A construção do número: os modelos de Klahr & Wallace; Von Glasersfeld e K. Fuson

Maria da Conceição Rodrigues Ferreira

Resumo

No âmbito dos estudos sobre o pensamento aritmético, a compreensão do desenvolvimento do conceito de número tem sido alvo de controvérsia, desde a interpretação de que a aprendizagem da matemática se dá, principalmente, através da formação de conexões internas, até o estudo dos processos cognitivos subjacentes ao raciocínio aritmético. Assim, a influência da interpretação construtivista da gênese das estruturas lógicas estende-se não só a Von Glasersfeld (1988), que postula que os conceitos abstratos são construídos a partir de experiências do quotidiano, como também à influência que o social exerce na construção dos processos subjacentes ao raciocínio aritmético (Fuson, 1988; Fuson & Burghardt, 2003). Inversamente a essa interpretação, a perspectiva inatista do desenvolvimento (Gelman & Gallistel, 1978; Klahr & Wallace, 1973) propõe que as crianças nascem com princípios lógicos inerentes à construção do conhecimento aritmético elementar.
Palavras-chave: Compreensão de número, matemática, raciocínio.

The number construction: Klahr & Wallace, Von Glasersfeld & K. Fuson models

In studies on arithmetical thinking, the concept of number development has been a subject of scientific controversy, since the interpretation that mathematical learning occurs mainly through the formation of internal connections, up to the study of cognitive processes underlying arithmetical reasoning. In this case, the influence of constructivism on the genesis of logical structures, extends not only to the work of von Glasersfeld (1988), which postulates that abstract concepts are constructed from everyday life experiences, but it also extends to the social influence on the construction of underlying processes of arithmetical reasoning (Fuson, 1988; Fuson & Burghardt, 2003). Opposing this interpretation, the prospect of innate development (Klahr & Wallace, 1973; Gelman & Gallistel, 1978) assumes that children are born with logical principles required to the construction of elementary arithmetical knowledge.
Keywords: Number comprehension, mathematics, reasoning.

La construcción del número: los modelos de Klahr & Wallace; Von Glasersfeld y K. Fuson

Resumen

La comprensión del desarrollo del concepto de número ha sido objeto de controversias en los estudios sobre el pensamiento aritmético y van desde la interpretación de que el aprendizaje de la matemática se da, principalmente, a través de la formación de conexiones internas, hasta el estudio de los procesos cognitivos subyacentes al raciocinio aritmético. De esta manera, la influencia de la interpretación constructivista del génesis de estructuras lógicas se extiende no sólo a Von Glasersfeld (1988), que plantea que los conceptos abstractos son construidos a partir de experiencias del cotidiano, sino también a la influencia que lo social ejerce en la construcción de los procesos subyacentes al raciocinio aritmético (Fuson, 1988; Fuson & Burghardt, 2003). Al contrario, la perspectiva innatista del desarrollo (Klahr & Wallace, 1973; Gelman & Gallistel, 1978) propone que los niños nacen con principios lógicos inherentes a la construcción del conocimiento aritmético elemental.
Palabras clave: Comprensión de número, matemáticas, raciocínio.

Introdução

A construção dos conceitos aritméticos e respectivos processos cognitivos têm merecido a atenção de diversos investigadores, existindo um consenso geral de que o desenvolvimento conceptual dessas primeiras noções deverá abranger a complexa rede de estruturas subjacentes a esse conhecimento (Bermejo & Diaz, 2007; Carraher, Carraher, & Schliemann, 1985; Ferreira, 2003; Fuson & Burghardt, 2003; Morgado, 1993; Piaget & Szeminska, 1941/1975; Worthington, 2007; entre outros).

No entanto, a ideia de que a aprendizagem da matemática deverá ocorrer de forma integrada e significativa tendo em atenção os princípios conceptuais subjacentes aos procedimentos aplicados está presente, em psicologia, desde que Brownell, em 1928, se opôs a Thorndike, que, por sua vez, defendia a tese de que a concepção de aprendizagem implicava o domínio, através de exercícios de repetição, de determinadas associações ou conexões entre um estímulo e uma resposta, em áreas específicas do conhecimento (Resnick & Ford, 1984).

Na continuação da polêmica entre as posições teóricas de Thorndike e de Brownell e com o objetivo de determinar se a aprendizagem da adição de dois números inteiros era mais eficaz através do ensino informal ou formal, Wheeler (1939) desenvolveu estudos empíricos de modo a detectar as dificuldades que as crianças encontravam nessas aprendizagens, tendo verificado que, através da utilização de jogos, as crianças atingiam bons resultados e que a repetição, por si só, do resultado da combinação aditiva entre dois números inteiros tinha uma influência mínima na aprendizagem.

Por outro lado, com o objetivo de definir tendências no desenvolvimento de conceitos de natureza aritmética, Ilg e Ames (1951) realizaram um estudo longitudinal, em situação de avaliação informal e formal, com cinquenta crianças entre um e nove anos de idade que, de seis em seis meses, resolviam diversas tarefas, como, por exemplo, pôr dentro de um copo um determinado número de objetos, contar objetos expostos, contar de memória e adicionar e subtrair quantidades numéricas, tendo verificado que os erros cometidos por essas crianças eram muito específicos, variando em cada faixa etária.

Os mesmos autores observaram, ainda, que as crianças mais velhas dividiam, muitas vezes, o problema em partes mais simples, mas se esqueciam de resolver todas elas. Por exemplo, para adicionar 18 + 5, adicionavam 18 + 3 e esqueciam-se de adicionar, ao resultado obtido, a quantidade 2. Além disso, também observaram que, frequentemente, as crianças, ao invés de subtrair, adicionavam ambas as parcelas. Desse modo, esses autores chamam a nossa atenção para o fato de existirem diferenças qualitativas entre as respostas incorretas que, muitas vezes, as crianças poderão apresentar (Ilg & Ames, 1951).

Assim, a pesquisa em relação ao conhecimento informal que as crianças apresentam em situação de resolução de problemas intensificou-se e, mais recentemente, através de diferentes metodologias, foi possível demonstrar que crianças de dois e três anos de idade apresentam alguma capacidade de resolução de problemas de estrutura aditiva, com somas iguais ou inferiores a cinco (Gallistel & Gelman, 1992; Gelman & Gallistel, 1978; Gelman & Meck, 1983; Gelman & Tucker, 1975; Strauss & Curtis, 1981; Le Corre & Carey, 2007; entre outros).

Consequentemente, os estudos referidos constituem parte integrante da problemática sobre a presença, ou não, de conhecimento conceptual subjacente aos diversos procedimentos utilizados na resolução informal de problemas de estrutura aditiva, estabelecendo-se uma divisão entre dois posicionamentos teóricos. Por um lado, os que defendem que são os princípios subjacentes aos procedimentos (Gelman & Gallistel, 1978; Klahr & Wallace, 1973) que estão na base da aquisição de estruturas aritméticas e, por outro, os que enfatizam que a aprendizagem dessas estruturas ocorre, principalmente, através da abstração reflexiva (Von Glasersfeld, 1983, 1988) e da interação da criança com o social (Fuson, 1988, 1992), numa ampla variedade de situações que favorece o desenvolvimento conceptual e lógico dos princípios subjacentes aos procedimentos de natureza aritmética.

Desse modo, este trabalho tem por objetivo salientar os aspectos da perspectiva construtivista que consideramos pertinentes na construção das primeiras noções aritméticas, e que são os seguintes: 1) o processo de construção do conhecimento aritmético não é obtido de forma cumulativa, mas através da abstração reflexiva (Claparède, 1973; Piaget, 1972b; Von Glasersfeld, 1983); 2) a interação social e a atividade da criança são essenciais no despoletar do conflito cognitivo[1] e sociocognitivo[2], processos fundamentais na aprendizagem da estrutura aditiva (Perret-Clermont, 1979; Piaget, 1974; Morgado, 1988); 3) a autonomia da criança deverá ser incentivada, em sala de aula, através da utilização de material lúdico, na resolução de problemas, que possibilite a descoberta e a invenção de estratégias aritméticas, baseadas na contagem (Kamii & Devries, 1993; Parrat-Dayan

---

1 Segundo Piaget, na base da formação de estruturas necessárias ao progresso da construção do conhecimento, está o conflito cognitivo que resulta de contradições impostas ao pensamento do sujeito. Essas contradições conduzem a uma reorganização interna das estruturas levando à ultrapassagem do conflito (Piaget, 1974).

2 A aprendizagem por conflito sociocognitivo pressupõe, como determinante, a interação social que se estabelece entre os diferentes sujeitos envolvidos na resolução de um dado problema. Assim, *Le principe de base de cette approche est simple: le développement cognitif prend place chez l´enfant lorqu´il participe à des interactions sociales qui ne sont structurantes que dans la mesure où elles suscitent un conflit de réponses entre les partenaires. Deux aspects complémentaires sont alors à retenir: d´une part l´interaction sociale est vue comme structurante, c´est-à-dire comme suscitant une activité cognitive des partenaires aboutissant à la construction - qui peut d´ailleurs être commune; on parle alors de co-élaboration - de nouvelles coordinations caractéristiques du développement cognitif. D´autre part ces nouvelles coordinations supposent préalablement que les individus se soient engagés dans un conflit sociocognitif lors duquel ils auront confronté des réponses hétèrogènes socialement et logiquement incompatibles* (Carugati & Mugny, 1985, p. 61).

& Tryphon, 1998; Piaget, 1948/1972a), em contexto de cooperação entre pares (Piaget, 1965/1995; Ferreira, 2010).

O modelo de Klahr & Wallace

De modo a responder à questão se as estruturas aritméticas são de natureza inata ou se o processo de desenvolvimento do conhecimento numérico se baseia numa construção demorada e complexa, essencialmente de natureza ontogenética, Klahr e Wallace (1973) defenderam que a capacidade para discriminar pequenos números é uma habilidade inata, salientando que a primeira informação, de natureza quantitativa – processamento de pequenas quantidades que podem variar entre um e três e, excepcionalmente, até quatro – a que os seres humanos têm acesso, é processada através de um operador numérico denominado por *subitizing*[3], ao passo que a quantidade dos conjuntos iguais ou maiores que cinco é obtida através do processo de contagem direta.

Assim, para Klahr e Wallace (1973), os operadores quantitativos – *subitizing*, contagem e estimativa – explicam, no seu conjunto, a formação do conceito de número, sendo o tipo de percepção obtido através do primeiro mais simples do que a informação obtida através da contagem e da estimativa.

Por outro lado, no que se refere à estimativa, foi observado que esse operador era aplicado sempre que a quantidade de elementos a determinar, ou o tempo de exposição ao estímulo, não permitia a utilização da contagem (Klahr & Wallace, 1973).

Nessa linha de investigação, Starkey e Cooper (1980) demonstraram que bebês com vinte e duas semanas de vida eram capazes de discriminar, representar e recordar conjuntos com um pequeno número de elementos, o que constituía, para os autores, uma evidência de que o desenvolvimento posterior da contagem verbal tinha os seus precursores num processo de natureza perceptiva.

Também Strauss e Curtis (1981) verificaram que os bebês entre os dez e os doze meses de idade eram capazes de diferenciar entre dois e três elementos, mas incapazes de fazê-lo quando o número variava entre quatro e cinco. Os mesmos autores concluíram, assim, que a contagem verbal é precedida por um esquema de natureza perceptiva.

Por outro lado, Antell e Keating (1983), com o objetivo de verificarem se os bebês diferenciavam, durante a primeira semana de vida, pequenas quantidades de estímulos, utilizaram o procedimento de habituação/desabituação[4].

Os resultados indicaram um efeito da quantidade numérica sobre o tempo de reação do olhar, ou seja, os bebês olhavam mais tempo para a representação de números pequenos do que para a de números maiores, o que foi interpretado, pelos autores, como uma capacidade que aqueles apresentavam de abstrair invariâncias numéricas em conjuntos com um número pequeno de elementos, diferenciando, ainda, entre situações familiares e não familiares. O mesmo já não ocorreu para quantidades numéricas iguais ou superiores a quatro, tendo, os autores, o cuidado de fazer o seguinte comentário: *É importante referir, neste contexto, que a capacidade apresentada pelos bebês para abstrair invariantes numéricas e a capacidade de discriminar novidades, baseadas nessas abstrações, não implica, necessariamente, a compreensão dessas características ou a capacidade de integrar essa informação de uma forma significativa* (Antell & Keating, 1983, p. 699).

Dando continuidade ao estudo dessa problemática e com o objetivo de compreender melhor a percepção que as crianças pequenas apresentam sobre as invariâncias numéricas, Sophian e Adams (1987) observaram as reações que algumas transformações numéricas produziam em crianças entre catorze e vinte e seis meses de idade, demonstrando que elas eram capazes de detectar manipulações em pequenos conjuntos de elementos. Os resultados obtidos mostraram que, com a idade, o desempenho melhorava, se bem que todas as crianças tenham diferenciado bem entre a adição ou a subtração de outro elemento. Além disso, os autores indicaram que as crianças de catorze meses são sensíveis à adição ou à subtração de alguns elementos de conjuntos inicialmente organizados, o que apóia a evidência de que elas possuem um corpo complexo de conhecimento numérico antes da aprendizagem convencional do número.

3 De acordo com Davis & Pérusse (1988), o termo *subitizing* foi proposto por Jevons, em 1871, com o objetivo de designar a capacidade humana manifestada na identificação rápida e precisa do número de elementos num pequeno conjunto; além disso, o mesmo termo foi também usado por Kaufman e cols., em 1949, com o objetivo de referir a apresentação simultânea e repentina de pequenas quantidades de elementos, e novamente aplicado por Stevens, em 1951, tornando-se, assim, parte integrante da terminologia referente ao tema sobre competências numéricas. A definição dessa expressão foi mais tarde apresentada por Von Glasersfeld (1988) como a designação correta e imediata que resulta da percepção de um pequeno conjunto de elementos. Este último autor enfatizou que através do processo de *subitizing* as crianças, antes de dominarem qualquer conceito numérico, são capazes de apreender os primeiros números pequenos (de 1 até 4) como nomes derivados das configurações perceptivas cujo reconhecimento é feito levando em consideração as respectivas características espaçotemporais.

4 O procedimento de habituação implicava na exposição da criança a estímulos de dois a seis pontos, redondos e negros, sobre fundo branco, o que atraía a atenção do bebê, uma vez que era novidade; com a repetição das apresentações, o nível de atenção declinava, já que o bebê adquiria habituação ao estímulo. Se o bebê se sentisse atraído pelo estímulo, após esse ter sido alterado, significava que o procedimento de desabituação tinha ocorrido, induzindo-se, consequentemente, que a criança tinha diferenciado entre as duas quantidades apresentadas. Assim, no estudo de Antell e Keating (1983), durante a fase de habituação, o bebê era exposto, alternadamente, a dois cartões com estímulos contendo o mesmo número de pontos pretos (por exemplo 2) que variavam em comprimento de linha e densidade entre os pontos; logo que as crianças atingiam o critério de habituação, ou seja, duas apresentações consecutivas em que ocorria um decréscimo mínimo de 8 segundos da média do tempo de olhar registrado, apresentava-se o terceiro cartão com diferente número de pontos (por exemplo 3) mantendo a linha dos diversos segmentos de pontos, o mesmo comprimento de um dos dois cartões da fase de habituação, sendo a densidade dos estímulos igual à apresentada, no segundo cartão, da fase de habituação (Antell & Keating,1983).

Por outro lado, Gelman e Tucker (1975) defendem a hipótese de que a contagem verbal é possível dada a existência de modelos pré-verbais que constituem o *subitizing*, hipótese esta confirmada mais tarde por Gallistel e Gelman (1992), que nos dizem o seguinte: *As crianças assimilam a contagem verbal porque ocorre um registro da mesma nas formas inconscientes e pré-verbais desse processo* (p. 65).

No entanto, Gelman e Gallistel (1978) consideram que as crianças aprendem os pequenos números e generalizam esse conhecimento para os números maiores, e que tal fato se relaciona com a capacidade que as crianças apresentam de reconhecer a equivalência numérica entre diferentes conjuntos. Essa capacidade depende de fatores perceptivos capazes de descodificar as semelhanças dentro e entre os conjuntos, bem como de identificar a cardinalidade dos mesmos em termos absolutos. Através de diversos estudos, os mesmos autores verificaram que a contagem, apresentada espontaneamente pela criança, é o comportamento mais frequente na resolução de problemas simples de aritmética, o que os alertou para o papel que esse procedimento deveria exercer no modo como as crianças entre os dois e os quatro anos de idade estruturam as primeiras noções aritméticas.

Assim, através dos estudos apresentados sobre *subitizing*, podemos ver que a contagem de pequenas quantidades numéricas é acessível a crianças de nível pré-linguístico, sendo possível obtermos referências à presença dessa capacidade noutras espécies que não só os seres humanos (Dantzig, 1928/1970).

No entanto, Karmilloff-Smith (1988) chama a nossa atenção para algumas diferenças entre as capacidades numéricas humanas e não humanas, que são as seguintes: 1) a natureza inata dos princípios aplicados às competências numéricas é diferente de espécie para espécie, 2) as diferenças em relação aos aspectos perceptivos do conhecimento podem ser compreendidas, por um lado, em termos da condição físico-química do organismo e, por outro, em termos do conhecimento conceptual subjacente à manipulação de símbolos e 3) os princípios inatos de natureza numérica são os mesmos para humanos e não humanos, mas, no caso dos seres humanos, as representações são *re*-representadas e tornam-se acessíveis a outras partes do sistema cognitivo através do processamento central do raciocínio. Esse terceiro aspecto é considerado, pela autora, fundamental em relação à distinção a fazer entre competências humanas e não humanas no que se refere à organização conceptual numérica.

Assim, e com o objetivo de aprofundar o conhecimento que as crianças muito pequenas têm sobre as quantidades numéricas, Wynn (1992) delineou uma experiência com bebês[5] de modo a verificar, ou não, se eles eram capazes de calcular o resultado preciso de operações simples de aritmética e concluiu que bebês de cinco meses eram, em média, capazes de discriminar entre pequenas quantidades numéricas. A autora interpretou esses resultados como uma demonstração de que as crianças reconhecem, desde bastante cedo, que a adição e a subtração de uma quantidade resultam da transformação de um número inicial de elementos. Em relação à explicação dada, a autora refere que os resultados podem não ter sido obtidos através do cálculo discreto de elemento por elemento, mas através da capacidade que os bebês possuem de medir e operar sobre quantidades contínuas.

Assim, os resultados obtidos por Wynn levantaram questões sobre se a capacidade inicial que os seres humanos apresentam para perceber pequenas transformações numéricas ocorre através de um processo denominado por *subitizing*, de natureza fundamentalmente perceptiva, ou se se trata de competências numéricas de natureza conceptual e que são adquiridas, fundamentalmente, em interação social (Ferreira, 2010; Fuson, 1988; Kamii, 1986; Schubauer-Leoni & Perret-Clermont, 1997; entre outros), através de um duplo ato de abstração (Bideaud, 2001; Piaget & Szeminska, 1941/1975; Von Glasersfeld, 1981; entre outros).

Acerca dessa problemática, Moore e Cocas (2006) salientam que o fenômeno relatado por Wynn (1992) não se trata de competências de natureza matemática apresentadas por bebês, mas, ao invés disso, reflete a preferência dessas crianças por certos estímulos. Assim, esses autores replicaram os estudos de Wynn, tendo obtido resultados idênticos, no entanto, quando aplicaram a análise de variância, o que não ocorreu nos estudos de Wynn, concluíram que os bebês apresentavam, entre si, diferentes desempenhos. Desse modo, quando os bebês tinham, anteriormente ao teste formal, familiaridade com a situação, as meninas correspondiam às predições iniciais de Wynn, o que já não ocorria com os meninos, que tendiam a dar respostas que eram influenciadas pela experiência prévia com os materiais.

Por outro lado, Le Corre e Carey (2007), na continuidade da polêmica sobre a natureza ontogenética da contagem, apresentam o pressuposto de que a mesma é adquirida através do mapeamento dos numerais na lista de contagem cuja representação mental se inicia na infância. Para testar tal pressuposto, os autores pediram a crianças entre os três e os quatro anos de idade que estimassem a quantidade de elementos de um dado conjunto. Os resultados obtidos demonstraram que as quantidades entre 1 e 4 eram representadas antes da aquisição da contagem

5 Os bebês, com idades compreendidas entre quatro meses e dezenove dias e cinco meses e dezasseis dias, eram postos numa sala onde tinham acesso visual a um cenário no qual era colocado um rato Mickey. Seguidamente, a criança observava a adição de outro boneco, exatamente igual ao primeiro, e ambos eram, posteriormente, tapados. Após essa manipulação, removia-se o dispositivo que ocultava a cena e a criança era confrontada com um dos seguintes resultados: ou estavam dois ratinhos (resultado correto) ou um só ratinho (resultado incorreto). Os resultados demonstraram que os bebês passavam mais tempo a olhar para a cena quando estava somente um ratinho - resultado inesperado - do que quando estavam dois ratinhos - resultado esperado. A situação inversa também foi estudada, ou seja, o bebê via inicialmente dois ratinhos e assistia à remoção de um deles, seguidamente a cena era tapada por um dispositivo próprio. O bebê era então confrontado com um só ratinho (resultado correto) ou com dois ratinhos (resultado incorreto). Também neste estudo os bebês olhavam durante mais tempo para o resultado inesperado ou incorreto do que para o resultado esperado ou correto (Wynn, 1992).

através de mecanismos tais como a representação paralela e a quantificação. As quantidades maiores que 4 eram representadas analogicamente, aproximadamente 6 meses após a aquisição dos princípios de contagem (Gelman & Gallistel, 1978)[6].

Perante tal complexidade, salientamos que a indagação sobre o papel do *subitizing* no desenvolvimento da contagem, ou vice-versa, é um tema para o qual as respostas ainda não são conclusivas, deixando-nos a certeza de se tratar de um tópico de investigação bastante complexo, uma vez que a interação dos dois processos é um fator a considerar, o que, dada a especificidade e provável relacionamento entre ambos os procedimentos, dificulta a completa compreensão do processo quando este é considerado não só na sua globalidade, como também na sua especificidade.

Seguidamente, apresentaremos o modelo de Von Glasersfeld, que, na continuidade dos trabalhos de Piaget e Szeminska (1941/1975), postula o mecanismo de abstração reflexiva como o fator fundamental no desenvolvimento do conceito de número.

O modelo de Ernst Von Glasersfeld

Von Glasersfeld (1983), em oposição aos autores que se baseiam no *subitizing* para explicitar o desenvolvimento da noção de número e na continuidade dos estudos promovidos inicialmente por Piaget e Szeminska (1941/1975) sobre o mecanismo de abstração reflexiva como um fator fundamental na construção das quantidades numéricas, levanta três problemáticas: 1) como definir uma unidade numérica ou, por outras palavras, como definir o que é passível de ser contado; 2) como é que a natureza intrínseca ao conceito de unidade numérica se transforma ao longo do desenvolvimento cognitivo do ser humano e 3) como é que as denominações de natureza numérica são aprendidas independentemente da contagem.

Em decorrência, Von Glasersfeld (1983) refere que a noção de unidade emerge como resultado de um ou mais atos de natureza mental. Desse modo, diz-nos que a unidade numérica é a consequência da seleção e da separação de elementos que resultam do fluxo de experiências do ser humano e que caracterizam os objetos com os quais o indivíduo manteve contato direto.

6 Em relação à representação das quantidades numéricas, Gelman e Gallistel (1978) defendem o ponto de vista de que a contagem é fundamentada em princípios e que, no decurso do desenvolvimento cognitivo, as crianças necessitam coordenar a aplicação de todos eles para que esse procedimento ocorra de forma correta. De acordo com os resultados dos estudos empíricos efetuados pelos autores, foram isolados cinco princípios: os três primeiros - o princípio de correspondência termo a termo, o princípio de estabilidade da contagem e o princípio cardinal - relacionam-se com as regras do procedimento da contagem (*how-to-count principles*); o quarto princípio - o princípio de abstração - define a possibilidade de aplicação da contagem a coleções particulares, ou, por outras palavras, define o que é passível de ser contado, relacionando-se, o último princípio, com a irrelevância na ordem de contagem.

Com o avançar do desenvolvimento cognitivo, as unidades numéricas que estão envolvidas na contagem tornam-se progressivamente mais abstratas, sendo a abstração reflexiva o mecanismo explicativo para tal desenvolvimento. Assim, a noção de unidade, utilizada durante o processo de contagem, define o ato de enumeração, que implica, necessariamente, a compreensão conceptual desse mesmo conhecimento.

Logo, de acordo com a definição de contagem de Von Glasersfeld, ocorrem três atividades nessa construção, a saber: 1) a capacidade de produzir a sequência padronizada de numerais numa ordem fixa, a qual, num primeiro momento, é vocal e mais tarde subvocal, tornando-se cada vez mais completa; 2) a capacidade para produzir uma pluralidade de unidades que poderão ser contadas, a qual funciona como um princípio organizador, ou seja, no ato de contagem as crianças necessitam ser capazes de focalizar o seu nível de atenção em entidades discretas e 3) a coordenação entre a produção de uma lista convencional de numerais e a produção de uma pluralidade de unidades a serem contadas, em correspondência termo a termo (Von Glasersfeld, Steffe, Richards, & Thompson, 1983).

Consequentemente, para Von Glasersfeld e cols. (1983), a contagem das unidades numéricas constitui uma atividade complexa onde os fatores perceptivos e motores desempenham funções relevantes. Posteriormente, são construídas unidades abstratas que resultam de atos de reflexão e de síntese que advêm do conjunto de experiências vivenciadas pelo sujeito. Desse modo, o desenvolvimento das unidades numéricas envolvidas na contagem – associação de um numeral com uma entidade específica – torna-se um processo cada vez mais abstrato, em conformidade com a seguinte sequência:

1) unidades perceptivas – formadas por padrões de "atenção fixa" que fazem parte do vasto campo de experiências sensoriais conectadas com elementos concretos ou fenômenos do mundo real;

2) unidades figurais – nesse caso a criança visualiza o objeto na ausência do mesmo, ou seja, o objeto é representado;

3) unidades motoras – os atos motores, associados às unidades de contagem perceptivas e/ou figurais, tornam-se substitutos destas;

4) unidades verbais – os numerais, associados aos atos de contagem, substituem as coisas a contar e

5) unidades abstratas – através de um numeral qualquer, toda a coleção de elementos unitários fica englobada, ou seja, as unidades numéricas tornam-se atos mentais.

Ainda, no que se refere ao processo de desenvolvimento do ato de contar, Von Glasersfeld (1981) refere que a sequência numérica é, inicialmente, memorizada como se se tratasse de uma canção, sendo o ritmo de verbalização da mesma um fator importante e que tem consequências em relação aos erros de contagem, se não for devidamente coordenada com o ato de apontar ou com os relances visuais sobre os objetos de que se pretende saber a quantidade total.

Além disso, para o mesmo autor, as primeiras percepções que o bebê tem, através do processo de *subitizing*, estão associadas ao som de palavras e à imagem dos objetos físicos que lhes correspondem (Von Glasersfeld, 1981).

Essas primeiras percepções globais, de natureza sensório-motora, são consideradas noções protonuméricas, a partir das quais evoluem as noções verdadeiramente numéricas, ocorrendo então, e numa primeira fase, uma transcrição da contagem repetida de objetos concretos, e/ou de objetos imaginados, para as primeiras noções numéricas, através da correspondência entre o conceito, o numeral, o som e/ou a imagem (Morgado, 1988).

Desse modo, as crianças de dois anos, ao recitarem os primeiros três numerais, não estão propriamente a contar, uma vez que não possuem ainda o conceito de pluralidade. Para essas crianças, as várias denominações numéricas são uma sucessão heterogênea de itens sensório-motores, todos independentes entre si. A formação do conceito de pluralidade introduzirá o início da concepção numérica, uma vez que a criança passará a lidar com a noção de equivalência entre classes (classificação), isto é, compreenderá que, do ponto de vista lógico, os elementos de uma dada coleção mantêm algo de semelhante entre si (igualdade) e essa consciência originará a noção de pluralidade (Von Glasersfeld & Richards, 1983).

Em suma, o conceito de número foi definido como uma criação conceptual resultante de um duplo ato de abstração desde as atividades sensório-motoras construídas pela criança através da ação – abstração empírica – até a emergência de padrões comuns que, por abstração reflexiva, são isolados e originam a noção de unidade (Von Glasersfeld e cols., 1983).

Além disso, outro aspecto fundamental na compreensão da construção do número relaciona-se com a passagem da noção de pluralidade – de natureza sensório-motora – à noção de unidade aritmética – de natureza abstrata e obtida por abstração reflexiva – e, posteriormente à noção de número. Assim, todas as experiências do indivíduo processadas através de padrões de atenção focalizada são, por sua vez, re-processadas numa nova organização sequencial de impulsos focalizados e não focalizados que dão origem a unidades de natureza aritmética através de mecanismos semelhantes, em termos piagetianos, à abstração empírica e reflexiva (Von Glasersfeld e cols., 1983).

Por outro lado, e de modo a evoluir para as noções de quantidade e de número, a noção de unidade aritmética deverá, através da iteração atencional e rítmica, ser aplicada a coleções finitas e infinitas de objetos (Von Glasersfeld & Richards, 1983).

Em suma, o conceito de unidade evolui, através da abstração reflexiva, de uma fase em que é parte integrante da experiência sensório-motora da criança para outra em que passa a ser interpretado de um ponto de vista abstrato e, desse modo, passa a poder ser aplicado a operações mais sofisticadas como a adição e/ou a subtração de números inteiros.

Seguidamente, e na continuidade do modelo de construção do número de J. Piaget e Szeminska (1941/1975) e do modelo de contagem de Von Glasersfeld e cols. (1983), apresentaremos o modelo de K. Fuson (1988), para quem a contagem e a resolução de problemas aritméticos, em contexto social, constituem os principais aspectos a serem tomados em consideração na construção do conceito de número.

O modelo de K. Fuson

O modelo de contagem apresentado por Fuson (Fuson, 1988; Fuson, Richards, & Briars, 1982; Fuson e Hall, 1983) prevê que os princípios subjacentes à contagem são progressivamente abstraídos a partir dos contactos que as crianças mantêm com adultos ou outras crianças em contextos culturais de natureza diversificada.

Os trabalhos de investigação desenvolvidos por Fuson revelam, de modo geral, que a habilidade para enunciar corretamente a sequência de denominações numéricas deve-se, em parte, às oportunidades com que as crianças se deparam para aprender e praticar essa sequência, sendo bastante importante a presença de influências sociais, como programas específicos de televisão, o contato com outras crianças, experiências conjuntas com adultos e/ou educadores, entre outros.

Assim, Fuson (1988) postula que as crianças entre os dois e os oito anos de idade utilizam as denominações verbais em contextos progressivamente mais complexos, sendo três deles de natureza matemática: 1) o contexto cardinal – a denominação numérica refere-se à totalidade de um conjunto de entidades discretas e indica a quantidade de elementos que constitui esse conjunto; 2) o contexto ordinal – a denominação numérica faz referência a um dos elemento da coleção e descreve a sua posição em relação aos outros, que se encontram ordenados e 3) o contexto de medida – o numeral utilizado refere-se a uma quantidade contínua e indica quantas unidades lhe correspondem.

Fuson (1988) refere ainda os contextos de sequência e de contagem, e classifica-os como de natureza cultural e que garantem, à criança, a utilização apropriada dos numerais. Assim, o primeiro corresponde à leitura dos numerais, isto é, a criança reconhece o símbolo escrito de um dado numeral e depois passa a emitir a correspondente designação verbal. Mais tarde, esses numerais escritos são imbuídos do significado cardinal, mesmo em situações consideradas não numéricas, passando as crianças a serem capazes de utilizar as várias denominações numéricas em diversas situações do quotidiano.

Fuson (1991) considera, ainda, que as crianças, quando iniciam a instrução formal da aprendizagem numérica, não dominam, completamente, a utilização do número em todos os contextos, embora apresentem, sobre ele, um conhecimento significativo, como, por exemplo, enunciar a sequência de numerais sem contar qualquer objeto, estabelecer a correspondência entre estes e uma dada série de objetos e usar o último numeral para indicar a quantidade de elementos contados.

Para Fuson, a contagem é uma atividade complexa na qual a criança terá que produzir, numa ordem específica, uma sequência de numerais culturalmente aceites. Além disso, deverá isolar, de todos os outros, o objeto que deseja contar e produzir uma sequência correta entre os atos de apontar e as denominações numéricas – dimensão temporal – e elaborar a correspondência correta entre o gesto de apontar e o objeto que pretende contar – dimensão espacial – e, finalmente, usar estratégias que facilitem a atribuição da sequencialidade aos objetos que se propõe contar. Além disso, para que o processo de contagem tenha um resultado, é necessário que a criança se lembre da sequencialidade de todos os numerais, sendo a última palavra emitida a que determina a cardinalidade do conjunto, o que não ocorre de forma imediata.

Em relação ao processo de aquisição dos numerais bem como das diferenças qualitativas nas representações mentais que as crianças vão elaborando sobre os mesmos – que começa, em média, por volta dos três anos e meio de idade e obedece a uma certa regularidade no que diz respeito às noções de ordem e de cardinalidade –, os resultados mostraram que o processo de integração entre a sequência dos numerais, a contagem e o seu significado é bastante complexo. Assim, Fuson (1988) refere a existência de cinco níveis de desenvolvimento na elaboração da sequência de numerais.

No primeiro nível, designado nível de cordão (*string level*), os numerais são emitidos como uma globalidade, não sendo considerados como verdadeiros instrumentos de raciocínio, uma vez que não são compreendidos como distintos uns dos outros, pelo que não pode ser atribuída intencionalidade à correspondência termo a termo.

No segundo nível, denominado nível da cadeia inquebrável (*unbreakable chain*), a criança refere, separadamente, cada um dos numerais, sendo capaz de contar no sentido ascendente a partir da primeira unidade. Desse modo, consegue realizar operações simples de adição e de subtração, o que representa a conversão dos numerais em instrumentos de pensamento.

No terceiro nível, designado cadeia quebrável (*breakable chain*), a criança pode produzir partes da sequência de numerais a partir de um numeral qualquer. Assim, a criança poderá contar para a frente, a partir de um numeral específico, e também é capaz de contar para trás, a partir de um dado ponto.

Em quarto lugar, surge o nível da cadeia numerável (*numerable chain*), isto é, os numerais tornam-se verdadeiras unidades matemáticas. Nesse nível, a contagem, a cardinalidade e a ordem estão ainda mais interligadas. Assim, o conjunto dos numerais pode representar situações específicas e ser manipulado através de operações aritméticas, tais como a adição e a subtração. As estratégias aritméticas aplicadas são cada vez mais eficazes e consistentes.

Por último, foi observado o nível de cadeia bidirecional (*bidirectional chain*), ou seja, os numerais podem ser produzidos de maneira flexível tanto no sentido ascendente quanto descendente. Nesse nível, as crianças dispensam a presença de objetos, uma vez que o valor cardinal passa a substituí-los. Consequentemente, podem relacionar conjuntos de numerais, uma vez que possuem a capacidade de estabelecer a equivalência cardinal e o sistema de relações ordinais.

Verificamos, assim, que o modelo de desenvolvimento de contagem apresentado por K. Fuson indica que as crianças por volta dos quatro anos de idade contam objetos ordenados do início para o fim da série, mas raramente o fazem no sentido contrário.

Por outro lado, o modelo também sugere que a tarefa de enumerar um conjunto de elementos é considerada bastante complexa, sendo que entre os cinco e os seis anos de idade os dois aspectos da contagem e a respectiva coordenação, isto é, proferir uma denominação numérica específica e apontar o objeto correspondente, deverão ter já ocorrido. A internalização desse processo continua, nos anos seguintes, para números maiores, sendo facilitada pela frequência da contagem, que, segundo o modelo proposto, deveria ser encorajada, principalmente, pelos professores em situações significativas de aprendizagem.

Desse modo, podemos constatar que, dos dois aos oito anos de idade, as crianças constroem relações cada vez mais complexas de natureza matemática e adquirem um conhecimento considerável acerca da especificidade de certas situações que influencia a utilização de designações numéricas para quantidades cada vez maiores. Também se observa a ocorrência de importantes transformações na conceptualização da interligação entre a ordem, a contagem e o valor cardinal, que se traduz pela aplicabilidade de conceitos cada vez mais complexos e abstratos.

Em suma, verificamos que, para K. Fuson, a contagem tem um papel fundamental no desenvolvimento conceptual das noções numéricas e consequente compreensão de problemas de estrutura aditiva. Considerando que esses aspectos são estruturantes no desenvolvimento do conceito de número, a autora destaca a interação social como um fator preponderante a considerar nessas aquisições.

Considerações finais

Tendo como referência os estudos apresentados, podemos concluir que na construção dos primeiros conceitos numéricos se destaca o processo de contagem, cujo domínio da inter-relação entre as noções de cardinalidade e a de ordem fica completo por volta dos oito anos de idade (Fuson, 1988, 1992; Fuson & Briars, 1990; Fuson & Hall, 1983; Fuson & Kwon, 1992; Von Glasersfeld, 1983, 1988).

Essa posição é contrária à hipótese defendida por Klahr e Wallace (1973) e Gelman e Gallistel (1978), que atribuem às crianças a posse de estruturas elementares inatas, que lhes permite desenvolver, desde bastante cedo, as primeiras noções numéricas elementares.

No entanto, de acordo com Carruthers e Worthington (2005), subsistem dúvidas quanto ao melhor momento e método(s) a utilizar com o objetivo de desenvolver a aquisição do sistema numérico em crianças de cinco e seis anos de idade, especificamente no que se refere à utilização de símbolos numéricos e à introdução de expressões algorítmicas tais como '7+3=10', problema que já se arrasta desde que Stone (1913) referiu que a aritmética tem um valor prático e cultural, critério esse que deveria fundamentar, segundo esse autor, os métodos de ensino da aritmética.

De fato, o envolvimento social da criança com os seus companheiros na resolução de problemas através de jogos (Ferreira, 2003; Fonseca, 2010; Morgado, 1988, 1993) afigura-se como um procedimento eficaz, uma vez que, através de uma coordenação das relações presentes nos mesmos, a criança efetua a síntese da equivalência real com as variações aparentes (Piaget & Szeminska, 1941/1975).

Desse modo, a criança progride não só em relação ao desenvolvimento da inteligência lógica, como também no que se refere ao desenvolvimento da capacidade de relacionamento interpessoal, transformando o egocentrismo infantil em descentração do pensamento[7], característica fundamental do processo de cooperação[8] entre pares.

Outro aspecto do desenvolvimento do conceito de número diz respeito à influência dos conflitos cognitivo e sociocognitivo, havendo evidências de que a criança entre os cinco e os seis anos de idade, ao integrar ativamente uma díade no processo de resolução de problemas e de se gerar, quando em dissonância com o par, uma rede complexa de argumentações e de contra-argumentações[9], constrói estruturas de pensamento bastante elaboradas, de que resulta uma maior capacidade de abstração e, consequentemente, de generalização de estratégias de resolução de problemas de estrutura aditiva (Ferreira, 2003).

Assim, defendemos que as metodologias de natureza predominantemente construtivista, nas quais o professor tem, essencialmente, o papel de orientador e de facilitador da aprendizagem, parecem ser bastante adequadas, por proporcionarem o desenvolvimento da abstração reflexiva e não a aplicação mecânica dos conhecimentos, e por permitirem, em situação de interação social, a explicitação verbal e a justificação lógica das estratégias aritméticas utilizadas no processo de resolução de problemas de estrutura aditiva e, consequentemente, o desenvolvimento de competências de argumentação *versus* contra-argumentação lógicas, que deverão caracterizar o diálogo entre pares[10], inerente à construção das relações conceptuais em causa.

Desse modo, chamamos a atenção para a necessidade de criação, por parte dos professores, de condições de ensino/aprendizagem que, ao privilegiarem a interação entre pares (Piaget, 1969/1979) no desenvolvimento do conceito de número, não deixem de prestar o devido apoio individual à criança (Bidarra & Festas, 2005; Tilton, 1947) que, por razões desenvolvimentais, culturais ou outras, possam confrontar-se com dificuldades específicas, o que não significa, necessariamente, a permanência num determinado nível de desenvolvimento conceptual (Ferreira, 2003; Machado, 2010).

Os professores afiguram-se-nos como um elemento chave do processo de ensino/aprendizagem da aritmética inicial, sendo para isso necessário que dominem, do ponto de vista conceptual, os vários modelos subjacentes ao desenvolvimento do conceito de número, de modo a poderem diagnosticar não só as estratégias que as crianças utilizam para resolverem os problemas de estrutura aditiva (Ferreira, 2003), como desenvolverem competências de prevenção do insucesso escolar nesse domínio.

Assim, para que a eficácia do professor ocorra, deverão conhecer o padrão evolutivo das primeiras estruturas aritméticas na criança (Bermejo & Diaz, 2007), o que pode contribuir não só para a construção de novas relações de natureza lógico-matemática, como para o desenvolvimento da autonomia e da independência intelectual[11] logo desde os primeiros contactos com a aprendizagem das estruturas subjacentes à construção do conceito de número.

Para isso, pensamos que o diálogo entre pares em situação de resolução de problemas de estrutura aditiva deveria ser investigado, em estudos futuros, de modo a podermos compreender como é que o uso da palavra contribui para a organização do pensamento da criança logo desde os cinco anos de idade e, desse modo, podermos desenvolver modelos de compreensão do conceito de número mais alargados, em que a vertente narrativa[12] fosse considerada como um dos processos explicativos desse fenômeno.

---

7 De acordo com Montangero, J. e Maurice-Naville, D. (1997, p. 93), *Decentering consists of inverting the direction of assimilation and of foregoing privileged points of view in order to construct, by virtue of this very conversion, a double system that is at the same time objective and logic*. (*La pensée physique, 1950, p. 112*).

8 De acordo com Montangero, J. e Maurice-Naville, D. (1997, p. 80), *Let us call cooperation all relations between two or more individuals who are equals, or at least believe themselves to be so, that is to say, all social relations in which no element of authority or prestige is involved. (Sociological studies, 1995, p. 200)*.

9 De acordo com Charaudeau e Maingueneau (2002), *L'argumentation est au cœur de la conception ancienne de la rhétorique (p. 66). Si l'on définit l'argumentation comme une tentative pour modifier les représentations de l'interlocuteur, il est claire que toute information joue ce rôle et qu'elle peut être dite argumentative en ce sens (Benveniste 1966 :242). Tout énoncé, toute succession cohérente d'énoncés (descriptive, narrative) construit un point de vue ou «schématisation», dont l'étude constitue l'objet de la logique naturelle (p. 67).*

10 De acordo com Charaudeau e Maingueneau (2002), *Du grec diálogos, «entretien, discussion», le terme dialogue signifie proprement «entretien entre deux ou plusiers personnes».*

11 Piaget (1935, 1939) defende que a finalidade da educação é a construção de sujeitos autônomos de um ponto de vista social, cognitivo e moral. Também Kamii e Devries (1991) referem que as crianças devem ser encorajadas no uso da sua própria iniciativa com o objetivo de satisfazerem a sua curiosidade e terem confiança na capacidade de desenvolverem ideias próprias sobre as coisas e exprimi-las com convicção.

12 De acordo com Ferreira-Alves e Gonçalves (2001), *A escola da pós-modernidade deverá por isso estar mais centrada nos processos do que nos resultados ou nos conteúdos. O que está verdadeiramente em causa num ensino que responda e se adéque a um mundo pós-moderno é a importância dos processos, dos diálogos e, por isso, um*

Referências

Antell, S. E., & Keating, D. P. (1983). Perception of numerical invariance in neonates *Child Development, 54*, 695-701.

Bermejo, V., & Díaz, J. J. (2007). The degree of abstraction in solving problems of addition and subtraction *The Spanish Journal of Psychology, 10* (2), 1-9.

Bidarra, M. G., & Festas, M. I. (2005). Construtivismo(s): implicações e interpretações educativas. *Revista Portuguesa de Pedagogia, 39*(2), 177-195.

Bideaud, J. (2001). Constructivismes, développement cognitif et apprentissages numériques. Em J-J. Ducret (Org.), *Actas do Colóquio Constructivismes: Usages et perspectives en éducation* (Vol. 1, pp. 53-63). Genéve: Service de la Recherche en Éducation. SPRED.

Carraher, T. N., Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (1985). Mathematics in the streets and in schools. *British Journal of Developmental Psychology, 3*, 21-29.

Carruthers, E., & Worthington, M. (2005). Making sense of mathematical graphics: the development of understanding abstract symbolism. *European Early Childhood Research Journal, 13*(1), 57-79.

Carugati, F., & Mugny, G. (1985). La théorie du conflit sociocognitif. Em G. Mugny (Ed.), *Psychologie sociale du développement cognitif* (pp. 57-70). Berne: Editions Peter Lang.

Charaudeau, P., & Maingueneau, D. (2002). *Dictionnaire d'analyse du discours*. Paris: Éditions du Seuil.

Claparède, E. (1973). *L'éducation fonctionnelle*. Genéve: Delachaux & Niestlé.

Dantzig, T. (1970). *Número: a linguagem da ciência* (S. G. de Paula, Trad.). Rio de Janeiro: Zahar Editores. (Trabalho original publicado em 1928)

Davis, H., & Pérusse, R. (1988). Numerical competence in animals: definitional issues, current evidence, and a new research agenda. *Behavioral and Brain Sciences, 11*, 561-615.

Ferreira, M. C. R. (2003). *Análise das estratégias de resolução de problemas de estrutura aditiva em crianças de 5/6 anos de idade*. Tese de Doutorado, Faculdade de Psicologia e de Ciências da Educação da Universidade de Coimbra, Coimbra.

Ferreira, M. C. R. (2010). Resolução de problemas de estrutura aditiva em crianças de 5/6 anos de idade. *Psychologica, 52*(1), 395-416.

Ferreira-Alves, J., & Gonçalves, O. F. (2001). *Educação narrativa do professor*. Coimbra: Quarteto Editora.

Fonseca, R. F. (2010). *A complementaridade entre os aspectos intencional e extencional na conceituação de número real proposta por John Horton Conway*. Tese de Doutorado, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

Fuson, K. C. (1988). *Children's counting and concepts of number*. New York: Springer-Verlag.

Fuson, K. C. (1991). Relations entre comptage et cardinalité chez les enfants de 2 à 8 ans. Em J. Bideaud, C. Meljac & J.P. Fischer (Orgs.), *Les chemins du nombre* (pp. 159-179). Lille: P.U.L.

Fuson, K. C. (1992). Research on whole number addition and subtraction. Em D.A. Grouws (Orgs.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 243-275). New York: Simon & Schuster Macmillan.

Fuson, K. C., & Briars, D. J. (1990). Using a base-ten blocks learning / teaching approach for first and second-grade place-value and multidigit addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*, 180-206.

Fuson, K. C., & Burghardt, B. H. (2003). Multidigit addition and subtraction methods invented in small groups and teacher support of problem solving and reflection. Em A. J. Baroody & A. Dowker (Orgs.), *The development of arithmetic concepts and skills: Constructing adaptative expertise. Studies in mathematical thinking and learning* (pp. 267-304). Mahwah, New Jersey: Erlbaum.

Fuson, K. C., & Hall, J. W. (1983). The acquisition of early number word meanings: A conceptual analysis and review. Em H. P. Ginsburg (Org.), *The development of mathematical thinking* (pp 49-107). Orlando, Florida: Academic Press, Inc.

Fuson, K. C., & Kwon, Y. (1992). Korean children's single-digit addition and subtraction: Numbers structured by ten. *Journal for Research in Mathematics Education, 23*, 148-165.

Fuson, K. C., Richards, J., & Briars, D. J. (1982). The acquisition and elaboration of the number word sequence. Em C. J. Brainerd's (Org.), *Children's logical and mathematical cognition: Progress in cognitive developmental research* (pp. 33-92). New York: Springer Verlag.

Gallistel, C. R., & Gelman, R. (1992). Preverbal and verbal counting and computation. *Cognition, 44*, 43-74.

Gelman, R., & Gallistel, C. R. (1978). *The child's understanding of number*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Gelman, R., & Meck, E. (1983). Preschooler's counting: Principles

alargamento tão vasto quanto possível dos tradicionais «métodos» de avaliação, no sentido de dar conta dos movimentos de evolução/ transformação pessoais e no sentido, também de contextualizar os próprios processos de aquisição do saber (pp. 63-64).

before skill. *Cognition, 13*, 343-359.

Gelman, R., & Tucker, M. F. (1975). Further investigations of the young child's conception of number. *Child Development, 46*, 167-175.

Ilg, F., & Ames, L. B. (1951). Developmental trends in arithmetic. *The Journal of Genetic Psychology, 79*, 3-28.

Kamii, C. (1986). *Number in preeschool & kindergarten.* Washington: The National Association for the Education of Young Children.

Kamii, C., & Devries, R. (1993). *Physical knowledge in preschool education. Implications of Piaget's theory*. New York: Teachers College Press.

Karmilloff-Smith, A. (1988). Human versus nohuman abilities: Is there a difference which really counts? *Behavioral and Brain Sciences, 11*, 589-590.

Klahr, D., & Wallace, J. (1973). The role of quantification operators in the development of conservation of quantity. *Cognitive Psychology, 4*, 301-327.

Le Corre, M., & Carey, S. (2007). One, two, three, four, nothing more: An investigation of the conceptual sources of the verbal counting principles*. Cognition, 105*(Issue 2), 395-438.

Machado, M. S. (2010). *Estratégias pedagógicas para uso de tecnologia de informação e comunicação: uma abordagem para a construção do conhecimento em operações aritméticas básicas nas chamadas "regras de sinais"*. Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

Montangero, J., & Maurice-Naville, D. (1997). *Piaget or the advance of knowledge*. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Moore, D. S., & Cocas, L. A. (2006). Perception precedes computation: can familiarity preferences explain apparent calculation by human babies? *Developmental Psychology, 42*(4), 666-678.

Morgado, L. (1988). *Aprendizagem operatória da conservação das quantidades numéricas*. Coimbra: INIC.

Morgado, L. (1993). *O ensino da aritmética. Perspectiva construtivista.* Coimbra: Livraria Almedina.

Parrat-Dayan, S., & Tryphon, A. (1998). Introduction. Em S. Parrat-Dayan & A. Tryphon (Eds.), *De la pédagogie* (pp. 7-24). Paris : Éditions Odile Jacob.

Perret-Clermont, A-M. (1979). *La construction de l'intelligence dans l'interaction sociale*. Berne: Editions Peter Lang.

Piaget, J. (1972a). *Où va l'education*. Paris : Ed. Gontier. (Trabalho original publicado em 1948)

Piaget, J. (1972b). The concept of structure. Em Mouton/Unesco (Org.), *Scientific thought: Some underlying concepts, methods and procedures* (pp 35-56). Paris: Mouton/Unesco.

Piaget, J. (1974). *La prise de conscience*. Paris: Presses Universitaires de France.

Piaget, J. (1979). *Psychologie et pédagogie*. Paris: Ed. Gonthier. (Trabalho original publicado em 1969)

Piaget, J. (1995). *Sociological studies*. (T. Brown e cols., Trad.). London: Routledge & Kegan Paul. (Trabalho original publicado em 1965)

Piaget, J., & Szeminska, A. (1975). *A gênese do número na criança* (C. M. Oiticica, Trad.). Rio de Janeiro: Zahar Editores. (Trabalho original publicado em 1941)

Resnick, L. B., & Ford, W. W. (1984). *The psychology of mathematics for instruction*. London: Lawrence Erlbaum Associates.

Schubauer-Leoni, M. L., & Perret-Clermont, A. (1997). Social interactions and mathematics learning. Em T. Nunes & P. Bryant (Eds.), *Learning and teaching mathematics* (pp. 265-283). Hove: Psychology Press.

Sophian C., & Adams, N. (1987). Infant's understanding of numerical transformation. *British Journal of Developmental Psychology, 5*, 257-264.

Starkey, P., & Cooper, R. G. (1980). Perception of numbers by human infants. Science, 210, 1033-1034.

Stone, C. W. (1913). Problems in the scientific study of the teaching of arithmetic. *Journal of Educational Psychology, 4*(1), 1-16.

Strauss, M. S., & Curtis, L. E. (1981). Infant perception of numerosity. *Child Development, 52*, 1146-1152.

Tilton, J. W. (1947). Individualized and meaningful instruction in arithmetic. *Journal of Educational Psychology, 38*(Issue 2), 83-88.

Von Glasersfeld, E. (1981). An attentional model for the conceptual construction of units and number. *Journal for Research in Mathematics Education, 12*, 83-94.

Von Glasersfeld, E. (1983). An attentional model for the conceptual construction of units and number. Em L. P. Steffe, E. Von Glasersfeld, J. Richards & P. Cobb (Eds.), *Children's counting types: Philosophy, theory, and application* (pp. 124-144). New York: Praeger Publishers.

Von Glasersfeld, E. (1988). Difficulties of demonstrating the possession of concepts. *Behavioral and Brain Sciences, 11*, 601-615.

Von Glasersfeld, E., & Richards, L. P. (1983). The creation of units as a prerequisite for number: A philosophical review. Em L. P.

Steffe, E. Von Glasersfeld, J. Richards & P. Cobb (Eds.), *Children's counting types: Philosophy, theory, and application* (pp. 1-20). New York: Praeger Publishers.

Von Glasersfeld, E., Steffe, L.P., Richards, J., & Thompson, P. (1983). An analysis of counting and what is counted. Em L. P. Steffe, E. Von Glasersfeld, J. Richards & P. Cobb (Orgs.), *Children's counting types: Philosophy, theory, and application* (pp. 21-44). New York: Praeger Publishers.

Wheeler, L. R. (1939). A comparative study of the difficulty of the 100 addition combinations. *The Journal of Genetic Psychology, 54*, 295-312.

Worthington, M. (2007). *Exceptional children: researching the young child's mathematics*. Maths coordinator's file, 25, Mathematics Association.

Wynn, K. (1992). Addition and subtraction by human infants. *Nature, 358*, 749-750.

Recebido em: 14/03/2011
Reformulado em: 21/05/2012
Aprovado em: 14/06/2012

Sobre a autora

Maria da Conceição Rodrigues Ferreira (ferreira@por.ulusiada.pt)
Universidade Lusíada do Porto, Professora Auxiliar da Universidade Lusíada do Porto (Porto), Docente nos seguintes cursos: Licenciatura em Psicologia, Mestrado Integrado em Psicologia da Educação e Mestrado Integrado em Educação Especial. Endereço: Urb. do Loreto, Lote 3 – 7º. B, Edifício Mondego, Coimbra, Portugal.