ISSN 0101-7438

O USO DAS RELAXAÇÕES LAGRANGEANA E *SURROGATE* EM PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO INTEIRA

Luis Gonzalo Acosta Espejo
Prog. Eng. Produção – COPPE
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Rio de Janeiro – RJ
E-mail: luis@pep.ufrj.br

Roberto D. Galvão *
Prog. Eng. Produção – COPPE
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Rio de Janeiro – RJ
E-mail: galvao@pep.ufrj.br

* *Corresponding author*/autor para quem as correspondências devem ser encaminhadas

Recebido em 11/2001, aceito em 10/2002 após 1 revisão

Resumo

As diferentes relaxações de um problema de programação inteira permitem que se obtenham limites da solução ótima do mesmo. Entre as relaxações mais usadas destacam-se as de programação linear, Lagrangeana, *surrogate* e combinada Lagrangeana-*surrogate* (L-S). O presente trabalho contém uma revisão bibliográfica destas relaxações, de métodos de solução para os duais respectivos e de relações teóricas existentes entre os duais. É dada ênfase especial à relaxação *surrogate* e a relaxações combinadas Lagrangeana-*surrogate*. Ilustra-se o uso de uma relaxação combinada L-S através da aplicação da mesma a um problema de localização hierárquico com restrições de cobertura.

Palavras-chave: relaxações: Lagrangeana, *surrogate* e combinada Lagrangeana-*surrogate*; limites para a programação inteira.

Abstract

Relaxations of an integer programming problem produce bounds on its optimal solution. The linear programming, Lagrangean, *surrogate* and combined Lagrangean-*surrogate* (L-S) relaxations are the most commonly used in the solution of an integer programming problem. We present a brief review of these relaxations, solution methods for the respective duals and theoretical relationships that exist among them. We give special emphasis to *surrogate* and combined L-S relaxations. The use of a combined L-S relaxation is illustrated through its application to a hierarchical covering location problem.

Keywords: relaxations: Lagrangean, *surrogate* and combined Lagrangean-*surrogate*; integer programming bounds.

1. Introdução

Problemas de otimização discreta são aqueles nos quais pelo menos um subconjunto das variáveis de decisão deve assumir valores discretos em intervalos pré-definidos. Esta classe inclui os problemas de otimização combinatória, nos quais a solução ótima representa uma das combinações possíveis dos valores das variáveis de decisão. Alguns dos problemas acima podem ser formulados como *Problemas de Programação Inteira*, que em geral são muito mais difíceis de serem resolvidos que os problemas de programação linear.

Seja o seguinte problema de programação inteira:

$$
\begin{aligned}
&(P)\\
&v(P) = \min_{x}\{cx\}\\
&\text{s. a} \quad Ax \le b\\
&\qquad\quad Dx \le e\\
&\qquad\quad x \ge 0 \ \text{ e inteiro.}
\end{aligned}
$$

Na formulação acima x é o vetor de variáveis de decisão, c o vetor de custos, A e D são matrizes de coeficientes tecnológicos e b e e são vetores de disponibilidade de recursos. Não será utilizada notação especial para distinguir vetores coluna ou linha. Todos os produtos vetoriais são produtos interiores no sentido usual e as operações são tomadas como garantidas pelas dimensões de vetores e matrizes correspondentes. Assumiremos que $Ax \le b$ são as restrições que complicam a solução do problema (P), no sentido que o problema (P) pode ser resolvido mais facilmente caso sejam removidas estas restrições.

Uma estratégia para resolver (P) consiste em resolver uma seqüência de problemas "fáceis" obtidos a partir de relaxações do problema original; com a solução de tais problemas procura-se obter limites para o valor da solução ótima de (P). Foi neste contexto que as diferentes relaxações foram desenvolvidas ao longo do tempo. Assumiremos, sem perda de generalidade, que (P) é um problema viável e que o conjunto de soluções viáveis de cada problema relaxado obtido a partir de (P) é um conjunto finito.

Nemhauser & Wolsey (1988) definem uma relaxação do problema (P) como um problema de otimização, (RP), que possui as seguintes propriedades: (i) o conjunto de soluções viáveis de (P) é um subconjunto das soluções viáveis de (RP), e (ii) o valor da função objetivo do problema (P) não é menor que o correspondente valor de (RP), isto é, $v(RP) \le v(P)$ (para problemas de minimização).

Uma relaxação usual dos problemas inteiros é a *relaxação de programação linear*, que consiste em relaxar as condições de integralidade das variáveis de decisão. Esta relaxação será chamada de *RLP* (Relaxação Linear de *P*) e o valor de sua solução ótima será denotado por $v(RLP)$. Uma das aplicações da relaxação de programação linear é no desenvolvimento de algoritmos *branch and bound* para a solução do problema inteiro. Outras relaxações desenvolvidas para problemas de programação inteira incluem as relaxações Lagrangeana, *surrogate* e combinadas Lagrangeana-*surrogate*.

Neste trabalho é apresentada uma revisão bibliográfica destas relaxações, dos métodos de solução para os duais correspondentes e das relações teóricas existentes entre os mesmos. Será dada ênfase especial à relaxação *surrogate* e a relaxações combinadas Lagrangeana-*surrogate*, por serem essas relaxações menos conhecidas que a relaxação Lagrangeana.

Finalizaremos o trabalho ilustrando a obtenção de uma relaxação combinada Lagrangeana-*surrogate* para um problema de localização hierárquico com restrições de cobertura.

Um estudo teórico das relaxações Lagrangeana e *surrogate* sob a ótica da dualidade geral pode ser encontrado em Nieuwenhuizen (1999). Recentemente Li (1999) apresentou o método da *P*-norma *surrogate* para resolver problemas de programação inteira. A principal desvantagem deste método é que o problema *surrogate* a ser resolvido é um problema altamente não linear, fato que dificulta sua implementação computacional. Resultados empíricos relativos ao uso das relaxações Lagrangeana, *surrogate* e combinada Lagrangeana *surrogate* para um problema de localização hierárquico de máxima cobertura podem ser encontrados em Espejo (2001) e Espejo *et al*. (2003).

2. A Relaxação Lagrangeana: Teoria e Aplicações

Held & Karp (1970), que utilizaram um método Lagrangeano para resolver o problema do caixeiro viajante, foram precursores do uso deste método; Geoffrion (1974) deu ao mesmo o nome de Relaxação Lagrangeana (ver Fisher, 1981).

A lista de aplicações da relaxação Lagrangeana é muito extensa. Tais aplicações incluem o problema do caixeiro viajante, problemas de localização, o problema de atribuição generalizado, problemas de recobrimento e particionamento de conjuntos e problemas de roteamento, entre outros. Algumas aplicações da relaxação Lagrangeana podem ser encontradas, por exemplo, no artigo de Sridharan (1995), no livro de Bazaraa *et al*. (1993) e no capítulo escrito por Beasley (1993) para o livro editado por Reeves. Entre as aplicações recentes da relaxação Lagrangeana estão, por exemplo, as de Galvão *et al*. (2000, 2002) e Fumero (2001). A relaxação Lagrangeana pode ser utilizada para fornecer limites em algoritmos *branch and bound*, constituindo-se em uma alternativa ao uso da relaxação de programação linear.

Uma relaxação Lagrangeana de (P) é obtida multiplicando o conjunto de restrições $Ax \leq b$ por um vetor u de multiplicadores de Lagrange de sinal apropriado, adicionando-se o produto à função objetivo. A relaxação Lagrangeana (P_u) do problema (P) é dada por:

$$
\begin{aligned}
&(P_u)\\
&v(P_u) = \min_x \{ cx + u(Ax - b) \}\\
&\text{s. a} \quad Dx \leq e\\
&\qquad\quad x \geq 0 \ \text{ e inteiro.}
\end{aligned}
$$

Observe-se que o problema Lagrangeano é um problema em x, resolvido para um dado vetor fixo u. Neste caso devemos escolher $u \geq 0$ para garantir que $v(P_u)$ seja um limite inferior para (P). Caso as restrições sejam da forma $Ax \geq b$ os multiplicadores devem ser não-positivos para garantir que $v(P_u) \leq v(P)$. Finalmente, se $Ax = b$ o sinal de u é irrestrito.

A qualidade do limite gerado por (P_u) depende do valor de u. O problema central na obtenção de bons limites através desta relaxação é encontrar um conjunto de multiplicadores u que resolve o Dual Lagrangeano (D_u):

$$
\begin{aligned}
&(D_u)\\
&v(D_u) = \max_{u \geq 0} \{ v(P_u) \}.
\end{aligned}
$$

Em geral não se pode garantir a obtenção de um vetor u tal que $v(D_u) = v(P)$.

Uma solução ótima para (P) é obtida através da relaxação Lagrangeana quando duas condições são satisfeitas simultaneamente: (i) a solução da relaxação Lagrangeana é viável no problema (P), isto é, $(Ax^* - b) \leq 0$, onde x^* é a solução ótima de (P_u) para $u = u^*$; (ii) são satisfeitas as condições de folgas complementares dadas por $u^*(Ax^* - b) = 0$ (Greenberg & Pierskalla, 1970). Observe-se que o fato de a solução ótima Lagrangeana x^* ser viável para o problema (P) não é suficiente para garantir que tal solução será ótima para (P).

Fisher (1981) e Parker & Rardin (1988) provaram que $v(P_u)$ é uma função linear por partes, contínua e côncava, mas geralmente não diferenciável no ponto ótimo. O fato de uma função ser côncava implica que um ótimo local é um ótimo global. Esta propriedade da relaxação Lagrangeana faz com que ela seja uma proposta atraente como estratégia para obter limites da solução de (P).

3. A Relaxação *Surrogate*

A relaxação *surrogate* consiste em reduzir algumas restrições do problema original (P) a uma só restrição, denominada de *restrição surrogate*; sua função é servir como substituta dessas restrições. A *restrição surrogate* é definida como uma combinação linear não negativa de algumas restrições do problema em estudo, onde pelo menos uma das restrições tem um peso positivo (Glover, 1965).

Desde sua introdução por Glover a relaxação *surrogate* tem sido proposta por vários autores para uso na solução de problemas não convexos, especialmente em problemas de programação inteira. Um tratamento teórico abrangente da dualidade *surrogate* em programação matemática é dado por Greenberg & Pierskalla (1970). Eles estabeleceram alguns resultados importantes para a construção da melhor restrição *surrogate* e mostraram que isto implica na maximização de uma função quase-côncava (para definição de função quase-côncava ver por exemplo Bazaraa *et al.*, 1993), ainda que possivelmente não contínua. Isso garante que qualquer ótimo local é um ótimo global (sem considerar intervalos onde a função é constante). Glover (1975) resumiu esses resultados e apresentou um tratamento unificado da teoria da dualidade *surrogate*. O problema do *gap surrogate* foi estudado por Glover (1975) e por Greenberg & Pierskalla (1970), que foram os primeiros a demonstrar que o *gap* dual do enfoque *surrogate* é igual ou menor que o *gap* dual do enfoque Lagrangeano; a relaxação Lagrangeana é denominada de função de penalidade Lagrangeana no trabalho de Greenberg e Pierskalla. Um estudo da relação entre o dual *surrogate* e o dual Lagrangeano no caso de problemas inteiros foi feito por Karwan & Rardin (1979).

Considerando $w \geq 0$ e $w \neq 0$ pode-se então escrever o Problema *Surrogate* de (P), (P^w), como:

$$
\begin{aligned}
&(P^w) \\
&v(P^w) = \min_x \{cx\} \\
&\text{s. a} \quad w(Ax - b) \leq 0 \\
&\qquad\quad Dx \leq e \\
&\qquad\quad x \geq 0 \text{ e inteiro.}
\end{aligned}
$$

Como (P^w) é uma relaxação de (P) com w não negativo, $v(P^w)$ não pode exceder o valor ótimo da função objetivo de (P) (em problemas de minimização) e sua aproximação a este valor será tanto melhor quanto $w(Ax - b) \leq 0$ seja uma melhor representação das restrições $Ax \leq b$. Observe-se que $v(P^0) \leq v(P^w)$ para todo $w \neq 0$; desta maneira zero pode ser excluído como possível valor para w. Também se pode observar que para qualquer $k > 0$, $v(P^{kw}) = v(P^w)$; qualquer normalização do vetor w é portanto possível. Greenberg & Pierskalla (1970) provaram que para obter uma solução ótima para (P) através da relaxação *surrogate* não é necessário que sejam satisfeitas as condições de folgas complementares; isto é, qualquer solução ótima para o problema *surrogate* que seja viável para o problema original é automaticamente ótima para o mesmo (ver também Glover, 1975).

O problema de escolher um w que melhore a proximidade de (P^w) a (P) implica na escolha do multiplicador w que maximiza o valor do problema *surrogate* correspondente. Isto motiva a seguinte definição do dual *surrogate*:

$$(D^w)$$
$$v(D^w) = \max_{w \geq 0, w \neq 0} \{v(P^w)\}.$$

Glover (1975) dá as condições que devem ser satisfeitas para garantir a solução ótima tanto do dual *surrogate* quanto do problema original. Essas condições são: (i) O vetor de multiplicadores *surrogate* w deve ser não negativo; (ii) x é solução ótima para o problema *surrogate*; (iii) x é viável para o problema original. Tal como no dual Lagrangeano, não se pode garantir a obtenção de um vetor w tal que $v(D^w) = v(P)$.

Aplicações da Relaxação Surrogate

Quando comparadas com as da relaxação Lagrangeana, as aplicações da relaxação *surrogate* não são tão variadas. A dificuldade de se resolver os problemas resultantes da relaxação *surrogate*, que em muitos casos se reduzem a problemas da mochila, pode ser uma das causas.

Na literatura encontram-se, entre outras, as seguintes aplicações da relaxação *surrogate*. O uso das relaxações Lagrangeana e *surrogate* na decomposição de Benders foi publicado por Rardin & Unger (1976) e Holmberg (1994). Na área da programação não linear temos os trabalhos de Dinkel & Kochenberger (1978) e Chen *et al*. (1998). Uma abordagem *surrogate* para problemas na forma do problema da mochila foi realizada por Karwan & Rardin (1984) e Gavish & Pirkul (1985). O problema de recobrimento de conjuntos foi resolvido, utilizando uma heurística *surrogate*, por Lorena & Lopez (1994). Lorena & Narciso (1996) utilizaram a relaxação *surrogate* para resolver o problema de atribuição generalizado. Esta relaxação foi também usada na busca de limites inferiores para a solução do problema de programação de tarefas, onde várias máquinas competem pelo uso comum de um único *buffer* local (Khosla, 1995). Uma das heurísticas de Galvão *et al*. (2000) utiliza a relaxação *surrogate* para resolver o problema de localização de máxima cobertura. Finalmente, a relaxação *surrogate* é uma das relaxações usadas por Espejo *et al*. (2003) para obter limites superiores para o problema de localização hierárquico de máxima cobertura.

4. Relaxações Combinadas Lagrangeana-*Surrogate*

Apresentamos a seguir duas relaxações que são obtidas aplicando simultaneamente as relaxações Lagrangeana e *surrogate* a um dado problema inteiro.

4.1 A Relaxação Lagrangeana/*Surrogate*

Esta relaxação foi desenvolvida por Lorena & Senne (1996). O procedimento utilizado pelos autores para criar este tipo de relaxação é dado a seguir.

1) Usando um vetor não negativo de multiplicadores *surrogate*, w, obter a relaxação *surrogate* do problema (P):

$$
\begin{aligned}
&(P^w)\\
&v(P^w) = \min_x \{cx\}\\
&\text{s. a} \quad w(Ax-b) \le 0\\
&\qquad\quad Dx \le e\\
&\qquad\quad x \ge 0 \ \text{ e inteiro.}
\end{aligned}
$$

2) Usando o multiplicador escalar não negativo, t, fazer uma relaxação Lagrangeana da restrição (unidimensional) *surrogate* do problema (P^w). Obtém-se:

$$
\begin{aligned}
&(LS_t^w)\\
&v(LS_t^w) = \min_x \left\{ cx + t[w(Ax-b)] \right\}\\
&\text{s. a} \quad Dx \le e\\
&\qquad\quad x \ge 0 \ \text{ e inteiro.}
\end{aligned}
$$

O dual do problema (LS_t^w) é dado por

$$
\begin{aligned}
&(DLS_t^w)\\
&v(DLS_t^w) = \max_{w \ge 0, w \ne 0, t \ge 0} \{v(LS_t^w)\}.
\end{aligned}
$$

Observe-se que este problema pode ser expresso como sendo o dual Lagrangeano (D_u) do problema (P), onde $u = tw$.

Aplicações do uso da relaxação Lagrangeana/*surrogate* podem ser encontrados em Lorena & Senne (1996), que utilizaram este tipo de relaxação para resolver um problema de localização não capacitado, e em Narciso & Lorena (1999), para resolver o problema de alocação generalizado.

4.2 A Relaxação Combinada Lagrangeana-*Surrogate*

A criação de uma relaxação combinada Lagrangeana-*surrogate* do problema (P) foi proposta por Greenberg & Pierskalla (1970). Os autores propuseram dualizar um conjunto de restrições na função objetivo e, com outro conjunto de restrições, formar uma restrição *surrogate*. Segundo esta proposta poderíamos obter, por exemplo, duas relaxações Lagrangeana-*surrogate* combinadas para o problema (P): (i) dualizar de forma Lagrangeana o conjunto de restrições $Ax \le b$ e formar uma restrição *surrogate* com as restrições $Dx \le e$; (ii) particionar em dois subconjuntos as restrições $Ax \le b$; dualizar de forma Lagrangeana um desses subconjuntos e com o outro formar uma restrição *surrogate*.

Glover (1975), seguindo esta mesma linha de pesquisa, definiu formalmente a relaxação combinada Lagrangeana-*surrogate* e apresentou o primeiro desenvolvimento teórico para este tipo de relaxação. A definição de Glover difere da proposta de Greenberg & Pierskalla (1970), pois Glover utiliza o mesmo conjunto restrições para formar a relaxação combinada Lagrangeana-*surrogate*. A relaxação combinada Lagrangeana-*surrogate* pode ser obtida da seguinte maneira (ver John & Kochenberger, 1988):

1) Considerar um vetor não negativo de multiplicadores *surrogate*, w, e formar a restrição *surrogate* $w(Ax-b) \leq 0$. Adicionar esta restrição ao problema (P) obtendo

$$
\begin{array}{ll}
(PS^{w}) & \\
v(PS^{w}) = \min\limits_{x}\{cx\} & \\
\text{s. a} & Ax \leq b \\
 & w(Ax-b) \leq 0 \\
 & Dx \leq e \\
 & x \geq 0 \text{ e inteiro .}
\end{array}
$$

É claro que $v(P) = v(PS^{w})$, pois $w(Ax-b) \leq 0$ é uma restrição redundante em (P).

2) A seguir dualizar de forma Lagrangeana, com $u \geq 0$, o conjunto de restrições $Ax \leq b$ do problema (PS^{w}), formando o seguinte problema combinado Lagrangeano-*surrogate*:

$$
\begin{array}{ll}
(P_u^{w}) & \\
v(P_u^{w}) = \min\limits_{x}\{cx + u(Ax-b)\} & \\
\text{s. a} & w(Ax-b) \leq 0 \\
 & Dx \leq e \\
 & x \geq 0 \text{ e inteiro .}
\end{array}
$$

O melhor valor para o limite inferior derivado desta relaxação é obtido resolvendo o seguinte problema dual:

$$
\begin{array}{l}
(D_u^{w}) \\
v(D_u^{w}) = \max\limits_{u\geq 0, w\geq 0, w\neq 0}\{v(P_u^{w})\} .
\end{array}
$$

$v(P_u^{w})$ é uma função côncava de u para w fixo e quase-côncava de w para u fixo, ver Karwan & Rardin (1980). Os autores provaram com um contra-exemplo que $v(P_u^{w})$, como função de u e w, perde a quase-concavidade. O fato de $v(P_u^{w})$ não ser uma função quase-côncava dificulta o desenvolvimento de métodos de busca dos multiplicadores ótimos.

5. A Busca de Multiplicadores Ótimos

O problema crítico no uso efetivo das relaxações é a derivação de um bom conjunto de multiplicadores para os problemas duais correspondentes. As características dos duais das relaxações determinam se existem bons procedimentos de busca para encontrar multiplicadores duais ótimos ou quase-ótimos. Nesta seção apresentamos uma revisão dos métodos desenvolvidos para a busca do melhor conjunto de multiplicadores nas relaxações Lagrangeana, *surrogate* e combinadas Lagrangeana-*surrogate*. A literatura evidencia que o método dos subgradientes está sendo utilizado com maior freqüência para resolver os duais das relaxações Lagrangeana, *surrogate* ou Lagrangeana-*surrogate* (Fumero, 2001, é uma referência recente para o método dos subgradientes).

Os algoritmos utilizados para resolver o dual Lagrangeano são, basicamente, o método dos subgradientes, variantes dos procedimentos de decomposição, sejam eles de Benders (Schrijver, 1986) ou Dantzig-Wolfe (Minoux, 1986; Baker & Sheasby, 1999; Wentges, 1997; Klose, 2000) e algoritmos especializados com base no método de ajuste de multiplicadores (Erlenkotter, 1978; Fisher *et al*., 1980; Galvão *et al*., 2000). Os métodos dos subgradientes e de ajuste de multiplicadores abordam diretamente o problema (D_u), enquanto os procedimentos de decomposição de Benders e Dantzig-Wolfe resolvem reformulações de (D_u); tais reformulações podem ser encontradas, por exemplo, em Fisher (1981), Nemhauser & Wolsey (1988) e Galvão (1993).

Diversos algoritmos foram propostos para resolver o dual *surrogate*. Os trabalhos de Banerjee (1971) e Karwan & Rardin (1979, 1984) utilizam o procedimento de Benders. Karwan & Rardin (1981) propõem utilizar um algoritmo *branch and bound*. Glover (1975) desenvolveu um algoritmo que pode ser utilizado para encontrar multiplicadores ótimos para problemas com duas restrições. Dyer (1980) propôs dois algoritmos que são extensões naturais de métodos utilizados na relaxação Lagrangeana. Gavish & Pirkul (1985) propuseram um algoritmo para problemas com duas restrições e depois incorporaram este algoritmo a uma heurística para calcular multiplicadores para problemas com mais de duas restrições. Sarin *et al*. (1987) desenvolveram um procedimento para a busca dos multiplicadores do dual *surrogate* utilizando uma sucessão de buscas no dual Lagrangeano.

Outra estratégia utilizada é a seguinte: relaxar as condições de integralidade das variáveis de decisão no problema *surrogate* e utilizar o método dos subgradientes para resolver o dual *surrogate*. Esta estratégia foi proposta por Lorena & Lopez (1994) para resolver o problema de recobrimento de conjuntos e por Lorena & Narciso (1996) para resolver o problema de alocação generalizado. Nesta mesma linha de pesquisa Galvão *et al*. (2000) compararam o uso das relaxações Lagrangeana e *surrogate* para resolver o problema de localização de máxima cobertura. Almiñana & Pastor (1997) adaptaram a heurística de Lorena & Lopez (1994) para resolver o problema de cobertura de conjuntos com custo unitário. Para resolver o problema (DLS_t^w), Lorena & Senne (1996) e Narciso & Lorena (1999) utilizaram o método dos subgradientes.

Na literatura são relatadas algumas estratégias para resolver (D_u^w). Glover (1975) sugere manter uw=0. Notando-se que Glover utiliza o mesmo conjunto de restrições para as duas relaxações, isto implica em relaxar um subconjunto destas restrições de forma Lagrangeana e seu complemento de forma *surrogate* (Karwan & Rardin, 1980, provaram, com um contra-exemplo, que esta estratégia pode impedir que seja encontrada a solução ótima para a relaxação combinada Lagrangeana-*surrogate*). No mesmo trabalho Glover (1975) sugere que fazendo $u=w$ pode ser possível melhorar o limite obtido com a relaxação Lagrangeana. Uma das heurísticas de Espejo *et al*. (2003) usa esta estratégia para resolver o problema de localização hierárquica de máxima cobertura. Karwan & Rardin (1980) propuseram a seguinte heurística para resolver (D_u^w): Resolver primeiro (D^w) e encontrar o conjunto de multiplicadores *surrogate* ótimos, w^*, tentando depois melhorar o valor de $v(D^w)$ resolvendo $\max_{u\geq 0}\{v(D_u^{w^*})\}$. O trabalho de Gavish & Pirkul (1985) apresenta duas implementações desta heurística. A estratégia utilizada por John & Kochenberger (1988) foi fixar o conjunto de multiplicadores *surrogate*, $\hat{w}$, e resolver o problema $(D_u^{\hat{w}})$ utilizando o método dos subgradientes.

6. Relações Teóricas entre as Relaxações Lagrangeana, *Surrogate* e Combinada Lagrangeana-*surrogate*

Nesta seção apresentamos os principais resultados teóricos que mostram as relações entre os limites obtidos com as relaxações Lagrangeana, *surrogate* e combinada Lagrangeana-*surrogate*. É importante observar que os resultados apresentados nesta seção são válidos unicamente para problemas de minimização. A seguinte notação adicional é utilizada para facilitar o entendimento dos resultados: $(DRLP_u)$, dual da relaxação de programação linear do problema Lagrangeano; $(DRLP^w)$, dual da relaxação de programação linear do problema *surrogate* e (D_u^u), dual do problema combinado Lagrangeano-*surrogate* quando $u=w$.

Os resultados teóricos que seguem foram discutidos em Galvão *et al*. (2002) e Espejo *et al*. (2003); um resumo deles é incluído aqui para complementar o trabalho. Geoffrion (1974) provou que $v(RLP) = v(DRLP_u) \leq v(D_u)$. Ele provou também que se (P_u) possui a propriedade de integralidade, então $v(DRLP_u) = v(D_u)$. Greenberg & Pierskalla (1970) provaram que $v(RLP) \leq v(D_u) \leq v(D^w) \leq v(P)$. Karwan & Rardin (1979) provaram que $v(RLP) = v(DRLP_u) = v(DRLP^w)$ e que, se (P^w) possui a propriedade de integralidade, então $v(RLP) = v(D_u) = v(D^w)$ (Note que se P^w possui a propriedade de integralidade, então P_u também a possui). No artigo de Karwan & Rardin (1980) é dada a seguinte relação: $v(D^w) \leq v(D_u^w) \leq v(P)$. Finalmente, Nieuwenhuizen (1999) provou que $v(D_u) \leq v(D_w^w) \leq v(D^w)$. Note que nesse último conjunto de desigualdades $v(D_w^w) \leq v(D^w)$ não significa que os vetores de multiplicadores w são os mesmos nos dois problemas duais; em $v(D_w^w)$ no entanto os vetores usados nas relaxações Lagrangeana e *surrogate* são os mesmos.

Em resumo, para problemas de minimização podemos escrever-se as seguintes relações:

$$v(RLP) \leq v(D_u) \leq v(D_w^w) \leq v(D^w) \leq v(D_u^w) \leq v(P) .$$

Para resolver um dado problema de programação inteira podem ser criadas várias relaxações, dependendo da escolha das restrições a serem relaxadas. A escolha das restrições a serem relaxadas pode afetar tanto o valor da solução ótima do dual da relaxação quanto o esforço computacional requerido para avaliar e atualizar a função dual durante o processo de solução do mesmo. Há portanto dois fatores conflitantes que devem ser avaliados: a facilidade de solução do problema dual (que depende da natureza do problema relaxado correspondente) e a qualidade do limite gerado para o problema original. A possibilidade de se gerar problemas que sejam mais fáceis de serem resolvidos, quando comparados ao problema original, depende da estrutura do problema original e do grau de separabilidade obtido através da relaxação das restrições escolhidas. De maneira geral pode-se dizer que as relaxações que geram melhores limites requerem maior tempo computacional, enquanto relaxações que produzem problemas muito fáceis de serem resolvidos geram limites de pior qualidade.

Uma estratégia importante que tem sido utilizada para melhorar os limites obtidos com o dual de uma relaxação é adicionar novas restrições que sejam redundantes no problema (P). Quando algumas das restrições são relaxadas este novo conjunto de restrições pode deixar de ser redundante. Isto deve ser feito objetivando que o espaço de soluções viáveis do problema relaxado, com as novas restrições, seja mais restrito que espaço de soluções da relaxação sem tais restrições redundantes para (P).

7. Ilustração do Uso de uma Relaxação Combinada Lagrangeana-*surrogate*

Usaremos o Problema de Localização Hierárquico de Máxima Cobertura (*Hierarchical Covering Location Problem*, HCLP) para mostrar o uso de uma relaxação combinada L-S. Esta relaxação, desenvolvida e mostrada em maior detalhe em Espejo (2001) e Espejo *et al.* (2003), é resumida aqui para fins ilustrativos.

Os modelos de localização com restrições de cobertura pertencem à categoria de modelos que provêm cobertura para áreas de demanda. Nestes modelos, comumente usados em aplicações relacionadas à localização de facilidades de emergência, uma área de demanda é considerada *coberta* se está dentro de uma distância crítica pré-estabelecida de pelo menos uma das facilidades existentes. O HCLP, definido por Moore & ReVelle (1982) para localizar serviços de saúde em Honduras, é uma extensão hierárquica de dois níveis do Problema de Localização de Máxima Cobertura (*Maximal Covering Location Problem*, MCLP).

Moore & ReVelle (1982) descreveram um sistema de localização hierárquica de dois níveis da seguinte maneira: considere um sistema que fornece 2 níveis de serviços e que possui 2 níveis de facilidades. Neste sistema um nível de serviço *s* está disponível somente em uma facilidade de nível igual ou superior a *s*. O problema a ser resolvido é então o de localizar um dado número de facilidades para cada um dos dois níveis definidos, de maneira que se maximize a população que tenha acesso aos dois níveis de serviço.

As distâncias críticas definidas por Moore & ReVelle (1982) são diferentes para os dois níveis de serviço, e as distâncias críticas para o serviço de nível 1 são diferentes para os dois tipos de facilidades. Seja R_1 a distância crítica para o serviço de nível 1 oferecido pela facilidade de nível 1 e seja R_2 a distância crítica para o serviço de nível 1 oferecido pela facilidade de nível 2. Por outro lado, seja T_1 a distância crítica para o serviço de nível 2. Por hipótese as facilidades de nível superior são as mais atraentes; assume-se portanto que $R_1 < R_2 < T_1$. O modelo matemático correspondente pode ser escrito como:

$$(HCLP)\text{: } v(HCLP) = Max\left\{\sum_{j\in J} f_j x_j\right\} \tag{1}$$

$$\text{s. a} \quad \sum_{i\in I} a_{ij} y_i + \sum_{i\in I} b_{ij} z_i - x_j \geq 0, j \in J, \tag{2}$$

$$\sum_{i\in I} c_{ij} z_i - x_j \geq 0, j \in J, \tag{3}$$

$$\sum_{i\in I} y_i = p, \tag{4}$$

$$\sum_{i\in I} z_i = q, \tag{5}$$

$$x_j \in \{0,1\}, j \in J, \tag{6}$$

$$y_i, z_i \in \{0,1\}, i \in I, \tag{7}$$

onde $J = \{1,2,...,m\}$ é o conjunto de áreas de demanda, $I = \{1,2,...,n\}$ é o conjunto de locais onde as facilidades podem ser instaladas, f_j é a população da área de demanda j, $a_{ij} = 1$ se a área de demanda j puder ser coberta pelo serviço de nível 1 (dentro da distância crítica R_1), oferecido pela facilidade de nível 1 localizada em $i \in I$ ($a_{ij} = 0$ caso contrário), $b_{ij} = 1$ se a área de demanda j puder ser coberta pelo serviço de nível 1 (dentro da distância crítica R_2), oferecido pela facilidade de nível 2 localizada em $i \in I$ ($b_{ij} = 0$ caso contrário), $c_{ij} = 1$ se a área de demanda j puder ser coberta pelo serviço de nível 2 (dentro da distância crítica T_1), oferecido pela facilidade de nível 2 localizada em $i \in I$ ($c_{ij} = 0$ caso contrário), p é o número de facilidades de nível 1 a serem localizadas, q é o número de facilidades de nível 2 a serem localizadas e x_j, y_i e z_i são as variáveis de decisão. $x_j = 1$ se a área de demanda $j \in J$ é coberta ($x_j = 0$ caso contrário); $y_i = 1$ se uma facilidade de nível 1 é localizada em $i \in I$ ($y_i = 0$ caso contrário); $z_i = 1$ se uma facilidade de nível 2 é localizada em $i \in I$ ($z_i = 0$ caso contrário).

No caso do HCLP uma restrição combinada Lagrangeana-*surrogate* pode ser obtida da seguinte maneira. Considere dois vetores $W^1 = [\omega,\sigma] \geq 0$ e $V^1 = [\lambda,\mu] \geq 0$. Uma restrição *surrogate* é formada combinando as restrições de cobertura (2) e (3), obtendo-se:

$$\sum_{j \in J} \omega_j \left(\sum_{i \in I} a_{ij} y_i + \sum_{i \in I} b_{ij} z_i - x_j \right) + \sum_{j \in J} \sigma_j \left(\sum_{i \in I} c_{ij} z_i - x_j \right) \geq 0 \equiv$$

$$\equiv \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} \omega_j a_{ij} y_i + \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} \left(\omega_j b_{ij} + \sigma_j c_{ij} \right) z_i - \sum_{j \in J} \left(\omega_j + \sigma_j \right) x_j \geq 0 \,.$$

Esta restrição pode ser adicionada à formulação original do HCLP (note-se que ela é redundante em relação a esta formulação). Obtém-se:

$$(HCLP') : \ v(HCLP') = Max \left\{ \sum_{j \in J} f_j x_j \right\} \tag{1}$$

sujeito a

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} a_{ij} \omega_j y_i + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} (b_{ij} \omega_j + c_{ij} \sigma_j) z_i - \sum_{j \in J} (\omega_j + \sigma_j) x_j \geq 0 \tag{3a}$$

e (2)-(7).

Dualizando as restrições (2) e (3) utilizando o vetor $V^1 = [\lambda,\mu] \geq 0$, obtemos:

$$v(HCLP_{\lambda\mu}^{\omega\sigma}) = Max \left\{ \sum_{j \in J} (f_j - \lambda_j - \mu_j) x_j + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} a_{ij} \lambda_j y_i + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} (b_{ij} \lambda_j + c_{ij} \mu_j) z_i \right\}$$

sujeito a (3a) e (4)-(7).

Ou, fazendo

$$\alpha_i = \sum_{j \in J} a_{ij} \lambda_j ; \ \beta_i = \sum_{j \in J} (b_{ij} \lambda_j + c_{ij} \mu_j) ; \ \alpha_i' = \sum_{j \in J} a_{ij} \omega_j ; \ \beta_i' = \sum_{j \in J} (b_{ij} \omega_j + c_{ij} \sigma_j) \,,$$

obtemos finalmente:

$$\left(HCLP_{\lambda\mu}^{\omega\sigma} \right) : \ v\left(HCLP_{\lambda\mu}^{\omega\sigma} \right) = Max \left\{ \sum_{j \in J} (f_j - \lambda_j - \mu_j) x_j + \sum_{i \in I} \alpha_i y_i + \sum_{i \in I} \beta_i z_i \right\}$$

$$\text{s. a} \quad \sum_{i \in I} \alpha_i' y_i + \sum_{i \in I} \beta_i' z_i - \sum_{j \in J} (\omega_j + \sigma_j) x_j \geq 0 \tag{3a}$$

e (4)-(7). É importante notar que quando $W^1 \neq V^1$ $HCLP_{\lambda\mu}^{\omega\sigma}$ é um problema difícil de ser resolvido: as variáveis y_i e z_i que maximizam $\sum_{i \in I} \alpha_i y_i + \sum_{i \in I} \beta_i z_i$ na função objetivo não são necessariamente as mesmas que maximizam $\sum_{i \in I} \alpha'_i y_i + \sum_{i \in I} \beta'_i z_i$ na restrição (3a).

Se fizermos $W^1 = V^1$ (em cujo caso $\omega_j = \lambda_j$, $\sigma_j = \mu_j \; \forall j$), então:

$$\sum_{j \in J} a_{ij} \omega_j = \sum_{j \in J} a_{ij} \lambda_j = \alpha_i \;\text{ e }\; \sum_{j \in J} (b_{ij} \omega_j + c_{ij} \sigma_j) = \sum_{j \in J} (b_{ij} \lambda_j + c_{ij} \mu_j) = \beta_i \;;$$

a restrição (3a) torna-se neste caso:

$$\sum_{i \in I} \alpha_i y_i + \sum_{i \in I} \beta_i z_i - \sum_{j \in J} (\lambda_j + \mu_j) x_j \geq 0.$$

Desta vez y_i e z_i podem ser determinadas buscando-se maximizar $\sum_{i \in I} \alpha_i y_i + \sum_{i \in I} \beta_i z_i$ tanto na função objetivo como na restrição (3a). Uma vez que para maximizar x_j deve-se buscar maximizar tanto $\sum_{i \in I} \alpha_i y_i$ como $\sum_{i \in I} \beta_i z_i$ em (3a), e levando em conta que $\sum_{i \in I} y_i = p$ e $\sum_{i \in I} z_i = q$, obtém-se:

$$\left(HCLP_{\lambda\mu}^{\lambda\mu} \right) : \; v\left(HCLP_{\lambda\mu}^{\lambda\mu} \right) = Max \left\{ \sum_{j \in J} (f_j - \lambda_j - \mu_j) x_j + C \right\}$$

$$\text{s. a} \quad \sum_{j \in J} (\lambda_j + \mu_j) x_j \leq C ,$$

$$x_j \in \{0,1\} \; \forall j,$$

onde $C = \sum^p \alpha_i + \sum^q \beta_i$. $\sum^p \alpha_i$ é a soma dos p maiores α_i (empates resolvidos arbitrariamente), $\sum^q \beta_i$ é a soma dos q maiores β_i (empates novamente resolvidos arbitrariamente). $\left(HCLP_{\lambda\mu}^{\lambda\mu} \right)$ é portanto um problema da mochila 0-1 com coeficientes fracionários.

É interessante notar que a relaxação $(HCLP_{\lambda\mu}^{\omega\sigma})$ é o caso mais geral das relaxações apresentadas em Espejo *et al.* (2003) para o HCLP. Com efeito, fazendo $\omega = \sigma = 0$ em $(HCLP_{\lambda\mu}^{\omega\sigma})$ obtemos imediatamente a relaxação Lagrangeana ($HCLP_{\lambda\mu}$). Por outro lado, fazendo $\lambda = \mu = 0$ em $(HCLP_{\lambda\mu}^{\omega\sigma})$ obtemos a relaxação *surrogate* ($HCLP^{\omega\sigma}$). Finalmente, aplicando os resultados teóricos apresentados na Seção 6 e notando que a relaxação Lagrangeana de HCLP possui a propriedade da integralidade, é possível escrever:

$$v(\text{RLHCLP}) = v(\text{DRLHCLP}_{\lambda\mu}) = v(\text{DRLHCLP}^{\lambda\mu}) = v(\text{DHCLP}_{\lambda\mu}) \geq v(\text{DHCLP}_{\lambda\mu}^{\lambda\mu}) \geq$$

$$v(\text{DHCLP}^{\lambda\mu}) \geq v(\text{DHCLP}_{\lambda\mu}^{\omega\sigma}) \geq v(\text{HCLP}).$$

Com a finalidade de ilustrar, para o HCLP, o desempenho da relaxação combinada L-S em relação às relaxações Lagrangeana e *surrogate*, reproduzimos na tabela abaixo os resultados obtidos em Espejo *et al.* (2003). Os problemas-teste utilizados nessa tabela foram os seguintes: S55, rede definida por Swain (1971); G&R100 e G&R150, que correspondem às redes geradas aleatoriamente por Galvão & ReVelle (1996); B300, B500 e B700, obtidos da biblioteca eletrônica de Beasley para o problema das *p*-medianas (problemas Pmed11, Pmed21 e Pmed31). As heurísticas relaxadas (Heur_Surr Relaxada e Heur_L-S Relaxada) correspondem à solução dos problemas da mochila correspondentes relaxando as condições de integralidade.

Média do % Gap e Tempo Computacional***

Rede	Heur_Lag		Heur_Surr Relaxada		Heur_Surr		Heur_L-S Relaxada		Heur_L-S	
	% Gap	Tempo	% Gap	Tempo	% Gap	Tempo	% Gap	Tempo	% Gap	Tempo
S55*	0,00	0,79	0,06	1,11	0,00	0,71	0,00	0,77	0,00	0,71
G&R100*	0,35	3,42	0,36	3,53	0,41	2,76	0,32	3,15	0,44	3,47
G&R150*	1,50	6,17	1,55	6,26	1,66	5,53	2,00	4,93	1,47	5,60
B300_11*	0,41	37,40	0,37	43,13	0,33	41,88	0,38	44,23	0,38	43,95
B500_21*	0,58	101,56	0,51	101,87	0,51	91,77	0,54	100,14	0,47	104,32
B700_31**	2,43	276,50	3,01	320,07	3,27	269,63	2,43	280,54	2,34	269,36

* % Gap=100(Sol_Ótima - Sol_Heurística)/Sol_Ótima.
** % Gap=100(Limite Superior - Sol_Heurística)/Limite Superior.
*** Em segundos de CPU, Microcomputador Pentium II 300 Mhz.

Como pode ser observado na tabela acima, a média dos *gaps* obtidos para os problemas teste não difere significativamente entre as diversas relaxações utilizadas, para o mesmo conjunto de problemas. Poder-se-ia esperar, dados os resultados teóricos apresentados, que os melhores limites poderiam ser obtidos quando são solucionados os problemas da mochila 0-1 nas relaxações combinada Lagrangeana-*surrogate* e *surrogate* do problema. Isto, porém, não foi geralmente observado. Nossa experiência prática em resolver o problema da mochila com coeficientes fracionários explica o porque destes resultados. Maiores detalhes podem ser encontrados em Espejo *et al.* (2003).

8. Conclusões

Greenberg & Pierskalla (1970) propuseram combinar as relaxações Lagrangeana e *surrogate* para diminuir o *gap* dual. Os autores indicaram a necessidade de um desenvolvimento tanto teórico quanto empírico para avaliar se esta proposta é prática no contexto geral de resolver um problema de programação inteira. Vários autores publicaram resultados teóricos importantes nesta linha de pesquisa; poucos, porém, publicaram resultados computacionais conclusivos em relação a esta proposta. Entre os trabalhos com resultados computacionais disponíveis podemos citar Espejo (2001) e Espejo *et al.* (2003).

Referências Bibliográficas

(1) Almiñana, M. & Pastor, J.T. (1997). An adaptation of SH heuristic to the location set covering problem. *European Journal of Operational Research*, **100**, 586-593.

(2) Baker, B.M. & Sheasby, J. (1999). Accelerating the convergency of subgradient optimisation. *European Journal of Operational Research*, **117**, 136-144.

(3) Banerjee, K. (1971). Generalized Lagrange multipliers in dynamic programming. Research Report No. ORC 71-12, Operations Research Center, University of California, Berkeley, California.

(4) Bazaraa, M.S.; Sherali, H.D. & Shetty, C.M. (1993). *Non linear programming, theory and algorithms*. 2 ed. John Wiley & Sons, Inc.

(5) Beasley, J.E. (1990). OR-library: distribution test problems by electronic mail. *Journal of the Operational Research Society*, **41**, 1069-1072.

(6) Beasley, J.E. (1993). Lagrangean relaxation. **In**: *Modern heuristic techniques for combinatorial problems* [edited by C.R. Reeves], John Wiley & Sons, New York, 243-303.

(7) Chen, L.; Matoba, S. & Inabe, H. (1998). Surrogate constraint method for optimal power flow. *IEEE Transactions on Power Systems*, **13**, 1084-1089.

(8) Dinkel, J. & Kochenberger, J. (1978). An implementation of surrogate constraint duality. *Operations Research*, **26**, 358-364.

(9) Dyer, M.E. (1980). Calculating surrogate constraints. *Mathematical Programming*, **19**, 255-278.

(10) Erlenkotter, D. (1978). A dual-based procedure for uncapacitated facility location. *Operations Research*, **26**, 992-1009.

(11) Espejo, L.G.A. (2001). Problemas de Localização Hierárquicos. Tese D. Sc., COPPE/ UFRJ, Rio de Janeiro, R. J.

(12) Espejo, L.G.A.; Galvão, R.D. & Boffey, T. (2003). Dual-based heuristics for a hierarchical covering location problem. *Computers & Operations Research*, **30**, 165-180.

(13) Fisher, M.L. (1981). The Lagrangian relaxation method for solving integer programming problems. *Management Science*, **27**, 1-18.

(14) Fisher, M.L.; Jaicumar, R. & Van Wassenhove, L. (1980). A multiplier adjustment method for the generalized assignment problem. *Decision Science Working Paper*, University of Pennsylvania.

(15) Fumero, F. (2001). A modified subgradient algorithm for Lagrangean relaxation. *Computers & Operations Research*, **28**, 33-52.

(16) Galvão, R.D. (1993). The use of Lagrangean relaxation in the solution of uncapacitated facility location problems. *Location Science*, **1**, 57-79.

(17) Galvão, R.D. & ReVelle, C.S. (1996). A Lagrangean heuristic for the maximal covering location problem. *European Journal of Operational Research*, **88**, 114-123.

(18) Galvão, R.D.; Espejo, L.G.A. & Boffey, B. (2000). A comparison of Lagrangean and surrogate relaxations for the maximal covering location problem. *European Journal of Operational Research*, **124**, 377-389.

(19) Galvão, R.D.; Espejo, L.G.A. & Boffey, B. (2002). A hierarchical model for the location of perinatal facilities in the municipality of Rio de Janeiro. *European Journal of Operational Research*, **138**, 495-517.

(20) Gavish, B. & Pirkul, H. (1985). Efficient algorithms for solving multiconstraint zero-one knapsack problems to optimality. *Mathematical Programming*, **31**, 78-105.

(21) Geoffrion, A.M. (1974). Lagrangean relaxation and its uses in integer programming. *Mathematical Programming Study*, **2**, 82-114.

(22) Glover, F. (1965). A multiphase-dual algorithm for the zero-one integer programming problems. *Operations Research*, **13**, 879-919.

(23) Glover, F. (1975). Surrogate constraint duality in mathematical programming. *Operations Research*, **23**, 434-451.

(24) Greenberg, H.J. & Pierskalla, W.P. (1970). Surrogate mathematical programming. *Operations Research*, **18**, 924-939.

(25) Held, M. & Karp, R.M. (1970). The traveling salesman problem and minimum spanning trees. *Operations Research*, **18**, 1138-1162.

(26) Holmberg, K. (1994). On using approximations of the Benders master problem. *European Journal of Operational Research*, **77**, 111-125.

(27) John, C.G. & Kochenberger, G.A. (1988). Using surrogate constraint in a Lagrangean relaxation approach to set covering problems. *Journal of the Operational Research Society*, **29**, 681-685.

(28) Karwan, M.H. & Rardin, R.L. (1979). Some relationships between Lagrangian and surrogate duality in integer programming. *Mathematical Programming*, **17**, 320-334.

(29) Karwan, M.H. & Rardin, R.L. (1980). Searchability of the composite and multiple surrogate dual functions. *Operations Research*, **28**, 1251-1257.

(30) Karwan, M.H. & Rardin, R.L. (1981). Surrogate duality in a branch and bound procedure. *Naval Research Logistics Quaterly*, **28**, 93-101.

(31) Karwan, M.H. & Rardin, R.L. (1984). Surrogate dual multiplier search procedures in integer programming. *Operations Research*, **32**, 52-69.

(32) Khosla, I. (1995). The scheduling problem where multiple machines compete for a common local buffer. *European Journal of Operational Research*, **84**, 330-342.

(33) Klose, A. (2000). A Lagrangean relax-and-cut approach for the two-stage capacitated facility location problem. *European Journal of Operational Research*, **126**, 408-421.

(34) Li, D. (1999). Zero duality gap in integer programming: *p*-norm surrogate constraint method. *Operations Research Letters*, **25**, 89-96.

(35) Lorena, L.A.N. & Lopez, F.B. (1994). A surrogate heuristic for set covering problems. *European Journal of Operational Research*, **79**, 138-150.

(36) Lorena, L.A.N. & Narciso, M.G. (1996). Relaxation heuristics for a generalized assignment problem. *European Journal of Operational Research*, **91**, 600-610.

(37) Lorena, L.A.N. & Senne, E.L.F. (1996). A Lagrangean/Surrogate heuristic for uncapacitated facility location problems. **In:** *Anais dos Resumos Estendidos VIII CLAIO e XXVIII SBPO*, Rio de Janeiro, 854-859.

(38) Minoux, M. (1986). *Mathematical programming – Theory and algorithms.* Wiley, Chichester.

(39) Moore, G.C. & ReVelle, C. (1982). The hierarchical service location problem. *Management Science*, **28**, 775-780.

(40) Narciso, M.G. & Lorena L.A.N. (1999). Lagrangean/surrogate relaxation for generalized assignment problems. *European Journal of Operational Research*, **114**, 165-177.

(41) Nemhauser, K. & Wolsey, L.A. (1988). *Integer and combinatorial optimization.* John Wiley & Sons, New York.

(42) Nieuwenhuizen, T. (1999). Johri's general dual, the Lagrangean dual, and the surrogate dual. *European Journal of Operational Research*, **117**, 183-196.

(43) Parker, R.G. & Rardin, R.L. (1988). *Discrete optimization*. Academic Press, New York.

(44) Rardin, R.L. & Unger, V.E. (1976). Surrogate constraints and the strength of bounds derived from 0-1 Benders' partitioning procedures. *Operations Research*, **24**, 1169-1175.

(45) Sarin, S.; Karwan, M.H. & Rardin, R.L. (1987). A new surrogate dual multiplier search procedure. *Naval Research Logistics*, **34**, 431-450.

(46) Schrijver, A. (1986). *Theory of linear and integer programming*. John Wiley & Sons.

(47) Swain, R. (1971). A decomposition algorithm for a class of facility location problems. Ph.D. Thesis, Cornell University, Ithaca, NY, USA.

(48) Wentges, P. (1997). Weighted Dantzig-Wolfe decomposition for linear mixed-integer programming. *International Transactions in Operational Research*, **4**, 151-162.

(49) Sridharan, R. (1995). The capacitated plant location problem. *European Journal of Operational Research*, **87**, 203-213.