BTPS
Brazilian Transportation Planning Society

Journal of Transport Literature
Vol. 8, n. 2, pp. 271-294, Apr. 2014
Research Directory

JTL | RELIT
www.transport-literature.org
ISSN 2238-1031

Uso do conceito de hipercaminhos no transporte de carga: uma análise exploratória

[Hyperpath concept in freight transport: an exploratory analysis]

Silvia Araujo dos Reis*, José Eugênio Leal

Pontifical Catholic University of Rio de Janeiro - Brazil

Submitted 21 Jan 2013; received in revised form 15 Mar 2013; accepted 27 Apr 2013

Resumo

É importante para o embarcador de cargas dispor de opções de escolha de diferentes caminhos e modos de transportes em momentos diversos que reduzam seu custo esperado total. O propósito deste trabalho é apresentar uma abordagem que faz uso do conceito de hipercaminhos para apoiar a decisão de escolha de caminhos e modos de transporte pelos embarcadores de cargas. É sugerido um modelo de seleção de rotas ótimas, através da programação matemática, para transporte de carga multimodal que emprega o conceito de hipercaminhos. Este modelo produz como resultado um conjunto estratégico de melhores caminhos para o embarcador, corroborando a definição de hipercaminhos, oriunda da literatura científica de modelos de transporte público. São apresentadas adaptações conceituais dessa abordagem para o transporte de carga. Um exemplo ilustrativo do modelo é usado para mostrar a sua aplicação.

Palavras-Chave: hipercaminho, embarcador, caminho mínimo, estratégico, multimodal.

Abstract

It is important for cargo shippers to have options to choose different paths and modes of transport at different times to reduce your total expected cost. The purpose of this paper is to present an approach that makes use of the hyperpath's concept to support the decision of the cargo shippers of choosing paths and transport's modes. It is suggested a model for selecting optimal routes by mathematical programming for multimodal freight transportation which employs the concept of hyperpath. This model produces as result a strategic set of best paths for the shipper, according to the definition of hyperpath, derived from the scientific literature of models of public transport. Adjustments of this approach are presented for the transport of cargo. An illustrative example of the model is used to show its application.

Key words: hyperpath, shipper, shortest path, strategic, multimodal.

* Email: silviaareis@yahoo.com.br.

Recommended Citation

Reis, S. A. and Leal, J. E. (2014) Uso do conceito de hipercaminhos no transporte de carga: uma análise exploratória. Journal of Transport Literature, vol. 8, n. 2, pp. 271-294.

Introdução

O presente artigo propõe explorar uma nova ferramenta para seleção do conjunto ótimo de caminhos e alocação de fluxo para atender às necessidades dos embarcadores no momento de escoamento da sua carga. Diferentemente dos métodos geralmente propostos de encontrar um único caminho mínimo, este trabalho aborda um conceito utilizado em trabalhos científicos de ponta, como em Spiess (1983) e Nguyen e Pallottino (1989), o conceito de hipercaminho. Um hipercaminho equivale a uma estratégia ótima para realizar uma viagem entre um ponto de origem e um destino. Esta abordagem foi desenvolvida nos anos 80 e um dos mais importantes software de alocação de fluxos de transporte urbano, o pacote EMME, tem incorporada esta temática. No entanto, não são conhecidas adaptações deste conceito para o transporte de carga, o que é feito neste trabalho.

As indústrias, o comércio por atacado, os produtores e as *trades* de *commodities* agrícolas se defrontam com questões de diversos níveis quanto às decisões de transporte dos seus produtos. Ao nível estratégico, decisões quanto à localização de armazéns, silos, centros de distribuição e pontos de transferência se associam à decisão quanto aos meios de transporte apropriados para cada tipo de bem. A contratação de transportadores, ou operadores logísticos no horizonte de cada ano se faz com base na visão de cunho tático. A decisão operacional diz respeito ao transporte para envio de lotes de produtos no dia a dia e são tomadas dentro de diretrizes definidas no nível estratégico e tático.

Uma diretriz importante tomada no nível tático restringe as opções de meios de transporte e de caminhos multimodais a um subconjunto do qual se espera que minimize ou maximize alguma função definida pela empresa. Por exemplo, pode-se desejar minimizar o custo logístico total esperado de estoque mais transporte, ou minimizar o *transit time* esperado total. Este subconjunto pode ser chamado de conjunto ótimo de caminhos multimodais. Encontrar este subconjunto, embora já bastante estudado, continua sendo um grande desafio.

Este problema é frequentemente enfrentado por embarcadores de cargas, além da crescente importância da inclusão no modelo de outros critérios de decisão além do frete, muitas vezes um único caminho sugerido pelos modelos tradicionais não é a opção mais vantajosa para este usuário (Caixeta-Filho, 2001).

Através de entrevistas realizadas pelos autores deste artigo com profissionais de grandes tradings e transportadoras no Brasil em 2010 e 2011, constatou-se que é usual no setor de granéis agrícolas, que o embarcador reparta a sua carga por vários caminhos e modais, mas sua decisão geralmente não é fundamentada em modelos matemáticos e sim na sua intuição ou em planilhas simplificadas. Os modelos matemáticos, quando utilizados por eles, definem o melhor caminho e modal, mas os próprios embarcadores decidem enviar a sua carga por vias e modos de transporte alternados, podendo ser somados ou não àqueles indicados pelo modelo. Isto ocorre devido a uma série de fatores que o influenciam no momento da tomada de decisão e que não podem ser inseridos nos modelos matemáticos que eles utilizam.

Através da mesma pesquisa verificou-se que essa necessidade de repartição da carga ocorre por vários motivos: grandes flutuações nos valores dos fretes no mercado de transporte, baixa disponibilidade de vagão ferroviário - no transporte por ferrovias isso faz com que a frequência de atendimento pelo modal ferroviário seja baixa-, risco de seguir por um só caminho e ter que enfrentar greves ou quaisquer outros imprevistos, baixa confiabilidade das empresas de transportes e redução da dependência de um só fornecedor de transporte para evitar a eventual falta de capacidade devido ao *overbooking* por parte das transportadoras.

Estes fatores foram citados em Caixeta-Filho (2001), como causadores da necessidade da escolha de diferentes modais pelos embarcadores.

O método baseado em hipercaminhos apresenta como resultado um conjunto estratégico de caminhos que conduz ao custo mínimo esperado o que é também um objetivo dos embarcadores.

Para o transporte de carga é possível assumir a premissa de que o conjunto estratégico representado pelo hipercaminho permite ao embarcador a seleção de caminhos alternativos para escoamento da sua carga, que quando utilizados em um horizonte de médio ou longo prazo resultam em um valor esperado ótimo mínimo, que é o obtido na solução do hipercaminho mínimo.

A lógica é que, da mesma maneira que o usuário de um transporte público estabelece uma estratégia para escolha de caminhos e transporte, o embarcador também pode utilizar um conjunto estratégico que conduz a um custo mínimo esperado.

Não se pretende com o trabalho chegar a um modelo acabado, mas sim verificar a possibilidade de utilização do conceito de hipercaminhos no problema de transporte de carga e apresentar à comunidade científica este conceito como contribuição para desenvolvimentos mais completos. Nesse sentido, são feitas adaptações da abordagem para o transporte de carga, para um problema relativamente simplificado. Com isso abre-se a possibilidade de novas contribuições incorporando aspectos mais complexos ao modelo. O modelo foi formulado matematicamente e um exemplo ilustrativo apresentado e resolvido com o solver CPLEX 12.13 através do software AIMMS 3.11.

O texto contém, além desta introdução, uma revisão bibliográfica na Seção 1, uma apresentação breve dos conceitos de Estratégia, hipercaminhos, hipergrafo e hipergrafo multimodal, na Seção 2; na Seção 3, o modelo matemático de seleção de rotas ótimas para transporte de carga do ponto de vista do embarcador incluindo uma aplicação didática, e na última seção, as conclusões.

1. Revisão da literatura sobre modelos de escolha de caminhos

Os modelos de alocação de fluxo têm como objetivo simular a distribuição do fluxo em uma rede, tomando-se como base os caminhos mínimos entre as origens e destinos desta rede, que se observam em uma situação de equilíbrio de fluxos. O equilíbrio de fluxos em redes pode ser encontrado segundo dois pontos de vista. Do ponto de vista de cada usuário ou do ponto de vista do sistema. Do ponto de vista de cada usuário o equilíbrio se obtém quando, após ajustes sucessivos, todos os caminhos usados pelos usuários apresentam o mesmo custo, que é o mínimo no estado de equilíbrio, e os caminhos não utilizados apresentam um custo igual ou maior que este. Este é o chamado primeiro princípio de Wardrop (Wardrop, 1952). A busca de caminhos mínimos em redes faz parte de todos os modelos de equilíbrio utilizados.

Entre as diferentes formulações para um problema de caminho mínimo, estão: de um nó para outro nó, de um nó para todos os outros nós da rede, entre todos os nós da rede, e k-caminhos mínimos entre dois nós (Campos, 1997).

O modelo de alocação de fluxo, sob o ponto de vista do embarcador, requer a existência de mais de um caminho mínimo entre um nó (origem) para outro nó (destino), para escoamento da sua carga. Frente a isso, o modelo de hipercaminho mínimo, assim como os modelos que buscam k caminhos mínimos como os sugeridos por Rink *et.al* (2000) e Yen (1971), estão neste conjunto de possibilidades.

O conceito de conjunto estratégico surgiu com Spiess (1983), quando este apresentou um novo algoritmo para encontrar o conjunto estratégico de um usuário. Ao invés do algoritmo encontrar um caminho, ele encontra um conjunto de caminhos cujo valor esperado é mínimo. Seguindo a tendência de Spiess (1983), Nguyen e Pallottino em 1989 abordaram um novo conceito, o de hipercaminho mínimo. O hipercaminho é descrito como uma generalização do conceito de caminho em um grafo direcionado, em que as propriedades fundamentais de caminhos são também generalizadas para o hipercaminho. Em ambas as abordagens, o resultado final é o mesmo: um conjunto de caminhos selecionados, cujo valor esperado é mínimo.

Problemas de hipercaminhos mínimos e algoritmos de solução são encontrados em várias publicações: Nguyen e Pallotino (1989), Nguyen, Pretolani e Markenzon (1995) *apud* Marcote e Nguyen (1998), Cominetti e Correa (2001), Lozano e Storchi (2002) e Bell (2009).

Comparando o algoritmo de K caminhos mínimos com o hipercaminho, a principal diferença que faz com que o hipercaminho seja preferido na solução do problema do embarcador é que os algoritmos que buscam k caminhos mínimos, encontram o 1° menor caminho, 2°menor caminho...k menor caminho, enquanto que o hipercaminho mínimo encontra, assim como o embarcador necessita, um conjunto de caminhos que juntos tem um valor esperado mínimo. Ou seja, a escolha de um caminho está diretamente ligada a do outro caminho. Dessa maneira o custo mínimo é ainda menor (Spiess, 1983).

Com relação à alocação de fluxo, diferentes modelos são utilizados: tudo ou nada, probabilísticos, com restrição de capacidade e equilíbrio de redes. Observa-se que o problema considerado aqui não é o do conjunto dos usuários, mas o de um embarcador desejando enviar a sua carga, para o seu destino. Embora não se trate de uma alocação normativa o problema tem características peculiares a serem consideradas.

Os modelos de equilíbrio procuram definir um padrão de distribuição de fluxo que espelhe exatamente a competição entre vários usuários da rede, que procuram se distribuir de forma a chegar a um equilíbrio. Na distribuição do fluxo, em um modelo de equilíbrio, todos os usuários da rede experimentam o mesmo custo, diferentemente dos outros modelos onde alguns usuários da rede podem ter desnecessariamente um alto custo, enquanto outros usuários têm uma maior redução nos seus custos Florian (1995).

O embarcador necessita de um modelo que aloque toda carga a ser escoada, com considerações reais de restrição de capacidade. Os modelos tudo ou nada alocam toda a carga no caminho mínimo resultante do algoritmo inicial, independente da capacidade da mesma. Os modelos de equilíbrio são bastante úteis para otimização de tráfego urbano, mas para modelos que buscam a otimização sob o ponto de vista do usuário, ou do sistema, como no problema do embarcador, não são aplicáveis.

Os modelos probabilísticos são os que mais se aproximam das necessidades do embarcador, uma vez que o sistema de transporte apresenta diversos aspectos estocásticos, como tempos de viagem e de carga e descarga, entre outros. Dial (1971) *apud* Bell (1995) foi o primeiro a introduzir o conceito de probabilidade de uso de uma rota. Trata-se de um algoritmo que inicia a alocação do fluxo sobre um conjunto de k-caminhos, mas o fluxo é distribuído segundo a probabilidade de uso destes caminhos. Esta probabilidade de uso é dependente do tempo de viagem em cada rota, sendo que o caminho de menor tempo de viagem tem uma maior probabilidade de uso.

A diferença do modelo de Dial para o modelo de Hipercaminho segundo Nguyen e Pallotino (1989), está no fato de que o primeiro divide o fluxo proporcionalmente ao custo do caminho, sendo que todos os caminhos admissíveis do par de origem-destino (a, b) são utilizados. O hipercaminho é um subconjunto de caminhos, que pode ou não ser igual ao conjunto de todos os possíveis caminhos viáveis da origem ao destino, cujo valor esperado é mínimo.

A alocação de fluxo seguindo o modelo de hipercaminho proposto por Nguyen e Pallotino (1989), acontece de acordo com a probabilidade de utilização de cada caminho definido no algoritmo de hipercaminho mínimo. Essa probabilidade é definida de acordo com o tempo de viagem em cada trecho e o tempo de espera para utilização daquela via.

O tempo de espera é definido no transporte público como sendo o tempo esperado pelo usuário para a chegada do primeiro ônibus que pertence ao seu conjunto estratégico. O conjunto estratégico é o conjunto de linhas que minimiza o custo (tempo) total de viagem.

Equivalentemente, para o transporte de carga, os caminhos pertencentes ao conjunto estratégico do usuário serão definidos considerando o tempo de viagem de cada modal/caminho e a frequência de atendimento dos mesmos. Conhecida a distribuição estatística da frequência de atendimento, torna-se possível através do modelo o cálculo do tempo esperado de espera pelo modal, computando os devidos atrasos.

No caso do problema dos embarcadores é sabido que um dos motivos mais citados para o fato de não transportarem por ferrovias é a indisponibilidade de vagões. Na época de safras a oferta de vagões é muito inferior à demanda. Devido à carência de vagões, é usual embarcadores e concessionárias de ferrovias estabelecerem contratos longos (geralmente um ano), com um valor mínimo mensal a ser transportado. De acordo com o volume previsto de carga, por semana, é estabelecida pela transportadora a frequência de atendimento (Barros e Lobo, 2009).

Outras reclamações bastante comuns, por parte dos embarcadores, são os atrasos na chegada dos veículos para carregamento da carga e a falta de comprometimento das transportadoras em cumprir o acordado. Isto gera para o embarcador, custo de espera e de não atendimento aos seus clientes no prazo estipulado.

Visto que o hipercaminho contempla parte dessas variáveis consideradas pelo embarcador e permite ao embarcador considerar um conjunto de caminhos para escoar a carga, minimizando o impacto de ter como fornecedor somente um transportador, este artigo apresenta um modelo que contempla o conceito de hipercaminho, cuja ideia central é mostrar que esta metodologia é útil para os embarcadores no processo de tomada de decisão para o escoamento da sua carga. Não se pretende apresentar um modelo completo, mas apontar alguns caminhos teóricos de um modelo de escolha de caminhos por parte do embarcador, que façam uso do conceito de hipercaminho.

2. Estratégia, hipercaminhos, hipergrafo, hipergrafo multimodal

2.1 Analogias entre características do transporte público e transporte de carga

As definições de estratégias e hipercaminhos surgiram associadas ao transporte público. Segundo a definição de Spiess (1983), uma estratégia é um conjunto de regras que, quando aplicadas, permite ao usuário chegar ao seu destino. O número e o tipo de diferentes estratégias, que o viajante pode escolher, dependem da informação disponível para ele antes e durante a viagem.

Na formulação de Spiess (1983), o comportamento do passageiro é caracterizado, em cada nó da rede, a partir de um conjunto de linhas atrativas. Dado que o usuário recebe um conjunto de possibilidades para chegar ao seu destino final, o usuário sempre embarca no primeiro ônibus, pertencente a este seu conjunto de linhas atrativas, que passar pelo nó aonde ele se encontra e a solução para o problema, com o usuário adotando esta estratégia, resulta em um tempo total esperado mínimo, incluindo a possibilidade de efetuar transbordos.

Fazendo uma analogia entre transporte público e o de carga, o transporte público se caracteriza por uma oferta de serviços regulares, com capacidade restrita, tempo de viagem e frequência. O transporte de carga também se caracteriza por uma oferta de serviços que pode ou não ser regular, expressos pelos modais, que têm restrição de capacidade e são caracterizados pelos seus tempos de viagem e frequências de atendimento. Em uma viagem da origem ao destino, a carga pode eventualmente sofrer transbordo. Da mesma maneira que o indivíduo chega até o ponto de ônibus para fazer uma viagem, a carga chega até o ponto de carga, onde será carregada e seguirá até o destino final. O tempo em trânsito de cada indivíduo é aqui relacionado ao tempo em trânsito de cada unidade de carga.

Se for feita a consideração de que há um custo de tempo para os passageiros, com um valor de tempo mensurável, isto pode se comparar com o custo de imobilização da carga, ou custo de estoque em trânsito, ou de estoque em terminais.

Spiess (1983) supõe que, de posse do conhecimento sobre a frequência das linhas de ônibus o usuário desenvolve uma estratégia que equivale a selecionar um subconjunto de linhas que de forma direta, ou combinada através de transbordo, o conduzem ao seu destino com um custo esperado mínimo. A estratégia é, de fato, uma estratégia a médio prazo, ou uma decisão tática do usuário. A sua decisão operacional vai depender de quais linhas do conjunto da estratégia se oferecerão primeiro para ele.

De maneira semelhante, o embarcador desenvolve uma estratégia selecionando entre os diversos serviços disponíveis um subconjunto, que minimiza os custos esperados de transporte e estoque. A decisão operacional dependeria então da disponibilidade de cada serviço, ou combinação de serviços.

Assim, definir a frequência de atendimento de cada transporte ou selecioná-los de acordo com sua frequência pré-existente faz parte da estratégia do embarcador. Pode ser mais vantajoso ter a disposição um conjunto de modais/transportadoras pertencentes ao seu conjunto estratégico, cada um com sua frequência de atendimento e custo e que atende a sua necessidade de carregamento do que ter um só meio (no caso de modelo de um caminho mínimo) com frequência de atendimento maior, porém, com o custo de transporte maior, ou até mesmo um modal com custo menor, mas com frequência que não atende a sua demanda.

Uma estratégia aplicada ao transporte de carga pode ser entendida, então, como um conjunto de alternativas que o embarcador possui para transportar sua carga.

Esta estratégia pode incluir a seleção do modal, a frequência de chegada do transporte, como também a seleção dos caminhos, onde o tempo de viagem, o tempo de espera e o custo são considerados.

A escolha de um conjunto estratégico pelo usuário viabiliza o enfrentamento de imprevistos, permitindo que o conjunto de escolhas tomado pelo embarcador atinja o custo esperado mínimo, ou muito próximo a ele.

2.2 Estratégia e hipercaminhos - notações básicas e definições

Considere a rede $G= (N,A)$, composta de nós N e arcos direcionados A. Um elemento de A será denotado por (i,j), onde i e j são elementos de N, e seja r o nó de origem, e d o nó de destino, com $r,d \in N$. Para cada arco (i,j) é associado um custo c_{ij} .Viagens ocorrem entre nós de origem e destino. Uma estratégia é um mapeamento que associa a todo nó j de uma rede um conjunto ordenado de nós sucessores.

Seja E_j o conjunto de todos os subconjuntos de arcos que saem do nó j (j^+). Uma estratégia s aloca para cada nó j, um elemento E_j^s em E_j. Em redes de trânsito, por exemplo, uma estratégia especifica, para cada nó, um conjunto de linhas atrativas. Para cada estratégia s, é associado um grafo acíclico, $G_s=(N^s, \bigcup_{j \in N^s} (j, E_j^s))$, onde (j, E_j^s) representa o conjunto de arcos $\{(j,k) \in A \mid k \in E_j^s\}$, e todo nó $j \in N^s$ é conectado ao destino d. No grafo, o conjunto de todos caminhos elementares que conectam a origem r ao destino d é denotado por P^s.

O conjunto de todas as estratégias que ligam a origem r ao destino d é representado por S_{rd}. Para cada estratégia s em S e para cada nó j em N^s é associado uma probabilidade π_{jk}^s de acessibilidade ao nó $k, (k \in E_j^s)$ a partir nó j. Dependendo das aplicações, estas probabilidades podem ser independentes do fluxo ou não. Estas probabilidades dos arcos levam a probabilidade do caminho: (Marcotte e Nguyen, 1998)

$$k_p^s = \prod_{(j,k) \in p} \pi_{jk}^s \qquad (1)$$

A combinação de uma estratégia e seus os arcos com as respectivas probabilidades definem um hipercaminho. Em adição ao custo no arco c_{ij} também pode haver um custo w_j^s associado a cada nó $j \in N^s$, onde $w_d^s = 0$, quando j é o nó de destino. O custo de um caminho elementar é a soma dos custos dos arcos e nós que formam o caminho. O custo de um hipercaminho é definido como o custo ponderado de todos os caminhos elementares contidos no hipercaminho, e o custo de uma estratégia é simplesmente o custo do hipercaminho (Marcotte e Nguyen, 1998):

$$C^s = \sum_{p \in P^s} k_p^s \left(\sum_{(j,k) \in p} c_{jk} + \sum_{j \in p} w_j^s \right) \qquad (2)$$

2.3 Hipergrafo e hipergrafo multimodal

As definições a seguir são baseadas nos trabalhos de Gallo *et al*(1993) e Cambini, Gallo, Scutellà (1997).

Um hipergrafo direcionado ou h-grafo é um par $H=(N,E)$, onde N é o conjunto de nós e E o conjunto de hiperarcos.

Um hiper-arco E é identificado pelo par $E=(T(E), H(E))$, onde $T(E) \subseteq N$, é a cauda do hiper-arco, e $H(E) \subseteq N$ é a cabeça do hiper-arco.

Um B-arco é um hiper-arco $E= (T(E),H(E))$ com $|H(E)|=1$ (o conjunto de nós destino só tem um elemento). Um F-arco é um hiper-arco $E= (T(E),H(E))$ com $|T(E)|=1$. O grafo de hipercaminhos é representado por F-Hipergrafos, ou seja, um hipergrafo formado apenas por F-arcos . Nguyen e Pallottino (1989) propuseram algoritmos de resolução de árvore mínima em F-Hipergrafos como SFT-queue e SFT- Dijkstra.

Um hipergrafo multimodal é um trio H=(N,E,M) onde N é o conjunto de nós e E o conjunto de hiper-arcos e M é o conjunto de modos associado aos h-arcos (Lozano e Storchi, 2002).

3. Modelo de seleção de rotas ótimas para transporte de carga do ponto de vista do embarcador

3.1 Modelo inicial

Inicialmente será apresentado, a partir do modelo definido por Spiess (1983), como se chega ao modelo matemático que dá origem ao hipercaminhos. Como Spiess (1983) desenvolveu o modelo para aplicação em transporte público, a divisão dos fluxos acontece em função da distribuição de chegada do passageiro, do tempo de viagem do passageiro e da frequência de atendimento de cada ônibus urbano.

Seja o hipergrafo orientado multimodal $H=(N,A,M)$ onde N é o conjunto de nós, A o conjunto de hiper-arcos e M é o conjunto de modos associado aos h-arcos. ES(i) é o conjunto de arcos $(i,j) \in A$ chegando no nó i $\in N$ e FS(i) o conjunto de arcos $(i,j) \in A$ saindo no nó i $\in N$. Somente um modo m é associado com cada h-arco de um h-grafo multimodal. A ligação entre eles são feitas através dos arcos de transferência. Estes arcos de transferência também podem ser chamados de arcos de transbordo e podem ser tanto para troca de modos como para troca de veículo, continuando no mesmo modo.

A distribuição do tempo de espera pelo usuário, de cada transporte em cada h-arco $(i,j) \in A$ é quantificado pelo parâmetro positivo $f(i,j)$, que pode ser a frequência da oferta de transporte no arco (i,j), e pela constante α. O tempo combinado de espera esperado considera a distribuição de chegada do usuário no nó i e a frequência de atendimento dos transportes que pertencem ao conjunto estratégico do usuário e que pertencem a FS(i).

Seja k_i= Tempo de espera no nó i,

$$k_i = \frac{\alpha}{\sum_{(i,j)\epsilon FS(i)} f_{(i,j)}} \quad , \ \alpha > 0 \tag{3}$$

A Equação (3) mostra que o tempo de espera do usuário em cada nó é inversamente proporcional ao somatório das frequências de todas as possíveis linhas que ele pode utilizar para chegar ao seu destino final, ou seja, quanto mais alternativas de ônibus estiverem presentes em seu conjunto estratégico, menos tempo ele ficará esperando no ponto de ônibus. O conjunto estratégico definido pelo modelo matemático, no fim desta seção, indicará quais são as alternativas que o usuário poderá utilizar para que o tempo esperado total a seja mínimo.

O caso com α=1 corresponde à distribuição exponencial de intervalo de chegada dos veículos com média $1/f_{(i,j)}$ e razão uniforme de chegada dos usuários no ponto de ônibus, aqui exemplificado como nó.

Para o caso do transporte de carga, se a chegada da carga no nó possuir uma distribuição de chegada diferente da distribuição uniforme ou ainda, se a chegada do transporte tiver distribuição diferente da distribuição exponencial, como assumido acima, deverá ser feita a devida alteração no valor de alfa e suas implicações. Segue como sugestão para estudos futuros as mudanças nestas distribuições de chegada.

E seja $P_{(i,j)}$ igual a probabilidade do arco (i,j) ser utilizado dentre aqueles que compõem o conjunto estratégico formado pelos hipercaminhos.

Para Spiess (1983) a probabilidade $P_{(i,j)}$ do arco *(i,j)* ser usado é igual à probabilidade do veículo de transporte associado àquele arco chegar primeiro ao nó *i*, entre todos aqueles que compõem o conjunto estratégico e que pertencem ao conjunto de arcos que saem do nó *i*.

$P_{(i,j)}$= Probabilidade do arco *(i,j)* ser usado.

$$P_{(i,j)} = \frac{f_{(i,j)}}{\sum_{(i,j)\epsilon FS(i)} f_{(i,j)}} \quad , \qquad (i,j)\epsilon FS(i) \tag{4}$$

A Equação (4) mostra, portanto, que a probabilidade de cada arco ser utilizado, ou de cada modo que está alocado a este arco, é diretamente proporcional à frequência do transporte pertencente àquele arco. Como exemplo, se existem duas possibilidades de transportes para o usuário no arco *(i,j)* dentro do seu conjunto estratégico, uma com frequência de atendimento de 1 veículo por hora *(i,j,m1)* e outro com frequência de atendimento de 1 veículo a cada 2 horas *(i,j,m2)*, a probabilidade do usuário utilizar o veículo *m2* é $P_{(i,j)} = \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = 0{,}33$.

É importante salientar que mesmo que existam "n" possibilidades de transportes que levam o usuário até o destino final, o conjunto estratégico definido para usuário pode contemplar qualquer valor de possibilidades pertencentes as "n" possibilidades. Por exemplo, pode haver cinco linhas de ônibus que permitem ao usuário chegar ao trabalho a partir do ponto de ônibus próximo a sua casa, cada uma das possibilidades caracterizadas pelo tempo de viagem e frequência de atendimento, porém, o modelo decide que o conjunto estratégico deste usuário é formado por apenas duas linhas. Ou seja, o hipercaminho definido para este usuário é formado pelos caminhos e transportes destas duas alternativas.

O modelo irá decidir qual transporte/caminho compensa ser inserido no conjunto estratégico final a ponto de que o valor esperado do total, formado pelo tempo de espera mais o tempo de viagem ponderado de cada caminho, seja mínimo. A partir do momento que uma alternativa é inserida no conjunto estratégico do usuário, aquele transporte/caminho inserido passa a receber uma probabilidade de utilização e o somatório das probabilidades vezes o tempo de viagem resulta no tempo esperado total em trânsito.

Assim considere o modelo inicial:

Parâmetros:

m = Transporte ofertado

$T_{(i,j)}$ = Tempo de trânsito *(i,j)*

$f_{(i,j)}$ = Frequência do transporte*(m)* no arco *(i,j)*

$D_{(i)}$ = Demanda do nó *i*

Variáveis:

$k_{(i)}$ = Tempo de espera no nó *i*

$x_{(i,j)}$ = Fluxo alocado no arco *(i,j)*

$y_{(i)}$ = Fluxo alocado no nó *(i)*

$B_{(i,j)}$ = Variável binária do arco*(i,j)*, $B_{(i,j)}$ = {0,1}

A função objetivo do problema visa minimizar o tempo total de viagem mais o tempo de espera para o transporte de um volume de carga.

F.O = Minimizar:

$$\sum_{(i,j)} (T_{(i,j)} * x_{(i,j)}) + \sum_{(i)} k_i * y_i \tag{5}$$

$$\text{Onde: } k_i = \frac{1}{\sum_{(i,j)\epsilon FS(i)} f_{(i,j)}} \tag{6}$$

Substituindo em (5):

F.O = Minimizar:

$$\sum_{(i,j)} (T_{(i,j)} * x_{(i,j)}) + \sum_{(i)} \frac{y_i}{\sum_{(i,j)\epsilon FS(i)} f_{(i,j)} * B_{(i,j)}} \tag{7}$$

Onde $B_{(i,j)}$ = 0 ou 1, “0” se o arco(i,j) não for utilizado e “1” caso contrário.

A função (7) é sujeita as restrições:

$$x_{(i,j)} = \frac{f_{(i,j)}}{\sum_{(i,j)\epsilon FS(i)} f_{(i,j)}} * y_i \;, \qquad (i,j) \in A \tag{8}$$

$$y_i = \sum_{(j,i)\epsilon ES(i)} x_{(j,i)} + D_i \;, \qquad onde\ y_i \geq 0\,,\ i \in N \tag{9}$$

A restrição descrita pela Equação (8) diz que o fluxo no arco *(i,j)* é igual ao fluxo no nó *i*, repartido segundo a proporção da frequência de *(i,j)* frente aos arcos concorrentes.

A restrição descrita pela Equação (9) mostra que o fluxo no nó *i* é igual a demanda originada em *i*, mais o fluxo de todos os arcos que chegam a *i*.

Neste caso, temos uma função objetivo não linear e com restrição não linear com variáveis inteiro-mistas. Temos, portanto, neste caso, um problema complexo de difícil resolução, do tipo NP-difícil.

Através da inserção de uma nova variável W_i e das devidas substituições, é possível relaxar a não linearidade do modelo acima (Equações 7 a 9). Para isso, seja W_i uma variável que denota o total de tempo de espera para todas as viagens nos nós $i \in N$, definida na Equação (10):

$$W_i = \frac{y_i}{\sum_{(i,j)\epsilon FS(i)} f_{(i,j)} * B_{(i,j)}} \tag{10}$$

Realizando as devidas substituições e transformações, o modelo básico pode ser linearizado e visualizado na forma abaixo:

F.O = Minimizar:

$$\sum_{(i,j)} (T_{(i,j)} * x_{(i,j)}) + \sum_{(i)} W_i \tag{11}$$

$$\sum_{(i,j)\epsilon FS(i)} x_{(i,j)} = \sum_{(j,i)\epsilon ES(i)} x_{(j,i)} + D_i \tag{12}$$

$$x_{(i,j)} \leq f_{(i,j)} * W_i \;, \qquad (i,j)\epsilon FS(i)\,,\ i \in N \tag{13}$$

$$x_{(i,j)} \geq 0 \tag{14}$$

Este é o modelo base (Equações 11-14) de acordo com a formulação de Spiess (1983).

3.2 Modelo ajustado

O intuito aqui é introduzir um modelo matemático que possa ser utilizado pelo embarcador para o escoamento de sua carga. Devido à complexidade deste processo vislumbrou-se a necessidade de inclusão de outros parâmetros, variáveis e restrições. Para facilitar o entendimento dos parâmetros e variáveis do modelo, os mesmos foram descritos abaixo. A unidade definida para cada variável e parâmetro foi dada como sugestão.

Parâmetros

Tarifa(i,j) = Frete (R$/tonelada) no trecho (i,j)

Ctransb(i,j) = Custo de Transbordo (R$/tonelada) no trecho (i,j)

ValordaCarga = Valor da Carga (R$/tonelada)

CustoOportunidade = Valor estipulado como rendimento mínimo (%) necessário

T_{ij} = Tempo de viagem no trecho (i,j), em dias.

Tcar = Tempo de carregamento da carga (por tonelada), em fração do dia.

Tdescar = Tempo de descarregamento da carga (por tonelada), em fração do dia.

D_i = Demanda no nó i, em toneladas.

$F_{(i,j)}$ = Frequência de atendimento do modal presente no arco (i,j), em dias.

TempodeEntregaRequerido = Tempo de Entrega requerido, em dias.

Variáveis

CustodeEstoque = Custo unitário de estoque no total da viagem (R$/tonelada)

Ttotalviagem = Tempo total de viagem de toda a carga, em dias.

x_{ij} = Volume alocado no trecho (i,j), em toneladas.

W_i = Tempo de espera total no nó i, em fração do dia.

Assim, o modelo matemático pode ser definido:

Minimizar FO:

$$\sum_{(i,j)} ((Tarifa_{(i,j)} + Ctransb_{(i,j)}) * x_{(i,j)}) + \text{CustodeEstoque} \tag{15}$$

s.a

$$\sum_{(i,j)\epsilon FS(i)} x_{(i,j)} = \sum_{(j,i)\epsilon BS(i)} x_{(j,i)} + D_i \tag{12}$$

$$x_{(i,j)} \leq f_{(i,j)} * W_i \qquad (i,j)\epsilon\, FS(i),\ i \in N \tag{13}$$

$$\text{CustodeEstoque} = \left(\frac{\text{ttotalviagem}}{365 \text{ dias}}\right) * \text{ValordaCarga} * \text{CustoOportunidade} \tag{16}$$

$$ttotalviagem = \sum_i W_i + \sum_{(i,j)} T_{(i,j)} * x_{(i,j)} + \sum_{(i,j)} tcar_{(i,j)} * x_{(i,j)} + \sum_{(i,j)} tdescar_{(i,j)} * x_{(i,j)} \tag{17}$$

$$\text{ttotalviagem} \leq \sum_i D_i * \text{TempoEntregaRequerido} \tag{18}$$

$$x_{(i,j)}, W_i, \text{ttotalviagem}, \text{CustodeEstoque} \geq 0 \tag{19}$$

As explicações dos parâmetros, variáveis e restrições mais críticos seguem abaixo:

Iniciando com o parâmetro tempo, o arco poderá conter, além do tempo em trânsito *($T_{(i,j)}$)*, o tempo de carga *($tcar_{(i,j)}$)* e/ou o tempo de descarga *($tdescar_{(i,j)}$)*. Quando a carga inicia em um modo será somado ao tempo de viagem o tempo de carga, quando ele deixa o modo será somado a ele o tempo de descarga.

A variável *ttotalviagem* representa o tempo total de viagem para o total de carga de que foi demandada. Esta variável se faz necessária já que cada unidade de carga, como um passageiro, tem um tempo de viagem a partir do momento que está disponível para ser transportada.

Apesar do transporte de carga apresentar vários parâmetros envolvendo o tempo, este pode ser considerado como o segundo atributo mais importante na logística de transporte. O custo monetário é o primeiro e deve ser incluído explicitamente no modelo. Como neste modelo será considerado somente um parâmetro como critério de escolha torna-se necessária a conversão do tempo em custo.

O parâmetro tempo pode ser considerado como um custo em vários momentos. Em transporte público é comum o estabelecimento do valor do tempo para elaboração do custo generalizado. Em transporte de carga o objetivo é o mesmo, o que muda são as características do valor do tempo.

O valor do tempo pode ser obtido através de pesquisa qualitativa a respeito da importância deste parâmetro para o embarcador. Além disso, ele pode ser relacionado ao custo que incorre diretamente como custo de estoque em trânsito. Neste caso é aceitável assumir que o estoque em trânsito engloba todo o tempo desde o momento em que a carga está disponível para ser transportada até o momento que ela está à disposição do cliente, depois de descarregada. O custo de estoque em trânsito pode, portanto, ser calculado a partir da Equação (16), que utiliza o tempo total de viagem calculado pela Equação (17).

Em relação à tarifa que a transportadora cobra do embarcador, todos os arcos, com exceção dos arcos de transferência, de acordo com seu respectivo modo serão caracterizados por um parâmetro custo $(Custo_{(i,j)})$, que corresponde a tarifa em R$ por tonelada de carga $(Tarifa_{(i,j)})$.

O custo pode ser constante, independente do fluxo no arco, ou dependente do mesmo. Para o custo dependente do fluxo, Spiess (1993) estabeleceu que o conjunto estratégico do usuário passa a ser definido por um modelo de equilíbrio, de acordo com o primeiro princípio de "Wardrop", originando um modelo mais complexo. No modelo proposto neste trabalho será considerado que o preço não varia com o fluxo em cada arco.

Os pontos de transbordo são bastante relevantes para o transporte de carga, visto que são neles onde a carga passa de um modo de transporte para o outro, ou até mesmo de um veículo para outro no mesmo modo.

Estes pontos de transbordo podem incluir custos que são inerentes a sua utilização. O custo de transferência de carga pode ser quantificado por contêineres, tonelada, sacas etc. Neste modelo será considerado o custo de transbordo *(*$Ctransb_{(i,j)}$*)* em R$/Ton e eles estarão presentes nos arcos de transferência.

O nível de serviço a ser atendido pode ser identificado como o Tempo de Entrega Requerido pelo cliente, representado pelo parâmetro *TempodeEntregaRequerido*. Para o modelo envolvendo hipercaminho, a restrição de nível de serviço se torna menos simples. Pela Equação (18) é possível representar o nível de serviço com um tempo médio de entrega. Para atender exatamente o nível de serviço, a equação torna-se inteiro-mista e consequentemente o nível de complexidade do modelo aumenta. Neste modelo será utilizado o atendimento médio do nível de serviço requerido.

3.3 Exemplo ilustrativo

Considere a rede representada pela Figura 1. Suponha que o embarcador deseje transportar açúcar de uma usina, representada pelo nó *r*, para o porto de Santos, representado pelo nó *d*, no próximo trimestre. Existe a possibilidade de escoamento desta carga de diversas formas: somente através do modo rodoviário (a partir do nó *r* até o nó *d*), multimodal (rodoviário do nó *r* até o nó *x* e ferroviário a partir do nó *x*, podendo passar para o modo aquaviário no nó *y*), e multimodal (rodoviário do nó *r* até o ponto de transbordo no nó *y*, e prosseguindo pelo modo ferroviário ou aquaviário até o porto, nó *d*). O embarcador precisa descobrir quais transportes ele irá contratar e por qual caminho ele irá escoar a carga.

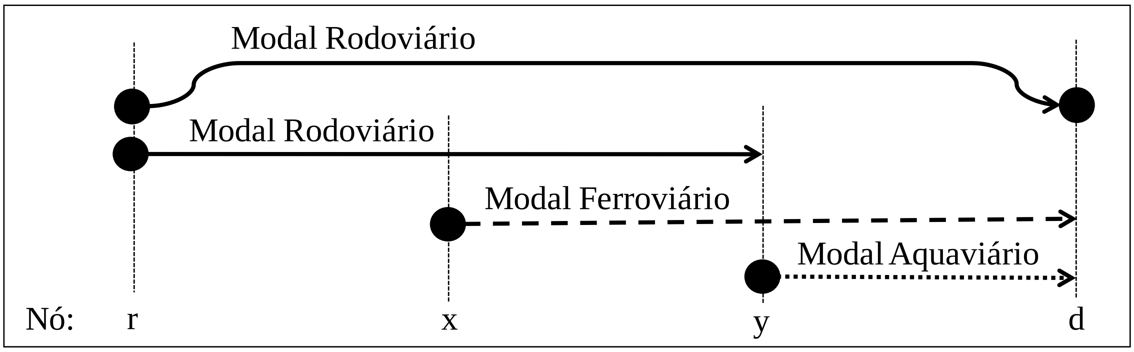

Figura 1- Exemplo de rede com vias e modais disponíveis para acesso do embarcador

Analisando o problema através do conceito de conjunto estratégico, cada uma das formas de escoamento citadas acima é uma estratégia, o resultado do modelo irá indicar quais estratégias estarão presentes no conjunto estratégico deste usuário. Este conjunto de possibilidades comporá o hipercaminho.

Para resolução do modelo foi necessário acrescentar dois nós (*x2 e y3*, na Figura 2) que foram essenciais para o estabelecimento dos arcos de transferência ou transbordo *(x, x2), (x2,x), (y, y3) e (y3, y)*. Aragón e Leal (1998) demonstraram que é possível redefinir uma rede de transporte coletivo automaticamente, de forma que ela fique pronta para aplicação de algoritmos como para representação de diferentes componentes, como tempos de transbordo, tempo de espera e tempo de descida nos pontos de paradas. Este método pode também se mostrar válido para o modelo sugerido neste artigo.

Para cada modo m pertencente ao h-arco *(i,j)* existe uma série de parâmetros. A Figura 2 mostra todos os parâmetros alocados em cada arco *(i,j)*. Os valores dentro dos parênteses, estão definidos segundo a ordem: (Tempo_Trânsito(dias), Frequência(dias), Tarifa(R$/ton), Tempo de Carregamento (dias/1000*ton), Tempo de Descarregamento(dias/1000*ton) e Custo de transbordo (R$/ton)).

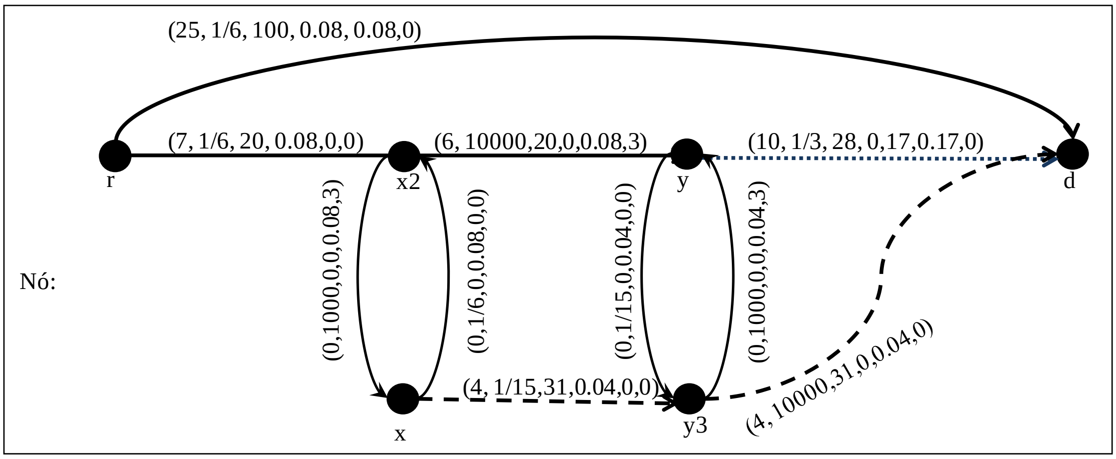

Figura 2- Parâmetros relacionados aos seus arcos respectivos

Neste exemplo foi considerado um custo de oportunidade 15% ao ano e o valor da carga de R$ 1000,00/tonelada. Para melhor ilustração a demanda é de 1 tonelada partindo no nó *r*.

O modelo foi resolvido através de programação matemática, utilizando o solver CPLEX 12.13 através do software AIMMS 3.11.

O resultado da aplicação do modelo, ou seja, qual o melhor conjunto estratégico a ser utilizado pelo embarcador para este exemplo, pode ser visualizado na Figura 3.

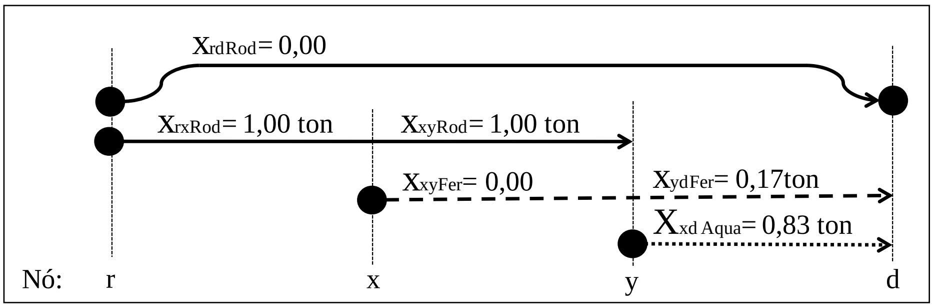

Figura 3- Resultado do exemplo aplicado ao modelo de seleção de rotas ótimas para transporte de carga do ponto de vista do embarcador.

Como resultado da aplicação do modelo pode ser visto que para o conjunto de valor esperado ótimo, a partir do nó *r* a carga deve seguir pelo caminho *(r-y)*, através do modo rodoviário, até o nó *y* , realizar um transbordo e seguir pelo caminho *(y-d)* pelo modo ferroviário (X_{ydFer}) ou pelo modo aquaviário (X_{xdAqua}) .

A partir do nó *y* existem duas possibilidades para o embarcador: seguir pelo modo ferroviário ou pelo aquaviário. O resultado ótimo esperado do modelo divide a carga entre os modos ferroviário e aquaviário, diminuindo o tempo de espera W_y. Ou seja, dada a frequência de atendimento, e dado que embarcador envie a carga a medida que o transporte contratado chegue no local para o carregamento, a proporção esperada de utilização de cada modo é 17% da carga para o ferroviário e 83% da carga para o aquaviário.

A divisão de fluxos que ocorreu no arco (y,d) entre os modos aquaviário e ferroviário é fruto da aplicação da Equação (13) do modelo matemático. A possibilidade de utilização de mais de um modo para chegar ao destino final diminui o tempo de espera para o envio da carga, pois não mais só um transporte poderá ser utilizado, porém a partir do momento que mais de um modo é escolhido para um mesmo trecho, a proporção que aquele meio será utilizado é proporcional a frequência de atendimento daquele transporte. Assim, se no trecho (y-d), os transportes aquaviário e ferroviário estão no conjunto estratégico do embarcador, de acordo com a Equação (10), o valor de W_y, ou seja, do tempo esperado de espera da carga para ser transportada, pode ser encontrado: $W_y = \frac{1}{\frac{1}{15}+\frac{1}{3}} = 2{,}5\ dias$. Se ao invés de seguir o resultado do modelo, o embarcador decidisse contratar somente um dos modos de transportes existentes no trecho (y-d) de acordo com a frequência apresentada, o tempo de espera esperado seria de 15 dias, se ele resolvesse contratar o modo aquaviário, visto que a frequência de atendimento deste modo é 1/15 e de 3 dias se ele contratasse somente o ferroviário, dado a frequência de atendimento de 1/3 para este modo.

Continuando a análise do resultado do modelo, para o alcance do tempo esperado W_y , a divisão do fluxo pelos caminhos, dada pela Equação (13), se torna: $x_{yd} \leq \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{15}+\frac{1}{3}}, ou\ seja, x_{yd} \leq 0{,}83$, e $x_{y_3d} \leq \frac{\frac{1}{15}}{\frac{1}{15}+\frac{1}{3}}, ou\ seja, x_{y_3d} \leq 0{,}17$. Visto que a Equação (12) indica que todo fluxo que entra no nó é igual ao fluxo que sai daquele nó, é impossível que $x_{yd} < 0{,}83$, pois se isto ocorresse obrigaria que x_{y_3d} fosse maior que 0,17, o que contradiz a restrição $x_{y_3d} \leq 0{,}17$. O mesmo é verdade para $x_{y_3d} < 0{,}17$. Assim, tem-se a divisão de $x_{yd} = 0{,}83$ e $x_{y_3d} = 0{,}17$.

A interpretação do resultado deste modelo mostra que se embarcador optar por contratar os modos presentes em seu conjunto estratégico para escoamento da sua carga, e utiliza-los de acordo com a frequência de atendimento, ele terá um gasto mínimo esperado, resultado da função objetivo do modelo durante o período contemplado.

A grande vantagem deste conceito é que caso algum evento ocorra durante o período planejado, como greves, atrasos dos transportes ou quebras de contratos, o embarcador não será tão prejudicado, pois outros meios já foram contratados juntamente. Além disso, os atrasos tão frequentes em transporte de carga podem ser representados neste modelo, mudando apenas a distribuição de chegada de cada transporte. A seleção estratégica oriunda deste modelo resulta em uma combinação de modos e caminhos que leva a um valor esperado mínimo.

Conclusão

Este trabalho buscou explorar um conceito de um modelo para o transporte de carga multimodal que envolvesse a busca de caminho mínimo sob a visão do embarcador e atendesse às necessidades do mesmo. Foram apresentados os componentes básicos de um modelo de escolha de rotas pelo usuário no transporte público. O conceito de hipercaminho emerge como um elemento central definindo estratégias ótimas para uma viagem entre um par origem-destino. Características comuns deste problema com o problema de seleção de rotas e modos de transporte de carga pelo embarcador foram identificadas, apontando o uso de um modelo baseado no conceito de hipercaminho como instrumento para ajudar a solucionar o problema do embarcador de seleção de caminhos e modais para o escoamento da sua carga. A estas características foram adicionados elementos próprios do transporte de carga, com o custo de estoque e o custo de transferência entre modos. Sem a pretensão de ter esgotado o problema e definido um modelo completo, o trabalho trata de fazer uma exploração inicial da modelagem e propor a comunidade científica interessada no tema, uma reflexão esperando que outros trabalhos venham a explorar esta abordagem. O exemplo apresentado como ilustração mostra como resultado a seleção de um conjunto estratégico de caminhos e modos de transportes para o escoamento da carga com um custo esperado mínimo. O exemplo serve, entretanto, como ponto de partida para o desenvolvimento de uma modelagem mais completa do problema. O problema foi formulado por programação matemática e resolvido com um software apropriado. No entanto, tanto Spiess (1989) como Marcotte e Nguyen (1998) o formulam como um problema de rede e fazem uso de cálculo de caminho mínimo adaptado para a abordagem, no caso hipercaminhos mínimos. Esta abordagem de rede e cálculos diretos na rede, que foi desenvolvida para redes de transporte público pode ser objeto de desenvolvimentos conceituais visando adaptações para o problema de transporte de carga. Outros pontos interessantes para futuras pesquisas são: a modelagem de um problema em grande escala incorporando outros aspectos e a respectiva análise dos resultados; uma avaliação mais detalhada dos ganhos; uma modelagem das distribuições de chegada dos modos de transportes e das cargas, de acordo com a realidade de cada embarcador; e a incorporação de mais aspectos qualitativos ao modelo.

Referências

Aragón, F. R. C. e Leal, J. E. (1998) Redefinição automática da rede de transporte coletivo para alocação de fluxo de equilíbrio. *Transportes*, vol. 6, n. 2, pp. 28-45.

Barros, M. e Lobo, A. (2009) Panorama das ferrovias brasileiras. ILOS- Instituto de Logística e Supply Chain. Texto não publicado. *Disponível em: www.ilos.com.br*.

Bell, M. G. H. (1995) Alternatives to Dial's logit assignment algorithm. *Transportation Research Part B*, vol. 298, n. 4, pp. 287-295.

Bell, M. G. H. (2009) Hyperstar: A multi-path Astar algorithm for risk averse vehicle navigation. *Transportation Research Part B*, vol. 43, pp. 97-107.

Caixeta-Filho, J. V. e Martins, R. S. (2001) *Gestão Logística do Transporte de Cargas*. São Paulo: Editora Atlas.

Cambini, R., Gallo, G. e Scutellà, M. G. (1997) Flows on hypergraphs. *Mathematical Programming*, vol. 78, pp. 195-217.

Campos, V. B. G. (1997) Método de alocação de fluxo no planejamento de transportes em situações de emergência: definição de rotas disjuntas. *Tese (Doutorado em Ciências em Engenharia de Produção) - Universidade Federal do Rio de Janeiro*, Rio de Janeiro.

Cominetti, R. e Correa, J. (2001) Common-lines and passenger assignment in congested transit networks. *Transportation Science,* vol. 35, n. 3, pp. 250-267.

Fleury, P. F. (2002) Gestão estratégica de transportes. ILOS- Instituto de Logística e Supply Chain. Texto não publicado. *Disponível em: www.ilos.com.br*.

Florian, M. e Fox, B. (1976) On the probabilistic origin of Dial’s multipath traffic assignment model. *Transportation Research*, vol. 10, pp. 339-34.

Florian, M. e Hearn, D. (1995) Network equilibrium models and algorithms. *Handbooks in Operations Research and Management Science*, vol. 8, pp. 485-550.

Gallo, G., Longo, G., Nguyen, S. e Pallottino, S. (1993) Directed hypergraphs and applications. *Discrete Applied Mathematics*, vol. 42, pp. 177-201.

Lozano, A. e Storchi, G. (2002) Shortest viable hyperpath in multimodal networks. *Transportation Research Part B*, vol. 36, pp. 853-874.

Marcotte, P. e Nguyen. S. (1998) Hyperpath formulations of traffic assignment problems. *Equilibrium and Advanced Transportation Modelling*. Kluwer Academic Publisher, Assinipi Park, Norwell, MA, pp. 175-199.

Nguyen, S. e Pallottino, S. (1989) Hyperpaths and shortest hyperpaths. *Combinatorial Optimization*. Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, vol. 1403, pp. 258-271.

Potts, R. B. e Oliver, R. M. (1972) Flows in Transportation Networks. *Academic Press*, New York.

Rink, K.A., Rodin, E. Y. e Sundarapandian, V. (2000) A simplification of the Double-Sweep algorithm to solve the k-shortest path problem. *Applied Mathematics Letters*, vol. 13, pp. 77-85.

Spiess, H. (1983) On optimal route choice strategies in transit networks. Universite de Montreal, *Centre de recherche sur les transports*, Publication 286. *Departement d'informatique et de recherche operationnelle*, Publication 466.

Wardrop, J. G. (1952) Some theoretical aspects of road traffic research. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers*, vol. 1, pp. 325-362.

Yen, J.Y. (1971) Finding the K shortest loopless paths in a network. *Management Science*, vol. 17, n. 11, pp. 712-716.