

UMA REVISÃO COMENTADA DAS ABORDAGENS DO PROBLEMA QUADRÁTICO DE ALOCAÇÃO

Eliane Maria Loiola *

Nair Maria Maia de Abreu

Paulo Oswaldo Boaventura Netto

Programa de Engenharia de Produção / COPPE

Universidade Federal do Rio de Janeiro

Rio de Janeiro – RJ

eliane@pep.ufrj.br

nair@pep.ufrj.br

boaventu@pep.ufrj.br

* *Corresponding author*/autor para quem as correspondências devem ser encaminhadas

Recebido em 06/2003; aceito em 03/2004 após 1 revisão

Received June 2003; accepted March 2004 after one revision

Resumo

O Problema Quadrático de Alocação, *PQA*, um dos mais difíceis da classe *NP-hard*, modela diversas aplicações em diferentes áreas como pesquisa operacional, computação paralela e análise estatística de dados discretos. Além disso, problemas conhecidos como o do caixeiro viajante, o da clique maximal, o de particionamento e o de isomorfismo de grafos podem ser formulados como um *PQA*. Na tentativa de identificar novas propriedades estruturais para este problema, diversas formulações aparecem na literatura. Reunimos tais formulações, destacando suas principais características para classificá-las segundo as técnicas matemáticas nelas adotadas. Finalizamos o artigo avaliando a extensão das contribuições dadas ao problema, quer na elaboração de algoritmos, quer no cálculo de limites inferiores ou na caracterização de classes de exemplares polinomiais ou não, oriundas das diferentes abordagens aqui estudadas.

Palavras-chave: problema quadrático de alocação; formulações; otimização combinatória.

Abstract

The Quadratic Assignment Problem, *QAP*, one of the most difficult problems in *NP-hard* class, models many applications in several areas such as operational research, parallel and distributed computing, and combinatorial data analysis. Besides, other optimization combinatorial problems such as the traveling salesman problem, maximal clique, isomorphism and graph partitioning can be formulated as a *QAP*. In this paper, we survey some of the most important formulations available, in order to classify them according to their mathematical resources. Finally, we analyze the extension of the contributions brought by the studies of different approaches.

Keywords: quadratic assignment problem; formulations; combinatorial optimization.

1. Introdução

Consideremos o problema de se designar objetos a locais de modo que cada objeto seja atribuído a um único local e reciprocamente, quando são conhecidas as distâncias entre os pares de locais, os fluxos de algum tipo de demanda entre os pares de objetos e, nos casos mais gerais, os custos fixos de cada atribuição “objeto *versus* local”. O Problema Quadrático de Alocação (*PQA*), *Quadratic Assignment Problem (QAP)* na literatura internacional, consiste em encontrar uma alocação de custo mínimo dos objetos aos locais, sendo os custos obtidos pela soma dos produtos distância-fluxo.

Proposto originalmente por Koopmans & Beckmann (1957) como um modelo matemático relacionado a atividades econômicas, o *PQA* aparece em inúmeras aplicações práticas: Steinberg (1961) o utilizou para minimizar a quantidade de ligações entre componentes de placas de circuitos eletrônicos; Francis & White (1974), no desenvolvimento de um *framework* de decisões de alocação de uma nova facilidade (postos policiais, supermercados, escolas) que atenda a um dado conjunto de clientes; Geoffrion & Graves (1976), em problemas de escalonamento de horário; Pollatschek *et al.* (1976), na definição de design de teclados e painéis de controle; Krarup & Pruzan (1978), em arqueologia; Forsberg *et al.* (1994), em análise de reações químicas; Hubert (1987), em análise estatística; Bokhari (1987), em computação paralela e distribuída; Bos (1993), em um problema relacionado a parques florestais. No entanto, é como problema de *layout* que o *PQA* vem sendo mais extensivamente aplicado: Elshafei (1977) o utilizou em planejamentos de hospitais, além de Dickey & Hopkins (1972) que o utilizaram na modelagem de localização de construções em campus universitário. Outras aplicações podem ser encontradas em McCormick (1970), Hubert & Schulz. (1976), Heffley (1977), Los (1978), Krackhardt (1988), Khare *et al.* (1988a, 1988b), Bland & Dawson (1991), Lacksonen & Enscore (1993), Medova (1994), Gouveia & Voß (1995), Bozer & Suk-Chul (1996), Mason & Rönnqvist (1997), Ostrowski & Ruoppila (1997), Ball *et al.* (1998), Haghani & Chen (1998), Kochhar *et al.* (1998), Martin (1998), Sarker *et al.* (1998), Spiliopoulos & Sofianopoulou (1998), Tansel & Bilen (1998), Tavakkoli-Moghaddain & Shayab (1998), Urban (1998), Gong *et al.* (1999), Rossin *et al.* (1999), Hahn & Krarup (2001), Pitsoulis *et al.* (2001), Siu & Chang (2002), Youssef *et al.* (2003) e Yu & Sarker (2003).

Desde a sua primeira formulação, o *PQA* tem atraído a atenção de pesquisadores em todo o mundo, não apenas pela sua importância prática e teórica, mas principalmente pela sua complexidade. Trata-se de um dos mais difíceis problemas de otimização combinatória: instâncias de ordem $n > 30$ não podem, em geral, ser resolvidas exatamente em tempo computacional aceitável. Sahni & Gonzales (1976) mostraram que o *PQA* é *NP*-árduo e que, a menos que $P = NP$, não será possível encontrar para ele uma solução aproximada por um fator constante da solução ótima. Tais resultados são válidos mesmo quando fluxos e distâncias aparecem como coeficientes de matrizes simétricas.

Diversos problemas *NP*-árduos de otimização combinatória, como os problemas do caixeiro viajante, do empacotamento, da clique maximal e do isomorfismo de grafos, podem ser modelados como *PQA*'s. A investigação de problemas de Otimização Combinatória através de instâncias disponibilizadas na Internet é uma tendência atual permitindo que se utilizem algoritmos exatos onde isso for possível ou obter ótimos locais melhores que a melhor solução conhecida para exemplares cuja otimalidade ainda não foi comprovada (Burkard *et al.*, 1996a; e Çela, 1998). No caso do *PQA*, podemos citar, como exemplo, instâncias com soluções ótimas recentemente provadas: Tai25a, em 2003, por Peter Hahn; Ste36a, em 2001,

por Brixius e Anstreicher; Bur26a, em 2001, por Peter Hahn; Kra30a, Kra30b, Kra32 e Tho30, em 2000, por Anstreicher, Brixius, Goux e Linderoth; Nug30 (uma das instâncias mais conhecidas e desafiadoras), em 2000, por Anstreicher, Brixius, Goux e Linderoth; Ste36b e Ste36c, em 1999, por Nyström. Em 2003, Misevicius melhorou a melhor solução conhecida para Tai80a, utilizando uma busca tabu modificada (Burkard *et al.*, 1991, 1997; QAPLIB). Estes resultados motivaram o artigo de Anstreicher (2003) que registra os recentes avanços na solução de instâncias do *PQA*, destacando-se os novos algoritmos e as novas estruturas computacionais utilizadas para isto. Cabe informar que além dos exemplares disponíveis para testes em Burkard *et al.* (1991, 1997) e QAPLIB, hoje em dia existem geradores de instâncias com ótimos conhecidos que são utilizados para testar os algoritmos (Çela, 1998).

Outra tendência atual das pesquisas em Otimização Combinatória é estudar versões polinomiais de problemas ou procurar instrumentos para análise da dificuldade dos exemplares. No caso do *PQA*, Çela (1998) apresenta diversos exemplares polinomiais, além de Herroelen & Vanglis (1985), Mautor & Roucairol (1994b), Angel & Zissimopoulos (1998, 2000, 2001, 2002) e Abreu *et al.* (2002) que discutem a dificuldade de outros exemplares em função das variâncias dos coeficientes das matrizes de fluxo e distância que os definem.

Os seguintes *surveys* são referências indispensáveis para quem deseja conhecer bem este problema: Burkard (1984, 1991, 2002), Pardalos *et al.* (1994) e Burkard *et al.* (1998), assim como, os livros: Pardalos & Wolkowicz (1994), Padberg & Rijal (1996), Dell'Amico *et al.* (1997) e Çela (1998).

Na tentativa de identificar novas propriedades estruturais para as instâncias do *PQA*, muitas formulações aparecem com base em diferentes enfoques. Propomos reunir aqui tais formulações, destacando as principais características de cada uma, para classificá-las segundo as técnicas usadas, desde a Programação Inteira e a Programação Semidefinida Positiva, passando pela Matemática Discreta e Combinatória através das teorias de Grupos e de Grafos, até a Álgebra Linear, via Teoria Espectral. Considerando as dificuldades do *PQA*, essas formulações, quase sempre equivalentes (à exceção das que caracterizam situações mais gerais) fornecem recursos matemáticos alternativos para o desenvolvimento de novas técnicas de resolução do problema. Ao final do artigo, relatamos as contribuições obtidas a partir de tais formulações, quer na elaboração de algoritmos exatos ou heurísticos, quer no cálculo de limites inferiores ou na caracterização de classes de exemplares do problema.

2. Formulações do *PQA* e de Problemas Relacionados

O objetivo deste item é apresentar as principais formulações do *PQA*, destacando-se o tipo de abordagem adotado em cada uma delas. Formulações para problemas relacionados ao *PQA* serão acrescentadas ao final, apenas com a finalidade de indicar as contribuições colaterais obtidas, sem preocupação em discutir as técnicas matemáticas utilizadas.

2.1 Principais Formulações do *PQA*

Formulações por Programação Inteira (PLI): Inicialmente apresentaremos o *PQA* como um caso de programação booleana para depois apresentá-lo como um problema de programação linear, onde as restrições binárias são relaxadas. A formulação booleana foi proposta inicialmente por Koopmans & Beckmann (1957), sendo depois utilizada em diversos trabalhos, tais como Steinberg (1961), Lawer (1963), Gavett & Plyter (1966), Elshafei

(1977), Bazaraa & Kirca (1983), Christofides & Benavent (1989), Bos (1993), Mans *et al.* (1995), Jünger & Kaibel (1996a, 1996b, 2001) e mais recentemente por Liang (1996), Torki *et al.* (1996), Tsuchiya *et al.* (1996, 2001), Maniezzo (1997), Ball *et al.* (1998), Ishii & Sato (1998), Kochhar *et al.* (1998), Martin (1998), Spiliopoulos & Sofianopoulou (1998), Siu & Chang (2002), Fedjki & Duffuaa (2004) e Yu & Sarker (2003).

Consideremos f_{ij} o fluxo entre os objetos i e j e d_{kp} a distância entre as localizações k e p . Deseja-se então calcular:

$$\min \quad \sum_{i,j=1}^n \sum_{k,p=1}^n f_{ij} d_{kp} x_{ij} x_{kp} \quad (2.1)$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad 1 \leq j \leq n, \quad (2.2)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad 1 \leq i \leq n, \quad (2.3)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad 1 \leq i, j \leq n. \quad (2.4)$$

Se considerarmos a função do custo de atribuição de atividades a locais, uma instância *PQA* de ordem n , em sua forma mais geral, é dada por três matrizes $F = [f_{ij}]$, $D = [d_{kp}]$ e $B = [b_{ik}]$, onde as matrizes F e D definem os fluxos entre os objetos e as distâncias entre as localizações, respectivamente, e b_{ik} é o custo para alocar o objeto i à posição k . Considerando o custo fixo de alocação, o problema pode então ser definido por:

$$\min \quad \sum_{i,j=1}^n \sum_{k,p=1}^n f_{ij} d_{kp} x_{ij} x_{kp} + \sum_{i,j=1}^n b_{ij} x_{ij} \quad (2.5)$$

$$\text{s.a.} \quad (2.2), (2.3), (2.4).$$

A maioria dos autores dispensa a parcela linear de (2.5), dado que ela pode ser facilmente resolvida.

Uma versão ainda mais geral do *PQA*, proposta por Lawler (1963), envolve coeficientes de custos c_{ijkp} que não correspondem necessariamente a produtos de fluxos f_{ij} por distâncias d_{kp} . Assim, a formulação de Lawler é dada:

$$\min \quad \sum_{i,j=1}^n \sum_{k,p=1}^n c_{ijkp} x_{ij} x_{kp} \quad (2.6)$$

$$\text{s.a.} \quad (2.2), (2.3), (2.4).$$

Esta formulação foi utilizada, também, em Bazaraa & Elshafei (1979), Drezner (1995), Sarket *et al.* (1995, 1998), Brüngger *et al.* (1997, 1998), Chiang & Chiang (1998), Hahn & Grant (1998), Hahn *et al.* (1998), Gong *et al.* (1999) e Rossin *et al.* (1999).

Formulações por Programação Inteira Mista (PLIM): O *PQA*, como um modelo de Programação Linear Inteira Mista, *PLIM*, é encontrado na literatura, via diversas propostas. Em todas elas, o termo quadrático da função objetivo do problema é substituído por termos lineares. Por exemplo, Lawler (1963) compensou este termo por imposição de restrições dadas a n^4 variáveis, tais como $c_{ijkp} = f_{ij} d_{kp}$ e $y_{ijkp} = x_{ij} x_{kp}$, $1 \leq i, j, k, p \leq n$.

Outras formulações utilizam relaxações do problema original. Enquadram-se nesta categoria os trabalhos de Love & Wong (1976a, 1976b), Kaufman & Broeckx (1978), Balas &

Mazolla (1980), Bazaraa & Serali (1980), Christofides *et al.* (1980), Burkard & Bonniger (1983), Frieze & Yadegar (1983), Assad & Xu (1985), Adams & Serali (1986), Christofides & Benavent (1989) e ainda os artigos de Adams & Johnson (1994), Drezner (1995), Gouveia & Voß (1995), Padberg & Rijal (1996), Ramachandran & Pekny (1998), Karisch *et al.* (1999) e de Ramakrishnan *et al.* (2002). Em geral, as linearizações do *PQA*, baseadas em modelos de *PLIM*, apresentam um grande número de variáveis e restrições, o que as torna, quase sempre, inconvenientes. No entanto, elas permitem explorar propriedades que resultam da linearidade da função objetivo, o que, ao lado da relaxação de algumas restrições, possibilita a determinação de limites inferiores para a solução ótima. Nesta abordagem se destacam os trabalhos de Kaufman & Broeckx (1978), Bazaraa & Serali (1980), Frieze & Yadegar (1983), Adams & Serali (1986), Adams & Johnson (1994) e Padberg & Rijal, (1996). Çela (1998) destaca três linearizações do *PQA*: a de Kaufman & Broeckx (1978), por conter o menor número de restrições; a de Frieze & Yadegar (1983) por obter os melhores limites inferiores via relaxação lagrangeana e a de Padberg & Rijal (1996), porque descreve o politopo das soluções do *PQA*. A vantagem trazida pela formulação de Frieze & Yadegar (1983) que descreve o *PQA* de forma linear, utilizando-se n^4 variáveis reais, n^2 variáveis booleanas e $n^4 + 4n^3 + n^2 + 2n$ restrições, nos leva a inseri-la aqui. Os autores mostram que sua formulação dada em (2.7) a (2.16) é equivalente às equações (2.1) a (2.4).

$$\min \quad \sum_{i,j=1}^n \sum_{k,p=1}^n c_{ijkp} \cdot x_{ij} \cdot x_{kp} + \sum_{i,j=1}^n b_{ij} \cdot x_{ij} \quad (2.7)$$

$$\text{s.a} \quad \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad 1 \leq j \leq n, \quad (2.8)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad 1 \leq i \leq n, \quad (2.9)$$

$$\sum_{i=1}^n y_{ijkp} = x_{kp} \quad 1 \leq j, k, p \leq n, \quad (2.10)$$

$$\sum_{j=1}^n y_{ijkp} = x_{kp} \quad 1 \leq i, k, p \leq n, \quad (2.11)$$

$$\sum_{k=1}^n y_{ijkp} = x_{ij} \quad 1 \leq i, j, p \leq n, \quad (2.12)$$

$$\sum_{p=1}^n y_{ijkp} = x_{ij} \quad 1 \leq i, j, k \leq n, \quad (2.13)$$

$$y_{ijij} = x_{ij} \quad 1 \leq i, j \leq n, \quad (2.14)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad 1 \leq i, j \leq n, \quad (2.15)$$

$$0 \leq y_{ijkp} \leq 1 \quad 1 \leq i, j, k, p \leq n. \quad (2.16)$$

Formulação por permutações: Em sua forma mais simples, o custo de alocar um par de objetos a um par de localizações é proporcional ao fluxo e à distância entre eles. A formulação do *PQA* que destaca essa proporcionalidade e utiliza o conceito de permutação pode ser encontrada em Hillier & Michael (1966), Graves & Whinston (1970), Pierce & Crowston (1971) e, posteriormente, em Cung *et al.* (1977), Burkard & Stratman (1978), Roucairol (1979, 1987), Burkard (1984), Frenk *et al.* (1985), Abreu & Boaventura-Netto (1989), Brown *et al.* (1989), Bland & Dawson (1991, 1994), Battiti & Tecchiolli (1994a, 1994b), Bui & Moon (1994), Chakrapani & Skorin-Kapov (1994), Fleurent & Ferland (1994), Li *et al.* (1994b), Mautor & Roucairol (1994a, 1994b), Li & Smith (1995), Taillard (1995), Bozer & Suk-Chul (1996), Colorni *et al.* (1996), Huntley & Brown (1996), Peng *et al.* (1996), Mavridou & Pardalos (1997), Merz & Freisleben (1997), Nissen (1997),

Pardalos *et al.* (1997), Angel & Zissimopoulos (1998), Deineko & Woeginger (1998), Talbi *et al.* (1998a, 1998b, 2001), Tansel & Bilen (1998), Abreu *et al.* (1999), Fleurent & Glover (1999), Gambardella *et al.* (1999), Maniezzo & Colomi (1999) e Tian *et al.* (1999). A partir de 2000, temos ainda as seguintes publicações Ahuja *et al.* (2000), Angel & Zissimopoulos (2000, 2001 e 2002), Stützle & Holger (2000), Arkin *et al.* (2001), Pitsoulis *et al.* (2001) e ainda em Abreu *et al.* (2002), Gutin & Yeo (2002), Hasegawa *et al.* (2002), Boaventura Netto (2003) e Rangel & Abreu (2003).

Considere S_n o conjunto de todas as permutações a n elementos e sejam f_{ij} , o fluxo entre os objetos i e j e $d_{\pi(i)\pi(j)}$, a distância entre as localizações $\pi(i)$ e $\pi(j)$, dada pela permutação $\pi \in S_n$. Se cada permutação π representar uma alocação de objetos a locais, a expressão matemática para o *PQA* toma a forma:

$$\min_{\pi \in S_n} \sum_{i,j=1}^n f_{ij} d_{\pi(i)\pi(j)} \cdot \quad (2.17)$$

Esta formulação e a apresentada em (2.1) a (2.4) são equivalentes, dado que as restrições (2.2) e (2.3) definem matrizes de permutações $X = [x_{ij}]$ que caracterizam permutações em S_n , como visto em (2.17). Lá se tem, para todo $1 \leq i, j \leq n$,

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } \pi(i) = j; \\ 0, & \text{se } \pi(i) \neq j. \end{cases} \quad (2.18)$$

Formulação Traço: Esta formulação explora, com recursos da álgebra linear, as propriedades da função traço de uma matriz (soma dos elementos da diagonal principal da matriz) para determinar limites inferiores do custo ótimo do problema. Trata-se de uma abordagem por teoria espectral de matrizes, o que vem permitindo a aplicação da programação semidefinida ao *PQA*. Considerando-se Π como o conjunto de todas as matrizes de permutações, a formulação traço, proposta por Edwards (1977), se apresenta como:

$$\min_{X \in \Pi} \text{tr}(F.X.D.X^t) \cdot \quad (2.19)$$

Posteriormente, esta abordagem foi utilizada em diversos trabalhos Edwards (1980), Finke *et al.* (1987), Hadley *et al.* (1990, 1992a, 1992b, 1992c), Hadley (1994), Karisch *et al.* (1994), Karisch & Rendl (1995), Zhao *et al.* (1998), Anstreicher *et al.* (1999), Wolkowicz (2000a, 2000b), Brixius & Anstreicher (2001) e Anstreicher & Brixius (2001).

Relaxação por Programação Semidefinida (PSD): Estas formulações definem relaxações do *PQA* e podem ser obtidas utilizando-se o dual do dual Lagrangeano de formulações equivalentes ao problema, como se vê em Karisch *et al.* (1994), Zhao *et al.* (1998), Wolkowicz (2000a, 2000b). A formulação por PSD é dada a seguir e considera o vetor e em que todos os coeficientes são iguais a 1, a matriz de permutação X e a matriz de custo fixo B .

$$\min \text{tr}(F.X.D - 2B)X^t \quad (2.20)$$

$$\text{s.a.} \quad Xe = e, \quad (2.21)$$

$$X^t e = e, \quad (2.22)$$

$$X_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j. \quad (2.23)$$

Outra relaxação para o *PQA* utilizando *SDP*, encontrada em Zhao *et al.* (1998), pode ser assim expressa:

$$\min \operatorname{tr} F.X.D.X^t - 2BX^t \quad (2.24)$$

$$\text{s.a.} \quad XX^t = X^tX = I, \quad (2.25)$$

$$Xe = X^te = e, \quad (2.26)$$

$$X_{ij}^2 - X_{ij} = 0 \quad \forall i, j. \quad (2.27)$$

Formulação por Grafos: Dados dois grafos completos, um com arestas valoradas pelos fluxos e o outro pelas distâncias, o *PQA* pode ser pensado como a atribuição dos vértices de um grafo aos do outro, de modo a que as arestas estejam corretamente superpostas, caracterizando uma solução cujo custo é dado pela soma dos produtos dos valores associados às arestas. Em geral, esta formulação é algebricamente dada pela expressão (2.17), onde a permutação π representa a sobreposição dos vértices de um grafo completo sobre o outro. Veja a Figura 2.1.

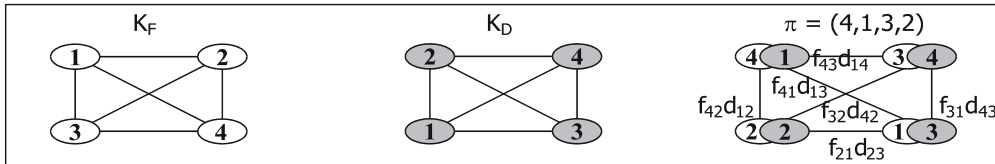


Figura 2.1 – Sobreposição de K_F e K_D correspondentes à alocação dada por $\pi = (4, 2, 1, 3)$.

O estudo algébrico e combinatório adotado por Abreu & Boaventura Netto (1989), Abreu *et al.* (1999) levou Marins (2001) a definir outra, envolvendo automorfismos de grafos de linha, tópico explorado em teoria algébrica de grafos. O grafo de linha de um grafo G , denotado por $L(G)$, é determinado tomando-se para conjunto de vértices, o das arestas de G , enquanto uma aresta de $L(G)$ é definida quando a ela corresponde um par de arestas incidentes num mesmo vértice de G . Um automorfismo de um grafo é uma permutação de seus vértices que preserva suas arestas. O conjunto de todos os automorfismos de G junto com a composição de permutações constitui um grupo denotado por $Aut(L(G))$ (Kreher & Stinson, 1998).

O teorema de Whitney (1932) pode ser utilizado para relacionar o grupo dos automorfismos de G com o dos automorfismos de $L(G)$, garantindo que, para $G = K_n$, o grafo completo de n vértices, se $n \neq 2$ e 4 , $Aut(G)$ e $Aut(L(G))$ são grupos isomorfos. Desta forma, $Aut(K_n)$ é formado pelas $n!$ permutações dos vértices de K_n . Assim, para $n \neq 2, 4$, temos os seguintes isomorfismos $Aut(L(K_n)) \approx K_n \approx S_n$. De posse destes resultados, Marins (2001) percebeu então que resolver o *PQA* consiste, tanto em se determinar uma permutação $\pi \in S_n$ que minimize o somatório em (2.17) como em determinar um automorfismo de $L(K_n)$. Esta formulação, tendo o conjunto dos automorfismos do grafo linha de K_n como espaço solução do problema, pode ser expressa como segue:

$$\min_{\pi \in Aut(L(K_n))} \sum_{i=1}^N f_i d_{\pi(i)} \cdot \quad (2.28)$$

Dado ser esta uma formulação recente, os primeiros trabalhos nesta linha estão em fase de experimentação (Marins, 2001).

2.2 Problemas Relacionados ao PQA

O alcance teórico dos estudos do PQA atinge a uma série de problemas que aqui apresentamos, nos limitando a definição de cada um com suas respectivas referências: *PQA Bottleneck*, Problema Biquadrático de Alocação, PQA 3-dimensional, Problema Semiquadrático de Alocação e PQA Multiobjetivo. Estes problemas, em sua maioria, foram relatados em Burkard (2002).

PQA Bottleneck: este problema é uma variação do PQA e consiste em calcular um coeficiente de valor mínimo dentre os máximos produtos dos “fluxos por distâncias” para cada permutação dada. Isto resulta na expressão:

$$\min_{\pi \in S_n} \max \{ f_{ij} d_{\pi(i)\pi(j)} : 1 \leq i, j \leq n \}. \quad (2.29)$$

A formulação acima também pode ser utilizada substituindo-se os elementos do conjunto em (2.29) por coeficientes mais gerais c_{ijkl} , $1 \leq i, j, k, l \leq n$. Este caso do PQA foi estudado em Steinberg (1961), Burkard & Fincke (1982), Burkard & Zimmermann (1982) e Burkard (2002).

O Problema Biquadrático de Alocação (Biquadratic Assignment Problem): Proposto por Burkard *et al.* (1994) foi também estudado por outros pesquisadores, destacando-se as referências Burkard & Çela (1995), Mavridou *et al.* (1998) e Burkard (2002). Tem como dados, matrizes de fluxos e distâncias $F = [f_{ijkl}]$ e $D = [d_{mpst}]$, cada uma delas de ordem n^4 . O que se deseja é determinar uma permutação $\pi \in S_n$, cujo custo associado seja mínimo, dentre aquelas que fornecem os valores do quádruplo somatório:

$$\min_{\pi \in S_n} \sum_{i,j,k,l=1}^n f_{ijkl} d_{\pi(i)\pi(j)\pi(k)\pi(l)}. \quad (2.30)$$

O PQA 3-dimensional (Three-index Assignment Problem): neste, diferentemente do caso anterior, deseja-se determinar duas permutações π e $\varphi \in S_n$, tais que minimize a expressão:

$$\min_{\pi, \varphi \in S_n} \sum_{i=1}^n c_{i\pi(i)\varphi(i)}. \quad (2.31)$$

Foi sugerido por Pierskalla (1967, 1968). Alguns anos depois, Hansen & Kaufman (1973) apresentaram um algoritmo primal-dual para o problema e Burkard & Fröhlich (1980) propuseram um algoritmo do tipo *branch-and-bound* para resolvê-lo. Emelichev *et al.* (1984) fornecem uma análise detalhada sobre problemas de transporte com múltiplos índices, baseado nesta formulação. O PQA 3-dimensional é um dos problemas mais estudados, relacionados ao quadrático de alocação, como se observa pela extensa lista de referências disponíveis: Vlach (1967), Frieze (1974, 1983), Frieze & Yadegar (1981), Burkard *et al.* (1986, 1996a, 1996b), Euler (1987), Balas & Saltzman (1989), Balas & Saltzman (1991), Bandelt *et al.* (1991), Crama & Spieksma (1992), Balas & Qi (1993), Burkard & Rudolf (1993), Qi *et al.* (1994), Magos & Miliotis (1994), Poore (1994a, 1994b, 1995, 1997), Fortin & Rudolf (1995), Burkard & Çela (1996), Magos (1996), Aiex (2000) e Burkard (2002).

O Problema Semiquadrático de Alocação (Quadratic Semiassignment Problem ou Semi-quadratic Assignment Problem): foi estudado em Carraresi & Malucelli (1994) e pode ser expresso matematicamente assim:

$$\min \sum_{k=1}^m \sum_{i,j=1}^n c_{ij} x_{ik} x_{jk} \quad (2.32)$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{k=1}^m x_{ik} = 1 \quad 1 \leq i \leq n, \quad (2.33)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad 1 \leq i, j \leq n. \quad (2.34)$$

Algumas aplicações daí derivadas estão em Simeone (1986a, 1986b) e Bullnheimer (1998) e referências para casos polinomiais e para heurísticas são Freeman *et al.* (1966), Magirou & Milis (1989) e Malucelli & Pretolani (1993).

O PQA Multiobjetivo (Multiobjective QAP – mQAP): Recentemente em Knowles & Corne (2002a, 2002b) apresentaram uma outra variação do PQA que considera múltiplas matrizes de fluxos. Este problema foi introduzido como um caso de *benchmark problem* a ser solucionado por metaheurísticas multiobjetivas ou algoritmos evolucionários multiobjetivos. Segundo os autores esta forma parece ser mais apropriada para alguns tipos de problemas de *layout*, como o de alocação de instalações em hospitais, onde é necessário minimizar simultaneamente os produtos dos fluxos pelas distâncias entre médicos e pacientes e entre enfermeiros e equipamentos médicos. Sua expressão matemática é:

$$\min_{\pi \in S_n} \bar{C}(\pi) = \{C^1(\pi), C^2(\pi), \dots, C^m(\pi)\},$$

$$\text{onde:} \quad C^k(\pi) = \sum_{i,j=1}^n f_{ij}^k d_{\pi(i)\pi(j)} \quad 1 \leq k \leq m. \quad (2.35)$$

Nesta última restrição f_{ij}^k denota o k -ésimo fluxo entre a facilidade i e a facilidade j .

3. Limites Inferiores

O estudo de limites inferiores é importante no desenvolvimento de algoritmos de resolução de problemas de programação matemática e de otimização combinatória. Em geral, os métodos exatos trabalham com enumeração implícita, procurando-se garantir o ótimo e ao mesmo tempo evitando-se a enumeração completa das soluções viáveis dos problemas. O desempenho de tais métodos depende diretamente da qualidade e da eficiência computacional dos limites inferiores envolvidos. Desta forma, os limites inferiores tornam-se instrumentos fundamentais para as técnicas *branch-and-bound* e também para testar a qualidade das soluções produzidas por algoritmos heurísticos. Medimos a qualidade de um limite inferior pela distância entre o mesmo e a solução ótima do problema. Assim, bons limites devem estar próximos dos valores ótimos. Os limites inferiores para os métodos exatos, além de apresentarem boa qualidade, precisam ser eficientes computacionalmente, enquanto na avaliação de métodos heurísticos eles devem ser escolhidos muito mais em função de sua qualidade do que do tempo computacional gasto para calculá-los. Em problemas NP-árduos, procura-se sempre por bons limites inferiores. No caso do PQA, um dos mais difíceis, esta é uma tarefa desafiadora.

Dentre os limites mais conhecidos para o PQA, destaca-se o de Gilmore e Lawler, por ser um dos mais simples e de baixo custo computacional. Sua inconveniência está em que a distância entre ele e o custo da a solução ótima do problema cresce muito rapidamente com o aumento do tamanho do problema, tornando-o assim um limite de baixa qualidade para exemplares grandes. Atualmente, os limites inferiores baseados em autovalores e

programação semidefinida são os melhores encontrados, porém são bastante caros computacionalmente. No entanto, Anstreicher & Brixius (2001) desenvolveram um novo limite inferior para o *PQA*, utilizando programação semidefinida e programação quadrática convexa, que apresenta uma relação muito boa entre custo e qualidade.

O limite de Gilmore e Lawler (GLB) (Lawler, 1963; e Gilmore, 1962): é dado pela solução do seguinte Problema de Alocação Linear (*PAL*):

$$\min \sum_{i,j=1}^n (b_{ij} + l_{ij}) \cdot x_{ij} \quad (3.1)$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad 1 \leq j \leq n; \quad (3.2)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad 1 \leq i \leq n; \quad (3.3)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad 1 \leq i, j \leq n. \quad (3.4)$$

Para resolver o problema de minimização de (3.1) a (3.4) é preciso determinar os coeficientes l_{ij} , resolvendo o *PAL* abaixo:

$$l_{ij} = \min \sum_{k,p=1}^n c_{ijkp} \cdot y_{ijkp} \quad k \neq i, p \neq j \quad (3.5)$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{k=1}^n y_{ijkp} = 1 \quad 1 \leq p \leq n, \quad (3.6)$$

$$\sum_{p=1}^n y_{ijkp} = 1 \quad 1 \leq k \leq n, \quad (3.7)$$

$$y_{ijkp} \in \{0, 1\} \quad 1 \leq i, j, k, p \leq n. \quad (3.8)$$

Métodos que melhoram a qualidade do *GLB*, bem como o seu uso em algoritmos para resolver o *PQA*, podem ser encontrados em Roucairol (1979, 1987), Edwards (1980), Frieze & Yadegar (1983), Finke *et al.* (1987), Maniezzo (1997), Burkard (1991), Brüngger *et al.* (1997, 1998), e Spiliopoulos & Sofianopoulou (1998).

Limites Baseados em Relaxações PLIM: A solução ótima de um problema formulado por *PLIM* é um limite inferior para o ótimo do *PQA* correspondente e cada solução do dual de programação linear é, também, um limite inferior para o ótimo do *PQA*. Em vista disso, diversos autores utilizam esta ferramenta, destacando-se Frieze & Yadegar (1983), Assad & Xu (1985), Adams & Johnson (1994), Drezner (1995), Ramachandran & Pekny (1998) e Karisch *et al.* (1999).

Limites Baseados em Reformulações do GLB: As idéias utilizadas para calcular o *GLB* foram adaptadas por outros autores, dando origem aos limites inferiores dados por Frieze & Yadegar (1983), Assad & Xu (1985), Carraresi & Malucelli (1992, 1994) e Adams & Johnson (1994) e a um limite baseado em na formulação dual de Hahn & Grant (1998) e Hahn *et al.* (1998). Tais limites definem uma seqüência finita de problemas equivalentes ou reformulações do problema original, em geral relaxações lineares, e calculam o limite de Gilmore e Lawler para cada reformulação. A seqüência de problemas $P_0 = P, P_1, \dots, P_k$, produz outra, de soluções, que correspondem às relaxações lineares, fornecendo então uma seqüência de limites inferiores não decrescentes para o *PQA*. Os limites produzidos por Assad & Xu (1985) e por Carraresi & Malucelli (1992, 1994) são comparáveis aos obtidos por Frieze & Yadegar (1983) em termos de qualidade, com a vantagem de demandar menor tempo computacional. Não há, no entanto, uma prova teórica de sua convergência. Ainda

nesta linha, temos os limites baseados em formulações duais: tais limites combinam as idéias do *GLB* com um esquema de redução iterativo, utilizando o dual de uma relaxação de programação linear do problema original (Hahn & Grant, 1998; Hahn *et al.*, 1998). Os resultados computacionais de Hahn & Grant (1998) mostram que estes limites são competitivos em termo de qualidade quando comparados a alguns dos melhores limites existentes, sendo superiores em termos de tempo computacional.

Limites Baseados em Métodos de Pontos Interiores: Resende *et al.* (1995) usam uma relaxação linear dada por *PLIM* conjugada com métodos de pontos interiores e com um algoritmo aproximado, conhecido por dual projetivo de Karmarkar & Ramakrishnan (1991). Com o uso desta técnica, eles obtiveram limites melhores que os de Adams & Johnson (1994), em termos de qualidade, sendo superados somente pelos limites baseados em decomposição triangular que só podem ser calculados para *PQA*'s com estruturas especiais, (*PQA grids*). No entanto, estes limites requerem alto esforço computacional, não sendo recomendado para algoritmos do tipo *branch-and-bound*. Neste caso, recomenda-se o limite inferior dual de Hahn & Grant (1998), pois trata-se do único limite conhecido capaz de com menor esforço computacional competir com o anterior em termos de qualidade.

Limites por Redução de Variância: Propostos inicialmente por Li *et al.* (1994a), são baseados em esquemas de redução ao ótimo do *PQA*, definidos a partir da variância das matrizes F e D . Estes pesquisadores usam estes limites em um algoritmo *branch-and-bound*. Experimentalmente, eles apresentam baixo custo computacional e, em geral, são melhores que o de Gilmore e Lawler, sendo mais eficientes quando as matrizes de fluxos e distância possuem variância alta.

Limites Baseados na Formulação por Grafos: Como já vimos, matrizes $n \times n$, F e D , que armazenam os dados para um exemplar do *PQA*, podem ser vistas como matrizes de adjacência de dois grafos valorados e completos K_F e K_D . Sabemos que cada permutação $\pi \in S_n$ define um isomorfismo entre K_F e K_D . Se considerarmos $Z(F, D, \pi)$ como o custo deste isomorfismo, resolver o *PQA* significa encontrar um isomorfismo de custo mínimo entre K_F e K_D . Um limite inferior que usa este conceito foi proposto originalmente por Lawler (1963) e por Gavett & Plyter (1966), sendo posteriormente adaptado por Christofides & Gerrard (1981). A idéia básica consiste em decompor os grafos K_F e K_D em k subgrafos isomorfos, $K_F(1), K_F(2), \dots, K_F(k)$ e $K_D(1), K_D(2), \dots, K_D(k)$. Deste modo, os subgrafos $K_F(i)$ e $K_D(i)$, devem ter o mesmo conjunto de vértices de K_F e K_D e toda aresta em cada uma das cliques deve estar presente em pelo menos um dos subgrafos correspondentes. Portanto, o número de ocorrências de uma aresta de K_F e K_D nos subgrafos $K_F(i)$ e $K_D(i)$ é uma constante d . Um isomorfismo entre K_F e K_D , associa cada subgrafo $K_F(i)$ a exatamente um subgrafo $K_D(j)$, $1 \leq i, j \leq k$. O valor ótimo de um custo correspondente ao *PAL*, definido a partir dos coeficientes de custos do *PQA*, multiplicado por $1/d$, determina um limite inferior para o valor do custo ótimo do problema quadrático.

Limites Espectrais: Há dois grupos deles, um apresenta limites derivados da formulação traço e o outro reúne aqueles relacionados à formulação *PSD*. Ambos são determinados em função dos autovalores das matrizes relacionadas aos dados do problema. Em geral, os limites espectrais são os melhores conhecidos para o *PQA*, mas o seu cálculo envolve determinação de raízes de polinômios (autovalores) que, como sabemos, é de grande dificuldade computacional. Limites espectrais podem ser encontrados em: Finke *et al.* (1984, 1987), Rendl (1985), Hadley *et al.* (1990, 1992a, 1992b), Rendl & Wolkowicz (1992), Karisch *et al.* (1994), Zhao *et al.* (1998), Anstreicher (2001) e Anstreicher & Brixius (2001).

4. Métodos de Resolução

Uma estratégia para alcançar uma solução exata de problemas muito complexos é dividi-lo em subproblemas menores na tentativa de resolvê-los de forma exata. No entanto, na maioria dos casos, tais problemas somente são resolvidos de forma heurística, a partir da combinação de diferentes métodos. No contexto do *PQA* apresentaremos as diferentes técnicas utilizadas para resolvê-lo, destacando-se as referências mais importantes.

4.1 Algoritmos Exatos

Os diferentes métodos utilizados para encontrar uma solução ótima global para o *PQA* compreendem *branch-and-bound*, planos de corte ou combinações destes, como *branch-and-cut*, e programação dinâmica. Os algoritmos do tipo *branch-and-bound* são os mais conhecidos e utilizados e são definidos a partir de uma regra de alocação e de uma regra de corte que, em geral, é ditada por um limite inferior do problema. Em Gilmore (1962), Land (1963) e Lawler (1963) encontramos os primeiros esquemas enumerativos que usam limites inferiores para eliminar soluções não desejadas. Diversas referências estão disponíveis sobre algoritmos *branch-and-bound* para o *PQA*. Dentre as mais antigas, destacamos Gavett & Plyter (1966), Nugent *et al.* (1969), Graves & Whinston (1970), Pierce & Crowston (1971), Burkard & Stratman (1978), Bazaraa & Elshafei (1979), Mirchandani & Obata (1979), Roucairol (1979), Burkard & Derigs (1980), Edwards (1980), Bazaraa & Kirca (1983), Kaku & Thompson (1986) e Pardalos & Crouse (1989) e dentre as mais recentes temos Burkard (1991), Laursen (1993), Mans *et al.* (1995), Bozer & Suk-Chul (1996), Pardalos *et al.* (1997), Brügger *et al.* (1998), Ball *et al.* (1998), Spiliopoulos & Sofianopoulou (1998) e Brixius & Anstreicher (2001). Nos últimos anos estão sendo muito utilizados procedimentos que combinam técnicas de *branch-and-bound* com implementação paralela. É através destas implementações que se tem obtido os melhores resultados para o *PQA*, cujo sucesso na resolução de instâncias maiores também está diretamente relacionado ao avanço tecnológico alcançado em relação ao *hardware*. Os resultados publicados nesta categoria estão em Roucairol (1987), Pardalos & Crouse (1989), Mautor & Roucairol (1994a), Brügger *et al.* (1997), Clausen & Perregaard (1997) e Maniezzo (1997).

A *programação dinâmica* é uma técnica utilizada em casos especiais do *PQA* onde a matriz de fluxos é a matriz de adjacência de uma árvore. Estes casos foram estudados por Christofides & Benavent (1989) que, utilizando a abordagem *PLIM*, resolvem o problema relaxado com um algoritmo de programação dinâmica. Isto só foi possível, porque tais instâncias têm complexidade polinomial. Esta técnica também foi utilizada por Urban (1998).

Métodos de planos de corte aplicados ao *PQA* foram introduzidos por Bazaraa & Sherali (1980). Tais métodos apesar de não apresentarem resultados satisfatórios contribuíram na formulação de algumas heurísticas baseadas em planos de corte que fazem uso de *PLIM* e da decomposição de Benders. A técnica empregada ainda não é amplamente utilizada, mas têm fornecido soluções de boa qualidade no caso do *PQA*, cuja convergência lenta, só permite resolver pequenas instâncias (Kaufman & Broeckx, 1978; Balas & Mazolla, 1980; Bazaraa & Sherali, 1980, 1982; e Burkard & Bonniger, 1983). A técnica *branch-and-cut*, cujo termo foi proposto originalmente por Padberg & Rinaldi (1991), surge como uma estratégia alternativa às anteriores e explora o polítopo definido pelas soluções viáveis do problema considerado. A principal vantagem de algoritmos *branch-and-cut* sobre os de planos de corte é o uso de cortes que são válidos para o polítopo formado por todas as soluções viáveis,

definindo facetas. Tais cortes associados às facetas são mais significativos que os produzidos pelo método de planos de corte, pois a convergência para uma solução ótima é acelerada. O pouco conhecimento do polítopo caracterizado pelas soluções do *PQA* é o motivo pelo qual os planos de corte poliédricos ainda quase não são aplicados neste caso. Apesar disso, alguns pesquisadores tem conseguido, nos anos mais recentes, encontrar propriedades básicas desse polítopo, o que poderá contribuir para futuros desenvolvimentos de algoritmos. Consulte Jünger & Kaibel (1996a, 1996b, 2001) e Padberg & Rijal (1996).

4.2 Algoritmos Heurísticos

Algoritmos heurísticos são aqueles que não apresentam garantia de determinação da solução ótima para o problema estudado. Os métodos aproximativos podem se enquadrar nesta categoria, acrescentando-se que, para estes casos, são conhecidas propriedades com garantia do pior caso. Além disso, conforme Osman & Laporte (1996), é comum, na literatura de Otimização Combinatória, os algoritmos aproximativos serem tratados como algoritmos heurísticos. É neste contexto que nos enquadraremos – estamos considerando técnicas heurísticas apenas como procedimentos dedicados ao problema considerado na busca de soluções de boa qualidade. As técnicas mais abrangentes e atuais que podem ser adaptadas a diversos problemas são as metaheurísticas e serão objetos do próximo tópico. As heurísticas para o *PQA* abrangem os seguintes tipos: métodos construtivos, métodos de enumeração limitada e métodos de melhoria. Ao final deste item, destacamos os algoritmos aproximativos com propriedades matemáticas para garantir o pior caso mas, que dado a dificuldade do *PQA*, são aplicados apenas a instâncias muito particulares.

Os métodos construtivos surgiram com Gilmore (1962) e sugerem, em cada caso, a construção de uma permutação, de modo que a cada passo um objeto é atribuído a um dado local. Considere os conjuntos A e L , o primeiro, de objetos alocados e o segundo, de localizações ocupadas, ambos inicialmente vazios. Em tais métodos a construção de uma permutação π é feita de forma heurística, escolhendo-se a cada passo, a próxima alocação (i,j) , tal que $i \notin A, j \notin L$, e fazendo-se $\pi(i) = j$. Para um problema de ordem n o processo é repetido até completar uma permutação na ordem do problema. Tais métodos foram utilizados em Armour & Buffa (1963), Buffa *et al.* (1964), Sarker *et al.* (1995, 1998), Tansel & Bilen (1998), Burkard (1991), Arkin *et al.* (2001), Gutin & Yeo (2002) e Yu & Sarker (2003).

Os métodos de enumeração somente podem garantir que a solução encontrada é ótima se chegarem ao final do processo enumerativo. No entanto, é muito comum que uma boa solução, ou até mesmo uma solução ótima, seja encontrada no início da enumeração. Observa-se que, quanto melhores são as informações utilizadas para guiar a enumeração, maiores serão as chances de se encontrar prematuramente soluções de boa qualidade. No entanto, garantir o ótimo para a solução encontrada, em geral, é muito demorado. Para limitar esta enumeração, são definidas condições de parada, tais como: um número máximo de iterações realizadas pelo algoritmo; finalizar o algoritmo se após um número pré-determinado de passos não ocorrer nenhuma melhoria da função custo; tempo máximo de execução, etc. Torna-se bastante claro que qualquer um destes critérios de parada pode ocasionar a eliminação da solução ótima, o que nos leva a tomar certos cuidados ao utilizar métodos de enumeração limitada (Burkard & Bonniger, 1983; e West, 1983).

Os métodos de melhoria compreendem os algoritmos de busca local. A maioria das heurísticas aplicada ao *PQA* faz parte desta categoria. Um método de melhoria inicia-se com uma solução viável e tenta melhorá-la, procurando outras soluções em sua vizinhança.

O processo é repetido até que nenhuma melhoria possa ser encontrada. Os elementos básicos de tais métodos são: a vizinhança e o critério de seleção que define a ordem em que os elementos vizinhos são analisados (Mirchandani & Obata, 1979; Bruijs, 1984; Burkard & Çela, 1995; Li & Smith, 1995; Anderson, 1996; e Talbi *et al.*, 1998a). Métodos nesta categoria são comumente utilizados pelas metaheurísticas.

Antes de finalizar este item, vale considerar que até agora, os algoritmos aproximativos com garantia de performance por uma constante só foram obtidos para casos muito especiais do *PQA*, quando, por exemplo, a matriz de distâncias atende a desigualdade triangular (Queyranne, 1986) ou quando o problema é tratado como um caso de clique maximal com limite máximo definido previamente (Arkin *et al.*, 2001).

4.3 Metaheurísticas

Até o final dos anos 80, os métodos heurísticos propostos para resolver problemas de otimização combinatória eram, em sua maioria, específicos e dedicados a um dado problema. A partir daí, esse paradigma muda e surge um grande interesse em técnicas que sejam mais gerais e por isso, aplicáveis a diversos problemas. Técnicas assim são conhecidas por metaheurísticas. Dentre elas destacam-se: *simulated annealing*, busca tabu, algoritmos genéticos, *scatter search*, *grasp* (*greedy randomized adaptive search procedures*), colônia de formigas, busca em vizinhança variável, conhecida também por *VNS* (*variable neighbourhood search*), e outras técnicas. Com o surgimento das metaheurísticas, o Problema Quadrático de Alocação ganhou um novo impulso, dado que toda metaheurística ao ser implementada usa o *PQA* como elemento de prova de sua eficiência, uma vez que este é um dos mais difíceis problemas de otimização combinatória. Em Maniezzo & Colorni (1995) e Taillard *et al.* (2001) são analisados e comparados resultados de algumas metaheurísticas aplicadas ao *PQA*, tais como busca tabu, genético, *scatter search*, colônia de formigas e algumas propostas híbridas.

Simulated Annealing é um algoritmo de busca local que explora a analogia entre os problemas de otimização combinatória e os da mecânica estatística (Kirkpatrick *et al.*, 1983). Tal analogia é feita associando-se as soluções viáveis dos problemas de otimização combinatória a estados dos sistemas físicos sendo que seus custos são associados à energia desses estados. Consideremos dois estados sucessivos de energia E_i e E_{i+1} , correspondendo a duas soluções vizinhas e tomemos $\Delta E = E_{i+1} - E_i$. As seguintes situações podem ocorrer: se $\Delta E < 0$, há redução de energia e o processo continua, ou seja, há redução na função custo do problema e a nova alocação deve ser aceita; se $\Delta E = 0$, há situação de estabilidade e portanto, não há alteração de energia, isto é, a função custo do problema permanece inalterada; se $\Delta E > 0$, fica caracterizado um aumento de energia, útil no processo físico para permitir uma futura acomodação das partículas, ou seja, a função custo do problema sofre aumento. Ao invés desta alocação ser eliminada, ela poderá eventualmente ser aproveitada. Para isso, uma função de probabilidade deverá ser acionada para evitar a convergência da função para mínimos locais indesejáveis. Uma das primeiras aplicações do *simulated annealing* ao *PQA* foi proposta por Burkard & Rendl (1983). Posteriormente, novos componentes de equilíbrio foram apresentados por Wilhelm & Ward (1987). Connolly (1990) introduziu um conceito de “temperatura ótima” que fornece resultados promissores. Mais tarde, Abreu *et al.* (1999) aplicaram a técnica ao *PQA*, procurando reduzir o número de inversões associado à solução do problema, ao invés de custo. Outros trabalhos que abordam ou adotam o *simulated annealing* para resolver o *PQA* são Bos (1993), Burkard & Çela

(1995), Peng *et al.* (1996), Mavridou & Pardalos (1997), Chiang & Chiang (1998), Tian *et al.* (1999), Tsuchiya *et al.* (2001) e Siu & Chang (2002).

Busca Tabu é um algoritmo de busca local introduzido por Glover (1989a, 1989b) para problemas de programação inteira, com o objetivo de encontrar soluções de boa qualidade. Caracteriza-se pela existência de uma lista atualizada das melhores soluções encontradas no decorrer do algoritmo, onde cada solução possui um valor de prioridade ou critério de aspiração. Seus ingredientes básicos são: uma lista tabu, para armazenar um histórico da evolução do processo de busca; um mecanismo que permite aceitar ou rejeitar uma nova alocação na vizinhança, baseado nas informações armazenadas na lista tabu e suas respectivas prioridades; e um mecanismo que permite alternar entre estratégias de diversificação e intensificação na vizinhança. Várias adaptações deste algoritmo para o *PQA* podem ser encontradas em Skorin-Kapov (1990, 1994), Taillard (1991), Bland & Dawson (1991), Rogger *et al.* (1992), Chakrapani & Skorin-Kapov (1993) e Misevicius (2003a). O desempenho de tais algoritmos, apesar da inconveniência de dependerem muito do tamanho da lista tabu e da forma como esta lista é manipulada, os mostra como estratégias bastante eficientes para o *PQA*, segundo análises feitas em Taillard (1991) e Battiti & Tecchiolli (1994a). Em Taillard (1995), podemos encontrar uma comparação do uso de busca tabu e algoritmo genético, ambos aplicados ao problema em questão.

Algoritmos Genéticos são técnicas que se apoiam nos mecanismos de seleção e adaptação natural das espécies. Tais algoritmos mantêm uma população formada por um subconjunto de indivíduos, que no caso do *PQA* correspondem às permutações viáveis, com valores de aptidão associados aos custos de tais permutações. Através dos chamados operadores genéticos e de critérios de seleção, cada algoritmo substitui uma população de indivíduos por outra, com valores de aptidão, em média, melhores. A idéia básica consiste em acreditar que os melhores indivíduos sobrevivem e geram descendentes com suas características hereditárias, de maneira semelhante à teoria biológica das espécies. De forma análoga, os algoritmos genéticos partem de um conjunto de soluções iniciais geradas aleatoriamente, avaliam seus custos, selecionam um subconjunto das melhores soluções e realizam operações genéticas sobre elas, gerando um novo conjunto de soluções ou uma nova população (Davis, 1987 e Goldberg, 1989). Algumas propostas de algoritmos genéticos para o *PQA* estão em Brown *et al.* (1989), Bui & Moon (1994), Tate & Smith (1995), Mavridou & Pardalos (1997), Tavakkoli-Moghaddain & Shayan (1998) e Gong *et al.* (1999). A utilização destes algoritmos ao *PQA* apresenta dificuldades na obtenção de soluções ótimas, até mesmo para pequenas instâncias. Porém, propostas híbridas utilizando algoritmos genéticos mostraram-se mais promissoras, como veremos adiante.

Scatter Search foi introduzida por Glover (1977) em um estudo heurístico de problemas de programação linear inteira. É um método evolutivo que considera combinações lineares de vetores-solução para produzir novos vetores-solução através de gerações sucessivas. Esta metaheurística é composta por uma fase inicial e outra evolutiva. Na primeira, se constitui um conjunto de soluções, das quais as melhores são escolhidas para fazerem parte de um conjunto referência. Na fase evolutiva, novas soluções são geradas utilizando combinações de subconjuntos referência que são selecionados estrategicamente. A partir daí, um conjunto das melhores soluções geradas é incluído no conjunto referência. Os procedimentos da fase evolutiva são repetidos até que o processo satisfaça a um critério de parada qualquer. Uma aplicação ao *PQA* pode ser encontrada em Cung *et al.* (1977).

GRASP (Greedy Randomized Adaptive Search Procedures) é uma técnica aleatória e iterativa onde, a cada iteração, uma solução aproximada para o problema é obtida. A melhor

solução resultante de todas as iterações é a solução final. Em cada iteração, a primeira solução é construída através de uma função gulosa aleatória e as soluções posteriores são obtidas aplicando-se, sobre a solução anterior, um algoritmo de busca local que forneça uma nova solução melhor que a anterior. Ou seja, cada iteração é composta por duas fases, uma de construção e outra de busca local. Ao final de todas as iterações, a solução resultante é a melhor solução gerada. Nada garante que soluções geradas por uma construção *grasp* não recaiam em ótimos locais. Assim, é importante aplicar a fase de busca local na tentativa de melhorar tais soluções. Com o uso de estruturas de dados personalizadas e uma implementação cuidadosa, uma fase construtiva eficiente pode produzir boas soluções iniciais, possibilitando uma busca local eficiente. Esta técnica foi aplicada ao *PQA* por diversos pesquisadores e pode ser encontrada nos seguintes artigos: Li *et al.* (1994b), Feo & Resende (1995), Resende *et al.* (1996), Fleurent & Glover (1999), Ahuja *et al.* (2000), Pitsoulis *et al.* (2001) e Rangel *et al.* (2000). Também foi aplicada a variações do *PQA*: Mavridou *et al.* (1998) a aplicaram ao *BiPQA* e Aiex *et al.* (2000) ao *PQA* 3-dimensional. Os resultados mostram que o *grasp* de Ahuja *et al.* (2000) é o algoritmo que apresenta melhores resultados.

Colônia de Formigas trata-se de uma classe de algoritmos distribuídos que tem como principal característica, a definição de propriedades na interação de vários agentes simples. Tem como princípio a forma como as formigas são capazes de encontrar um caminho do formigueiro até uma fonte de alimento e vice-versa. Cada agente simples é chamado de formiga e o conjunto de formigas, cooperando numa atividade comum para resolver um problema, constitui o sistema *AS*. A principal característica do método é que a interação desses agentes gera um efeito sinérgico, pois a qualidade da solução obtida aumenta quando tais agentes trabalham juntos, interagindo entre si, para a resolução de um mesmo problema. Resultados numéricos para o *PQA* são apresentados em Maniezzo & Colomi (1995, 1999), Colomi *et al.* (1996), Dorigo *et al.* (1996), Maniezzo (1997) e Gambardella *et al.* (1999) mostram que colônias de formigas são heurísticas competitivas, principalmente para instâncias que possuam poucas soluções boas próximas umas das outras. Outras referências sobre este assunto estão em Stützle & Dorigo (1999), Stützle & Holger (2000) e Talbi *et al.* (2001).

Busca em Vizinhança Variável, conhecida por *VNS* (*Variable Neighbourhood Search*), foi introduzida por Mladenović (1995) e Mladenović & Hansen (1997). É baseada na mudança sistemática das vizinhanças utilizadas na busca e vem sendo aplicada na resolução de grandes exemplares para problemas combinatórios. Em Taillard & Gambardella (1999) são propostas três estratégias para o *PQA*, sendo uma delas uma busca em vizinhança variável, segundo o paradigma básico, e as outras duas, métodos híbridos baseados em combinações de métodos descritos anteriormente.

Além disso, existem diversas propostas de algoritmos híbridos aplicados ao *PQA*. No artigo Bölte & Thonemann (1996) os autores combinam *simulated annealing* com genético, Battiti & Tecchiolli (1994b), Bland & Dawson (1994) e Chiang & Chiang (1998) usam busca tabu com *simulated annealing* para o problema de *layout*, enquanto Hasegawa *et al.* (2002) e Talbi *et al.* (1998b) utilizam busca tabu junto com redes neurais. Propostas híbridas que combinam algoritmos genéticos com busca tabu (Fleurent & Ferland, 1994) ou com algoritmo guloso (Ahuja *et al.*, 2000) mostraram-se mais promissoras que o uso de genético. Algumas categorias de algoritmos genéticos híbridos são conhecidas como *memetic algorithms* ou *evolutionary algorithms*. Nesta linha podem ser encontrados os seguintes trabalhos: Brown *et al.* (1989), Brown & Huntley (1991), Carrizo *et al.* (1992), Huntley & Brown (1996), Merz & Freisleben (1997), Nissen (1997), Ostrowski & Ruoppila (1997) e Misevicius (2003b). Há, ainda, uma técnica introduzida por Goldberg & Goldberg (2002)

que usa uma variação dos algoritmos genéticos, chamada de heurísticas transgenéticas. Aplicadas ao *PQA*, elas apresentaram resultados no máximo compatíveis com os demais, sem acrescentar ganhos em tempo de computação.

Mais recentemente, as redes neurais vêm sendo aplicadas ao *PQA* por Liang (1996), Obuchi *et al.* (1996), Tsuchiya *et al.* (1996), Ishii & Sato (1998, 2001), Rossin *et al.* (1999) e Hasegawa *et al.* (2002). Finalmente, em 2003, um trabalho que utiliza a definição de pontos extremos em um algoritmo de busca local foi desenvolvido por Fedjki & Duffuaa (2004) para resolver o problema.

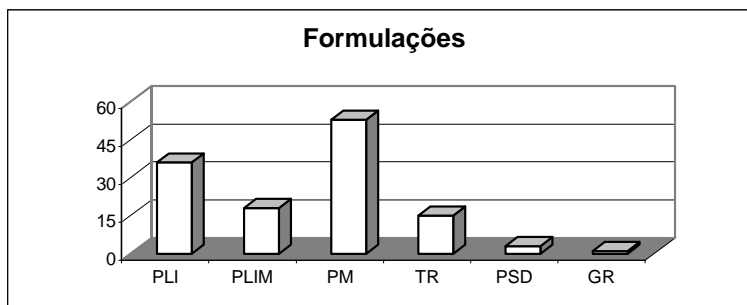
5. Conclusões

Após apresentarmos o *PQA* por diversas abordagens, seria interessante analisarmos, face às referências aqui inseridas, como as diferentes formulações puderam contribuir para o avanço no estudo do problema, tanto na determinação de limites inferiores, como na construção de métodos de resolução. Também, é possível interpretar como o problema quadrático de alocação vem se desenvolvendo ao longo destes 50 anos. Por exemplo, é possível responder a seguinte questão: Por que motivos, em um dado período, as pesquisas em torno deste tema foram mais intensas, despertando maior interesse da comunidade científica?

A bibliografia apresentada neste trabalho com 278 publicações listadas determina o universo para esta análise. Nas tabelas que se seguem, as referências são agrupadas por tipos de abordagem dada ao problema, determinadas pelas formulações classificadas na seção 2; tipos de limites inferiores adotados segundo a classificação da seção 3; técnicas ou procedimentos de resolução dados na seção 4; pela distribuição das referências em relação a aplicações do *PQA* versus desenvolvimento teórico (formulações, limites inferiores e estudos referentes à dificuldade computacional) versus procedimentos de resolução e, finalmente, pela distribuição das referências ao longo do tempo.

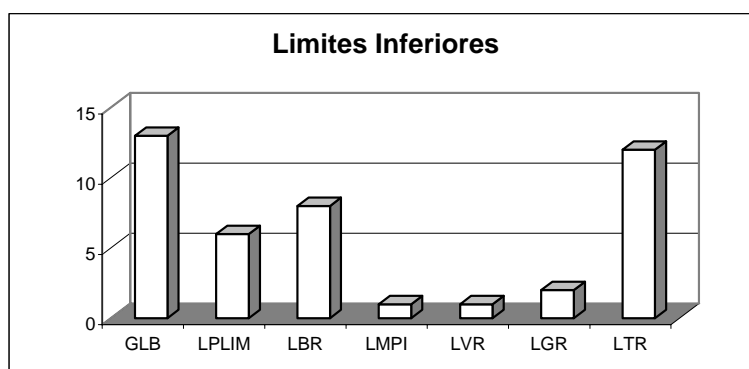
A Tabela 1 apresenta o número de publicações relacionadas às distintas formulações do *PQA*, aqui classificadas por Programação Linear Inteira (*PLI*), Programação Linear Inteira Mista (*PLIM*), Permutação (*PM*), Traço (*TR*), Programação Semidefinida (*PSD*) e Grafos (*GR*). Observamos que a abordagem do *PQA* que identifica solução com permutação é a que mais vem sendo utilizada, seguida pelas formulações dadas por programação linear inteira e linear inteira mista. As formulações menos adotadas na literatura, talvez por se tratarem das mais recentes, são aquelas que derivam da programação semidefinida e aquelas exclusivamente adotadas por grafos.

Tabela 1 – Publicações Relativas a Formulações do *PQA*.



A Tabela 2 apresenta a quantidade de publicações relacionadas aos limites inferiores, seguindo a classificação que adotamos neste artigo, ou seja, limites de Gilmore e Lawler (*GLB*), limites baseados em relaxações *PLIM* (*LPLIM*), limites baseados em reformulações (*LBR*), limites baseados em Métodos de Pontos Interiores (*LMPI*), limites por redução de variância (*LVR*), limites baseados na formulação por grafos (*LGR*) e, finalmente, limites derivados da formulação traço (*LTR*), também chamados por limites espectrais.

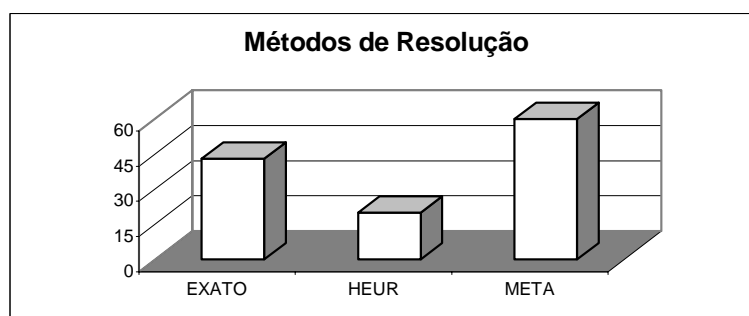
Tabela 2 – Publicações Relativas a Limites Inferiores.



Observando a Tabela 2, concluímos que a maioria dos trabalhos utiliza os limites inferiores derivados do de Gilmore e Lawler (*GLB*), seguido dos limites espectrais. Observamos que a quantidade de trabalhos que abordam os limites espectrais é considerável, sendo os mais recentes e os melhores em qualidade. No entanto, os mais rápidos para calcular e que também são eficientes correspondem aos derivados do *GLB*. Isto justifica a distribuição retratada por esta tabela.

A Tabela 3 registra a distribuição de referências pelos métodos de resolução aqui classificados por: Métodos Exatos (*EXATO*), Métodos Heurísticos (*HEUR*) e Metaheurísticas (*META*).

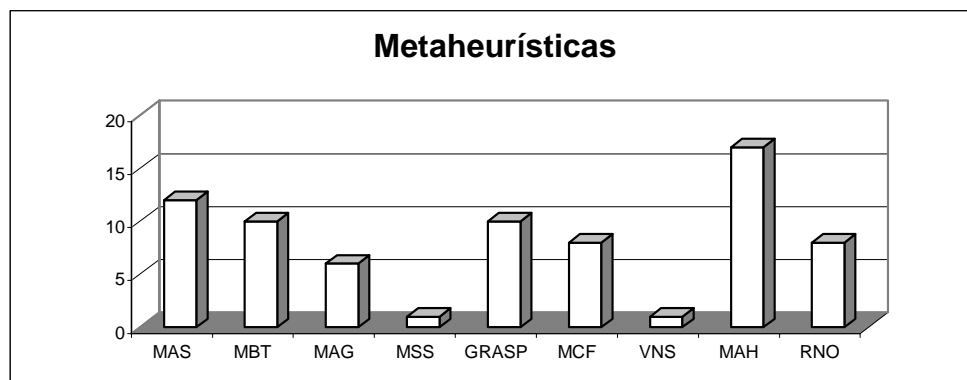
Tabela 3 – Publicações Relativas a Métodos de Resolução.



Se confrontarmos os métodos exatos contra os heurísticos, incluindo as metaheurísticas, estes últimos são utilizados em 93 artigos, contra 43 que utilizam algoritmos exatos.

A Tabela 4 registra a distribuição de referências pelos métodos de resolução, tipo metaheurística, aqui classificados. Assim temos: Simulated Annealing (*MSA*), Busca Tabu (*MBT*), Algoritmos Genéticos (*MAG*), Scatter Search (*MSS*), GRASP (*GRASP*), Colônia de Formigas (*MCF*), Busca em Vizinhança Variável (*VNS*), Algoritmos Híbridos (*MAH*) e Redes Neurais e outros (*RNO*).

Tabela 4 – Publicações Relativas a Metaheurísticas.



Ao analisarmos a Tabela 4 vemos que os procedimentos híbridos resultantes de composições de metaheurísticas distintas são os mais utilizados. No entanto, ao analisarmos a tabela comparando somente as metaheurísticas puras, os procedimentos baseados em *simulated annealing* e *grasp* são os mais aplicados ao *PQA*. Ultimamente as redes neurais vêm sendo utilizadas na resolução deste problema e aqui estão representadas na coluna *RNO*.

Cada uma das duas tabelas restantes apresenta a distribuição das publicações aqui referidas de acordo com as seguintes características: a Tabela 5 mostra como as referências se distribuíram em relação a artigos dedicados a aplicações do *PQA*, (*Apl*), a trabalhos teóricos envolvendo formulações, estudos de complexidade e técnicas de limites inferiores (*Teor*) e ainda aqueles dedicados a procedimentos de resolução do problema (*Alg*). A Tabela 6 distribui o número de artigos por período de 3 anos, a partir de 1957, quando o problema foi proposto.

Tabela 5 – Classificação das Publicações: em artigos de aplicações, de teoria e de algoritmos.

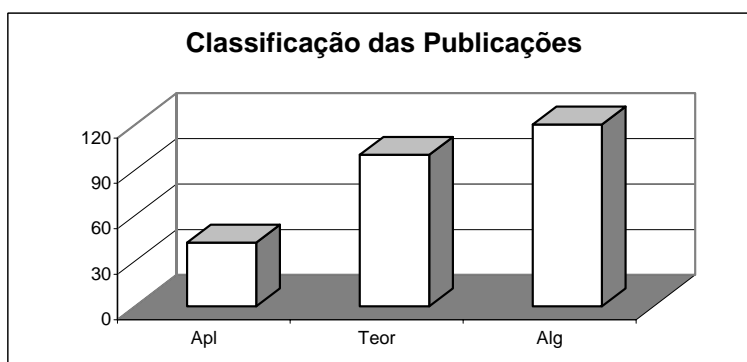
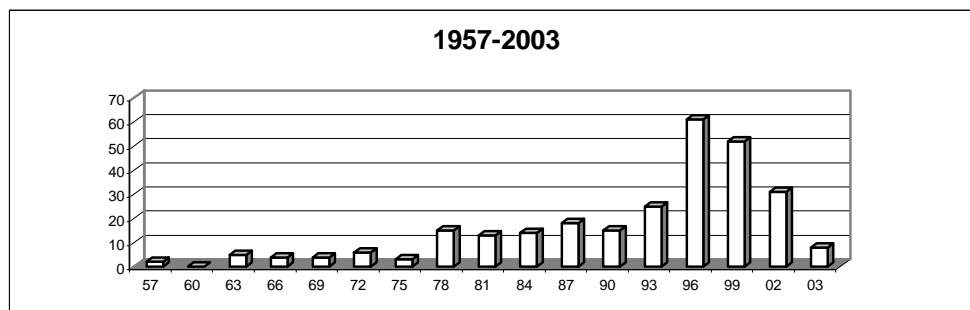


Tabela 6 – Número de publicações × triênios.

É possível observar que o nível de interesse pelo problema vem crescendo até o final da década de 70. Nesta ocasião, este se mantém ou até mesmo diminui uma vez que a teoria até então muito desenvolvida não conseguia contribuir com a melhoria na qualidade de soluções encontradas pelos procedimentos existentes, mesmo para pequenas instâncias (em torno de 20 facilidades e locais). Ao final dos anos 80, com o surgimento das metaheurísticas, este problema ganhou notoriedade, pois uma metaheurística só poderia ser considerada competitiva se aplicada ao *PQA* conseguisse apresentar melhores resultados que aqueles conhecidos. Com o avanço tecnológico (computação paralela) combinado com estas técnicas mais gerais (metaheurísticas) tornou-se possível determinar soluções ótimas para instâncias maiores. Em verdade, um pouco maiores, no caso deste problema (como vimos hoje é possível resolver casos de instâncias de ordem 30). Novamente, observando a Tabela 6, vemos que, a partir de 2000, o interesse da comunidade científica pelo *PQA* parece diminuir. Podemos imaginar que este desinteresse mais recente decorra de que nenhum fato oriundo das recentes especulações teóricas ou técnicas (avanço computacional) foi capaz de produzir um avanço significativo na possibilidade da resolução exata de exemplares maiores do problema. Conforme dissemos na Introdução, somente no ano 2000, provou-se que as soluções ótimas para a instância Nug30 e outras de tamanho equivalente foram alcançadas, mesmo assim, com considerável esforço computacional.

Referências Bibliográficas

- (1) Abreu, N.M.M. & Boaventura Netto, P.O. (1989). The quadratic assignment problem: Permutation ordering and inversions. *AMSE Rev.*, **10**(3), 21-52.
- (2) Abreu, N.M.M.; Querido, T.M. & Boaventura Netto, P.O. (1999). RedInv-SA: A simulated annealing for the quadratic assignment problem. *RAIRO Operations Research*, **33**(3), 249-273.
- (3) Abreu, N.M.M.; Boaventura Netto, P.O.; Querido, T.M. & Gouvêa, E.F. (2002). Classes of quadratic assignment problem instances: isomorphism and difficulty measure using a statistical approach. *Discrete Applied Mathematics*, **124**(1-3), 103-116.
- (4) Adams, W.P. & Sherali, H.D. (1986). A tight linearization and an algorithm for zero-one quadratic programming problems. *Management Science*, **32**(10), 1274-1290.

- (5) Adams, W.P. & Johnson, T.A. (1994). Improved linear programming-based lower bounds for the quadratic assignment problem. **In:** *Quadratic Assignment and Related Problems* [edited by P.M. Pardalos and H. Wolkowicz], *DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, **16**, 43-75, AMS, Rhode Island.
- (6) Ahuja, R.; Orlin, J.B. & Tivari, A. (2000). A greedy genetic algorithm for the quadratic assignment problem. *Computers and Operations Research*, **27**(10), 917-934.
- (7) Aiex, R.M.; Pardalos, P.M.; Pitsoulis, L.S. & Resende, M.G.C. (2000). A grasp for computing approximate solutions for the three-index assignment problem. **In:** *Proceedings of the 15 IPDPS 2000 Workshops on Parallel and Distributed Processing, Lecture Notes in Computer Science*, **1800**, 504-547, Springer-Verlag.
- (8) Anderson, E.J. (1996). Theory and methodology: mechanisms for local search. *European Journal of Operational Research*, **88**, 139-151.
- (9) Angel, E. & Zissimopoulos, V. (1998). On the quality of local search for the quadratic assignment problem. *Discrete Applied Mathematics*, **82**, 15-25.
- (10) Angel, E. & Zissimopoulos, V. (2000). On the classification of NP-complete problems in terms of their correlation coefficient. *DAMATH: Discrete Applied Mathematics and Combinatorial Operations Research and Computer Science*, **99**(1-3), 261-277.
- (11) Angel, E. & Zissimopoulos, V. (2001). On the landscape ruggedness of the quadratic assignment problem. *Theoretical Computer Science*, **263**(1-2), 159-172.
- (12) Angel, E. & Zissimopoulos, V. (2002). On the hardness of the quadratic assignment problem with metaheuristics. *Journal of Heuristics*, **8**(4), 399-414.
- (13) Anstreicher, K.M.; Chen, X.; Wolkowicz, H. & Yuan, Y. (1999). Strong duality for a trust-region type relaxation of the quadratic assignment problem. *Linear Algebra and its Applications*, **301**(1-3), 121-136.
- (14) Anstreicher, K.M. (2001). Eigenvalue bounds versus semidefinite relaxations for the quadratic assignment problem. *SIAM Journal on Optimization*, **11**(1), 254-265.
- (15) Anstreicher, K.M. & Brixius, N.W. (2001). A new bound for the quadratic assignment problem based on convex quadratic programming. *Mathematical Programming*, **89**(3), 341-357.
- (16) Anstreicher, K.M.; Brixius, N.W.; Linderoth, J. & Goux, J.P. (2002). Solving large quadratic assignment problems on computational grids. *Mathematical Programming*, **91**(3), 563-588.
- (17) Anstreicher, K.M. (2003). Recent advances in the solution of quadratic assignment problems. *Mathematical Programming*, **Ser. B 97**, 27-42.
- (18) Arkin, E.M.; Hassin, R. & Sviridenko, M. (2001). Approximating the maximum quadratic assignment problem. *Information Processing Letters*, **77**(1), 13-16.
- (19) Armour, G.C. & Buffa, E.S. (1963). Heuristic algorithm and simulation approach to relative location of facilities. *Management Science*, **9**(2), 294-309.
- (20) Assad, A.A. & Xu, W. (1985). On lower bounds for a class of quadratic {0,1} programs. *Operations Research Letters*, **4**(4), 175-180.

- (21) Balas, E. & Mazolla, J.B. (1980). Quadratic 0-1 programming by a new linearization. *Presented at the Joint ORSA/TIMS National Meeting*, Washington DC.
- (22) Balas, E. & Saltzman, M.J. (1989). Facets of the three-index assignment polytope. *Discrete Applied Mathematics*, **23**, 201-229.
- (23) Balas, E. & Saltzman, M.J. (1991). An algorithm for the three-index assignment problem. *Operations Research*, **39**(1), 150-161.
- (24) Balas, E. & Qi, L. (1993). Linear-time separation algorithms for the three-index assignment polytope. *Discrete Applied Mathematics*, **43**, 1-12.
- (25) Ball, M.O.; Kaku, B.K. & Vakhutinsky, A. (1998). Network-based formulations of the quadratic assignment problem. *European Journal of Operational Research*, **104**(1), 241-249.
- (26) Bandelt, H.-J., Crama, Y. & Spieksma, F.C.R. (1991). Approximation algorithms for multi-dimensional assignment problems with decomposable costs. *Discrete Applied Mathematics*, **49**, 25-50.
- (27) Battiti, R. & Tecchiolli, G. (1994a). The reactive tabu search. *ORSA Journal on Computing*, **6**(2), 126-140.
- (28) Battiti, R. & Tecchiolli, G. (1994b). Simulated annealing and tabu search in the long run: a comparison on qap tasks. *Computer and Mathematics with Applications*, **28**(6), 1-8.
- (29) Bazaraa, M.S. & Elshafei, A.N. (1979). An exact branch-and-bound procedure for the quadratic assignment problem. *Naval Research Logistics Quarterly*, **26**, 109-121.
- (30) Bazaraa, M.S. & Sherali, H.D. (1979). New approaches for solving the quadratic assignment problem. *Operations Research Verfahren*, **32**, 29-46.
- (31) Bazaraa, M.S. & Sherali, H.D. (1980). Benders' partitioning scheme applied to a new formulation of the quadratic assignment problem. *Naval Research Logistics Quarterly*, **27**, 29-41.
- (32) Bazaraa, M.S. & Sherali, H.D. (1982). On the use of exact and heuristic cutting plane methods for the quadratic assignment problem. *Journal of the Operational Research Society*, **33**, 991-1003.
- (33) Bazaraa, M.S. & Kirca, O. (1983). A branch-and-bound based heuristic for solving the quadratic assignment problem. *Naval Research Logistics Quarterly*, **30**, 287-304.
- (34) Bland, J.A. & Dawson, G.P. (1991). Tabu search and design optimization. *Computer Aided Design*, **23**(3), 195-201.
- (35) Bland, J.A. & Dawson, G.P. (1994). Large-scale layout of facilities using a heuristic hybrid algorithm. *Applied Mathematical Modelling*, **18**(9), 500-503.
- (36) Boaventura Netto, P.O. (2003). Combinatorial instruments in the design of a heuristic for the quadratic assignment problems. *Pesquisa Operacional*, **23**(03), 383-402.
- (37) Bokhari, S.H. (1987). *Assignment Problems in Parallel and Distributed Computing*. Kluwer Academic Publisher, Boston USA.
- (38) Bölte, A. & Thonemann, U.W. (1996). Optimizing simulated annealing schedules with genetic programming. *European Journal of Operational Research*, **92**(2), 402-416.

- (39) Bos, J. (1993). A quadratic assignment problem solved by simulated annealing. *Journal of Environmental Management*, **37**(2), 127-145.
- (40) Bozer, Y.A. & Suk-Chul, R. (1996). A branch and bound method for solving the bidirectional circular layout problem. *Applied Mathematical Modelling*, **20**(5), 342-351.
- (41) Brixius, N.W. & Anstreicher, K.M. (2001). Solving quadratic assignment problems using convex quadratic programming relaxations. *Optimization Methods and Software*, **16**, 49-68.
- (42) Brown, D.E. & Huntley, C.L. & Spillane (1989). A parallel genetic heuristic for the quadratic assignment problem. **In:** *Proceedings of the third International Conference on Genetic Algorithms*, 406-415, Morgan Kaufmann Publishers.
- (43) Brown, D.E. & Huntley, C.L. (1991). A parallel heuristic for the quadratic assignment problem. *Computers and Operations Research*, **18**, 275-289.
- (44) Bruijs, P.A. (1984). On the quality of heuristic solutions to a 19 x 19 quadratic assignment problem. *European Journal of Operational Research*, **17**, 21-30.
- (45) Brünger, A.; Marzetta, A.; Clausen, J. & Perregaard, M. (1997). Joining forces in solving large-scale quadratic assignment problems. **In:** *Proceedings of the 11th International Parallel Processing Symposium IPPS*, IEEE Computer Society Press, 418-427.
- (46) Brünger, A.; Marzetta, A.; Clausen, J. & Perregaard, M. (1998). Solving large-scale qap problems in parallel with the search library zram. *Journal of Parallel and Distributed Computing*, **50**, 157-169.
- (47) Buffa, E.S.; Armour, G.C. & Vollmann, T.E. (1964). Allocating facilities with craft. *Harvard Business Review*, **42**(2), 136-158.
- (48) Bui, T.N. & Moon, B.R. (1994). A genetic algorithm for a special class of the quadratic assignment problem. **In:** *Quadratic Assignment and Related Problems* [edited by P.M. Pardalos and H. Wolkowicz], *DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, **16**, 99-116, AMS, Rhode Island.
- (49) Bullnheimer, B. (1998). An examination scheduling model to maximize students' study time. *Lecture Notes in Computer Science*, **1408**, 78-91.
- (50) Burkard, R.E. & Stratman, R.H. (1978). Numerical Investigations on Quadratic Assignment Problem. *Naval Research Logistics Quarterly*, **25**, 129-140.
- (51) Burkard, R.E. & Derigs, U. (1980). Assignment and matching problems: solutions methods with Fortran programs. **In:** *Lectures Notes in Economics and Mathematical Systems*, **184**, Springer-Verlag New York, Secaucus, NJ.
- (52) Burkard, R.E. & Fröhlich, K. (1980). Some remarks on 3-dimensional assignment problems. *Methods of Operations Research*, **36**, 31-36.
- (53) Burkard, R.E. & Fincke, G. (1982). On random quadratic bottleneck assignment problems. *Mathematical Programming*, **23**, 227-232.
- (54) Burkard, R.E. & Zimmermann, U. (1982). Combinatorial optimization in linearly ordered semimodules: a survey. **In:** *Modern Applied Mathematics: Optimization and Operations Research* [edited by B. Korte], North Holland, Amsterdam, 392-436.

- (55) Burkard, R.E & Bonniger, T. (1983). A heuristic for quadratic boolean programs with applications to quadratic assignment problems. *European Journal of Operation Research*, **13**, 374-386.
- (56) Burkard, R.E. (1984). Quadratic assignment problems. *European Journal of Operational Research*, **15**, 283-289.
- (57) Burkard, R.E. & Rendl, F. (1984). A thermodynamically motivated simulation procedure for combinatorial optimization problems. *European Journal of Operational Research*, **17**(2), 169-174.
- (58) Burkard, R.E.; Euler, R. & Grommes, R. (1986). On latin squares and the facial structure of related polytopes. *Discrete Mathematics*, **62**, 155-181.
- (59) Burkard, R.E. (1991). Locations with spatial interactions: the quadratic assignment problem. **In:** *Discrete Location Theory* [edited by P.B. Mirchandani and R.L. Francis], John Wiley & Sons, 387-437.
- (60) Burkard, R.E.; Karisch, S. & Rendl, F. (1991). QAPLIB – A quadratic assignment problem library. *European Journal of Operational Research*, **55**, 115-119.
- (61) Burkard, R.E. & Rudolf, R. (1993). Computational investigations on 3-dimensional axial assignment problems. *Belgian Journal of Operations Research Statist. Comput. Sci.*, **32**, 85-98.
- (62) Burkard, R.E.; Çela, E. & Klinz, B. (1994). On the biquadratic assignment problem. **In:** *Quadratic Assignment and Related Problems* [edited by P.M. Pardalos and H. Wolkowicz], *DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, **16**, 117-146, AMS, Rhode Island.
- (63) Burkard, R.E. & Çela, E. (1995). Heuristics for biquadratic assignment problems and their computational comparison. *European Journal of Operational Research*, **83**(2), 283-300.
- (64) Burkard R.E. & Çela, E. (1996). Quadratic and three-dimensional assignment problems: an annotated bibliography. **In:** *Annotated Bibliographies in Combinatorial Optimization* [edited by M. Dell'Amico, F. Maffioli, and S. Martello], Wiley, Chichester, 373-392.
- (65) Burkard, R.E.; Çela, E.; Rote, G. & Woeginger, G.J. (1996a). The quadratic assignment problem with a monotone Anti-Monge and a symmetric Toeplitz matrix: easy and hard cases. **In:** *Integer Programming and Combinatorial Optimization* [edited by W.H. Cunningham, S.T. McCormick, and M. Queyranne], *Proceedings of the 5th International IPCO Conference*, Vancouver, British Columbia, Canada, *Lecture Notes in Computer Science*, **1084**, 204-218.
- (66) Burkard, R.E.; Rudolf, R. & Woeginger, G.J. (1996b). Three-dimensional axial assignment problems with decomposable cost coefficients. *Discrete Applied Mathematics*, **65**, 123-139.
- (67) Burkard, R.E.; Karisch, S. & Rendl, F. (1997). QAPLIB – A quadratic assignment problem library. *Journal of Global Optimization*, **10**, 391-403.
- (68) Burkard, R.E.; Çela, E.; Pardalos, P.M. & Pitsoulis, L. (1998). The quadratic assignment problem. **In:** *Handbook of Combinatorial Optimization* [edited by P.M. Pardalos and D.-Z. Du], Kluwer Academic Publishers, 241-338.

- (69) Burkard, R.E. (2002). Selected topics on assignment problems. *Discrete Applied Mathematics*, **123**(1-3), 257-302.
- (70) Carraresi, P. & Malucelli, F. (1992). A new lower bound for the quadratic assignment problem. *Operations Research*, **40**(1), S22-S27.
- (71) Carraresi, P. & Malucelli, F. (1994). A reformulation scheme and new lower bounds for the QAP. **In:** *Quadratic Assignment and Related Problems* [edited by P.M. Pardalos and H. Wolkowicz], *DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, **16**, 147-160, AMS, Rhode Island.
- (72) Carrizo, J.; Tinetti, F.G. & Moscato, P. (1992). A computational ecology for the quadratic assignment problem. **In:** *Proceedings of the 21st Meeting on Informatics and Operations Research*, Buenos Aires, Argentina.
- (73) Çela, E. (1998). The Quadratic Assignment Problem: Theory and Algorithms. **In:** *Combinatorial Optimization* [edited by D.Z. Du and P. Pardalos], Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- (74) Chakrapani, J. & Skorin-Kapov, J. (1993). Massively parallel tabu search for the quadratic assignment problem. *Annals of Operations Research*, **41**(1-4), 327-342.
- (75) Chakrapani, J. & Skorin-Kapov, J. (1994). A constructive method to improve lower bounds for the quadratic assignment problem. **In:** *Quadratic Assignment and Related Problems* [edited by P.M. Pardalos and H. Wolkowicz], *DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, **16**, 161-171, AMS, Providence, Rhode Island.
- (76) Chen, B. (1995). Special cases of the quadratic assignment problem. *European Journal of Operational Research*, **81**(2), 410-419.
- (77) Chiang, W.C. & Chiang, C. (1998). Intelligent local search strategies for solving facility layout problems with the quadratic assignment problem formulation. *European Journal of Operational Research*, **106**, 457-488.
- (78) Christofides, N. & Gerrard, M. (1976). Special cases of the quadratic assignment problem. *Management Science Research Report*, **391**, Carnegie-Mellon University, Pittsburgh, PA.
- (79) Christofides, N.; Mingozzi, A. & Toth, P. (1980). Contributions to the quadratic assignment problem. *European Journal of Operations Research*, **4**, 243-247.
- (80) Christofides, N. & Gerrard, M. (1981). A graph theoretic analysis of bounds for the quadratic assignment problem. **In:** *Studies on graphs and discrete programming* [edited by P. Hansen], North-Holland, 61-68.
- (81) Christofides, N. & Benavent, E. (1989). An exact algorithm for the quadratic assignment problem. *Operation Research*, **37**(5), 760-768.
- (82) Clausen, J. & Perregaard, M. (1997). Solving large quadratic assignment problems in parallel. *Computational Optimization and Applications*, **8**, 111-127.
- (83) Colorni, A.; Dorigo, M.; Maffioli, F.; Maniezzo, V.; Righini, G. & Trubian, M. (1996). Heuristics from nature for hard combinatorial optimization problems. *International Transactions in Operational Research*, **3**(1), 1-21.

- (84) Connolly, D.T. (1990). An improved annealing scheme for the qap. *European Journal of Operational Research*, **46**, 93-100.
- (85) Costa, C.S. & Boaventura Netto, P.O. (1994). An algebraic-combinatorial description for the asymmetric quadratic assignment problem. *Adv. Mod. Analysis A*, **22**(2), 1-11.
- (86) Crama, Y. & Spieksma, F.C.R. (1992). Approximation algorithms for three-dimensional assignment problems with triangle inequalities. *European Journal of Operational Research*, **60**, 273-279.
- (87) Cung, V.-D.; Mautor, T.; Michelon, P. & Tavares, A. (1997). A scatter search based approach for the quadratic assignment problem. **In: Proceedings of IEEE International Conference on Evolutionary Computation**, 165-169.
- (88) Davis, L. (1987). *Genetic Algorithms and Simulated Annealing*. Morgan Kaufmann Publishers.
- (89) Deineko, V.G. & Woeginger, G.J. (1998). A solvable case of the quadratic assignment problem. *Operations Research Letters*, **22**(1), 13-17.
- (90) Dell'Amico, M.; Maffioli, F. & Martello, S. (1997). *Annotated Bibliographies in Combinatorial Optimization*. Wiley, Chichester.
- (91) Dickey, J.W. & Hopkins, J.W. (1972). Campus building arrangement using topaz. *Transportation Research*, **6**, 59-68.
- (92) Dorigo, M.; Maniezzo, V. & Colomi, A. (1996). The ant system: optimization by a colony of cooperating agents. *IEEE Transaction on Systems, Man, and Cybernetics – Part B*, **26**(2), 29-41.
- (93) Drezner, Z. (1995). Lower bounds based on linear programming for the quadratic assignment problem. *Computational Optimization and Applications*, **4**(2), 159-165.
- (94) Edwards, C.S. (1977). The derivation of a greedy approximator for the Koopmans-Beckmann quadratic assignment problem. **In: Proceedings of the 77-th Combinatorial Programming Conference (CP77)**, 55-86.
- (95) Edwards, C.S. (1980). A branch and bound algorithm for the Koopmans-Beckmann quadratic assignment problem. *Mathematical Programming Study*, **13**, 35-52.
- (96) Elshafei, A.N. (1977). Hospital layout as a quadratic assignment problem. *Operations Research Quarterly*, **28**(1), 167-179.
- (97) Emelichev, V.A.; Kovalev, M.N. & Kravtsov, M.K. (1984). *Polytopes, Graphs and Optimization*, Cambridge University Press.
- (98) Euler, R. (1987). Odd cycles and a class of facets of the axial 3-index assignment polytope. *Applicationes Mathematicae (Zastosowania Matematyki)*, **19**, 375-386.
- (99) Fedjki, C.A. & Duffuaa, S.O. (2004). An extreme point algorithm for a local minimum solution to the quadratic assignment problem. *European Journal of Operational Research*, **156**(3), 566-578.
- (100) Feo, T.A. & Resende, M.G.C. (1995). Greedy randomized adaptive search procedures. *Journal of Global Optimization*, **6**, 109-133.

- (101) Finke, G.; Burkard, R.E. & Rendl, F. (1984). Eigenvalue approach to quadratic assignment problems. **In:** *Presented at 5th Symposium on Operations Research*, Osnabrück.
- (102) Finke, G.; Burkard, R.E. & Rendl, F. (1987). Quadratic assignment problems. *Annals of Discrete Mathematics*, **31**, 61-82.
- (103) Fleurent, C. & Ferland, J.A. (1994). Genetic hybrids for the quadratic assignment problem. **In:** *Quadratic Assignment and Related Problems* [edited by P.M. Pardalos and H. Wolkowicz], *DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, **16**, 173-187, AMS, Rhode Island.
- (104) Fleurent, C. & Glover, F. (1999). Improved constructive multistart strategies for the quadratic assignment problem using adaptive memory. *INFORMS Journal on Computing*, **11**, 189-203.
- (105) Forsberg, J.H.; Delaney, R.M.; Zhao, Q.; Harakas, G. & Chandran, R. (1994). Analyzing lanthanide-included shifts in the NMR spectra of lanthanide (III) complexes derived from 1, 4, 7, 10-tetrakis (N, N-diethylacetamido)-1, 4, 7, 10-tetraazacyclododecane. *Inorganic Chemistry*, **34**, 3705-3715.
- (106) Fortin, D. & Rudolf, R. (1995). Weak algebraic Monge arrays. SFB Report 33, Institute of mathematics, Graz University of Technology.
- (107) Francis, R.L. & White, J.A. (1974). *Facility Layout and Location: An Analytical Approach*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- (108) Freeman, R.J.; Gogerty, D.C.; Graves, G.W. & Brooks, R.B.S. (1966). A mathematical modelo of supply for space operations. *Operations Research*, **14**, 1-15.
- (109) Frenk, J.B.G.; Houweninge, M.V. & Kan, A.H.G.R. (1985). Asymptotic properties of the quadratic assignment problem. *Mathematics of Operations Research*, **10**(1), 100-116.
- (110) Frieze, A.M. (1974). A bilinear programming formulation of the 3-dimensional assignment problems. *Mathematical Programming*, **7**, 376-379.
- (111) Frieze, A.M. & Yadegar, J. (1981). An algorithm for solving 3-dimensional assignment problems with applications to scheduling a teaching practice. *Operations Research*, **32**, 989-995.
- (112) Frieze, A.M. (1983). Complexity of a 3-dimensional assignment problem. *European Journal of Operational Research*, **13**, 161-164.
- (113) Frieze, A.M. & Yadegar, J. (1983). On the quadratic assignment problem. *Discrete Applied Mathematics*, **5**, 89-98.
- (114) Gambardella, L.M.; Taillard, D. & Dorigo, M. (1999). Ant colonies for the qap. *Journal of Operational Research. Society*, **50**, 167-176.
- (115) Gavett, J.W. & Plyter, N.V. (1966). The optimal assignment of facilities to locations by branch-and-bound. *Operations Research*, **14**, 210-232.
- (116) Geoffrion, A.M. & Graves, G.W. (1976). Scheduling parallel production lines with changeover costs: practical applications of a quadratic assignment/LP approach. *Operations Research*, **24**, 595-610.

- (117) Gilmore, P.C. (1962). Optimal and suboptimal algorithms for the quadratic assignment problem. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **10**, 305-313.
- (118) Glover, F. (1977). Heuristics for integer programming using surrogate constraints. *Decision Science*, **8**, 156-166.
- (119) Glover, F. (1989). Tabu search – Part I. *ORSA Journal on Computing*, **1**, 190-206.
- (120) Glover, F. (1989). Tabu search – Part II. *ORSA Journal on Computing*, **2**, 4-32.
- (121) Goldberg, M.C. & Goldberg E.F.G. (2002). Transgenética computacional: Uma aplicação ao problema quadrático de alocação. *Pesquisa Operacional*, **22(3)**, 359-386.
- (122) Goldberg, D.E. (1989). *Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning*. Addison-Wesley, Wokingham, England.
- (123) Gong, D.; Yamazaki, G.; Gen, M. & Xu, W. (1999). A genetic algorithm method for one-dimensional machine location problems. *International Journal of Production Economics*, **60-61**, 337-342.
- (124) Gouveia, L. & Voß, S. (1995). A classification of formulations for the (time-dependent) traveling salesman problem. *European Journal of Operational Research*, **83(1)**, 69-82.
- (125) Graves, G.W. & Whinston, A.B. (1970). An algorithm for the quadratic assignment problem. *Management Science*, **17(7)**, 453-471.
- (126) Gutin, G. & Yeo, A. (2002). Polynomial approximation algorithms for TSP and QAP with a factorial domination number. *Discrete Applied Mathematics*, **119(1-2)**, 107-116.
- (127) Hadley, S.W.; Rendl, F. & Wolkowicz, H. (1990). Bounds for the quadratic assignment problem using continuous optimization techniques. **In: Integer Programming and Combinatorial Optimization**, 237-248, University of Waterloo Press.
- (128) Hadley, S.W.; Rendl, F. & Wolkowicz, H. (1992a). Nonsymmetric quadratic assignment problems and the Hoffman-Wielandt inequality. *Linear Algebra and its Applications*, **58**, 109-124.
- (129) Hadley, S.W.; Rendl, F. & Wolkowicz, H. (1992b). A new lower bound via projection for the quadratic assignment problem. *Mathematics of Operations Research*, **17**, 727-739.
- (130) Hadley, S.W.; Rendl, F. & Wolkowicz, H. (1992c). Symmetrization of nonsymmetric quadratic assignment problems and the Hoffman-Wielandt inequality. *Linear Algebra and its Applications*, **167**, 53-64.
- (131) Hadley, S.W. (1994). Domination & separation applied to the quadratic assignment problem. **In: Quadratic Assignment and Related Problems** [edited by P.M. Pardalos and H. Wolkowicz], *DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, **16**, 189-196, AMS, Rhode Island.
- (132) Haghani, A. & Chen, M.-C. (1998). Optimizing gate assignments at airport terminals. *Transportation Research A*, **32(6)**, 437-454.
- (133) Hahn, P. & Grant, T. (1998). Lower bounds for the quadratic assignment problem based upon a dual formulation. *Operations Research*, **46**, 912-922.

- (134) Hahn, P.; Grant, T. & Hall, N. (1998). A branch-and-bound algorithm for the quadratic assignment problem based on the Hungarian method. *European Journal of Operational Research*, **108**, 629-640.
- (135) Hahn, P.M. & Krarup, J. (2001). A hospital facility layout problem finally solved. *Journal of Intelligent Manufacturing*, **12**, 487-496.
- (136) Hanan, M. & Kurtzberg, J.M. (1972). A review of the placement and quadratic assignment problem. *SIAM Review*, **14**, 324-342.
- (137) Hansen, P. & Kaufman, L. (1973). A primal-dual algorithm for the three-dimensional assignment problem. *Cahiers du CERO*, **15**, 327-336.
- (138) Hasegawa, M.; Ikeguchi, T.; Aihara, K. & Itoh, K. (2002). A novel chaotic search for quadratic assignment problems. *European Journal of Operational Research*, **139**(3), 543-556.
- (139) Heffley, D.R. (1977). Assigning runners to a relay team. **In:** *Optimal Strategies in Sports* [edited by S.P. Ladany and R.E. Machol], 169-171, North Holland, Amsterdam.
- (140) Heffley, D.R. (1980). Decomposition of the Koopmans-Beckmann problem. *Regional Science and Urban Economics*, **10**(4), 571-580.
- (141) Heider, C.H. (1972). A computationally simplified pair exchange algorithm for the quadratic assignment problem. *Center for Naval Analysis*, **101**.
- (142) Herroelen, W. & Vanglis, A. (1985). On the use of flow dominance in complexity measures for facility layout problems. *International Journal of Production Research*, **23**, 97-108.
- (143) Hillier, F.S. & Michael, M.C. (1966). Quadratic assignment problem algorithms and the location of indivisible facilities. *Management Science*, **13**, 44-57.
- (144) Hubert, L. & Schulz, J. (1976). Quadratic assignment as a general data analysis strategy. *British Journal of Mathematical Psychology*, **29**, 190-241.
- (145) Hubert, L. (1987). Assignment Methods in Combinatorial Data Analysis. **In:** *Statistics: Textbooks and Monographs Series*, **73**, Marcel Dekker.
- (146) Huntley, C.L. & Brown, D.E. (1996). Parallel genetic algorithms with local search. *Computers & Operations Research*, **23**(6), 559-571.
- (147) Ishii, S. & Sato, M. (1998). Constrained neural approaches to quadratic assignment problems. *Neural Networks*, **11**(6), 1073-1082.
- (148) Ishii, S. & Sato, M. (2001). Doubly constrained network for combinatorial optimization. *Neurocomputing*, **43**(1-4), 239-257.
- (149) Jünger, M. & Kaibel, V. (1996a). On the qap polytope. Technical Report 96.241, Angewandte Mathematik und Informatik, Universität zu Köln.
- (150) Jünger, M. & Kaibel, V. (1996b). A basic study of the QAP polytope. Technical Report 96.215, Angewandte Mathematik und Informatik, Universität zu Köln.
- (151) Jünger, M. & Kaibel, V. (2001). The qap-polytope and the star transformation. *Discrete Applied Mathematics*, **111**(3), 283-306.

- (152) Kaku, B.K. & Thompson, G.L. (1986). An exact algorithm for the general quadratic assignment problem. *European Journal of Operational Research*, **2**, 382-390.
- (153) Karisch, S.E.; Rendl, F. & Wolkowicz, H. (1994). Trust regions and relaxations for the quadratic assignment problem. **In:** *Quadratic Assignment and Related Problems* [edited by P.M. Pardalos and H. Wolkowicz], *DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, **16**, 199-219, AMS, Rhode Island
- (154) Karisch, S.E. & Rendl, F. (1995). Lower bounds for the quadratic assignment problem via triangle decompositions. *Mathematical Programming*, **71**, 137-152.
- (155) Karisch, S.E.; Çela, E.; Clausen, J. & Espersen, T. (1999). A dual framework for lower bounds of the quadratic assignment problem based on linearization. *Computing*, **63**, 351-403.
- (156) Karmarkar, N.K. & Ramakrishnan, K.G. (1991). Computational results of an interior point algorithm for large scale linear programming. *Mathematical Programming*, **52**, 555-586.
- (157) Kaufman, L. & Broeckx, F. (1978). An algorithm for the quadratic assignment problem using Bender's decomposition. *European Journal of Operation Research*, **2**, 204-211.
- (158) Khare, V.K.; Khare, M.K. & Neema, M.L. (1988a). Estimation of distribution parameters associated with facilities design problems involving forward and backtracking of materials. *Computers & Industrial Engineering*, **14**(1), 63-75.
- (159) Khare, V.K.; Khare, M.K. & Neema, M.L. (1988b). Combined computer-aided approach for the facilities design problem and estimation of the distribution parameter in the case of multigoal optimization. *Computers & Industrial Engineering*, **14**(4), 465-476.
- (160) Kirkpatrick, S.; Gelatt, C.D. & Vecchi, M.P. (1983). Optimization by simulated annealing. *Science*, **220**, 671-680.
- (161) Knowles, J.D. & Corne, D.W. (2002a). Towards landscape analyses to inform the design of a hybrid local search for the multiobjective quadratic assignment problem. **In:** *Soft Computing Systems: Design, Management and Applications* [edited by A. Abraham, J. Ruiz-del-Solar and M. Koppen], 271-279, IOS Press, Amsterdam.
- (162) Knowles, J.D. & Corne, D.W. (2002b). Instance generators and test suites for the multiobjective quadratic assignment problem. IRIDIA technical report TR/IRIDIA/2002-25. Accepted for presentation/publication at EMO 2003.
- (163) Kochhar, J.S.; Foster, B.T. & Heragu, S.S. (1998). Hope: A genetic algorithm for the unequal area facility layout problem. *Computers & Operations Research*, **25**(7-8), 583-594.
- (164) Koopmans, T.C. & Beckmann, M.J. (1957). Assignment problems and the location of economic activities. *Econometrica*, **25**, 53-76.
- (165) Krackhardt, D. (1988). Predicting with networks: Nonparametric multiple regression analysis of dyadic data. *Social Networks*, **10**(4), 359-381.
- (166) Krarup, J. & Pruzan, P.M. (1978). Computer-aided layout design. *Mathematical Programming Study*, **9**, 75-94.

- (167) Kreher, D.L. & Stinson, D.R. (1998). *Combinatorial Algorithms: Generation, Enumeration, and Search*. In: *DIMACS Discrete Mathematics and its Applications*, CRC Press.
- (168) Lacksonen, T.A. & Enscore, Jr. E.E. (1993). Quadratic assignment algorithms for the dynamic layout. *International Journal of Production Research*, **31**(3), 503-517.
- (169) Land, A.M. (1963). A problem of assignment with interrelated costs. *Operations Research Quarterly*, **14**, 185-198.
- (170) Laursen, P.S. (1993). Simple approaches to parallel branch-and-bound. *Parallel Computing*, **19**, 143-152.
- (171) Lawler, E.L. (1963). The quadratic assignment problem. *Management Science*, **9**, 586-599.
- (172) Li, Y.; Pardalos, P.M.; Ramakrishnan, K.G. & Resende, M.G.C. (1994a). Lower bounds for the quadratic assignment problem. *Operations Research*, **50**, 387-410.
- (173) Li, Y.; Pardalos, P.M. & Resende, M.G.C. (1994b). A greedy randomized adaptive search procedure for the quadratic assignment problem. In: *Quadratic Assignment and Related Problems* [edited by P.M. Pardalos and H. Wolkowicz], *DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, **16**, 237-261, AMS, Rhode Island.
- (174) Li, W.-J. & Smith, M. (1995). An algorithm for quadratic assignment problems. *European Journal of Operational Research*, **81**, 205-216.
- (175) Liang, Y. (1996). Combinatorial optimization by Hopfield networks using adjusting neurons. *Information Sciences*, **94**(1-4), 261-276.
- (176) Los, M. (1978). Simultaneous optimization of land use and transportation: A synthesis of the quadratic assignment problem and the optimal network problem. *Regional Science and Urban Economics*, **8**(1), 21-42.
- (177) Love, R.F. & Wong, J.Y. (1976a). Solving quadratic assignment problems with rectangular distances and integer programming. *Naval Research Logistics Quarterly*, **23**, 623-627.
- (178) Love, R.F. & Wong, J.Y. (1976b). On solving a one-dimensional space allocation problem with integer programming. *INFOR*, **14**, 139-143.
- (179) Magirou, V.F. & Milis, J.Z. (1989). An algorithm for the multiprocessor assignment problem. *Operations Research Letters*, **8**, 351-356.
- (180) Magos, D. & Miliotis, P. (1994). An algorithm for the planar three-index assignment problem. *European Journal of Operational Research*, **77**, 141-153.
- (181) Magos, D. (1996). Tabu search for the planar three-index assignment problem. *Journal Global Optimization*, **8**, 35-48.
- (182) Malucelli, F. & Pretolani, D. (1993). Lower bounds for the quadratic semi-assignment problem. Technical Report 955, Centre des Recherches sur les transports, Université de Montréal.
- (183) Maniezzo, V. & Colomi, A. (1995). Algodesk: An experimental comparison of eight evolutionary heuristics applied to the quadratic assignment problem. *European Journal of Operational Research*, **81**(1), 188-204.

- (184) Maniezzo, V. (1997). Exact and approximate nondeterministic tree-search procedures for the quadratic assignment problem. Research Report CSR 97-1, Scienze dell'Informazione, Cesena site, University of Bologna.
- (185) Maniezzo, V. & Colorni, A. (1999). The ant system applied to the quadratic assignment problem. *Knowledge and Data Engineering*, **11**(5), 769-778.
- (186) Mans, B.; Mautor, T. & Roucairol, C. (1995). A parallel depth first search branch and bound algorithm for the quadratic assignment problem. *European Journal of Operational Research*, **81**, 617-628.
- (187) Marins, M.T.A. (2001). O uso de automorfismos de grafos no problema quadrático de alocação. Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- (188) Martin, W. (1998). Fast equi-partitioning of rectangular domains using stripe decomposition. *Discrete Applied Mathematics*, **82**(1-3), 193-207.
- (189) Mason, A. & Rönnqvist, M. (1997). Solution Methods for the Balancing of Jet Turbines. *Computers and Operations Research*, **24**(2), 153-167.
- (190) Mautor, T. & Roucairol, C. (1994a). A new exact algorithm for the solution of quadratic assignment problems. *Discrete Applied Mathematics*, **55**, 281-293.
- (191) Mautor, T. & Roucairol, C. (1994b). Difficulties of Exact Methods for Solving the QAP. **In:** *Quadratic Assignment and Related Problems* [edited by P.M. Pardalos and H. Wolkowicz], *DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, **16**, 263-274, AMS, Rhode Island.
- (192) Mavridou, T. & Pardalos, P.M. (1997). Simulated annealing and genetic algorithms for the facility layout problem: A survey. *Computational Optimization and Applications*, **7**, 111-126.
- (193) Mavridou, T.; Pardalos, P.M.; Pitsoulis, L.S. & Resende, M.G.C. (1998). A GRASP for the biquadratic assignment problem. *European Journal of Operations Research*, **105**(3), 613-621.
- (194) McCormick, E.J. (1970). *Human Factors Engineering*. McGraw-Hill, New York.
- (195) Medova, E. (1994). Using QAP bounds for the circulant TSP to design reconfigurable networks. **In:** *Quadratic Assignment and Related Problems* [edited by P.M. Pardalos and H. Wolkowicz], *DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, **16**, 275-292, AMS, Rhode Island.
- (196) Merz, P. & Freisleben, B. (1997). A genetic local search approach to the quadratic assignment problem. **In:** *Proceedings of the 7th International Conference on Genetic Algorithms* [edited by T. Back], 465-472, Morgan Kaufmann.
- (197) Mirchandani, P.B. & Obata, T. (1979). Algorithms for a class of quadratic assignment problems. *Presented at the Joint ORSA/TIMS National Meeting*, New Orleans.
- (198) Misevicius, A. (2003a). A modification of tabu search and its applications to the quadratic assignment problem. *Information Technology and Control*, **27**, 12-20.
- (199) Misevicius, A. (2003b). Genetic algorithm hybridized with ruin and recreate procedure: application to the quadratic assignment problem. **In:** *Proceedings of 22nd SGAI International Conference on Knowledge Based Systems and Applied Artificial Intelligence (ES2002)* (Cambridge, United Kingdom) [edited by M. Bramer *et al.*], London: Springer, 163-176.

- (200) Mladenović, N. (1995). A variable neighborhood algorithm – a new metaheuristic for combinatorial optimization. **In: Abstracts of Papers at Optimization Days**, **112**.
- (201) Mladenović, N. & Hansen P. (1997). Variable neighbourhood search. *Computers and Operations Research*, **24**, 1097-1100.
- (202) Nissen, V. (1997). Quadratic assignment. **In: Handbook of Evolutionary Computation** [edited by T. Back, D.B. Fogel, Z. Michalewicz, and T. Baeck], **G9.10**, 1-8, Institute of Physics Publishing and Oxford University Press.
- (203) Nugent, C.E.; Vollmann, T.E. & Ruml, J. (1968). An experimental comparison of techniques for the assignment of facilities to locations. *Operations Research*, **16**, 150-173.
- (204) Obuchi, Y.; Masui, H. & Ohki, M. (1996). Weighted parallel problem solving by optimization networks. *Neural Networks*, **9**(2), 357-366.
- (205) Osman, I.H. & Laporte, G. (1996). Metaheuristics: A bibliography. *Annals of Operations Research*, **63**, 513-623.
- (206) Ostrowski, T. & Ruoppila, V.T. (1997). Genetic annealing search for index assignment in vector quantization. *Pattern Recognition Letters*, **18**(4), 311-318.
- (207) Padberg, M.W. & Rinaldi, G. (1991). A branch-and-cut algorithm for the resolution of large-scale symmetric traveling salesman problems. *SIAM Review*, **33**, 60-100.
- (208) Padberg, W. & Rijal, P. (1996). *Location, Scheduling, Design and Integer Programming*. Kluwer Academic Publishers, Boston.
- (209) Palubeckis, G. (1999). Generating hard test instances with known optimal solution for the rectilinear quadratic assignment problem. *Journal of Global Optimization*, **15**, 127-156.
- (210) Pardalos, P. & Crouse, J. (1989). A parallel algorithm for the quadratic assignment problem. **In: Proceedings of the Supercomputing Conference 1989**, 351-360, ACM Press.
- (211) Pardalos, P.M.; Murthy, K.A. & Harrison, T.P. (1993). A computational comparison of local search heuristics for solving quadratic assignment problems. *Informatica*, **4**(1-2), 172-187.
- (212) Pardalos, P.M. & Wolkowicz, H. (Editors), (1994). Quadratic Assignment and Related Problems. **In: Proceedings DIMACS Workshop on Quadratic Assignment Problem**. DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, **16**, AMS, Rhode Island.
- (213) Pardalos, P.M.; Rendl, F. & Wolkowicz, H. (1994). The quadratic assignment problem: A survey of recent developments. **In: Quadratic Assignment and Related Problems** [edited by P.M. Pardalos and H. Wolkowicz], *DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, **16**, 1-42, AMS, Rhode Island.
- (214) Pardalos, P.M.; Ramakrishnan, K.G.; Resende, M.G.C. & Li, Y. (1997). Implementation of a variance reduction-based lower bound in a branch-and-bound algorithm for the quadratic assignment problem. *SIAM*, **7**, 280-294.
- (215) Peng, T.; Huanchen, W. & Dongme, Z. (1995). Simulated annealing for the quadratic assignment problem: A further study. *Computers and Industrial Engineering*, **31**(3-4), 925-928.

- (216) Pierce, J.F. & Crowston, W.B. (1971). Tree-search algorithms for quadratic assignment problems. *Naval Research Logistics Quarterly*, **18**, 136.
- (217) Pierskalla, W.P. (1967). The tri-substitution method for the three-multidimensional assignment problem. *Canadian Operational Research Society Journal*, **5**(2), 71-81.
- (218) Pierskalla, W.P. (1968). The multidimensional assignment problem. *Operations Research*, **16**, 422-431.
- (219) Pitsoulis, L.S.; Pardalos, P.M. & Hearn, D.W. (2001). Approximate solutions to the turbine balancing problem. *European Journal of Operational Research*, **130**(1), 147-155.
- (220) Pollatschek, M.A.; Gershoni, N. & Radday, Y.T. (1976). Optimization of the Typewriter Keyboard by Simulation. *Angewandte Informatik*, **17**(0), 438-439.
- (221) Poore, A. (1994a). Multidimensional assignment formulation of data association problems arising from multitarget and multisensor tracking. *Computational Optimization and Applications*, **3**, 27-57.
- (222) Poore, A. (1994b). Partitioning multiple data sets: multidimensional assignment and Lagrangean relaxation. **In: Quadratic Assignment and Related Problems** [edited by P.M. Pardalos and H. Wolkowicz], *DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, **16**, 317-341, AMS, Rhode Island.
- (223) Poore, A. (1995). Multidimensional assignment and multitarget tracking. **In: DIMACS Series DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science**, **19**, 169-196.
- (224) Poore, A. & Robertson, A. (1997). A new Lagrangean relaxation based algorithm for a class of multidimensional assignment problems. *Computational Optimization and Applications*, **8**, 129-150.
- (225) QAPLIB Home Page <<http://www.opt.math.tu-graz.ac.at/qaplib/>>.
- (226) Qi, L.; Balas, E. & Gwan, G. (1994). A new facet class and a polyhedral method for the three-index assignment problem. **In: Advances in Optimization and Approximation** [edited by D.-Z. Du and J. Sun], Kluwer Academic, 256-274.
- (227) Queyranne, M. (1986). Performance ration of polynomial heuristics for triangle inequality quadratic assignment problems. *Operations Research Letters*, **4**, 231-234.
- (228) Ramachandran, B. & Pekny, J.F. (1998). Lower bounds for nonlinear assignment problems using many body interactions. *European Journal of Operational Research*, **105**(1), 202-215.
- (229) Ramakrishnan, K.G.; Resende, M.G.C.; Ramachandran, B. & Pekny, J.F. (2002). Tight QAP bounds via linear programming. **In: Combinatorial and Global Optimization** [edited by P.M. Pardalos, A. Migdalas, and R.E. Burkard], 297-303, World Scientific Publishing, Singapore.
- (230) Rangel, M.C.; Abreu, N.M.M. & Boaventura Netto, P.O. (2000). Grasp para o pqa: Um limite de aceitação para soluções iniciais. *Pesquisa Operacional*, **20**(1), 45-58.
- (231) Rangel, M.C. & Abreu, N.M.M. (2003). Ordenações parciais nos conjuntos das soluções dos problemas de alocação linear e quadrático. *Pesquisa Operacional*, **23**(2), 265-284.

- (232) Rendl, F. (1985). Ranking scalar products to Improve bounds for the quadratic assignment problem. *European Journal of Operational Research*, **20**, 363-372.
- (233) Rendl, F. & Wolkowicz, H. (1992). Applications of parametric programming and eigenvalue maximization to the quadratic assignment problem. *Mathematical Programming*, **53**, 63-78.
- (234) Resende, M.G.C.; Ramakrishnan, K.G. & Drezner, Z. (1995). Computing lower bounds for the quadratic assignment with an interior point algorithm for linear programming. *Operations Research*, **43**, 781-791.
- (235) Resende, M.G.C.; Pardalos, P.M. & Li, Y. (1996). Algorithm 754: Fortran subroutines for approximate solution of dense quadratic assignment problems using grasp. *ACM Transactions on Mathematical Software*, **22**(1), 104-118.
- (236) Rogger, A.; Fiechter, C.N. & Werra, D. (1992). Basic ideas of tabu search with an application to traveling salesman and quadratic assignment. *Ricerca Operativa*, **62**, 5-28.
- (237) Rossin, D.F.; Springer, M.C. & Klein, B.D. (1999). New complexity measures for the facility layout problem: an empirical study using traditional and neural network analysis. *Computers & Industrial Engineering*, **36**(3), 585-602.
- (238) Roucairol, C. (1979). A reduction method for quadratic assignment problem. *Methods of Operations Research*, **32**, 185-187.
- (239) Roucairol, C. (1987). A parallel branch and bound algorithm for the quadratic assignment problem. *Discrete Applied Mathematics*, **18**, 211-225.
- (240) Sahni, S. & Gonzales, T. (1976). P-complete approximation problems. *Journal of the Association for Computing Machinery*, **23**, 555-565.
- (241) Sarker, B.R.; Wilhelm, W.E.; Hogg, G.L. & Han, M.-H. (1995). Backtracking of jobs in one-dimensional machine location problems. *European Journal of Operational Research*, **85**(3), 593-609.
- (242) Sarker, B.R.; Wilhelm, W.E. & Hogg, G.L. (1998). One-dimensional machine location problems in a multi-product flowline with equidistant locations. *European Journal of Operational Research*, **105**(3), 401-426.
- (243) Simeone, B. (1986a). An asymptotically exact polynomial time algorithm for equipartition problems. *Discrete Applied Mathematics*, **14**, 283-293.
- (244) Simeone, B. (1986b). Topological network synthesis. **In:** *Combinatorial Optimization* [edited by B. Simeone], *Lectures Notes in Mathematics*, **1403**, 282-303, Springer-Verlag.
- (245) Siu, F. & Chang, R.K.C. (2002). Effectiveness of optimal node assignments in wavelength division multiplexing networks with fixed regular virtual topologies. *Computer Networks*, **38**(1), 61-74.
- (246) Skorin-Kapov, J. (1990). Tabu search applied to the quadratic assignment problem. *ORSA Journal on Computing*, **2**, 33-45.
- (247) Skorin-Kapov, J. (1994). Extensions of a tabu search adaptation to the quadratic assignment problem. *Journal of Computers and Operations Research*, **21**(8), 855-865.

- (248) Spiliopoulos, K. & Sofianopoulou, S. (1998). An optimal tree search method for the manufacturing systems cell formation problem. *European Journal of Operational Research*, **105**(3), 537-551.
- (249) Steinberg, L. (1961). The backboard wiring problem: A placement algorithm. *SIAM Review*, **3**, 37-50.
- (250) Stützle, T. & Dorigo, M. (1999). ACO Algorithms for the Quadratic Assignment Problem. **In:** *New Ideas in Optimization* [edited by D. Corne, M. Dorigo and F. Glover], 33-55, McGraw-Hill.
- (251) Stützle, T. & Holger, H. (2000). MAX-MIN ant system. *Future Generation Computer Systems*, **16**(8), 889-914.
- (252) Sylla, C. & Babu, A.J.G. (1987). Methodology for an orderly quadratic assignment problem. *Computers & Industrial Engineering*, **13**(1-4), 281-284.
- (253) Taillard, E. (1991). Robust taboo search for the quadratic assignment problem. *Parallel Computing*, **17**, 443-455.
- (254) Taillard, E.D. (1995). Comparison of iterative searches for the quadratic assignment problem. *Location Science*, **3**(2), 87-105.
- (255) Taillard, E. & Gambardella, L. (1999). Adaptive Memories for the Quadratic Assignment Problem. Technical Report I-87-97, IDSIA, Lugano.
- (256) Taillard, E.D.; Gambardella, L.M.; Gendreau, M. & Potvin, J.Y. (2001). Adaptive memory programming: A unified view of metaheuristics. *European Journal of Operational Research*, **135**(1), 1-16.
- (257) Talbi, E.-G.; Hafidi, Z.; Kebbal, D. & Geib, J.-M. (1998a). A fault-tolerant parallel heuristic for assignment problems. *Future Generation Computer Systems*, **14**(5-6), 425-438.
- (258) Talbi, E.-G.; Hafidi, Z. & Geib, J.-M. (1998b). A parallel adaptive tabu search approach. *Parallel Computing*, **24**(14), 2003-2019.
- (259) Talbi, E.-G.; Roux, O.; Fonlupt, C. & Robillard, D. (2001). Parallel Ant Colonies for the quadratic assignment problem. *Future Generation Computer Systems*, **17**(4), 441-449.
- (260) Tansel, B.C. & Bilen, C. (1998). Move based heuristics for the unidirectional loop network layout problem. *European Journal of Operational Research*, **108**(1), 36-48.
- (261) Tate, D.E. & Smith, A.E. (1995). A genetic approach to the quadratic assignment problem. *Computers and Operations Research*, **22**, 73-83.
- (262) Tavakkoli-Moghaddain, R. & Shayan, E. (1998). Facilities layout design by genetic algorithms. *Computers & Industrial Engineering*, **35**(3-4), 527-530.
- (263) Tian, P.; Ma, J. & Zhang, D.-M. (1999). Application of the simulated annealing algorithm to the combinatorial optimisation problem with permutation property: An investigation of generation mechanism. *European Journal of Operational Research*, **118**(1), 81-94.
- (264) Torki, A.; Yajima, Y. & Enkawa, T. (1996). A low-rank bilinear programming approach for sub-optimal solution of the quadratic assignment problem. *European Journal of Operational Research*, **94**(2), 384-391.

- (265) Tsuchiya, K.; Bharitkar, S. & Takefuji, Y. (1996). A neural network approach to facility layout problems. *European Journal of Operational Research*, **89**(3), 556-563.
- (266) Tsuchiya, K.; Nishiyama, T. & Tsujita, K. (2001). A deterministic annealing algorithm for a combinatorial optimization problem using replicator equations. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **149**(3), 161-173.
- (267) Urban, T.L. (1998). Solution procedures for the dynamic facility layout problem. *Annals of Operations Research*, **76**, 323-342.
- (268) Vlach, M. (1967). A branch-and-bound method for the three index assignment problem. *Ekonomicko-Matematicky Obzor*, **3**, 181-191.
- (269) West, D.H. (1983). Algorithm 608: Approximate solution of the quadratic assignment problem. *ACM Transactions on Mathematical Software*, **9**, 461-466.
- (270) White, D.J. (1995). Some concave-convex representations of the quadratic assignment problem. *European Journal of Operational Research*, **80**(2), 418-424.
- (271) Whitney, H. (1932). Congruent graphs and the connectivity of graphs. *American Journal Mathematics*, **54**, 150-168.
- (272) Wilhelm, M.R. & Ward, T.L. (1987). Solving quadratic assignment problems by simulated annealing. *IEEE Transactions*, **19**, 107-119.
- (273) Wolkowicz, H. (2000a). Handbook of Semidefinite Programming: Theory, Algorithms, and Applications [edited by H. Wolkowicz, R. Saigal, and L. Vandenberghe], International Series in Operations Research, **27**, Kluwer.
- (274) Wolkowicz, H. (2000b). Semidefinite programming approaches to the quadratic assignment problem. **In:** *Nonlinear Assignment Problems: Algorithms and Applications* [edited by P.M. Pardalos and L. Pitsoulis], *Combinatorial Optimization Series*, **7**, 143-174, Kluwer Academic Publishers.
- (275) Youssef, H.; Sait, S.M. & Ali, H. (2003). Fuzzy simulated evolution algorithm for VLSI cell placement. *Computers & Industrial Engineering*, **44**(2), 227-247.
- (276) Yu, J. & Sarker, B.R. (2003). Directional decomposition heuristic for a linear machine-cell location problem. *European Journal of Operational Research*, **149**(1), 142-184.
- (277) Zhao, Q.; Karisch, S.E.; Rendl, F. & Wolkowicz, H. (1998). Semidefinite programming relaxations for the quadratic assignment problem. *Journal Combinatorial Optimization*, **2**, 71-109.
- (278) Zimmermann, H.J. & Monfroglio, A. (1997). Linear programs for constraint satisfaction problems. *European Journal of Operational Research*, **97**(1-4), 105-123.