Artigo

Determinação da razão de hedge: *um estudo sobre as teorias de* hedging

Francisco Carlos Gomes

Mestre em administração pela EAESP/FGV e professor no Departamento de Informática e Métodos Quantitativos Aplicados à Administração, da EAESP/FGV.

1. *INTRODUÇÃO*

Em termos bastante gerais, o *hedging* consiste na manutenção de *posições opostas* nos mercados *spot* e futuro, no sentido de se obter uma "proteção" (imperfeita) contra os prejuízos provenientes das eventuais flutuações adversas nos preços da mercadoria.

Se o *hedger* mantém uma determinada quantidade da mercadoria em estoque (i.é., está *long* ou comprado no mercado *spot*), a posição oposta é estabelecida através da venda de outra quantidade (não necessariamente idêntica à anterior) da mercadoria no mercado futuro (i.é., está *short* ou vendido nesse mercado), e vice-versa.

De modo geral, embora não necessariamente, os preços da mercadoria se movimentam na mesma direção em ambos os mercados; logo, os prejuízos associados à manutenção de uma posição comprada (vendida) no mercado *spot* diante de uma queda (alta) dos preços da mercadoria são (imperfeitamente) protegidos pelos lucros associados à manutenção de uma posição vendida (comprada) no mercado futuro.

Os contratos futuros estabelecem de forma clara e padronizada as características da mercadoria (quantidade, qualidade, etc.), bem como as características da transação (prazo, local de entrega, etc.). As transações com esses contratos não implicam, antes da sua expiração, o pagamento da mercadoria pelo comprador, nem a sua entrega por parte do vendedor. Em certo sentido, representam simplesmente *compromissos* de compra e venda que podem ser "cancelados" em qualquer instante através da assunção da posição oposta no próprio mercado futuro (como de fato ocorre com a maioria das transações).

Concluímos, portanto, que as transações com esses contratos se prestam para *fixar* os preços futuros da mercadoria e que, em última instância, são os *riscos* associados às flutuações de preço, e não a própria mercadoria, que são negociados nesses mercados.

Estabelecida a magnitude (tamanho) da posição que o *hedger* mantém no mercado *spot*, a determinação da razão de *hedge* corresponde à determinação da magnitude da posição (oposta) que manterá no mercado futuro.

O problema de determinação da razão de *hedge* surge do fato de, usualmente, os preços em ambos os mercados *não* apresentarem idênticas variações (absolutas ou relativas).

Se para cada variação unitária de \$ 1 no preço da mercadoria no mercado *spot* ocorresse semelhante variação no seu preço futuro, a determinação da razão de *hedge* seria trivial (se o objetivo fosse a eliminação dos riscos) – bastaria a manutenção de posições opostas de igual magnitude em ambos os mercados para que os eventuais prejuízos em um dos mercados fossem completamente compensados pelos lucros auferidos no outro.

Alternativamente, se para cada variação unitária de 1% no preço da mercadoria no mercado *spot* (p.ex., \$100) ocorresse semelhante variação relativa no seu preço futuro (p.ex., \$200), a determinação da razão de *hedge* também seria simples – bastaria a manutenção de posições opostas cuja razão fosse idêntica à razão entre os preços da mercadoria nos dois mercados (p.ex., 1/2 = $100/$200).

O problema da determinação da razão de *hedge* traz à tona a questão da definição dos *objetivos* do *hedge*.

Se o *hedger* mantém uma posição comprada (vendida) no mercado *spot*, então lucrará (perderá) diante dos aumentos nos preços da mercadoria e sofrerá prejuízos (lucros) na situação inversa. Entretanto, se estabelece a posição oposta no mercado futuro (i.é., faz o *hedge*), deixará de auferir os eventuais lucros decorrentes dos movimentos favoráveis nos preços mas, também, não sofrerá os prejuízos associados aos movimentos desfavoráveis.

Em suma, o *hedge* não afeta somente o risco, mas também o retorno associado à posição mantida e existe uma *relação de troca* (*trade-off*) entre ambos.

Na definição dos objetivos do *hedge*, temos duas abordagens fundamentais. A primeira atenta exclusivamente para o risco, enquanto que a segunda considera tanto o risco como o retorno.

Tendo em vista que as decisões de *hedging* são adotadas *a priori*, os retornos da mercadoria, do contrato futuro e do *hedge*, são considerados como retornos *esperados* (médios) e os correspondentes riscos são definidos como a *variabilidade ou dispersão* dos possíveis retornos em torno dos retornos médios (variâncias).

Contudo, o risco do *hedge* é uma composição do risco da mercadoria e do respectivo contrato futuro; logo, depende da ordem de grandeza e da direção das variações *conjuntas* dos preços em ambos os mercados (covariância ou correlação).

Assim, se os preços em ambos os mercados se movimentam na mesma direção, dizemos que são positivamente correlacionados; caso contrário, dizemos que são negativamente correlacionados. Usualmente, os preços nos mercados *spot* e futuro são (imperfeita e) positivamente correlacionados. Entretanto, convém notar que, mesmo que os preços fossem perfeitamente correlacionados, as respectivas variações absolutas não seriam necessariamente idênticas, e este aspecto é de fundamental importância na determinação do risco do *hedge* e, conseqüentemente, da razão de *hedge*.

A teoria clássica postula simplesmente que, para cada quantidade da mercadoria mantida no mercado *spot*, o *hedger* deve manter a *mesma* quantidade na posição oposta estabelecida no mercado futuro, isto é, deve empregar uma razão de *hedge* igual à unidade.

Mostramos que, no âmbito da teoria clássica, o risco do *hedge* só é eliminado se o *hedger* o conduzir até a expiração do contrato futuro (abstraindo-se o efeito das margens de *performance*) ou, alternativamente, se os preços da mercadoria em ambos os mercados apresentarem idênticas variações absolutas ou forem *perfeita* e positivamente correlacionados e apresentarem idêntica dispersão (variâncias), condições raras de serem encontradas.

Observamos que está implícito na teoria clássica que o *hedger* retém o risco decorrente das eventuais variações na *diferença* entre os preços nos mercados futuro e *spot* (risco da base).

A teoria minimizadora utiliza-se do fato de o risco do *hedge* depender da correlação entre os preços nos mercados *spot* e futuro para determinar uma razão que o minimize, além de mostrar que a razão de *hedge* postulada pela teoria clássica é desnecessariamente elevada, reduzindo inutilmente o retorno do *hedge* e elevando os custos de transação. Postula, fundamentalmente, o emprego de uma razão de *hedge* correspondente ao *beta* da mercadoria (coeficiente angular da reta que associa os preços do mercado *spot* aos do mercado futuro).

Observamos que, no âmbito da teoria minimizadora, o risco do *hedge* só será eliminado se o *hedge* for conduzido até a expiração do contrato futuro ou, alternativamente, se os preços nos mercados *spot* e futuro forem perfeita e positivamente correlacionados, condições restritivas embora menos que as exigidas pela teoria clássica.

De qualquer forma, a principal crítica a ambas teorias é que não atentam para o retorno esperado do *hedge*, ao postularem as respectivas razões de *hedge*.

A teoria da especulação na base não é, exatamente, uma teoria de determinação da razão de *hedge* mas, partindo do fato de que, usualmente, o risco do *hedge* não pode ser completamente eliminado, propõe a sua administração *ativa* de sorte a lhe aumentar os retornos.

Essa teoria propõe simplesmente que o *hedger* deve aproveitar-se das diferenças significativas entre os preços da mercadoria nos mercados futuro e *spot* (base) para auferir lucros.

Assim, se essa diferença for expressiva, deve efetuar o *hedge* para, em seguida, desfazê-lo, realizando os correspondentes lucros, quando essa diferença diminuir significativamente, e assim sucessivamente.

Duas objeções podem ser levantadas contra a teoria da especulação na base. A primeira diz respeito às dificuldades de se determinar quando a base é significativamente grande ou pequena. A segunda está relacionada com o fato de que entre transações sucessivas o *hedger* pode ficar exposto aos riscos de flutuações adversas nos preços da mercadoria no mercado *spot*.

A teoria do *portofolio* propõe, fundamentalmente, a determinação da razão de *hedge* que satisfaça as preferências do investidor quanto ao risco e ao retorno.

Para tanto, aborda o *hedging* como uma decisão de investimento onde os diversos ativos são de fato diferentes proporções de dois ativos básicos:

a) a mercadoria (não-*hedge*);
b) o *hedge* completo (teoria clássica).

Nesse contexto, existirá uma razão ótima de *hedge* para cada *hedger*, já que estes possuem diferentes estruturas de preferência quanto ao risco. Entretanto, se admitirmos a existência de uma taxa de juros livre de risco, então o teorema da separação conduz à determinação de uma única razão de *hedge*, independentemente das diferentes preferências dos *hedgers*.

De um modo geral, esta última versão da teoria do *portfolio* parece abordar a questão de forma mais sistemática e abrangente que as demais teorias.

A justificativa econômica clássica para a existência dos mercados futuros é que estes facilitam o *hedging*, i.é., permitem aos *hedgers* – os agentes econômicos envolvidos com a estocagem de determinada mercadoria – transferirem os riscos associados às flutuações de preço a outros agentes denominados *especuladores*.

Parcela significativa do problema de *hedging* corresponde à determinação da proporção entre as quantidades (opostas) da mercadoria que o *hedger* manterá nos mercados físicos (ou *spot*) e futuro: a *razão de hedge*.

Este artigo abordará a determinação da razão de *hedge* de um ponto de vista normativo e com um certo rigor na sua apresentação.

Contrariamente às teorias de equilíbrio geral, o *hedging* será considerado uma *atividade específica* do mercado de capitais - i.é., as oportunidades de investimento disponíveis *não* o reduzem a uma mera diversificação entre os ativos de capital existentes (Stoll, 1979).

As teorias de *hedging*, podem ser classificadas em dois grandes grupos, segundo a ênfase dos modelos que empregam:

a) sobre o *risco* – teoria clássica e teoria minimizadora;
b) sobre o *risco-retorno* – teoria da especulação na base e teoria do *portfolio.*

2. *RISCO E RETORNO*

O retornos aleatórios da mercadoria ($\tilde{R}s$) e do respectivo contrato futuro ($\tilde{R}f$), durante um período de comprimento *t*, podem ser definidos por:

$$\tilde{R}s = \frac{\tilde{P}t - P0}{P0} \quad e \quad \tilde{R}f = \frac{\tilde{F}t - F0}{P0} \tag{1}$$

Onde *P* e *F* denotam os preços da mercadoria nos mercados *spot* e futuro, respectivamente, nos instantes *0* e *t* (o símbolo "$\sim$" denota as variáveis aleatórias).

O retorno de um contrato futuro não é um conceito bem definido, já que não ocorre um investimento inicial na aquisição do contrato. Entretanto, para fins analíticos, é conveniente "supor" que ocorre tal investimento e que sua magnitude é igual ao preço da mercadoria no mercado *spot* (Dusak, 1973; Black, 1976; Scholes, 1981).

Seja *h* a razão de *hedge*, então o retorno do *hedge* ($\tilde{R}\,h$) é estabelecido por:

$$\tilde{R}h = \tilde{R}s - h\tilde{R}f \tag{2}$$

Presumindo-se que prevaleçam as condições para a utilização da variância como medida de risco (Tobin, 1958; Markowitz, 1959), podemos estabelecer os pares de risco-retorno (esperado) da mercadoria e respectivo contrato futuro, como se segue:

$$\bar{R}s = \frac{\bar{P}\,t - P0}{P0} \quad \text{e} \quad \mathrm{Var}(\tilde{R}s) = (1/P^2 0)\,\mathrm{Var}(\tilde{P}t) \tag{3}$$

$$\bar{R}f = \frac{\bar{F}t - F0}{P0} \quad \text{e} \quad \mathrm{Var}(\tilde{R}f) = (1/P^2 0)\,\mathrm{Var}(\tilde{F}t)$$

Usualmente Var($\tilde{F}t$) é maior que Var($\tilde{F}t$), já que os preços futuros correspondem à capitalização dos preços presentes por uma determinada taxa ajustada ao risco. Logo, o risco do contrato futuro é superior ao da mercadoria, Var($\tilde{R}f$) é maior que Var($\tilde{R}s$).

Por outro lado, o par de risco-retorno do *hedge* é dado por:

$$\bar{R}h = \bar{R}s - h\bar{R}f$$
$$\mathrm{Var}(\tilde{R}h) = \mathrm{Var}(\tilde{R}s) + h^2\,\mathrm{Var}(\tilde{R}f) - 2h\mathrm{Cov}(\tilde{R}s,\tilde{R}f) \tag{4}$$

Onde:

$$\mathrm{Cov}(\tilde{R}s,\tilde{R}f) = (1/P^2 0)\,\mathrm{Cov}(\tilde{P}t,\tilde{F}t)$$

É importante notar que o risco do *hedge* depende também da *covariância* entre os retornos da mercadoria e do contrato futuro ou, em última instância, da covariância entre os preços nos mercados *spot* e futuro. Tanto menor será o risco do *hedge* quanto maior a correlação entre esses preços.

2.1 *Base*

Em algumas circunstâncias é conveniente expressar-se o problema de *hedging* em termos da *base* (*B*) – a diferença entre os preços da mercadoria nos mercados futuros e *spot* ($B = F - P$).

Podemos definir o retorno da base como:

$$\tilde{R}b = \frac{\tilde{B}t - B0}{P0} \tag{5}$$

E o correspondente par de risco-retorno:

$$\bar{R}b = \frac{\bar{B}t - B0}{P0} \quad \text{e} \quad \mathrm{Var}(\tilde{R}b) = (1/P^2 0)\,\mathrm{Var}(\tilde{B}t) \tag{6}$$

onde:

$$\mathrm{Var}(\tilde{B}t) = \mathrm{Var}(\tilde{P}t) + \mathrm{Var}(\tilde{F}t) - 2Cov(\tilde{P}t,\tilde{F}t)$$

O retorno do contrato futuro passa a ser abordado como constituído pelos retornos da mercadoria e da base, ($\tilde{R}f = \tilde{R}s + \tilde{R}b$) logo:

$$(\bar{R}f = \bar{R}s + \bar{R}b)$$
$$\mathrm{Var}(\tilde{R}f) = \mathrm{Var}(\tilde{R}s) + \mathrm{Var}(\tilde{R}b) + 2\mathrm{Cov}(\tilde{R}s,\tilde{R}b) \tag{7}$$

onde:

$$\mathrm{Cov}(\tilde{R}s,\tilde{R}b) = (1/P^2 0)\,[\mathrm{Cov}(\tilde{P}t,\tilde{F}t) - \mathrm{Var}(\tilde{P}t)]$$

Note-se que o risco da base depende também da *covariância* entre os retornos da mercadoria e da base.

Da mesma forma, o retorno do *hedge* passa a ser expresso como uma espécie de ponderação entre os retornos da mercadoria e da base, logo:

$$
\begin{aligned}
&(\bar{R}h = (1-\text{h})\bar{R}s - h\bar{R}b) \\
&\text{Var}(\tilde{R}h) = (1-h)^2\,\text{Var}(\tilde{R}s) + h^2\text{Var}(\tilde{R}b) - 2h \\
&(1-h)\,\text{Cov}(\tilde{R}s,\tilde{R}b)
\end{aligned} \tag{8}
$$

Igualmente, o risco do *hedge* depende da *covariância* entre os retornos da mercadoria e da base.

3. *AS TEORIAS COM ÊNFASE SOBRE O RISCO*

3.1 *A teoria clássica*

Tradicionalmente, o *hedge* tem sido abordado como uma espécie de *seguro* contra as variações de preço da mercadoria (Samuelson, 1973) e a avaliação da sua eficácia tem sido relacionada à eliminação desse risco, qualquer que seja a sua definição.

Essa abordagem pressupõe implicitamente que o *hedger* não é capaz de (ou não deseja) formar expectativas acerca dos movimentos dos preços e que seus lucros derivam exclusivamente de algum processo de "transformação" da mercadoria, qualquer que seja – estocagem ou produção de outra mercadoria (Ward e Schimkat, 1979).

Segundo a teoria clássica, o *hedger* deve assumir *posições opostas e de igual magnitude* nos mercados *spot* e futuro; i.é., deve empregar uma *razão de hedge igual à unidade* ($h^* = 1$).

Subjacente a essa abordagem estão as suposições de que os preços em ambos os mercados são *perfeitamente correlacionados* e que suas variações se compensam mutuamente.

Empregando-se as relações estabelecidas em (4), temos:

$$
\begin{aligned}
&\bar{R}h^* = \bar{R}s - \bar{R}f \\
&Var^*(\tilde{R}h) = \text{Var}(\tilde{R}s + \text{Var}(\tilde{R}f) - 2\text{Cov}(\tilde{R}s,\tilde{R}f)
\end{aligned} \tag{9}
$$

Evidentemente, o risco do *hedge* só será eliminado se:

$$
\text{Var}(\tilde{R}s) = \text{Var}(\tilde{R}f) \quad \text{e} \quad \text{Cor}(\tilde{R}s,\tilde{R}f) = 1 \tag{10}
$$

onde $\text{Cor}(\tilde{R}s,\tilde{R}f)$ representa o coeficiente de correlação entre os retornos nos mercados *spot* e futuro.

Por outro lado, analisando-se a teoria clássica em termos da base, através das relações estabelecidas em (8), temos:

$$
\begin{aligned}
&\bar{R}h^* = -\bar{R}b \\
&\text{Var}^*(\tilde{R}h) = \text{Var}(\tilde{R}b)
\end{aligned} \tag{11}
$$

Tendo em vista que os preços nos mercados *spot* e futuro não são perfeitamente correlacionados nem apresentam idêntica variância, observamos que a teoria clássica não é suficiente para eliminar o risco do *hedge* (nem para minimizá-lo).

De fato, observamos que o *hedger retém o risco da base*.

Contudo, a favor dessa abordagem, existe a possibilidade de se conduzir o *hedge* até a *expiração* do contrato futuro, o que torna a base *não-estocástica* ($\tilde{P}t = \tilde{F}t$ e, conseqüentemente, $\tilde{B}t = 0$), de sorte que:

$$
\begin{aligned}
&\tilde{R}h^* = \frac{F0 - P0}{P0} \\
&\text{Var}^*(\tilde{R}h) = 0
\end{aligned} \tag{12}
$$

Entretanto, usualmente o *hedge* não é mantido até a expiração do contrato futuro e a teoria clássica fica sujeita a duas objeções fundamentais:

a) não proporciona a adequada redução de risco;
b) não atenta para o *retorno esperado* do *hedge*.

Em resposta à primeira objeção, foi desenvolvida a teoria minimizadora que veremos a seguir.

3.2 *A teoria minimizadora*

Somente após o desenvolvimento da moderna teoria do *portfolio* é que a variância dos retornos foi definida como medida de risco e foi aplicada ao problema de *hedging*.

Em conseqüência, o *hedge* passou a ser encarado como um *portfolio* constituído por dois ativos fundamentais:

a) a mercadoria (não-*hedge*);
b) o *hedge* completo ($h = 1$).

Logo, se o *hedger é infinitamente avesso ao risco,* basta determinarmos o *portfolio* de mínima variância entre todas as infinitas combinações dos dois ativos fundamentais (Johnson, 1960; Stein, 1961).

Desta forma, a razão de *hedge* que minimiza o risco é obtida através de:

$$
\frac{d\text{Var}(\tilde{R}h)}{dh} = 0 \tag{13}
$$

obtendo-se

$$
h^* = \frac{\text{Cov}(\tilde{R}s,\tilde{R}f)}{\text{Var}(\tilde{R}f)} = \frac{\text{Cov}(\tilde{P}t,\tilde{F}t)}{\text{Var}(\tilde{F}t)} = \text{Beta}\ (s) \tag{14}
$$

Note-se que h^* corresponde à *volatilidade* – Beta (s) – dos retornos (ou preços) da mercadoria em relação aos retornos (preços) do respectivo contrato futuro (observe-se que é idêntico ao coeficiente angular da regressão de $\widetilde{R}s$ em $\widetilde{R}f$ ou de $\widetilde{P}t$ em $\widetilde{F}t$).

Tendo em vista que usualmente os preços presentes são menos voláteis que os preços futuros, então a razão de *hedge* que minimiza o risco será inferior à postulada pela teoria clássica (h^* é menor que 1).

O par de risco-retorno associado à teoria minimizadora é expresso por:

$$\bar{R}h^* = \bar{R}s - h^*\bar{R}f \quad (15)$$

$$\text{Var}^*(\widetilde{R}h) = \text{Var}(\widetilde{R}s) - \frac{\text{Cov}(\widetilde{R}s,\widetilde{R}f)}{\text{Var}\,(\widetilde{R}f)} =$$

$$\{\, 1 - [\text{Cor}(\widetilde{R}s,\widetilde{R}f)^2] \,\}\ \text{Var}(\widetilde{R}s)$$

Portanto, o risco do *hedge* só será eliminado se e somente se os preços nos mercados *spot* e futuro forem *perfeitamente correlacionados* – $\text{Cor}(\widetilde{R}s,\widetilde{R}f) = 1$.

Alternativamente, a expressão (7) permite a representação de h^* em termos da base:

$$h^* = \frac{\text{Var}(\widetilde{R}s) + \text{Cov}(\widetilde{R}s,\widetilde{R}b)}{\text{Var}(\widetilde{R}s) + \text{Var}(\widetilde{R}b) + 2\text{Cov}(\widetilde{R}s,\widetilde{R}b)} \quad (16)$$

Se o *hedge* for conduzido até a expiração do contrato futuro, então a expressão acima se reduz a $h^* = 1$, já que a base deixa de ser estocástica. Nessas circunstâncias, a teoria minimizadora é equivalente à teoria clássica.

Tendo em vista que os *hedgers* não são infinitamente avessos ao risco, a principal crítica à teoria minimizadora é que esta não considera o retorno esperado do *hedge*.

4. *AS TEORIAS COM ÊNFASE SOBRE O RISCO-RETORNO*

4.1 *A teoria da especulação na base*

A teoria da especulação na base não é exatamente uma teoria de determinação da razão de *hedge*. Trata-se de uma teoria que explicitamente considera o *aspecto especulativo* do *hedging* – i.é., em qualquer combinação da mercadoria e respectivo contrato futuro, as variações dos preços não se compensam perfeitamente.

Como vimos no exame da teoria clássica, o *hedger* retém o risco da base.

Em conseqüência, essa abordagem considera a possibilidade de se aumentar o retorno através do *hedging seletivo* ou especulação na base, decorrente das variações *relativas* entre os preços nos mercados *spot* e futuro (Working, 1953).

Ademais, essa abordagem admite uma eventual "superioridade informacional" do *hedger*, proveniente da sua especialização na transformação da mercadoria, que lhe permitiria prever com maior precisão as variações da base.

Em suporte a essas considerações, Working constatou que uma base "suficientemente" ampla (pequena) é submetida a uma significativa variação negativa (positiva).

Esta abordagem pode ser sumariada pela seguinte regra decisória:

"Se a base for superior a B^*, faça o *hedge*. Caso contrário, desfaça-o."

B^* representa o *tamanho* que distingue uma base "suficientemente" ampla de outra "suficientemente" pequena. Evidentemente, o sucesso dessa estratégia é extremamente dependente da escolha de B^*.

Usualmente, essa estratégia emprega uma razão de *hedge* igual à unidade ($h^* = 1$), embora esta não seja uma condição necessária.

A principal característica diferenciadora da especulação na base é que ela propõe uma administração *ativa* do *hedge*, aproximando-se mais aos modelos *dinâmicos* de *hedging*.

Em virtude das suas características, essa abordagem não pode ser avaliada em termos dos pares de risco-retorno *ex-ante*. Entretanto, de um modo geral, podemos afirmar que proporciona um retorno esperado superior ao da teoria clássica, evidentemente às custas de um maior risco.

4.2 *A teoria do* portfolio

Finalmente, observou-se que a moderna teoria do *portfolio* poderia ser aplicada ao problema de *hedging*, de sorte a incorporar explicitamente no modelo decisório considerações acerca do retorno e do risco do *hedge*, bem como da *estrutura de preferências* do *hedger*.

Diversas variantes do modelo fundamental foram desenvolvidas para lidar com aspectos específicos do *hedging*, como capacidade de estocagem, estoques mínimos, custos de estocagem, etc. (Rutledge, 1972; Peck, 1975; Holthausen, 1979; Feder, Just e Schmitz, 1980; Rolfo, 1980; Anderson e Danthine, 1980, 1981).

Para apresentarmos o modelo básico, convém explicitar os seguintes pressupostos:

$$\bar{R}f > \bar{R}s > 0 \quad (17)$$

$$\text{Var}(\widetilde{R}f) > \text{Var}(\widetilde{R}s > 0$$

$$0 < \text{Cov}(\widetilde{R}s,\widetilde{R}f) < \text{Var}(\widetilde{R}f)$$

ou

$$0 < \text{Cor}(\widetilde{R}s,\widetilde{R}f) < 1$$

Desta forma, para se determinar a *fronteira eficiente* dos pares de risco-retorno estabelecidos em (4), basta variar parametricamente $\tilde{R}h$ e obter as variâncias associadas, empregando:

$$h = \frac{\bar{R}s - \bar{R}h}{\bar{R}f} \qquad (18)$$

Entretanto, convém notar que existirá um limite superior a h, justamente o associado ao *hedge* de mínima variância:

$$\text{infinito} < h < = h\text{máx} = \frac{\mathrm{Cov}(\tilde{R}s,\tilde{R}f)}{\mathrm{Var}(\tilde{R}f)} < 1 \qquad (19)$$

Observamos, então, que o par de risco-retorno da teoria clássica *não* pertence à fronteira eficiente. Por outro lado, os valores de h pertencentes ao intervalo (0, $h$máx) correspondem às diversas combinações de *hedge*, enquanto os valores de h menores que 0 estão associados a posições especulativas (*long* ou comprada) em ambos os mercados.

O par de risco-retorno correspondente ao ponto onde a inclinação da fronteira eficiente é igual à inclinação da curva de isoutilidade do *hedger* que determina a razão ótima de hedge.

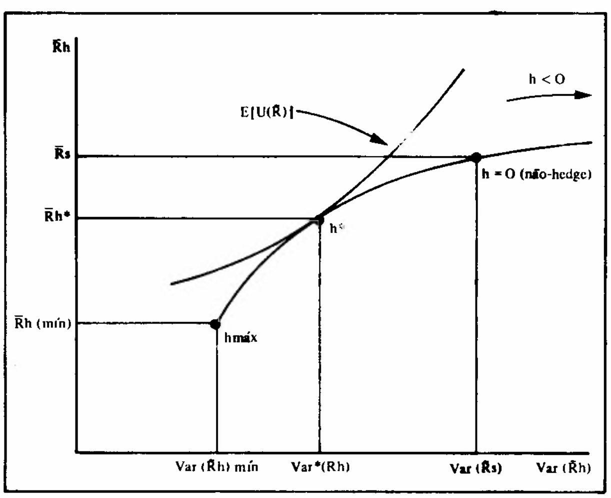
$$\frac{d\bar{R}h}{d\mathrm{Var}(\tilde{R}h)} = \frac{\dfrac{dE[U(\tilde{R})]}{d\mathrm{Var}(\tilde{R})}}{\dfrac{dE[U(\tilde{R})]}{dR}} \qquad (20)$$

onde:

$$\frac{d\bar{R}h}{d\mathrm{Var}(\tilde{R}h)} = -1/2 \quad \frac{\bar{R}f}{h\mathrm{Var}(\tilde{R}f) - \mathrm{Cov}(\tilde{R}s,\tilde{R}f)}$$

A figura 1 ilustra a determinação da razão ótima de *hedge* (h^*).

Figura 1
A razão ótima de hedge



Entretanto, se admitirmos que o *hedger* pode emprestar ou tomar emprestado qualquer importância à taxa de juros livre de risco (r), podemos introduzir o *teorema da separação* (Lintner, 1965) ao problema de *hedging*.

Desta forma, *existirá uma única razão ótima de hedge independentemente da estrutura de preferências do hedger*, já que este poderá satisfazer suas preferências quanto ao risco através da adequada divisão do investimento entre o ativo livre de risco e o *hedge* ótimo.

Para se determinar essa razão ótima de *hedge*, basta maximizar a função objetivo (θ) definida por Lintner (1965):

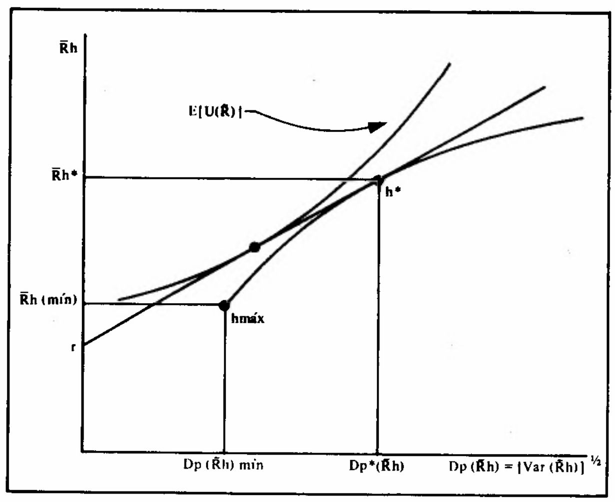
$$\theta = \frac{\bar{R}h - r}{\mathrm{Var}(\tilde{R}h)^{1/2}} \qquad (21)$$

E a razão ótima de hedge (h^*) será dada por:

$$h^* = \frac{(\bar{R}f - r)\,\mathrm{Var}(\tilde{R}s) - (\bar{R}s - r)\,\mathrm{Cov}(\tilde{R}s,\tilde{R}f)}{(\bar{R}s - r)\,\mathrm{Var}(\tilde{R}f) - (\bar{R}f - r)\,\mathrm{Cov}(\tilde{R}s,\tilde{R}f)} \qquad (22)$$

A figura 2 ilustra a determinação da razão ótima de *hedge* a partir do teorema da separação.

Figura 2
O teorema da separação e a razão ótima de hedge



5. *CONSIDERAÇÕES FINAIS*

De modo geral, a teoria do *portfolio* parece ser superior às teorias clássica e minimizadora, por considerar de forma sistemática o risco e o retorno do *hedge* à luz da estrutura de preferências do *hedger*.

De resto, a teoria minimizadora lhe é apenas um caso particular, enquanto o par de risco-retorno associado à teoria clássica corresponde a uma alternativa *dominada* de investimento.

Por outro lado, tendo em vista que a teoria da especulação na base propõe um modelo dinâmico de *hedge*, não pode ser comparada com as demais. Entretanto, é importante notar que é a teoria que mais se aproxima do comportamento efetivo dos agentes econômicos.

Finalmente, abordamos um aspecto da decisão de *hedging* a partir de uma perspectiva determinada (estática). Abordaremos outros aspectos desse tipo de decisão em artigos posteriores; entre eles, convém destacar:

a) a determinação da razão de um *hedge cruzado* (i.é., aquele onde a mercadoria objeto do contrato futuro não corresponde exatamente à mercadoria retida no mercado *spot*, como, por exemplo, o uso de contratos futuros de índices no *hedging* de carteiras de ações);

b) a determinação de uma *medida avaliadora da eficácia ex-post* das diversas estratégias de *hedging,* já que cada estratégia é ótima a partir de seu próprio critério de eficácia avaliado *ex-ante;*

c) a *precificação* da mercadoria nos mercados *spot* e futuro, à luz da moderna teoria de equilíbrio, no mercado de capitais, sob condições de incerteza;

d) os *modelos dinâmicos de hedging* que propõem um ajustamento contínuo das variáveis decisórias, reconhecendo a estrutura temporal do problema;

e) o efeito das *margens de performance* (ajustes diários) nas decisões de *hedging* em condições de inflação ou taxas de juros elevadas (note-se que os modelos examinados abstraem esse fluxo de caixa intermediário);

f) a *avaliação empírica* das diversas teorias de *hedging* nas condições predominantes nos mercados futuros do Brasil.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Anderson, R.W. & Danthine, J.P. Hedging and joint production: theory and illustrations. *Journal of Finance, 35*:487-98, 1980.

———— & ————. Cross-hedging. *Journal of Political Economy, 89*:1. 182-96, 1981.

Black, F. The pricing of commodity contracts. *Journal of Financial Economics, 3*:167-79, 1976.

Dusak, K. Futures trading and investor return: an investigation of commodity market risk premium. *Journal of Political Economy, 81*:1.387-406, 1973.

Ederington, L.H. The hedging performance of the new futures markets. *Journal of Finance, 34*:157-70, 1979.

Feder, G.; Just, R.E. & Schmitz, A. Futures markets and the theory of the firm under price uncertainty. *Quarterly Journal of Economics, 94*:317-23, 1980.

Figlewski, S. Hedging with stock index futures: theory and application in a new market. *The Journal of Futures Markets, 2*:183-99, 1985.

Gomes, F.C. *O modelo de avaliação de ativos – the capital asset pricing model.* Dissertação de mestrado, 1982. mimeogr.

Holthausen, D.M. Hedging and competitive firm under price uncertainty. *American Economic Review, 69*:989-95, 1979.

Johnson, L.L. The theory of hedging and speculation in commodity futures. *Review of Economic Studies, 27:* 139-51, 1960.

Junkus, J.C. & Lee, C.F. Use of three stock index futures in hedging decisions. *The Journal of Futures Markets, 2*: 201-22, 1985.

Lintner, J. The valuation of risk assets and the selection of risk investments in stocks portfolios and capital budgets. *Review of Economics and Statistics, 1*:13-37, 1965.

Markowitz, H. *Portfolio selection efficient diversification of investments.* New York, Wiley, 1959.

Nelson, R.D. & Collins, R.A. A measure of hedging performance. *The Journal of Futures Markets, 1*:45-55, 1985.

Peck, A.E. Hedging and income stability: concepts, implications and an example. *American Journal of Agricultural Economics, 57*:410-9, 1975.

Rolfo, J. Optimal hedging under price and quantity uncertainty: the case of a cocoa producer. *Journal of Political Economy, 88*:100-16, 1980.

Rutledge, D.J.S. Hedgers demand for futures contracts: a theoretical framework with applications to the United States Soybean Complex. *Food Research Institute Studies, 11*:237-56, 1972.

Samuelson, P.A. *Economics.* New York, McGraw-Hill, 1973.

Scholes, M.S. The economics of hedging and spreading in futures markets. *The Journal of Futures Markets, 2*:265-86, 1981.

Stein, J.L. The simultaneous determination of spot and futures prices. *American Economic Review, 5*, 1961.

Stoll, H.R. Commodity futures and spot price determination and hedging in capital market equilibrium. *Journal of Financial and Quantitative Analysis, 14*:873-94, 1979.

Tobin, J. Liquidity preference as behavior towards risk. *Review of Economic Studies, 25*:74-5, 1958.

Ward, R.W. & Schimkat, G.E. Risk ratios and hedging: Florida Feeder Cattle. *Southern Journal of Agricultural Economics, 11*:71-7, 1979.

Working, H. Hedging reconsidered, *Journal of Farm Economics, 35*:544-61, 1953.