Artigo

1. *Introdução;*
2. *O conjunto de possibilidade de equilíbrio;*
3. *Margem de segurança;*
4. *Alavancagem operacional;*
5. *Conclusões.*

Relação custo/volume/lucro para multiprodutos

Magnus Amaral da Costa
Professor na FEA/USP e FEA/PUC-SP.

1. *INTRODUÇÃO*

Tradicionalmente, estuda-se a questão de equilíbrio, em contabilidade e ciências afins, entre as receitas e as despesas, sob a forma de "ponto de equilíbrio" (ou com outras denominações: ponto de ruptura, ponto de nivelamento, ponto crítico ou *break-even-point).*

Por conseguinte, se a empresa produz e vende um único produto, incorrendo em custos e despesas fixos e variáveis, na hipótese linear, temos a quantidade de equilíbrio determinada pela fórmula

$$\text{Quantidade de Equilíbrio} = \frac{\text{Custos e despesas fixos totais}}{\text{Margem de contribuição unitária}}$$

e a receita de equilíbrio determinada pela fórmula

$$\text{Receita de Equilíbrio} = \frac{\text{Custos e despesas fixos totais x 100}}{\text{Margem de contribuição unitária em porcentagem do preço de venda (ou margem de contribuição total em porcentagem da receita total)}}$$

Entretanto, as fórmulas citadas são utilizadas também para empresas que produzem e vendem mais de um produto (o caso normal), a primeira para os casos nos quais se identificam custos e despesas fixos diretamente relacionados aos produtos, calculando-se pontos de equilíbrio por produto, enquanto a segunda é utilizada generalizadamente, quando se obtém a margem de contribuição em porcentagem do preço de venda a partir de uma situação específica.

De posse do ponto de equilíbrio, obtemos um indicador denominado "margem de segurança" que mostra, em termos relativos ou quantitativos (cruzados ou unidades físicas), o afastamento da situação atual àquele ponto.

Objetivamos, neste trabalho, alertar os que se utilizam desses números a respeito de suas limitações e, ao mesmo tempo, sugerir uma fórmula que supomos mais adequada para o cálculo da margem de segurança.

2. *O CONJUNTO DE POSSIBILIDADE DE EQUILÍBRIO*

Quando a empresa produz e vende dois produtos, na existência de custos e despesas fixos e variáveis, na hipótese linear, o lucro da empresa é obtido pela venda da quantidade x_A do produto A e da quantidade x_B do produto B, ambas multiplicadas pelas respectivas margens de contribuição unitárias a e b, e cujo resultado é deduzido dos custos e despesas fixos, c.

Considerando o lucro como π, temos a seguinte fórmula:

$$\boxed{\pi = ax_A + bx_B - c} \qquad (1)$$

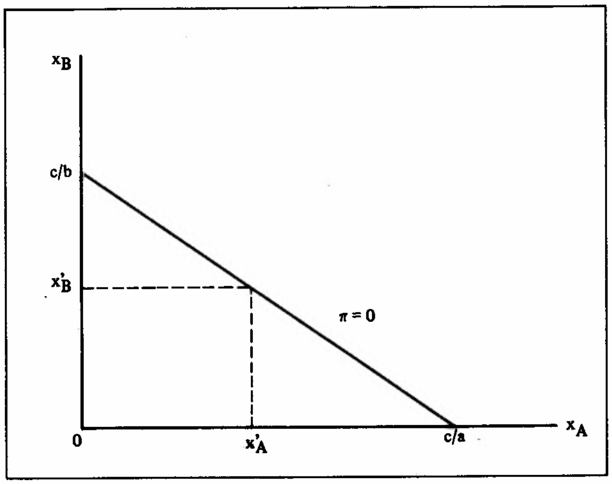
Como o equilíbrio é obtido quando o lucro é igual a zero ($\pi = 0$), a equação acima se transforma em:

$$\boxed{c = ax_A + bx_B} \qquad (2)$$

Tendo em vista que em (2) temos uma equação e duas incógnitas, x_A e x_B, e considerando a, b e c positivos, observa-se que não existe um ponto de equilíbrio, dado que a igualdade é sempre válida para qualquer x'_A ou x'_B especificado.

Geometricamente (veja figura 1), trata-se de uma reta que intercepta o eixo x_A em c/a e o eixo x_B em c/b, posto que $x_A = c/a - x_B\, b/a$ e $x_B = c/b - x_A\, a/b$.

Figura 1



Qualquer combinação linear da reta definida por (2) no semiplano definido por x_A, $x_B \geqslant 0$ é um ponto de equilíbrio e, como qualquer segmento de reta tem infinitos pontos, há infinitos pontos de equilíbrio para uma empresa que produz e vende dois produtos, se a unidade de produção de ambos for uma variável contínua, ou finitos pontos, se a unidade de produção de um deles for uma variável discreta.

A esse conjunto de pontos de equilíbrio denominamos "conjunto de possibilidade de equilíbrio".

Entretanto, podemos também encontrar uma equação de receita total, R_t, se associarmos às quantidades vendidas os respectivos preços de venda, p_A e p_B:

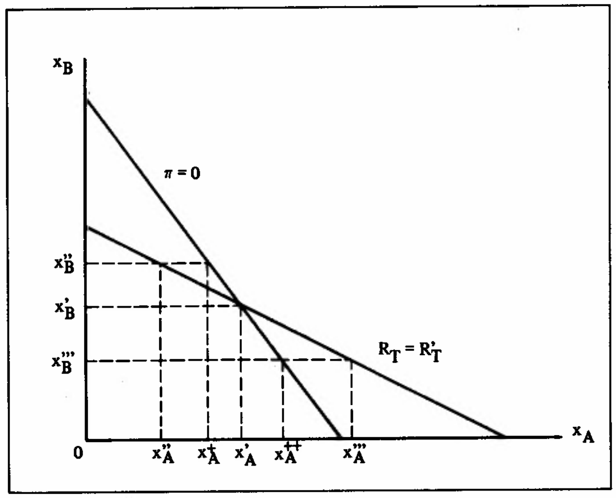
$$\boxed{R_t = P_A x_A + P_B x_B} \qquad (3)$$

Desta forma, dado um ponto x'_A e x'_B de equilíbrio, há uma R'_t de equilíbrio especificada, que somente será constante dentro do conjunto de possibilidade de equilíbrio quando as retas R_t e π no plano definido por x_A e x_B forem coincidentes. Nos demais casos, ocorre somente um ponto (x'_A, x'_B), como se verifica na figura 2.

Pode-se visualizar no gráfico que, vendendo x''_A e X''_B, a empresa obtém uma receita igual àquela R'_t considerada de equilíbrio. Contudo, x_A de equilíbrio para x''_B de equilíbrio seria x^+_A, e x^+_A é maior que x''_A; donde se conclui que a empresa teria, naquele ponto, um prejuízo no montante de $a(x^+_A - x''_A)$.

Ainda se visualiza no gráfico que, vendendo x'''_A e x'''_B, a empresa obtém uma receita igual àquela R'_t considerada de equilíbrio. Porém, x_A de equilíbrio para

Figura 2

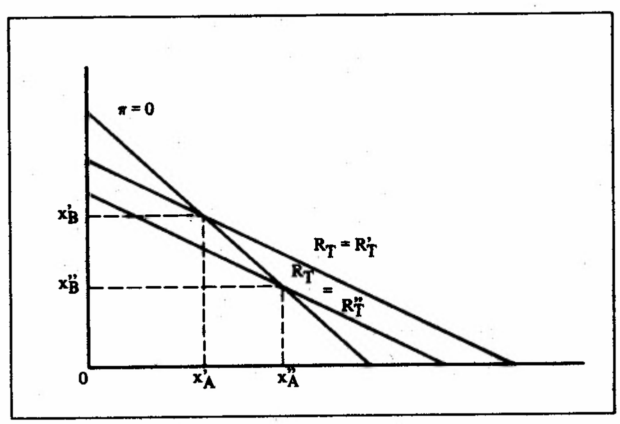


x'''_B seria x^{++}_A que é menor que x'''_A, donde se conclui que a empresa naquele ponto teria um lucro no montante de $a(x'''_A - x^{++}_A)$.

Entretanto, existe uma família de retas de receita de equilíbrio e, por conseguinte, infinitos pontos de receita de equilíbrio.

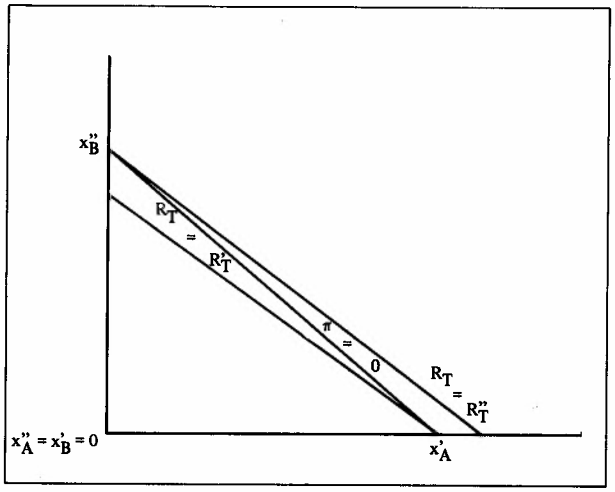
Posto que a probabilidade de o ponto ocorrer (dado um segmento de reta) é zero, conclui-se que obter a receita de equilíbrio calculada para uma empresa que vende dois produtos é preocupar-se com uma informação de valor bem limitado, senão de nenhum valor, a não ser em casos especiais nos quais o *mix* de produção tenha pequenas alterações no período de validade daquele conjunto de possibilidade de equilíbrio, ou, então, quando as declividades das duas retas forem quase iguais. Nesses casos, é melhor obterem-se duas receitas de equilíbrio para pontos (x'_A, x'_B) e $(x''_A$ e $x''_B)$ que definam aquele intervalo razoável no qual possa oscilar o *mix*, como se observa nas figuras 3*a* e 3*b*.

Figura 3a



Qualquer ponto de equilíbrio daquele conjunto pode ser determinado a partir da equação (2), posto que a taxa de substituição de A por B, ou vice-versa, pode ser facilmente encontrada a partir de uma solução básica da equação (2) reduzida à forma escalonada, como se segue:

Figura 3b



a) taxa de substituição de A por B: dividindo-se a equação (2) por a, temos:

$$\frac{c}{a} = x_A + \frac{b}{a} x_B$$

b/a representa, então, a taxa de substituição de A pela entrada de uma unidade de B;

b) taxa de substituição de B por A: dividindo-se a equação (2) por b, temos:

$$\frac{c}{b} = \frac{a}{b} x_A + x_B$$

a/b representa, então, a taxa de substituição de B pela entrada de uma unidade de A.

Ilustrando os argumentos acima, vejamos um exemplo numérico, graficamente solucionado na figura 4, no qual a empresa tenha um montante de custos e despesas fixos de Cz$ 100 mil, fabrique os produtos A e B, com os preços, custos e despesas variáveis e margens de contribuição unitárias discriminados no quadro 1.

Quadro 1

Dados Produtos	Preços	Custos variáveis	Despesas variáveis	Margens de contribuição unitárias
A	100	50	30	20
B	80	40	30	10

Neste quadro, a equação de equilíbrio fica a seguinte:

$$\boxed{100.000 = 20x_A + 10x_B,}$$

Um intervalo de equilíbrio poderia ser o que se segue:

para $x''_A = 0$ $\quad x''_B = 10.000$

e

para $x'_B = 0$ $\quad x'_A = 5.000$

Logo, obtemos:

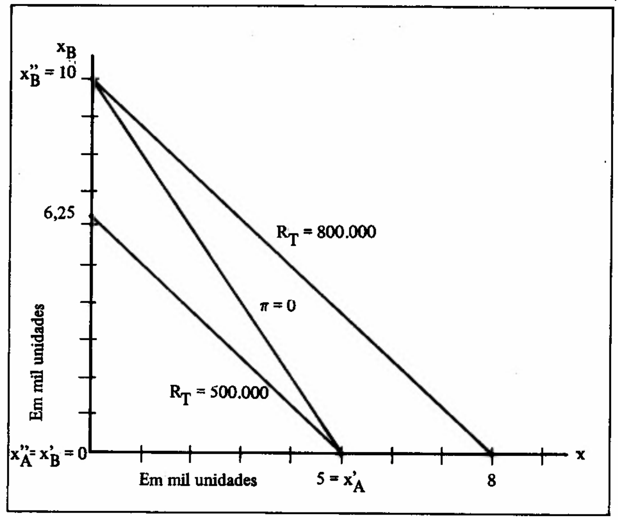
a) equação da reta de receita de equilíbrio no ponto inferior:

$$\boxed{500.000 = 100x_A + 80x_B}$$

b) equação da reta de receita de equilíbrio no ponto superior:

$$\boxed{800.000 = 100x_A + 80x_B}$$

Figura 4



Observa-se na figura 4 que a receita de equilíbrio é no ponto onde $x_A = 5.000$ e $x_B = 0$, enquanto a receita de equilíbrio máxima é no ponto onde $x_A = 0$ e $x_B = 10.000$, acusando montantes respectivos de Cz$ 500 mil e Cz$ 800 mil, valores determinados por substituição nas equações de equilíbrio e receita total:

Para x'_A (= 5.000) e x'_B (= 0)

> Lucro
> $\pi = 20\ (5.000) + 10(0) - 100.000 =$ Cz$ 0,00
> Receita
> $R_T = 100(5.000) + 80(0) =$ Cz$ 500.000,00

Para x''_A (= 0) e x''_B (= 10.000)

> Lucro
> $\pi = 20\ (0) + 10(10.000) - 100.000 =$ Cz$ 0,00
> Receita
> $R_T = 100(0) + 80(10.000) =$ Cz$ 800.000,00

Verifica-se, portanto, que, para receitas que variam entre Cz$ 500 mil e Cz$ 800 mil, podemos ainda encontrar infinitos pontos de receita de equilíbrio, sendo aqueles os limites mínimo e máximo.

Entretanto, para uma receita de Cz$ 500 mil, verificamos infinitos pontos de combinação entre x_A e x_B, que apresentam prejuízo; e para uma receita de Cz$ 800 mil, verificamos infinitos pontos que apresentam lucro.

Desta forma, a receita de equilíbrio só é válida para um determinado ponto, que pertence ao conjunto de possibilidade de equilíbrio e, ao mesmo tempo, à reta de receita, cujos montantes x_A e x_B são encontrados pela interseção das duas retas citadas.

Por exemplo, se R_t = Cz\$ 620.000,00, teríamos:

$$620.000 = 100x_A + 80x_B$$
$$100.000 = 20x_A + 10x_B$$

Resolvendo o sistema, encontramos o ponto x_A 3.000 e x_B = 4.000, um dos pontos de equilíbrio do conjunto de possibilidade de equilíbrio.

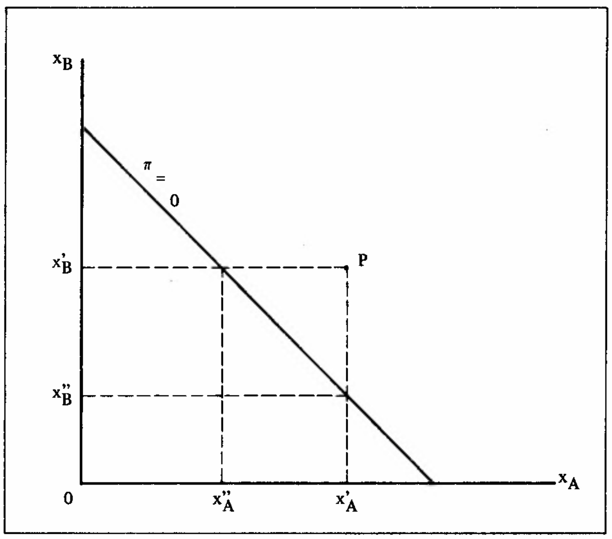
3. *MARGEM DE SEGURANÇA*

Até quando as quantidades vendidas atualmente poderão cair e a empresa não ter prejuízo? E a receita? E a margem de contribuição?

A resposta a esta questão é o que se denomina de margem de segurança.

Se o nível de atividade for x'_A e x'_B da figura 5, mantendo-se x'_A, verificamos que x_B pode cair até x''_B. Mantendo-se x'_B, observamos que x_A pode cair até x''_A. A distância de (x'_A, x'_B), nível de atividade atual, à reta de equilíbrio varia para cada ponto definido naquela.

Figura 5



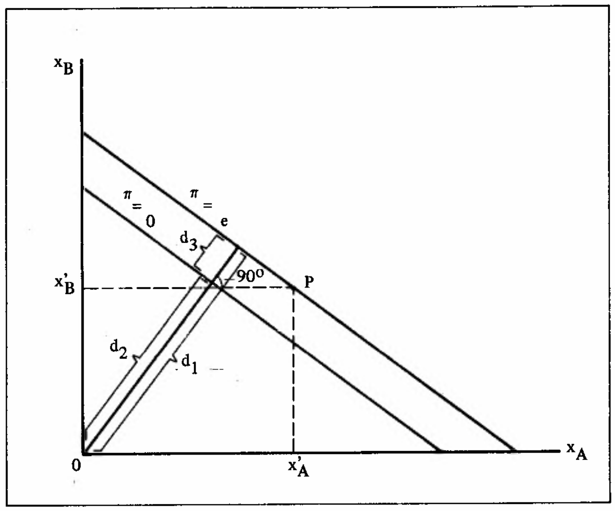
Entretanto, pode-se calcular a menor distância de um ponto a uma reta e, desta forma, a menor margem de segurança.

Porém, observada a figura 6, notar-se-á que a distância da reta de lucro atual para a reta de equilíbrio é única e, por conseguinte, temos uma única margem de segurança para redução de margem de contribuição, independentemente do *mix* considerado.

Se detectamos a reta de lucro ($\pi = e$) que passa pelo ponto $P(x'_A, x'_B)$ e que é paralela à reta de equilíbrio (π = 0), basta calcularmos sua distância d_1 à origem ($\pi = c$), conforme figura 6, e deduzirmos da distância d_2 à origem, e teremos a margem de segurança da empresa, d_3.

Note-se que d_1 é perpendicular à reta de lucro atual (π = e) e à reta de equilíbrio (π = 0) e, por conseguinte, d_3 mede a menor distância do ponto atual $P(x'_A, x'_B)$ que gera $\pi = e$ à reta de equilíbrio, medindo, por conseguinte, o montante de margem de contribuição que pode ser diminuído da margem atual antes que a empresa tenha prejuízo.

Figura 6



Em números relativos, a margem de segurança seria:

$$ms = \frac{d_1 - d_2}{d_1} = \frac{d_3}{d_1}$$

Como $e = ax_A + bx_B - c$, a sua distância à origem seria dada pelo teorema

$$d_1 = \frac{c + e}{\sqrt{a^2 + b2}}$$

enquanto que d_2 seria dado por

$$d_2 = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

e a margem de segurança, por

$$ms = \frac{e}{c + e} \qquad (4)$$

A fórmula (4) representa a razão entre a diferença da margem de contribuição atual ($c + e$) e a margem de contribuição do conjunto de possibilidade de equilíbrio (c), que é igual aos custos e despesas fixos, pela margem de contribuição atual ($c + e$); isto é, o lucro atual dividido pela margem de contribuição atual.

Se em vez de (4) utilizássemos o conceito de receita atual e receita de equilíbrio, chegaríamos ao mesmo resultado, posto que a reta que define a receita atual é a mesma que define a margem de contribuição atual, e a reta que define a receita de equilíbrio mantém a mesma combinação do *mix* atual, isto é:

$$ms = \frac{\text{receita atual} - \text{receita de equilíbrio}}{\text{receita atual}} \qquad (5)$$

A demonstração de (4) é a que se segue:
como

$$\boxed{ms = \frac{d_1 - d_2}{d_1}}, \quad \boxed{e \quad d_1 = \frac{c + e}{\sqrt{a^2 + b^2}}}, \quad \boxed{d_2 = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

temos

$$ms = \frac{\dfrac{c+e}{\sqrt{a^2+b^2}} - \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}}{\dfrac{c+e}{\sqrt{a^2+b^2}}} = \frac{\dfrac{e}{\sqrt{a^2+b^2}}}{\dfrac{c+e}{\sqrt{a^2+b^2}}} = \frac{e}{c+e}$$

(c.q.d.)

A demonstração de (5) é a que se segue: considere que as quantidades x'_A e x'_B de equilíbrio sejam proporcionais às quantidades vendidas atualmente, x''_A e x''_B.

Assim, encontramos

$$\boxed{\frac{x''_A}{x''_B} = \frac{x'_A}{x'_B}}$$

Isto implica que

$$\boxed{x''_B = x''_A \frac{x'_B}{x'_A}}$$

Fazendo $\frac{x'_B}{x'_A} = \beta$, temos que qualquer $x_B = \beta x_A$.

Como R_t de eqüilíbrio é dada por

$$\boxed{R''_t = \frac{c}{\dfrac{a x''_A + b x''_B}{p_A x''_A + p_B x''_B}}}$$

substituindo x''_B por x''_A, temos:

$$\boxed{R''_t = \frac{c}{\dfrac{a x''_A + b\beta x''_A}{p_A x''_A + p_B \beta x''_A}} = \frac{c}{\dfrac{(a + b\beta) x''_A}{(p_A + p_B \beta) x''_A}} \doteq \frac{c}{\dfrac{a + b\beta}{p_A + p_B \beta}}} \quad (6)$$

Por outro lado, as quantidades de equilíbrio poderiam ser determinadas a partir da equação (2):

$$\boxed{c = a x''_A + b x''_B}$$

Substituindo x''_B por $x''_A \beta$, temos:

$$\boxed{c = (a + b\beta) x''_A}$$

donde

$$\boxed{x''_A = \frac{c}{a + b\beta}}$$

Multiplicando ambos os termos por $p_A + p_B$, encontramos:

$$\boxed{R''_t = \frac{c (p_A + p_B \beta)}{a + b\beta}} \quad (7)$$

Igualando as equações (6) e (7), obtemos:

$$\boxed{\frac{c (p_A + p_B \beta)}{a + b\beta} = \frac{\dfrac{c}{a + b\beta}}{p_A + P_B \beta}}$$

donde

$$\boxed{c (p_A + p_B \beta) \left(\frac{a + b\beta}{p_A + p_B \beta}\right) = c (a + b\beta)}$$

e, então verificamos

$$\boxed{a + b\beta = a + b\beta} \quad \text{(c.q.d.)}$$

Aplicando ao exemplo ilustrativo anterior e considerando um volume de vendas atual de x_A = 4.000 e x_B = 5.000, temos:

$$\boxed{\pi = 20(4.000) + 10(5.000) - 100.000 = 30.000}$$

Fazendo e = Cz$ 30.000,00, a reta de lucro para aquele montante é dada por:

$$\boxed{130.000 = 20x_A + 10x_B}$$

Sua distância à origem é

$$\boxed{d_1 = \frac{130.000}{\sqrt{20^2 + 10^2}} = \frac{130.000}{\sqrt{500}}}$$

e a distância de $\pi = 0$ (reta de equilíbrio) à origem é

$$\boxed{d_2 = \frac{100.000}{\sqrt{500}}}$$

$$\boxed{d_1 - d_2 = \frac{30.000}{\sqrt{500}}}$$

Logo, a margem de segurança já pode ser determinada:

$$ms = \frac{\dfrac{30.000}{\sqrt{500}}}{\dfrac{130.000}{\sqrt{500}}} = \frac{3}{13} \cong 23{,}07\%$$

Como a margem de contribuição atual é de Cz\$ 130.000,00 [= 20(4.000) + 10(5.000)], poder-se-ia reduzi-la em um máximo de 23,07%, ponto no qual a empresa não teria lucro ou prejuízo, isto é, 23,07% de Cz\$ 130.000, um montante de Cz\$ 30.000,00.

Aplicando a redução de 23,07% ao *mix* atual e avaliando em cruzados, obtemos:

$$\text{variação no lucro} = \frac{3}{13}(4.000 \times 20) + \frac{3}{13}(5.000 \times 10) = 30.000$$

Entretanto, se tivéssemos utilizando o conceito tradicional de margem de segurança em relação ao volume das receitas, teríamos:

- receita atual = 100(4.000) + 80(5.000) = Cz\$ 800.000,00
- margem de contribuição atual = 20(4.000) + 10(5.000) = Cz\$ 130.000,00
- receita de equilíbrio = 100.000 / (130.000 / 800.000) ≅ Cz\$ 615.384,00
- margem de segurança = $\dfrac{800.000 - 615.384}{800.000} \cong 23{,}07\%$

O que demonstra a assertiva de que a receita de equilíbrio encontrada na forma usual tem utilidade somente para se detectar a margem de segurança, já que esta se dá pela redução de volumes em A e B acompanhando o *mix* atual, porém interpretada para redução da margem de contribuição para qualquer *mix* do conjunto de possibilidade de equilíbrio, e jamais como redução da receita, posto que há infinitas receitas de equilíbrio e, para cada receita verificada de equilíbrio, há somente um ponto no qual a receita de equilíbrio pertence ao conjunto de possibilidade de equilíbrio, e infinitos pontos daquela que não pertence, senão vejamos no exemplo: podemos obter uma receita de Cz\$ 615.384, e ocorrer lucro (observem a figura 4), como, por exemplo, fazendo x_A = 6153,84 e x_B = 0. Substituindo na equação (1), encontramos

$$\pi = 20(6153{,}84) + 10(0) - 100.000 = 23076{,}80$$

4. *ALAVANCAGEM OPERACIONAL*

Mede a variação no lucro decorrente de uma variação infinitesimal na quantidade vendida.

Considerando (1), temos que

$$AO = \frac{\Delta\pi/\pi}{\Delta x/x} = \frac{\dfrac{(ax''_A + bx''_B - c) - (ax'_A + bx'_B - c)}{ax'_A + bx'_B - c}}{\dfrac{(x''_A + x''_B) - (x'_A + x'_B)}{x'_A + x'_B}}$$

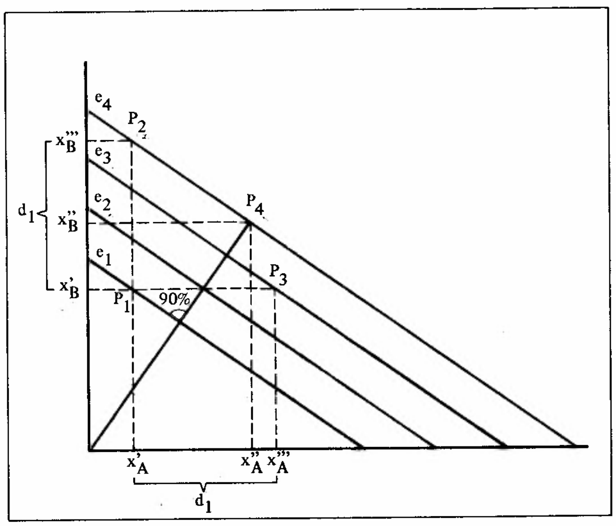
$$AO = \frac{\dfrac{a(x''_A - x'_A) + b(x''_B - x'_B)}{ax'_A + bx'_B - c}}{\dfrac{(x''_A - x'_A) + (x''_B - x'_B)}{x'_A + x'_B}} \qquad (8)$$

Como se observa na figura 7, o grau de alavancagem varia em função da taxa de substituição de A por B, ou de B por A, posto que, sendo

$$d_1 = x'''_A - x'_A = x'''_B - x'_B$$

o acréscimo no lucro decorrente de Δx_A ($\pi = e_3$) seria menor que o acréscimo no lucro decorrente de Δx_B ($\pi = e_4$).

Figura 7



Porém, se considerarmos que a variação nas quantidades se dá a uma taxa constante para ambos os produtos, mantendo-se a combinação contida no *mix* atual, obtemos:

$$x'_B = \beta x'_A \qquad \beta = \frac{x'_B}{x'_A}$$

$x''_B = \beta x''_A$ $\qquad\qquad$ $\beta = \dfrac{x''_B}{x''_A}$

Substituindo x'_B e x''_B em (8), temos:

$$\boxed{AO = \frac{\dfrac{a(x''_A - x'_A) + b\,(\beta x''_A - \beta x'_A)}{ax'_A + b\beta x'_A - c}}{\dfrac{(x''_A - x'_A) + (\beta x''_A - \beta x'_A)}{x'_A + \beta x'_A}} = \frac{\dfrac{(a + b\beta)\,(x''_A - x'_A)}{(a + b\beta)\,x'_A - c}}{\dfrac{(1 + \beta)\,(x''_A - x'_A)}{(1 + \beta)\,x'_A}}}$$

$$\boxed{AO = \frac{(a + b\beta)\,(x''_A - x'_A)}{(a + b\beta)\,x'_A - c} \cdot \frac{x'_A}{(x''_A - x'_A)} = \frac{(a + b\beta)\,x'_A}{(a + b\beta)\,x'_A - c} \qquad (9)}$$

isto é, a margem de contribuição atual dividida pelo lucro atual.

Aplicando ao exemplo anterior, temos:

$$AO = \frac{130.000}{30.000} \cong 4,3$$

Logo, um acréscimo de 1% na quantidade vendida, considerando o *mix* atual, implica um acréscimo de 4,3% no lucro da empresa.

Com um aumento de 10% nas quantidades vendidas atualmente, $x_A = 4.000$ e $x_B = 5.000$, temos $x_A = 4.400$ e $x_B = 5.500$ e

$$\boxed{\pi = 4.400(20) + 5.500(10) - 100.000 = 14.300}$$

Então, $\Delta\,\pi = 13.000$, $AO \cong 4,3$ e $\Delta\,\pi\,/\,\pi \cong 43\%$, isto é, *AO* multiplicado por 10%.

5. *CONCLUSÕES*

Existe um conjunto de possibilidade de equilíbrio nas empresas que produzem e vendem dois produtos (como também para as que têm três ou mais produtos) e, por este motivo, o conceito de ponto de equilíbrio só é válido em raríssimos casos, se houver algum.

Na prática, pode-se calcular um intervalo de equilíbrio, a partir de um *mix* possível, considerando-se as possibilidades de mudança, identificando-se dois pontos (ou mais) daquele intervalo, mais importante que um simples ponto (cuja probabilidade de ocorrência é zero).

Quanto à margem de segurança, o método tradicional, aplicado empiricamente, dado pela razão entre a diferença de receita atual e a de equilíbrio, e a receita atual, é adequada e produz o mesmo resultado que a fórmula alternativa proposta

$$\boxed{ms = \frac{\text{lucro atual}}{\text{margem de contribuição atual}}}$$

porém interpretada em relação à margem de contribuição atual e jamais em relação à receita atual.

Já a alavancagem operacional, calculada pelas fórmulas tradicionais, é válida somente quando o *mix* relativo de produção é mantido e, para os demais casos, só pode ser calculada para situações especificadas, variando para cada uma delas.

Cabe, finalmente, a observação de que a margem de segurança é a alavancagem operacional inversa, isto é

$$\boxed{AO = \frac{1}{ms}}$$

BIBLIOGRAFIA

Gersdoff, Ralph C.J. von. Análise do ponto crítico do Brasil. *Revista Brasileira de Contabilidade*, Rio de Janeiro, (39):4-7, out./nov./dez. 1981; (40):16-24, jan./fev./mar. 1982.

Gonçalves, Ilydio Augusto. O ponto de equilíbrio e sua aplicação prática nas empresas. *Revista Brasileira de Contabilidade*, (42):48-9, jul./ago./set. 1982.

IOB. Temática contábil. Um ponto de equilíbrio às avessas. *Boletim*, (21), 1986.

Iudícibus, Sérgio. *Análise de balanços.* São Paulo, Atlas, 1980.

Kaplan, Robert S. *Advanced management accounting.* Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall, 1982.

Martins, Eliseu. *Contabilidade de custos.* São Paulo, Atlas, 1985.

Rochi, Carlos Antonio de. Análise CVL nas empresas de produção múltipla. *Revista Brasileira de Contabilidade*, Rio de Janeiro, (38):30-16, jul./ago./set. 1981.

—— Um modelo estocástico para a análise CVR nas empresas com produção diversificada. *Revista do Conselho Regional de Contabilidade do Rio Grande do Sul*, Rio de Janeiro, (39):27-50, 1984.