RESTRINGINDO FLEXIBILIDADE DE PESOS EM DEA UTILIZANDO ANÁLISE DE REGRESSÃO MSEA

Antonio Allen Meireles Alcântara *
Programa de Engenharia de Produção – COPPE
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Rio de Janeiro – RJ
allen@br-petrobras.com.br

Annibal Parracho Sant'Anna
Departamento de Engenharia de Produção
Universidade Federal Fluminense
Niterói – RJ
aparracho@uol.com.br

Marcos Pereira Estellita Lins
Programa de Engenharia de Produção – COPPE
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Rio de Janeiro – RJ
estellit@iis.com.br

* *Corresponding author* / autor para quem as correspondências devem ser encaminhadas

Recebido em 11/2002, aceito em 06/2003 após 1 revisão

Resumo

Este artigo apresenta um procedimento baseado no uso de regressão de mínima soma dos valores absolutos dos resíduos (**MSAE**) para o tratamento dos pesos dos fatores na Análise de Envoltória de Dados (**DEA**). É desenvolvido um método alternativo para limitar a faixa em que se permite que esses pesos possam variar, no caso de modelos contendo apenas um *output*.

Palavras-chave: DEA; restrições de peso; MSAE.

Abstract

In this paper we present a procedure based on the use of Minimum Sum of Absolute Errors (**MSAE**) regression for the treatment of factor weights in Data Envelopment Analysis (**DEA)**. It develops and presents alternative method to limit the range within which these factor weights are allowed to vary when models using a single output are analyzed.

Keywords: DEA; restricted weights; MSAE.

1. Introdução

Neste artigo apresentamos um método para restringir a flexibilidade de pesos dos fatores na utilização de Análise Envoltória de Dados (**DEA**), metodologia desenvolvida para avaliar eficiência relativa de unidades produtivas através de análises realizadas nos níveis de utilização de seus *inputs* objetivando a produção de seus *outputs*. No modelo dos multiplicadores, originalmente proposto por Charnes, Cooper & Rhodes (1978), as eficiências são resultantes de maximização da razão da soma de *outputs* ponderados pela soma de *inputs* ponderados da unidade sob avaliação. Nesta concepção, **DEA** permite total flexibilidade nos pesos utilizados nas ponderações, de tal forma que cada unidade sob análise, comumente chamada de **DMU** (*Decision Making Unit*), alcança sua eficiência máxima não levando em conta qualquer prioridade ou limitação na utilização dos fatores.

Esta flexibilidade permite, por um lado, que cada unidade busque sua eficiência segundo *mix* de pesos de *inputs* e *outputs* próprios, sem necessidade de submeter-se a um único *mix* para todas as unidades. Por outro lado, esta flexibilidade leva a situações inaceitáveis, devido a duas características dos modelos **DEA**, segundo Pedraja-Chaparro *et al*. (1997):

1. As regiões Pareto-ineficientes, onde as **DMUs** apresentam pesos nulos atribuídos a alguns *inputs* ou *outputs*;
2. Os vértices do conjunto de possibilidades de produção, pontos em que se verifica uma infinidade de *mix* de pesos ótimos (soluções ótimas alternativas do modelo **DEA** dos multiplicadores).

Freqüentemente em aplicações práticas de **DEA**, onde não são impostas restrições aos pesos, encontramos soluções impróprias, pois a eficiência de algumas unidades é alcançada quase que exclusivamente devido a um determinado fator. Ocorre, ainda, muitas vezes, as distribuições dos pesos apresentarem-se completamente diferentes para as diferentes unidades.

Este trabalho inicia com uma revisão sumária dos principais estudos sobre restrição de pesos em **DEA**, propondo a seguir uma discussão sobre novas possibilidades na modelagem **DEA,** através de um balanceamento mais realista da importância dos fatores utilizando estimação de parâmetros através da técnica **MSAE**.

O artigo é organizado da seguinte maneira: na Seção 2 são destacados os principais trabalhos sobre restrição de pesos em **DEA**; na Seção 3 introduzimos a técnica de estimação **MSEA** apresentando os procedimentos para a obtenção dos estimadores pontuais e por intervalo; na Seção 4 avaliamos a utilização de **MSEA** aos dados da aplicação, calculamos seus estimadores e a seguir ponderamos os estimadores pelos *inputs,* terminando com a aplicação da metodologia **DEA** com e sem restrições aos dados, verificando suas diferenças; finalmente concluímos o artigo na Seção 5 com comentários finais.

2. Estudos Anteriores

Diversos trabalhos para impor limites a pesos de fatores têm sido desenvolvidos. Listamos a seguir alguns destes trabalhos que apontam para abordagens que, ao mesmo tempo, procuramos caracterizar.

- **Restrições Diretas nos pesos**
  Esta abordagem foi desenvolvida por Dyson & Thanassoulis (1988) e generalizada por Roll, Cook & Golany (1991). Segundo este método, impõem-se limites numéricos diretamente aos multiplicadores, da forma:

$$Q2_i \leq V_i \leq Q1_i \text{ para os } \textit{inputs}$$

$$P2_r \leq U_r \leq P1_r \text{ para os } \textit{outputs}$$

$$B_0 = \Sigma\, V_i\, X_{i0}$$

- **Região de Segurança (*Assurance Region*-AR)**

  Esta abordagem foi desenvolvida por Thompson, Langemeier, Lee, Lee & Thrall (1990). As restrições **AR** são do tipo:

  $$U_r \leq \alpha_{rs}\, U_s,\ \forall\ r \neq s$$

  $$V_i \leq \beta_{ij}\, V_j\ \ \forall\ i \neq j$$

  onde α_{rs} e β_{ij} são definidos pelo usuário.

  Esta é a chamada Região de Segurança de tipo I (*Assurance Region* I – **AR** I)

  A Região de Segurança de tipo II (*Assurance Region* II – AR II), apresentada por Thompson *et al.* (1990), relaciona os pesos dos *inputs* e dos *outputs.*

- **Método Cone Ratio**

  Esta abordagem foi desenvolvida por Charnes, Cooper, Wei & Huang (1989). Este método permite uma transformação da base de dados original de modo a que o modelo com restrições possa ser implementado em um *software* para modelos **DEA** básicos. Uma vez obtidos os resultados, os dados devem ser transformados para a forma original a fim de serem interpretados.

- **Restrição aos *inputs* e *outputs* virtuais**

  Do ponto de vista do usuário, é, as vezes difícil estabelecer limites aos multiplicadores, levando em conta as unidades de medidas dos *inputs* e *outputs*. Uma alternativa mais amigável é estabelecer limites ϕ_r e ψ_r ao *output* virtual r de uma **DMU** j, o que foi proposto por Wong & Beasley (1990). A restrição ao *output* virtual r é da forma

  $$\phi_r \leq \frac{U_r y_{rj}}{\sum_{r=1}^{s} U_r y_{rj}} \leq \psi_r\ ,$$

  onde $\sum_{r=1}^{s} U_r y_{rj}$ representa o output virtual total da **DMU** j. Este tipo de restrição, no entanto, acarreta problemas de inviabilidade de difícil solução.

- **Restrição contingente dos *inputs* e *outputs* virtuais**

  Esta abordagem propõe a imposição de limites relativos às participações de cada *input* (ou *output*) no *input* virtual, e foi proposta por Pedraja-Chaparro *et al.* (1997). Produz restrições da seguinte forma:

  $$c_i V_1 X_{1j} \leq V_i X_{ij} \leq d_i\ V_1\ X_{1j},$$

  para i > 1, onde c_i e d_i são determinados pelo usuário.

  Este tipo de restrição aos pesos é "contingente" porque o padrão dos pesos selecionados depende dos níveis dos *inputs* e *outputs* utilizados pela **DMU**.

Os métodos apresentados para introduzir as restrições nos pesos podem ser classificados da seguinte forma (Pedraja-Chaparro *et al.*, 1997):

Pesos (multiplicadores)	Tipo de Restrição	
	Absoluta	**Relativa**
Original	Dyson & Thanassoulis (1988) Roll, Cook & Golany (1991) Método Cone Ratio (1989)	Thompson, Langemeier, Lee, Lee & Thrall (1990)
Virtual	Wong & Beasley (1990)	Pedraja-Chaparro *et al.* (1997)

O critério adotado neste trabalho utiliza o ajustamento preliminar de um modelo de regressão linear $y = \Sigma x_i \beta_i + \boldsymbol{\varepsilon}$, onde o parâmetro β_i indica a mudança esperada na variável dependente y por unidade adicionada à variável x_i, quando as outras coordenadas do vetor x de variáveis explicativas permanecem inalteradas. No nosso caso, seguindo esse conceito, os parâmetros β_i representam as importâncias relativas de cada *input* na determinação do *output* y. Depois de estimados estes parâmetros, calculamos intervalos de confiança para as estimativas dos β*'s.* Os limites β_{min} e β_{max} destes intervalos, serão utilizados na construção de proporções que delimitarão os pesos dos *inputs* na determinação das eficiências utilizando **DEA.**

Dentro das diversas alternativas de estimação de parâmetros em regressão linear, como por exemplo a popular Mínima Soma dos Erros Quadráticos (**MSEQ**), a Mínima Soma dos Erros Relativos (**MSEA**) e também a Mínima Soma dos Erros Absolutos (**MSEA**), optamos pelo último método, pois se apresenta como a alternativa mais robusta. A busca de alternativas robustas se justifica por ser a presença de *outliers* uma provável causa dos pesos extremos que queremos evitar. Adotando o algoritmo de minimização da soma dos valores dos resíduos na regressão linear, estaremos sendo coerentes com uma idéia central de **DEA**, que é a de não descartar *outliers*, admitindo a existência de informações relevantes neste tipo de observação. Nos últimos anos, tem sido conferida grande atenção à análise de *outliers* e observações influentes em DEA, formando uma ampla literatura sobre o assunto. Destacamos os tratamentos oferecidos em Pastor, Ruiz & Sirvent (1999), Wilson (1995), Wilson (1993) e Ruiz & Sirvent (2001).

Ao contrário de grande parte das abordagens anteriores, a utilização de regressão neste trabalho aparece como um complemento, e não como uma alternativa à metodologia **DEA**. Nosso objetivo é oferecer uma possibilidade de refinamento para propiciar que seus resultados se apresentem coerentes com a realidade das aplicações.

3. A Regressão MSEA

3.1 Introdução

O algoritmo da Mínima Soma dos Erros Quadráticos (**MSEQ**) há muito tempo ocupa posição privilegiada na estimação dos parâmetros de modelos de regressão linear devido, principalmente, à relativa simplicidade da teoria. Tem presença obrigatória em todas as rotinas de computadores para cálculo de estimadores. Entretanto, seus resultados têm de ser questionados quando a distribuição das perturbações não é Normal. A presença de *outliers*, muitas vezes, revela que o erro aleatório possui uma distribuição complicada pela mistura de alguma parcela discreta ou representante de uma família de distribuições com cauda mais acentuada, como, por exemplo, as de Cauchy & Laplace (ver Blaterg & Sargent, 1971).

Um método para avaliarmos esta distribuição dos erros, apresentado em Montgomery & Peck (1992), fornece um bom critério para verificarmos se estimadores de **MSEQ** devem ser utilizados em determinada aplicação. O método consiste em plotar em ordem crescente os erros, ou seja, $e_{[1]} < e_{[2]} < ... < e_{[n]}$ contra a probabilidade cumulativa $P_i = [(i - ½)] / n$. O gráfico resultante, dependendo de sua forma, indicará presença ou não de *outliers* que, em caso positivo, sugere a utilização de outra alternativa para os estimadores.

O Método das Mínimas Somas dos Erros Absolutos (**MSEA**) supera as deficiências encontradas pelo **MSEQ** na existência de *outliers*. Este método é menos sensível à existência de dados extremos, podendo ser demonstrado que estimadores de mínima soma dos erros absolutos são de máxima verossimilhança quando os erros seguem uma distribuição de Laplace, conforme Blatberg & Sargent (1971).

Durante muito tempo, a falta de algoritmos computacionais para min $\Sigma |y_i - x_i\beta|$ em modelos de regressão linear múltipla foi uma barreira à utilização do método. Uma contribuição de Charnes, Cooper & Ferguson (1955) foi formular a regressão **MSEA** como um problema de programação linear. Nas últimas décadas vários algoritmos eficientes têm sido propostos, ver Barrodale & Roberts (1973) e Zhang (1993).

Ao trabalharmos regressão linear em conjunto com **DEA**, onde *outliers* são importantes nas análises, devemos escolher um método que supere este problema de alta sensibilidade aos dados extremos sem admitir a exclusão de dados. Esta é uma vantagem da regressão de Mínima Soma dos Erros Absolutos (**MSEA**) sobre outros métodos apresentados em Narula & Wellington (1985), como alternativas robustas à regressão **MSEQ**.

3.2 Estimadores de MSEA

Considere o modelo de regressão linear múltiplo:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + ... + \beta_k + \varepsilon, \tag{1}$$

onde y é uma variável dependente; $x_1,..., x_k$ são k variáveis regressoras; $\beta_0, \beta_1, ...\beta_k$ são $k + 1$ constantes desconhecidas e ε representa o erro aleatório produzido pelo modelo possuindo função de densidade de probabilidade denotada por $f(\varepsilon)$.

O estimador $\hat{\beta}$ obtido pelo método da Mínima Soma dos Erros Absolutos (MSEA), para β, minimiza $\sum_i^n = |y_i - x_i\beta|$ para todos os valores de β, onde y_i é o i-ésimo elemento do vetor $\underline{\mathbf{Y}}$ e x_i é a i-ésima linha da matriz **X**, sendo n o número de observações. O modelo em (1) pode ser escrito na forma matricial como $\mathbf{Y = X\beta + \varepsilon}$. O procedimento para encontrarmos o estimador **MSEA** pode ser formulado através do seguinte **PPL**:

$$\begin{aligned}
&\textbf{Minimizar} \quad \mathbf{1'e^+ + 1'e^-} \\
&\textbf{sujeito a} \quad \mathbf{X\beta + e^+ - e^- = Y} \\
&\qquad\qquad\quad \mathbf{e^+, e^- \geq 0} \\
&\qquad\qquad\quad \boldsymbol{\beta} \textbf{ irrestrito em sinal,}
\end{aligned}$$

onde o estimador **MSEA** $\boldsymbol{\beta}$ é um vetor k x 1, **1** é um vetor n x 1, sendo

$$\mathbf{e_j^+ = (y_j - x_j\beta)} \quad \textbf{se} \quad \mathbf{y_j - x_j\beta \geq 0}$$
$$\mathbf{e_j^- = -(y_j - x_j\beta)} \quad \textbf{se} \quad \mathbf{y_j - x_j\beta < 0}$$

4. Um exemplo na utilização de MSEA com DEA

4.1 Obtenção dos estimadores

Para facilitar a comparação com outros possíveis métodos de ajustamento do modelo linear, ilustraremos a utilização de estimadores **MSEA** através da aplicação a dados de um exemplo clássico, aos quais ao critério de mínimos quadrados se aplica satisfatoriamente. A aplicação do algoritmo baseado na minimização da soma da soma dos desvios absolutos a este conjunto de dados ajuda, também, a demonstrar a flexibilidade da metodologia proposta. Os dados, com 25 observações para duas variáveis regressoras, X_1 e X_2, e uma variável dependente, Y, foram obtidos em Montgomery & Peck (1992).

Estimamos os coeficientes do modelo de regressão linear pelo critério **MSEA**, resolvendo o **PPL** da Seção 3.2. O modelo ajustado é:

$$\hat{Y} = 3.6621 + 1.4272 X_1 + 0.0143 X_2 \qquad (2)$$

Utilizando resultados de inferência estatística baseados em Narula (1987), calculamos intervalos de confiança para os estimadores de **MSEA** da regressão (2).

Para β_i, ao nível de confiança de $(1 - \alpha)$ 100% temos o intervalo de confiança:

$$\hat{a}_i - z_{\alpha/2}[\hat{\tau}\,(X'X)^{-1/2}_{ii}] \le {}_i \le \hat{a}_i + z_{\alpha/2}[\hat{\tau}\,(X'X)^{-1/2}_{ii}]$$

onde $z_{\alpha/2}$ representa o $(1-\alpha/2)$ percentil da distribuição da normal padrão sendo $\hat{\tau} = n^{*1/2}[e_{[n^*-m+1]} - e_{[m]}]/4$ um estimador consistente de τ proposto em McKean & Schrader (1987), e $(X'X)^{-1}_{ii}$ é o i-ésimo elemento da diagonal da matriz de $(X'X)^{-1}$.

Temos ainda $m = \left[(n^* + 1)/2 - n^*\right]$ com n^* definido como o número de resíduos diferentes de zero e $e_{[1]}, e_{[2]}, e_{[3]}, ..., e_{[n^*]}$ sendo os resíduos diferentes de zero ordenados em ordem crescente.

No exemplo em estudo, admitindo um intervalo de confiança de 95%, ou seja, $\alpha/2 = 0.005$

$(X'X)^{-1/2}_{11} = 0.05196,$

$n^* = 22,$

$m = (22+1)/2 - 4.69 = 6.81$

$\hat{\tau} = 4.69(e_{16} - e_7)/4 = 4.69\,(1.0868 + 0.6659)/4 = 2.055$

Assim, obtemos o intervalo de confiança para β_1

$$1.1773 \le \beta_1 \le 1.6771 \qquad (3)$$

Calculando de forma análoga para $\hat{a}_2$, utilizando: $(X'X)^{-1/2}_{22} = 0.0011$, obtemos

$$0.0089 \le \beta_2 \le 0.0196 \qquad (4)$$

4.2 Ponderação pelas Escalas dos *Inputs*

É importante observar que, simplesmente analisando as estimativas pontuais obtidas na Seção anterior, não podemos concluir muita coisa a respeito da importância de cada *input* na determinação do *output* y. Logicamente, os valores dos estimadores de β_1 e β_2 são influenciados pelas escalas de valores dos correspondentes *inputs* x_1 e x_2.

Devemos propor um procedimento razoável para eliminarmos esta influência, de forma que tenhamos um parâmetro que indique as reais parcelas de contribuição na determinação do *output* feita por cada *input*. Uma maneira simples de obtermos este parâmetro é relacionando os estimadores de β_i´s com a média dos dados observados da variável x_i, como indicado na fórmula a seguir, na qual n indica o número de observações e k o número de coeficientes:

$$\Psi_i = \frac{[\hat{\beta}_i \cdot \sum_{j=1}^{n} x_{ij} / n]}{\sum_{l=1}^{k} [\hat{\beta}_l \cdot \sum_{j=1}^{n} x_{lj} / n]}$$

No caso em estudo, aplicando este procedimento, obtemos os pesos $\Psi_1 = 0{,}6813$ e $\Psi_2 = 0{,}3187$.

Estas medidas pontuais são transformadas em intervalos ($\Psi_{i\ min}$, $\Psi_{i\ Max}$), aproveitando as amplitudes dos intervalos de confiança (3) e (4).

O cálculo das amplitudes nos fornece, para β_1, um percentual de (1.6771 –1.4272) / 1.4272 = 0.1751, ou 17.51%. Da mesma forma, para β_2 teremos uma amplitude de (0.0196 – 0.0143) / 0.0143 = 0.3706 ou 37.06%

Utilizando estes percentuais de variação, juntamente com Ψ_1 e Ψ_2, encontramos os intervalos possíveis para os pesos dos *inputs* na determinação do *output*.

$$\begin{aligned} 0.5632 \le \Psi_1 \le 0.8100 \\ 0.1900 \le \Psi_2 \le 0.4368 \end{aligned} \qquad (5)$$

4.3 Utilização de Estimadores MSEA para determinar Restrições aos Pesos em DEA

Utilizando os dados referidos, de Montgomery & Peck (1992), geramos a **Tabela A** (ANEXO), com os escores de eficiência, os respectivos conjuntos referência (*peer groups*) e ainda a contribuição de cada *input* na obtenção da eficiência. O modelo utilizado foi o de Charnes, Cooper & Rhodes (1978), com orientação *input,* indicado na literatura pela sigla **CCR-I,** sem restrição aos pesos dos fatores como formalizado a seguir.

Seja a $\mathbf{DMU_o}$ a unidade a ser avaliada. Resolvemos o seguinte problema de programação fracional para obter os valores dos pesos dos *inputs* v_i (i=1,2) e o peso do único *output* u como variáveis.

$$\mathbf{Max}\ \ \phi = (uy_o / v_1x_{1o} + v_2x_{2o}) \qquad (6)$$
$$\mathbf{sujeito\ a}\ \ (uy_j / v_1x_{1j} + v_2x_{2j}) \le 1 \quad (j=1,2,...,25) \qquad (7)$$
$$\mathbf{sendo}\ \ v_1, v_2 \ge 0 \quad e \quad u \ge 0 \qquad (8)$$

Este é um problema de programação não linear que pode ser convertido em um PPL.

Podemos observar na **Tabela A**, que todas as observações alcançam suas eficiências baseadas exclusivamente no fator X_1, o que, na prática, possivelmente, não se apresenta como um resultado razoável.

Os pesos representam um valor relativo que proporciona o melhor escore possível para uma determinada unidade, além disso, esse sistema de pesos deve garantir que para todas as unidades, nenhuma alcance um escore de eficiência acima da unidade. Nestas condições, é comum algum fator de menor relevância adquirir um peso relativamente alto, gerando uma unidade eficiente basicamente às custas desse fator, tendo por outro lado atribuído peso nulo a fatores mais relevantes, sendo isso inaceitável do ponto de vista prático.

Utilizando agora o mesmo modelo **CCR-I** (Equações 6-8) acima, tendo a Equação (8) alterada para

$$0.5632 \le v_1 \le 0.8100 \quad \text{e} \quad 0.1900 \le v_2 \le 0.4368 \qquad (8')$$

representando as restrições aos fatores calculadas anteriormente, teremos, aplicando os resultados obtidos por Birkes & Dodge (1993), os resultados exibidos na **Tabela B** em anexo.

Como podemos observar na **Tabela B**, as restrições aos pesos tornaram o resultado da avaliação de desempenho mais balanceada, no sentido de que todos os *inputs* participam de uma maneira mais aproximada ao ajuste realizado pela regressão linear realizada no início deste trabalho. A contribuição média do input X_1 no modelo com restrição utilizando **MSAE** é de aproximadamente 80,5% enquanto que inicialmente era 99,7%. Também se observa, comparando as duas Tabelas, uma maior discriminação entre as observações para o modelo com restrições **(Tabela B)**. De fato, com a aplicação das restrições, a faixa de eficiência tem extremos em 15,5% e 100,0%, com apenas uma DMU aparecendo como 100% eficiente. Esta redução do número de unidades eficientes indica que as restrições impostas cumpriram satisfatoriamente seu papel de evitar que padrões baseados em ponderações extremas elevem os índices de eficiência de algumas unidades.

5. Comentários Finais

O ajuste obtido por Mínimos Quadrados por Montgomery & Peck (1992) é dado pela equação $y = 2.3412 + 1.6159x_1 + 0.0143x_2$ com $R^2 = 0.9596$ e os intervalos de confiança produzidos sob as hipóteses clássicas conduzem a restrições para os pesos e resultados finais muito próximos dos que obtivemos com os intervalos de confiança produzidos pelo ajustamento por **MSAE.** As restrições para os pesos, adotando o critério de mínimos quadrados, seriam de $0.4784 \le v_1 \le 0.8842$ e $0.0952 \le v_1 \le 0.5422$. Demonstra-se desta forma a robustez do procedimento proposto para variações na especificação das perturbações. É um procedimento que leva em conta a possível presença de *outliers*, mas se comporta satisfatoriamente, mesmo quando os dados, ao contrário, se apresentam muito concentrados.

É importante destacar que, mesmo com intervalos de confiança mais largos do que o possivelmente necessário, face à ausência de observações discrepantes no conjunto de dados escolhidos, ainda obtivemos restrições efetivas, no sentido de conduzir a uma envoltória mais realista. Obtemos desta forma um procedimento geral para produção de restrições aos pesos. Este caráter geral, aliado à sua relativa simplicidade, permite que ele seja usado de forma automática, em lugar dos procedimentos *ad hoc*.

Finalmente, acreditamos que a técnica de restrição de multiplicadores proposta neste artigo, aplicada a somente um *output*, pode ser generalizada a situações de vários *outputs*. Uma recomendação para estudos posteriores seria a utilização prévia de correlação canônica, conforme Arnold *et al.* (1996).

Referências Bibliográficas

(1) Arnold, V.; Bardhan, I.; Cooper, W. & Kumbhakar, S. (1996). New uses of DEA and statistical regressions for efficiency evaluation and estimation. *Annals of Operations Research*, **66**, 255-277.

(2) Barrodale, I. & Roberts, F.D. (1973). An improved algorithm for discrete L_1 linear approximation. *S.I.AM., J. Numer. Anal.*, **10**, 839-848.

(3) Birkes, D. & Dodge, Y. (1993). *Alternative Methods of Regression*. John Wiley and Sons, Inc., New York.

(4) Blaterg, R. & Sargent, T. (1971). Regression With Non-Gaussian Stable Disturbances: Some Sampling Results. *Econometrica*, **39**(3), 501-510.

(5) Charnes, A.; Cooper, W. & Ferguson, R. (1955). Optimal estimation of executive compensation by linear programming. *Management Science*, **1**, 138-151.

(6) Charnes, A.; Cooper, W. & Rhodes, E. (1978). Measuring efficiency of decision making. *European Journal of Units Operational Research*, **2**(6), 429-444.

(7) Charnes, A.; Cooper, W.; Wei, Q.L. & Huang, Z.M. (1989). Cone Ratio Data Envelopment Analysis and Multiple Objective Linear Programming. *International Journal of Management Science*, **20**(7), 1099-1118.

(8) Dyson, R.G. & Thanassoulis, E. (1988). Reducing Weight Flexibility in Data Envelopment Analysis. *Journal of the Operational Research Society*, **39**(6), 563-576.

(9) Montgomery, D.C. & Peck, E.A. (1992). *Introduction to Linear Regression Analysis*. Wiley & Sons.

(10) Mckean, J.W. & Schrader, R.M. (1987). Least absolute errors analysis of variance. **In:** *Statistical Data Analysis Based on the L_1 – Norm and Related Methods* [edited by Y. Dodge], Elsevier Science Publishers B, 297-305.

(11) Narula, S. & Wellington, J. (1985). Interior Analysis for the Minimum Sum of Absolute Errors Regression. *Technometrics*, **27**(2), 181-188.

(12) Narula S. (1987). The Minimum sum of absolute errors regression. *Journal of Quality Technology*, **19**, 37-45.

(13) Pastor, J.T.; Ruiz, J.L. & Sirvent, I. (1999). A Statistical Test for Detecting Influential Observations in DEA. *European Journal of Operational Research*, **115**(3), 542-554.

(14) Pedraja-Chaparro, R.; Salinas-Jimenes, J. & Smith, P. (1997). On the Role of Weight Restrictions in DEA. *Journal of Productivity Analysis*, **8**, 215-230.

(15) Roll, Y.; Cook, W. & Golany, B. (1991). Controlling Factor weights in DEA. *IIEE Transactions*, **23**, 2-9.

(16) Ruiz, J.L. & Sirvent, I. (2001). Techniques for the assessment of influence in DEA. *European Journal of Operational Research*, **132**, 390-399.

(17) Thompson, R.G.; Langemeier, L.N.; Lee, C.; Lee, E. & Thrall, R. (1990). The Role of Multiplier Bounds in Efficiency Analysis with Application to Kansas Farming. *Journal of Econometrics*, **46**, 93-108.

(18) Wilson, P.W. (1993). Detecting Outliers in Deterministic Nonparametric Frontier Models with Multiple Outputs. *American Statistical Association*, **11**(3), 319-323.

(19) Wilson, P.W. (1995). Detecting Influential Observations in Data Envelopment Analysis. *The Journal of Productivity Analysis*, **6**, 27-45.

(20) Wong, Y.H.B. & Beasley, J.E. (1990). Restricting Weight Flexibility in DEA. *Journal of the Operational Research Society*, **41**, 829-835.

(21) Zhang, Y. (1993). Primal-Dual interior point approach for computing l_1 solutions and l_μ solutions of overdetermined systems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **77**, 323-341.

ANEXO

Tabela A

Eficiência das unidades, contribuição dos *inputs* e referências
Sem Restrição de Multiplicadores – Modelo CCR-I

Observação	Eficiência %	Referência	Contribuição X_1	Contribuição X_2
19	100,00	–	0,24596 (97,12%)	0,00728 (2,87%)
7	100,00	–	0,44500 (99,77%)	0,00100 (0,22%)
4	100,00	–	0,15703 (97,12%)	0,00464 (2,87%)
10	100,00	–	0,17442 (99,88%)	0,00021 (0,12%)
3	94,02	7 e 10	0,29307 (99,88%)	0,00035 (0,12%)
2	93,88	10	0,30612 (99,88%)	0,00037 (0,12%)
13	83,54	10	0,23207 (99,88%)	0,00028 (0,12%)
14	80,28	7	0,15244 (99,88%)	0,00121 (0,12%)
18	74,55	19	0,09168 (97,12%)	0,00271 (2,87%)
16	70,68	7 e 10	0,09140 (99,88%)	0,00011 (0,12%)
25	70,32	4 e 7	0,23057 (99,77%)	0,00052 (0,22%)
15	67,37	4	0,09993 (99,77%)	0,00022 (0,22%)
8	67,03	7	0,13383 (99,77%)	0,00030 (0,22%)
9	66,88	4 e 7	0,30050 (99,77%)	0,00006 (0,22%)
17	66,86	7	0,15505 (99,77%)	0,00035 (0,22%)
6	65,71	7	0,12917 (99,77%)	0,00029 (0,22%)
11	64,57	7	0,05699 (99,77%)	0,00013 (0,22%)
5	60,95	7	0,15780 (99,77%)	0,00035 (0,22%)
24	60,30	7 e 10	0,11403 (99,88%)	0,00013 (0,12%)
1	57,93	10	0,13023 (99,88%)	0,00016 (0,12%)
12	56,27	7	0,09539 (99,77%)	0,00021 (0,22%)
21	54,16	19	0,07070 (97,12%)	0,00209 (2,87%)
22	52,83	7	0,03594 (99,77%)	0,00008 (0,22%)
20	52,64	7	0,05339 (99,77%)	0,00012 (0,22%)
23	52,61	7	0,09989 (99,77%)	0,00022 (0,22%)

Tabela B

Eficiência das unidades, contribuição dos *inputs* e referências Com Restrição de Multiplicadores – Modelo CCR-I				
Observação	**Eficiência %**	**Referência**	**Contribuição X_1**	**Contribuição X_2**
19	100,0	–	0,08658 (80,81%)	0,02056 (19,19%)
4	78,60	19	0,04348 (80,80%)	0,01033 (20,20%)
18	60,20	19	0,02608 (79,58%)	0,00619 (20,42%)
21	50,30	19	0,02312 (80,81%)	0,00549 (19,19%)
12	41,80	19	0,01638 (80,81%)	0,00389 (19,19%)
5	40,20	19	0,02402 (80,79%)	0,00571 (19,21%)
8	38,10	19	0,01758 (80,79%)	0,00418 (19,21%)
17	34,90	19	0,01869 (80,80%)	0,00444 (19,20%)
7	34,60	19	0,03556 (80,82%)	0,00844 (19,18%)
25	33,30	19	0,02524 (80,82%)	0,00599 (19,18%)
22	29,10	19	0,00458 (80,78%)	0,00109 (19,22%)
11	27,30	19	0,00557 (80,84%)	0,00132 (19,16%)
6	25,8	19	0,01171 (80,81%)	0,00278 (19,19%)
9	25,6	19	0,00265 (80,79%)	0,00063 (19,21%)
13	25,40	19	0,01549 (80,80%)	0,00368 (19,20%)
15	25,30	19	0,00867 (80,80%)	0,00206 (19,20%)
2	25,30	19	0,01810 (81,06%)	0,00423 (18,94%)
20	21,30	19	0,00500 (80,77%)	0,00119 (19,23%)
14	20,70	19	0,00864 (80,82%)	0,00205 (19,18%)
23	19,70	19	0,00863 (80,80%)	0,00205 (19,20%)
16	18,10	19	0,00515 (80,85%)	0,00122 (19,15%)
10	17,60	19	0,00672 (80,87%)	0,00159 (19,13%)
3	17,50	19	0,01194 (80,78%)	0,00284 (19,22%)
24	15,20	19	0,00629 (80,85%)	0,00149 (19,15%)
1	14,50	19	0,00714 (80,86%)	0,00169 (19,14%)