou a análise e comparação das soluções dos modelos e empresa. Para os Modelos Ib e II, os custos unitários de estoque, por simplicidade, foram considerados iguais a 1 para $\forall j \in J$. Os custos unitários de atraso foram considerados iguais a 10 vezes o valor dos custos de estoque; este fator foi baseado na diferença entre uma taxa de remuneração de 1% (custo de estoque) ao mês e uma margem de contribuição de 10% do valor do produto (custo de atraso). O custo de *setup* foi estimado com base no tempo em que não se está produzindo, ou seja, uma produção equivalente a quatro horas (*i.e.*, como um custo de oportunidade). Desta forma, as soluções obtidas pelos Modelos Ib e II priorizam a minimização dos atrasos, que dominam os custos de estoque e *setup*, o que está de acordo com os objetivos da programação da produção da empresa.

Com base nos dados, as variáveis x_{jms} e I_{jt} do modelo são descritas em mil caixas de 12 unidades de 200 ml de bebida. Os testes computacionais ficam organizados da seguinte maneira. Na Seção 4.1, estão apresentados os testes com o Modelo Ia e, na Seção 4.2, os resultados computacionais considerando o Modelo Ib. Os cenários gerados a partir da programação fornecida pela empresa são utilizados para comparar os Modelos Ib e II na Seção 4.3.

4.2 Modelo Ia

Os testes computacionais para o Modelo Ia foram realizados considerando três categorias de problemas teste. Cada uma contém 70 exemplares gerados conforme a Tabela 2.

Inicialmente, considera-se a categoria I com uma primeira configuração de envase, ou seja, variação de 3 a 5 produtos, 3 máquinas de envase (L1, L2, L3) com capacidade de envase de 18000 embalagens por hora, porém, sem diminuição da demanda. Nesta categoria, os testes com os dados da fábrica utilizando o Modelo Ia mostraram que a solução para o problema é infactível ao se disponibilizar apenas as três máquinas com capacidade de 6000 embalagens/hora cada, como seria esperado. Convém observar que o Modelo Ia supõe que toda a demanda deva ser atendida sem atrasos. Deve-se ressaltar, mais uma vez, que se considera o gargalo da produção como sendo as máquinas de

Tabela 2. Categorias dos problemas teste utilizados no Modelo Ia.

Categorias	Períodos	Produtos	Máquinas de envase	Nº Exemplares por configuração	Nº Exemplares
I	$T = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$	$J = \{3, 4, 5\}$	L1, L2, L3	5	70
II	$T = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$	$J = \{3, 4, 5\}$	L1, L2, L3, L4	5	70
III	$T = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$	$J = \{3, 4, 5\}$	L1, L2, L3, L4, L5	5	70

envase, pois se considera que o tanque da xaroparia tem capacidade suficientemente grande em relação às capacidades das máquinas de envase.

Como as soluções foram ineficazes na categoria I, considerou-se a categoria II, com a máquina adicional L4, com capacidade de 7500 embalagens/hora, porém ainda assim não foi possível obter-se soluções factíveis com esta configuração para os 70 exemplares. Considerou-se, então, na categoria III, a inclusão da máquina L5, com capacidade incrementada de 11200 embalagens/hora. Nesta categoria, o problema tornou-se factível do ponto de vista do atendimento de toda a demanda, ou seja, obtiveram-se soluções ótimas para os 70 exemplares dentro de limite de tempo computacional estipulado.

Estas simulações realizadas indicaram que o plano de expansão da empresa com a máquina L5 era oportuno para obter programas de produção sem atrasos nos atendimentos dos padrões de demandas fornecidos. O *solver* CPLEX resolveu todos os problemas teste na categoria III, encontrando e provando a otimalidade das soluções obtidas dentro do limite de tempo computacional, o que evidencia o potencial do Modelo Ia para aplicação prática. É importante ressaltar que o tempo computacional requerido para resolução desses exemplares não passou de 1 segundo, ou seja, esses problemas teste foram facilmente resolvidos pelo CPLEX.

4.3 Modelo Ib

O ambiente computacional e os parâmetros utilizados neste estudo são os mesmos do estudo do Modelo Ia. O gerador de demanda foi usado da mesma forma. Uma vez que o Modelo Ia resolveu todos os problemas teste rapidamente, as categorias de teste para o Modelo Ib foram um pouco diferentes. Nos novos testes foram considerados mais do que 5 produtos e mais do que 8 períodos por categoria, não ultrapassando um período de 13 semanas, equivalente

a um horizonte de planejamento de 3 meses. Embora este trabalho vise apoiar decisões de programação de produção no nível operacional (*i.e.*, curto prazo) e não tenha o intuito de propor uma ferramenta para o planejamento de médio prazo, o número de produtos e períodos foi aumentado nestes testes para se estudar melhor o comportamento do Modelo Ib, com o aumento do número de variáveis e restrições.

Para os testes realizados com o Modelo Ib, foram utilizados exemplares com os períodos variando de 6 até 13, com 5 até 10 produtos e possibilidade de utilizar até 5 máquinas de envase. Para cada configuração foram gerados 5 exemplares, num total de 65 categorias. Dentro de cada categoria, a maior parte dos problemas teste foi resolvida na otimalidade, dentro do limite de tempo de 1 hora (com exceção de problemas das classes com número de períodos 11, 13 e 5 produtos), o que reforça o potencial dos modelos para aplicação prática. Para os exemplares para os quais o CPLEX não obteve solução ótima, determinamos o valor do *Gap*, definido por $Gap = 100((FO - LI)/FO)$, sendo que *FO* é valor da melhor solução obtida pelo CPLEX e *LI* é o valor do melhor limitante inferior obtido também pelo CPLEX no tempo limite de 1 hora.

Deve-se observar que foram realizados testes com e sem as restrições (8), e em apenas 16 de 65 testes, o CPLEX com a restrição resolveu o modelo mais rapidamente. Em média, os testes sem as restrições (8) foram 45% mais rápidos. As soluções dos 130 testes, com e sem a referida restrição, apresentaram o mesmo comportamento, ou seja, os *gaps* foram baixos. Para efeitos de comparação, serão utilizados os 65 exemplares sem a restrição (8), uma vez que foram resolvidos mais rapidamente e todos obtiveram solução ótima. Apenas dois exemplares atingiram tempo máximo de execução em que o maior *gap* foi de 0,25%.

A Tabela 3 apresenta os resultados com os testes do modelo Ib com relação à utilização da capacidade produtiva e atraso em relação à demanda, além do

Tabela 3. Resultados Modelo Ib com restrição – Características das soluções.

	J	T	Nº Ex.	% Setup	% Produção	% Atraso	% Estoque
1	5	6	5	2,03	58,37	0,47	0
2	5	7	5	2,31	68,51	0,04	0
3	5	8	5	2,18	59,50	0,67	0
4	5	9	5	2,40	57,44	0,35	0
5	5	10	5	1,98	56,71	0,36	0
6	5	11	5	1,98	57,39	0,64	0
7	5	12	5	2,01	57,43	0,26	0
8	5	13	5	2,04	56,90	0,38	0
9	6	13	5	1,99	57,33	0,19	0
10	7	13	5	2,10	57,33	0,00	0
11	8	13	5	2,06	57,40	0,17	0
12	9	13	5	2,01	56,90	0,41	0
13	10	13	5	2,03	57,17	0,38	0

estoque em relação à demanda. Na quinta coluna da tabela, apresentamos o percentual da capacidade utilizada para a realização dos *setups* (%Setup), enquanto (%Produção) representa o percentual utilizado para a produção dos itens, %Atraso é o atraso em relação à demanda no último período e %Estoque é o percentual do estoque no último período em relação à demanda no último período.

Observa-se, na Tabela 3, que a utilização média das capacidades não passou de 70%, apesar de haver um atraso mínimo. O maior pico foi de 72% na categoria 2 para um exemplar. É possível inferir que devido ao conjunto de restrições (6), de lote mínimo, é menos custoso ter um mínimo de atraso do que atender a toda a demanda e haver estoque no final do horizonte de planejamento. Ressalta-se que os resultados desta tabela apresentam apenas o estoque e o atraso no último período do horizonte de planejamento. A seguir, comparamos os resultados com o Modelo II, baseado no CLSP.

4.4 Modelo II

Nesta seção, comparam-se os resultados do Modelo II nos problemas teste da Tabela 3 na seção 4.2. As soluções obtidas pelos dois Modelos Ib e II foram similares ao se considerar o valor da função objetivo, capacidade utilizada, estoque em relação à demanda e atraso em relação à demanda. A comparação do desempenho entre os dois modelos é mostrada na Tabela 4. Na tabela, apresentamos o número de soluções ótimas (N^{o*}) obtidas por cada modelo, o *Gap* médio e o tempo médio de execução para cada modelo e categoria. O símbolo (*) indica que o CPLEX obteve solução ótima obtida para todos os exemplares.

Ambos os modelos obtiveram soluções factíveis para todos os exemplares, porém, o Modelo Ib obteve um número maior de soluções ótimas. Nos exemplares

que o Modelo Ib não obteve soluções ótimas, o *Gap* foi inferior a 0,35%, já para o Modelo II, obtiveram-se soluções no tempo limite com o *Gap* de 3,87%. Para a categoria 10, o Modelo Ib obteve soluções comprovadamente ótimas para todas os exemplares, enquanto que o Modelo II, apenas para 2 exemplares, com *Gap* Médio de 1,80%. Em média, o Modelo II foi resolvido em tempo três vezes maior do que o Modelo Ib. No geral, os dois modelos apresentam soluções de boa qualidade, porém, analisando o tempo médio de solução e o número de soluções comprovadamente ótimas, o Modelo Ib apresenta desempenho um pouco melhor do que o Modelo II. Isso não era esperado dado que o Modelo Ib é menos simples porque considera decisões de sequenciamento dependentes da sequência baseado num GLSPPL, diferentemente do Modelo II baseado num CLSP.

É importante lembrar que o Modelo II ainda requer um *pós-processamento*, para revisar os tamanhos dos lotes obtidos e garantir que a solução seja factível do ponto de vista dos lotes mínimos e máximos. Esse pós-processamento consiste em simplesmente dividir o lote grande x_{jmt} (caso ultrapasse o valor máximo) pelo número de *setups* realizados, ou seja, z_{jmt} e, assim, obter lotes menores que (L_{max}/a_m) . Esses lotes menores sempre satisfazem a restrição de lote mínimo q_j . Dessa forma, o Modelo Ib, por não precisar de pós-processamento e dado que a resolução dos exemplares teste com ele foi mais rápida e algumas vezes com soluções de melhor qualidade (dentro do limite de tempo computacional) do que o Modelo II, conclui-se com base nos resultados deste estudo que ele é mais recomendado para tratar esse problema.

Os resultados obtidos com os Modelos Ia, Ib e II foram apresentados para o gerente de produção e o programador da programação da empresa. Como dito anteriormente, a função objetivo dos Modelos Ib e II priorizam a minimização dos custos de estoques, preparações e atrasos, porém o objetivo sugerido pelo

Tabela 4. Comparativo do desempenho dos modelos II e Ib.

	J	T	N ^o ex.	N ^{o*}		<i>Gap</i> GLSP (%)	<i>Gap</i> CLSP (%)	Tempo GLSP(s)	Tempo CLSP(s)
				modelo Ib	modelo II				
1	5	6	5	5	5	*	*	23,99	11,04
2	5	7	5	5	5	*	*	15,99	22,59
3	5	8	5	5	5	*	*	29,51	49,92
4	5	9	5	5	5	*	*	74,87	53,87
5	5	10	5	5	5	*	*	113,60	299,06
6	5	11	5	4	5	0,05	*	731,96	267,21
7	5	12	5	5	5	*	*	345,15	137,03
8	5	13	5	4	5	0,02	*	743,53	365,36
9	6	13	5	5	5	*	*	30,59	212,42
10	7	13	5	5	2	*	1,80	66,74	3150,72
11	8	13	5	5	3	*	0,11	72,44	1095,52
12	9	13	5	5	5	*	*	71,91	444,80
13	10	13	5	5	3	*	0,48	313,68	1837,71

* indica que o CPLEX obteve solução ótima obtida para todos os exemplares.

gerente da empresa foi o do Modelo Ia. As soluções do Modelo Ia foram consideradas pelo programador da produção como as mais próximas das programadas pela empresa. No caso do Modelo Ia, a função objetivo prioriza a maximização da margem de contribuição e não considera custos, portanto suas soluções evitam períodos ociosos. No entanto, o programador apontou que, nas soluções do Modelo Ia, esses lotes poderiam resultar muito pequenos em certos casos e talvez fosse melhor não produzir estes produtos nesses períodos. Uma simples alternativa para contornar isso seria revisar, nos parâmetros do Modelo Ia, os tamanhos de lotes mínimos, correspondentes a q_j , para alguns desses produtos.

Deve-se ressaltar que os modelos são resolvidos pelo método *branch-and-cut* do CPLEX em poucos segundos para os exemplares com a dimensão da empresa, enquanto que o programador de produção realiza a programação em no mínimo 40 minutos. Tanto o gerente de produção como o programador de produção acharam que as soluções produzidas pelos Modelos Ia e Ib têm bom potencial de serem utilizadas na prática, com eventuais pequenos ajustes adicionais para adaptá-las melhor às condições operacionais específicas e possíveis reprogramações da produção de cada semana da empresa. Uma pesquisa futura interessante seria desenvolver um efetivo processo de validação dos modelos junto com a operação da empresa, para avaliar melhor as vantagens e desvantagens dos programas de produção gerados pelos modelos em comparação com os programas de produção utilizados na empresa.

5 Considerações finais

A pesquisa apresentada neste trabalho teve como objetivo estudar e elaborar modelos matemáticos de otimização e aplicar métodos de solução para resolvê-los, para apoiar o processo de tomada de decisão na programação da produção de linhas de bebidas à base de frutas. Um estudo foi realizado em uma linha de uma empresa típica deste setor. Os modelos propostos utilizaram como base o referencial teórico dos problemas de dimensionamento e programação de lotes de produção bem conhecidos e explorados na literatura. Utilizaram-se formulações de programação linear inteira mista para representar o problema de programação da produção destes processos industriais.

Com base nos resultados obtidos, conclui-se que os modelos apresentados e os métodos testados têm bom potencial para serem aplicados para apoiar decisões de curto prazo, com horizontes de programação de 8 ou 9 semanas. Acredita-se que os resultados deste trabalho possam ser aplicados com sucesso na empresa estudada e também em outras empresas desse setor, além de outros segmentos industriais cujos processos sejam similares, embora os critérios para otimização do dimensionamento e programação da produção

possam ser diferentes ao se levar em consideração custos de preparação, estoque e atraso, limites de tempo, capacidades de limitantes de lotes mínimos e máximos, entre outros.

Uma pesquisa futura interessante seria desenvolver uma versão amigável do Modelo Ia, para que o programador de produção da empresa possa testar e avaliar a eficiência do modelo na prática e, com isso, se desenvolver um efetivo estudo de caso e processo de validação do modelo em situações reais. Neste caso, seria interessante avaliar o desempenho do modelo diante de programações e reprogramações de produção, usando abordagens com horizontes de tempo de programação rolantes. Outra linha de pesquisa interessante seria investigar métodos heurísticos efetivos para resolver os Modelos Ia, Ib e II em situações em que os *softwares* de otimização, baseados em algoritmos *branch and cut*, como o CPLEX, não sejam capazes de produzir boas soluções em tempos computacionais aceitáveis na prática.

Agradecimentos

Os autores agradecem a importante colaboração da empresa com esta pesquisa, que também contou com apoio financeiro da CAPES, CNPq e FAPESP.

Referências

- Almada-Lobo, B., Oliveira, J. F., & Carravilla, M. A. (2008). Production planning and scheduling in the glass container industry: A VNS approach. *International Journal of Production Economics*, 114(1), 363-375. <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijpe.2007.02.052>.
- Araujo, S. A., Arenales, M. N., & Clark, A. R. (2008). Lot sizing and furnace scheduling in small foundries. *Computers & Operations Research*, 35(3), 916-932. <http://dx.doi.org/10.1016/j.cor.2006.05.010>.
- Associação Brasileira das Indústrias de Refrigerantes e de Bebidas não Alcoólicas – ABIR. (2010). Recuperado em 10 de fevereiro de 2010, de <http://abir.org.br/>
- Buschkül, L., Sahling, F., Helber, S., & Tempelmeier, H. (2010). Dynamic capacitated lot-sizing problems: a classification and review of solution approaches. *OR-Spektrum*, 32(2), 231-261. <http://dx.doi.org/10.1007/s00291-008-0150-7>.
- Clark, A. R. (2003). Hybrid heuristics for planning lot setups and sizes. *Computers & Industrial Engineering*, 45(4), 545-562. [http://dx.doi.org/10.1016/S0360-8352\(03\)00073-1](http://dx.doi.org/10.1016/S0360-8352(03)00073-1).
- Defalque, C. M., Rangel, S., & Ferreira, D. (2011). Usando o ATSP na modelagem do problema integrado de produção de bebidas. *TEMA - Tendências em Matemática Aplicada*, 12(3). <http://dx.doi.org/10.5540/tema.2011.012.03.0195>.
- Diário Econômico. (2011). Recuperado em 10 fevereiro de 2011, de http://www.diariodepernambuco.com.br/2011/03/01/economia3_0.asp

- Drexel, A., & Kimms, A. (1997). Lot sizing and scheduling - survey and extensions. *European Journal of Operational Research*, 99(2), 221-235. [http://dx.doi.org/10.1016/S0377-2217\(97\)00030-1](http://dx.doi.org/10.1016/S0377-2217(97)00030-1).
- Ferreira, D., Clark, A., Almada-Lobo, B., & Morabito, R. (2012). Single-stage formulations for synchronised two-stage lot sizing and scheduling in soft drink production. *International Journal of Production Economics*, 136(2), 255-265. <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijpe.2011.11.028>.
- Ferreira, D., Morabito, R., & Rangel, S. (2009). Solution approaches for the soft drink integrated production lot sizing and scheduling problem. *European Journal of Operational Research*, 196(2), 697-706. <http://dx.doi.org/10.1016/j.ejor.2008.03.035>.
- Ferreira, D., Morabito, R., & Rangel, S. (2010). Relax and fix heuristics to solve one-stage one-machine lot-scheduling models for small-scale soft drink plants. *Computers & Operations Research*, 37(4), 684-691. <http://dx.doi.org/10.1016/j.cor.2009.06.007>.
- Fleischmann, B., & Meyr, H. (1997). The general lot sizing and scheduling problem. *OR-Spektrum*, 19(1), 11-21. <http://dx.doi.org/10.1007/BF01539800>.
- Glock, C. H., Grosse, E. H., & Ries, J. M. (2014). The lot sizing problem: A tertiary study. *International Journal of Production Economics*, 155, 39-51. <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijpe.2013.12.009>.
- Jans, R., & Degraeve, Z. (2008). Modeling industrial lot sizing problems: a review. *International Journal of Production Research*, 46(6), 1619-1643. <http://dx.doi.org/10.1080/00207540600902262>.
- Karimi, B., Fatemi Ghomi, S. M. T., & Wilson, J. M. (2003). The capacitated lot sizing problem: a review of models and algorithms. *Omega*, 31(5), 365-378. [http://dx.doi.org/10.1016/S0305-0483\(03\)00059-8](http://dx.doi.org/10.1016/S0305-0483(03)00059-8).
- Kopanos, G. M., Puigjaner, L., & Georgiadis, M. C. (2010). Optimal Production Scheduling and Lot-Sizing in Dairy Plants: The Yogurt Production Line. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 49(2), 701-718. <http://dx.doi.org/10.1021/ie901013k>.
- Leite, R. P. M. (2008). *Um estudo sobre o problema de dimensionamento e sequenciamento da produção no setor de bebidas* (Trabalho de Conclusão de Curso). Universidade Federal de São Carlos, São Carlos.
- Luche, J. R. D., Morabito, R., & Pureza, V. (2009). Combining process selection and lot sizing models for production scheduling of electrofused grains. *Asia-Pacific Journal of Operational Research*, 26(3), 421-443. <http://dx.doi.org/10.1142/S02175959090002286>.
- Marinelli, F., Nenni, M. E., & Sforza, A. (2007). Capacitated lot sizing and scheduling with parallel machines and shared buffers: a case study in a packaging company. *Annals of Operations Research*, 150(1), 177-192. <http://dx.doi.org/10.1007/s10479-006-0157-x>.
- Meyr, H. (2002). Simultaneous lotsizing and scheduling on parallel machines. *European Journal of Operational Research*, 139(2), 277-292. [http://dx.doi.org/10.1016/S0377-2217\(01\)00373-3](http://dx.doi.org/10.1016/S0377-2217(01)00373-3).
- Pagliari, M. S. (2013). *Contribuições para a otimização da programação de bebidas à base de frutas* (Dissertação de Mestrado). Universidade Federal de São Carlos, São Carlos.
- Pirillo, C. P., & Sabio, R. P. (2009). 100% suco: nem tudo é suco nas bebidas de frutas. *Revista HortiFruti Brasil*, 81, 6-7. Recuperado em 10 fevereiro de 2011, de http://www.cepea.esalq.usp.br/hfbrasil/edicoes/81/mat_capa.pdf
- Rangel, S., & Ferreira, D. (2003). Um modelo de dimensionamento de lotes aplicado à indústria de bebidas. *TEMA – Tendências em Matemática Aplicada*, 4(2), 237-246.
- Santos, M. O., & Almada-Lobo, B. (2012). Integrated pulp and paper mill planning and scheduling. *Computers & Industrial Engineering*, 63(1), 1-12. <http://dx.doi.org/10.1016/j.cie.2012.01.008>.
- Sistema de Controle de Produção de Bebidas – SICOBEB. (2005). Recuperado em 10 fevereiro de 2011, de <http://idg.receita.fazenda.gov.br/orientacao/tributaria/regimes-e-controles-especiais/sistema-de-controle-de-producao-de-bebidas-2013-sicobe>
- Toledo, C. F. M., França, P. M., Morabito, R., & Kimms, A. (2007). Um modelo de otimização para o problema integrado de dimensionamento de lotes e programação da produção em fábricas de refrigerantes. *Pesquisa Operacional*, 27(1), 155-186. <http://dx.doi.org/10.1590/S0101-74382007000100009>.
- Toledo, C. F. M., França, P. M., Morabito, R., & Kimms, A. (2009). Multi-population genetic algorithm to solve the synchronized and integrated two-level lot sizing and scheduling problem. *International Journal of Production Research*, 47(11), 3097-3119. <http://dx.doi.org/10.1080/00207540701675833>.
- Toledo, C. F. M., Kimms, A., França, P. M., & Morabito, R. (2015). The synchronized and integrated two-level lot sizing and scheduling problem: evaluating the generalized mathematical model. *Mathematical Problems in Engineering*, 2015, 1-18. <http://dx.doi.org/10.1155/2015/182781>.
- Toledo, C. F. M., Oliveira, L., Pereira, R. F., França, P. M., & Morabito, R. (2014). A genetic algorithm/mathematical programming approach to solve a two-level soft drink production problem. *Computers & Operations Research*, 48, 40-52. <http://dx.doi.org/10.1016/j.cor.2014.02.012>.
- Toso, E. A. V., Morabito, R., & Clark, A. R. (2009). Lot-Sizing and Sequencing Optimisation at an Animal-Feed Plant. *Computers & Industrial Engineering*, 57(3), 813-821. <http://dx.doi.org/10.1016/j.cie.2009.02.011>.
- Trigeiro, W. W., Thomas, L. J., & McClain, J. O. (1989). Capacitated lot sizing with setup times. *Management Science*, 35(3), 353-366. <http://dx.doi.org/10.1287/mnsc.35.3.353>.