RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DO COMPOSTO ÓTIMO DE PRODUTOS PELA TÉCNICA DE PROGRAMAÇÃO

*Jorge Motta**

** Professor do Departamento de Mercadologia da Escola de Administração de Empresas de São Paulo, da Fundação Getulio Vargas.*

1. INTRODUÇÃO;

As decisões relativas à política de produtos de uma empresa constituem a base de seu empenho na obtenção de uma vantagem diferencial competitiva no mercado. Situam-se, por conseguinte, entre as tarefas-chaves do administrador mercadológico.

A escolha do composto de produtos exerce influência considerável no lucro final e na situação econômico-financeira de uma firma, fato que explica o enorme interesse que tal seleção desperta entre os executivos da administração central e dos setores não-mercadológicos da administração. Não existe segmento algum do composto mercadológico de uma firma que não seja afetado pelas decisões tomadas e executadas na área da política de produtos.[1]

As decisões referentes à promoção e distribuição estão estreitamente ligadas à definição da política de produtos, assim como inúmeras outras considerações administrativas que convergem para a área da política de produtos.

Os produtos manufaturados na fábrica, desenvolvidos, porém, com a assistência dos profissionais de *marketing*, constituem o assunto central do programa de comunicações da companhia. Por sua vez, esses produtos e o elenco de serviços a eles associados fluem até os consumidores finais, por meio das vias mercadológicas dentro de um programa de distribuição. Logo, o resultado de um programa mercadológico (o desenvolvimento de uma linha de produtos e as decisões relativas à política de preços) passa a ser o ponto de partida para outros programas (comunicações, distribuição e serviços de pós-venda). As decisões fundamentais adotadas em relação à linha de produtos de uma empresa influenciam decisivamente todas as operações mercadológicas, estratégias de venda, propaganda e promoção de vendas, políticas e programas adotados com respeito à estruturação das vias de distribuição. Tais decisões, ademais, costumam afetar as políticas e programas de produção, administração e finanças, pesquisa e desenvolvimento e recursos humanos.

O composto ótimo de produtos é um determinado sortimento de produtos que, associado a um esforço mercadológico da empresa no meio ambiente existente, origina a maior amplitude possível na consecução dos objetivos. Em outras palavras: se uma firma produzir e comercializar, num determinado momento, o composto ótimo de produtos, a adição, eliminação ou alteração dos produtos que constituem a combinação ótima contribuiria, cada uma destas decisões tomada isoladamente, para diminuir o grau de preenchimento dos objetivos. Se o objetivo da empresa for, basicamente, a maximização dos lucros, diz-se que o composto de produtos será ótimo, se o lucro a ser atingido não puder aumentar mediante o lançamento, eliminação ou modificação dos produtos atuais. Por outro lado, se o objetivo principal da companhia for o crescimento das vendas, a mescla de produtos será ótima, se produzir um índice de crescimento das vendas que não puder ser melhorado lucrativamente por quaisquer alterações introduzidas no composto.

Este conceito é fácil de definir e de compreender, porém de quase impossível aplicação operacional.[2] Fundamentalmente, existem duas razões para esta situação. Em primeiro lugar, ainda que o problema seja passível de equacionamento, permanece a questão dos objetivos. Muitas empresas perseguem objetivos variados, alguns dos quais não podem ser medidos por um padrão quantitativo, tais como a compatibilidade da linha de produtos com as atuais vias de distribuição; o relacionamento dos produtos com as linhas de produtos presentemente mercadizadas pela empresa; a dependência dos produtos da situação econômica; a originalidade da linha de produtos; os efeitos estimados sobre as vendas da linha atual de produtos; imagem e reputação da companhia; pioneirismo e liderança no desenvolvimento de tecnologia nova, etc. A dificuldade relaciona-se, por conseguinte, com a determinação do conjunto de objetivos a serem maximizados. Em segundo lugar, supondo que a firma possa identificar e avaliar cada uma das alternativas existentes (poder-se-ia objetar que o conjunto de produtos candidatos potenciais é infinito), não há que negar que o problema do dinamismo deve ser solucionado. Nem os objetivos nem a viabilidade mercadológica (as regras funcionais que determinam o potencial do produto) permanecem fixos ao longo do tempo.

Assim, ainda que um composto de produtos pudesse ser elaborado num determinado momento, a revisão periódica dessa combinação teria de ser realizada. Por conseguinte, uma empresa só pode aspirar a obter, na melhor das hipóteses, uma *aproximação* de um composto ótimo de produtos.

Devido à complexidade da resolução do problema do composto ótimo de produtos, alguns autores preferem recorrer à abordagem da pesquisa operacional, para resolver a questão por partes. Distinguem dois tipos diferenciados de problema: (a) o composto ótimo de produtos examinado do ponto de vista estático e (b) o composto ótimo de produtos avaliado do ângulo dinâmico.[3]

2. O PROBLEMA DO COMPOSTO ÓTIMO E ESTÁTICO DE PRODUTOS

O problema do composto ótimo e estático de produtos pode ser descrito como segue: dadas n possibilidades de produto, escolher m (sendo $m < n$) tal que o lucro (ou algum outro objetivo) seja maximizado, sujeito ao preenchimento de determinadas restrições. Dentro de certas condições, este problema pode ser solucionado mediante o emprego da técnica de programação matemática, desde que não existam interações de procura e custo entre os diversos produtos estudados.

3. O PROBLEMA DO COMPOSTO ÓTIMO E DINÂMICO DE PRODUTOS

Este problema relaciona-se com a programação de eliminações e adições ao composto de produtos, em resposta às variações ocorridas nas oportunidades e recursos, de modo que o composto de produtos permaneça ótimo ao longo do tempo. Como as restrições estipuladas no enunciado do problema mudam ou devem mudar com a passagem do tempo, o composto de produtos ótimo, num determinado instante, deixa de sê-lo num período seguinte. Por conseguinte, a resolução do problema da determinação do composto ótimo e dinâmico de produtos requer uma revisão periódica da solução encontrada para o problema do composto ótimo de produtos e estático. A administração de uma empresa naturalmente tem grande interesse em saber o que vai acontecer com os lucros, estabilidade e crescimento das vendas e participação de mercado, em decorrência de alterações introduzidas no composto de produtos. Embora sejam escassos os estudos realizados sobre este problema, a simulação do computador parece oferecer o maior potencial de soluções adequadas.[4]

4. O PROBLEMA DO COMPOSTO DE PRODUTOS

Este artigo examina duas abordagens distintas à resolução do problema da espécie de produtos e respectivas quantidades que uma empresa deve produzir para atingir um determinado objetivo. O problema do composto ótimo de produtos pode ser enunciado da seguinte maneira: dados n possíveis produtos que uma firma pode produzir ou vender, determinar m deles (onde $n \leq n$) de modo que os lucros da companhia sejam maximizados. Nossa atenção será voltada, pois, à resolução do problema da determinação estática do composto ótimo de produtos. Duas abordagens serão examinadas: a da análise de custo-volume-lucro e a da programação linear.

A determinação do composto ótimo de produtos é uma tarefa que assume importância capital para a maioria das empresas. Podemos citar alguns exemplos extraídos da vida real das organizações existentes em nosso País.

1. Uma loja de supermercado, de tamanho médio, opera, no Brasil, com cerca de cinco mil itens. Devido às limitações de espaço para exposição dos produtos nas prateleiras e para estocagem nos depósitos, a administração de uma loja de supermercado de tamanho médio defronta-se com o problema permanente de selecionar um composto de produtos que maximize o seu lucro corrente.

2. Uma fábrica de tintas de porte médio comercializa uma linha de produtos que abrange, em média, dois mil itens de produto. Que combinação desses produtos possibilitaria a maximização de um determinado objetivo, como lucros ou vendas?

3. Um atacadista de autopeças de porte médio comercializa cerca de 20 mil produtos distintos. Determinar a combinação ótima desses produtos é uma tarefa interminável (e, aparentemente, insolúvel) para o administrador comercial deste tipo de firma.

4. Uma firma de confecção de roupas femininas produz e vende cerca de seis mil itens diferentes de produto. Qual o composto ótimo de produtos que a firma deve formular num determinado período de produção e vendas?

5. Um fabricante de receptores de televisão necessita projetar e fabricar alguns modelos básicos dentro de um enorme conjunto de possibilidades.

6. Um fabricante de artigos de higiene pessoal e cosméticos produz e vende, em média, 10 mil itens diferentes. Definir o composto de produtos que, num determinado instante, seja capaz de preencher um objetivo qualquer, é uma decisão que se reveste de extraordinária importância para toda a administração da firma.

7. Uma empresa que enfrente prolongada escassez de matérias-primas deve decidir quais dos atuais produtos devem continuar a ser produzidos e quais devem ser eliminados.

8. Uma firma que avalie um extenso elenco de idéias de novos produtos deve selecionar um determinado número de sugestões para desenvolvimento final.

9. Uma companhia que se defronte com a necessidade de reduzir sua linha de produtos, em conseqüência de uma proliferação indiscriminada de produtos, no passado, deve escolher quais os melhores produtos que deverão permanecer em linha.

10. Um fabricante de calçados produz e vende cerca de mil itens distintos de produto. Qual a composição ótima de produtos, considerando a diversidade de modelos, cores, tamanhos e acabamentos?

5. RESOLUÇÃO DO PROBLEMA LIMITADO DO COMPOSTO ÓTIMO DE PRODUTOS PELA ANÁLISE DE CUSTO-VOLUME-LUCRO

A análise de custo-volume-lucro é um procedimento que consiste, essencialmente, em examinar a relação existente entre as variações ocorridas no volume de produção (ou de vendas) e as variações correspondentes nos lucros. A premissa básica de qualquer decisão fundamentada nas relações custo-volume-lucro é a de que a empresa, o departamento ou qualquer outro tipo de centro de decisão possui uma quantidade fixa de recursos, que compromete a firma com um determinado montante de custos fixos, pelo menos por um período de tempo relativamente curto.

O problema decisório, com que se defronta o administrador, consiste em determinar o emprego mais eficiente e produtivo dos recursos fixos de que dispõe, relativamente aos níveis de produção e às suas combinações.

A análise de custo-volume-lucro abrange desde a determinação do nível ótimo de produção de um departamento até a definição do composto ótimo de produtos de uma grande companhia. Todas estas decisões baseiam-se em relações simples entre as variações nas receitas e custos e as alterações nos níveis de produção (ou nos compostos de produção). Como regra geral, a produção deve ser aumentada ou o composto de produtos alterado quando as receitas marginais, decorrentes das variações, excederem os custos marginais dessas alterações. Por conseguinte, todas as análises que envolvem as relações de custo-volume-lucro têm como característica comum a ênfase dada ao comportamento dos custos e receitas em diversos intervalos de níveis e composição de produção.

A análise de custo-volume-lucro utiliza o conceito de contribuição marginal (preço de venda líquido unitário menos custos variáveis por unidade). Com base nesta idéia simples, porém útil, pode-se caminhar em direção à resolução do problema do composto de produtos. O grau de dificuldade da solução, todavia, aumenta com o número de produtos. A análise de custo-volume-lucro prova ser um procedimento inadequado quando é grande a variedade de produtos fabricados e/ou comercializados e quando é extenso o número de restrições impostas às possíveis combinações desses produtos. Tais problemas podem ser tratados mais apropriadamente com a técnica de programação linear, que examinaremos mais adiante.

Exemplificando o problema do composto de produtos, suponhamos que uma determinada firma fabrique e venda apenas três produtos, que denominaremos A, B e C. Embora tal pressuposto represente uma limitação extremamente irreal, mantenhamos esta hipótese simplificadora da realidade tão-somente com o objetivo dę facilitar a exposição da solução do problema proposto pela análise de custo-volume-lucro. Vamos presumir, ademais, que os preços de venda e os custos desses três produtos sejam os abaixo relacionados:

	Produto A	*Produto B*	*Produto C*
Preço de venda unitário	Cr$ 10,00	Cr$ 8,00	Cr$ 5,00
Custos variáveis unitários de fabricação e venda	Cr$ 5,00	Cr$ 6,00	Cr$ 3,00
Custos fixos totais		Cr$ 5.000.000,00	

Determinemos o ponto de equilíbrio para cada uma das combinações particulares dos três porodutos A, B e C. Por ponto de equilíbrio entende-se o nível de vendas de uma firma em que o volume total das receitas provenientes dessas vendas seja exatamente igual ao custo total de produzi-las. O ponto de equilíbrio localiza-se, pois, na interseção da curva de custo total com a curva de receita total, ou no volume de receita em que o lucro da empresa seja nulo.

O ponto de equilíbrio expresso em unidades de produto (que denominaremos de Q_E) é dado pela seguinte igualdade:

$$Q_E = \frac{\text{Custos fixos}}{\text{Preço de venda unitário — custo variável unitário}} =$$

$$= \frac{\text{Custos fixos}}{\text{Margem de contribuição unitária}}$$

Vamos calcular o ponto de equilíbrio expresso sob a forma de vendas (V_E). Se multiplicarmos ambos os lados da igualdade acima pelo preço de venda unitário (P) e, a seguir, dividirmos por P o numerador e denominador da fração situada no lado direito da igualdade, teremos:

$$V_E = \frac{\text{Custos fixos}}{1 - \dfrac{\text{Custo variável unitário}}{\text{Preço de venda unitário}}}$$

Chamando o denominador desta fração de *índice de margem de contribuição* (ou a margem de contribuição unitária expressa em percentagem do preço de venda unitário), temos a seguinte igualdade:

$$V_E = \frac{\text{Custos fixos}}{\text{Índice de margem de contribuição}}$$

Para calcular o ponto de equilíbrio de nossa firma hipotética, precisamos conhecer a combinação de produtos adotada pela direção da empresa. Vamos supor que a direção comercial tenha decidido considerar, apenas, os seis compostos de produtos abaixo relacionados:[5]

Composto de produtos n.º 1: $5A - 3B - 2C$ (5 unidades do produto A + 3 unidades do produto B + 2 unidades do produto C). Todas estas unidades de produto são reunidas num "pacote" único.

Composto de produtos n.º 2: $5A - 2B - 3C$.

Composto de produtos n.º 3: $3A - 5B - 2C$.

Composto de produtos n.º 4: $3A - 2B - 5C$.

Composto de produtos n.º 5: $2A - 5B - 3C$.

Composto de produtos n.º 6: $2A - 3B - 5C$.

Examinemos cada um destes compostos de produtos, buscando calcular o preço de venda unitário, o custo variável unitário e a margem de contribuição unitária. As despesas fixas foram estimadas em Cr$ 5.000.000,00 e pressupõe-se que elas não variem durante o período de tempo relevante da nossa análise.

O cálculo do ponto de equilíbrio requer a indicação prévia da combinação de produtos, isto é, a participação relativa dos três produtos A, B e C na composição de cada "pacote" de produção. A determinação do ponto de equilíbrio de cada uma das combinações de produtos é a seguinte:

1. Composto de produtos n.º 1: $5A - 3B - 2C$

1.1 Preço unitário de venda do composto de produtos:

produto A: 5 × Cr$ 10,00	Cr$ 50,00
produto B: 3 × Cr$ 8,00	Cr$ 24,00
produto C: 2 × Cr$ 5,00	Cr$ 10,00
	Cr$ 84,00

1.2 Custo unitário variável do composto de produtos:

produto A: 5 × Cr$ 5,00	Cr$ 25,00
produto B: 3 × Cr$ 6,00	Cr$ 18,00
produto C: 2 × Cr$ 3,00	Cr$ 6,00
	Cr$ 49,00

1.3 Margem de contribuição unitária:

Cr$ 35,00

1.4 Ponto de equilíbrio das vendas:

$$\frac{\text{Cr\\$ } 5.000.000{,}00}{\text{Cr\\$ } 35{,}00/\text{Cr\\$ } 84{,}00} = \text{Cr\\$ } 12.000.000{,}00$$

1.5 Ponto de equilíbrio em unidades de composto:

$$\frac{\text{Cr\\$ } 5.000.000{,}00}{\text{Cr\\$ } 84{,}00/\text{Cr\\$ } 49{,}00} = 142.857$$

2. Composto de produtos n.º 2: $5A - 2B - 3C$

2.1 Preço unitário de venda do composto de produtos:

produto A: 5 × Cr$ 10,00	Cr$ 50,00
produto B: 2 × Cr$ 8,00	Cr$ 16,00
produto C: 3 × Cr$ 5,00	Cr$ 15,00
	Cr$ 81,00

2.2 Custo unitário variável do composto de produtos:

produto A: 5 × Cr$ 5,00	Cr$ 25,00
produto B: 2 × Cr$ 6,00	Cr$ 12,00
produto C: 3 × Cr$ 3,00	Cr$ 9,00
	Cr$ 46,00

2.3 Margem de contribuição unitária:

Cr$ 35,00

2.4 Ponto de equilíbrio das vendas:

$$\frac{\text{Cr\\$ } 5.000.000{,}00}{\text{Cr\\$ } 35{,}00/\text{Cr\\$ } 81{,}00} = \text{Cr\\$ } 11.571.428$$

2.5 Ponto de equilíbrio em unidades de composto:

$$\frac{\text{Cr\\$ } 5.000.000{,}00}{\text{Cr\\$ } 81{,}00 - \text{Cr\\$ } 46{,}00} = 142.857$$

3. Composto de produtos n.º 3: $3A - 5B - 2C$

3.1 Preço unitário de venda do composto de produtos:

produto A: 3 × Cr$ 10,00	Cr$ 30,00
produto B: 5 × Cr$ 8,00	Cr$ 40,00
produto C: 2 × Cr$ 5,00	Cr$ 10,00
	Cr$ 80,00

3.2 Custo unitário variável do composto de produtos:

produto A: 3 × Cr$ 5,00	Cr$ 15,00
produto B: 5 × Cr$ 6,00	Cr$ 30,00
produto C: 2 × Cr$ 3,00	Cr$ 6,00
	Cr$ 51,00

3.3 Margem de contribuição unitária:

Cr$ 29,00

3.4 Ponto de equilíbrio das vendas:

$$\frac{\text{Cr\$ } 5.000.000,00}{\text{Cr\$ } 29,00/\text{Cr\$ } 80,00} = \text{Cr\$ } 13.793.103$$

3.5 Ponto de equilíbrio em unidades de composto:

$$\frac{\text{Cr\$ } 5.000.000,00}{\text{Cr\$ } 80,00 - \text{Cr\$ } 51,00} = 172.414$$

4. Composto de produtos n.º 4: $3A - 2B - 5C$

4.1 Preço unitário de venda do composto de produtos:

produto A: 3 × Cr$ 10,00	Cr$ 30,00
produto B: 2 × Cr$ 8,00	Cr$ 16,00
produto C: 5 × Cr$ 5,00	Cr$ 25,00
	Cr$ 71,00

4.2 Custo unitário variável do composto de produtos:

produto A: 3 × Cr$ 5,00	Cr$ 15,00
produto B: 2 × Cr$ 6,00	Cr$ 12,00
produto C: 5 × Cr$ 3,00	Cr$ 15,00
	Cr$ 42,00

4.3 Margem de contribuição unitária:

Cr$ 29,00

4.4 Ponto de equilíbrio das vendas:

$$\frac{\text{Cr\$ } 5.000.000,00}{\text{Cr\$ } 29,00/\text{Cr\$ } 71,00} = \text{Cr\$ } 12.241.379$$

4.5 Ponto de equilíbrio em unidades de composto:

$$\frac{\text{Cr\$ } 5.000.000,00}{\text{Cr\$ } 71,00 - \text{Cr\$ } 42,00} = 172.414$$

5. Composto de produtos n.º 5: $2A - 5B - 3C$

5.1 Preço unitário do composto de produtos:

produto A: 2 × Cr$ 10,00	Cr$ 20,00
produto B: 5 × Cr$ 8,00	Cr$ 40,00
produto C: 3 × Cr$ 5,00	Cr$ 15,00
	Cr$ 75,00

5.2 Custo unitário variável do composto de produtos:

produto A: 2 × Cr$ 5,00	Cr$ 10,00
produto B: 5 × Cr$ 6,00	Cr$ 30,00
produto C: 3 × Cr$ 3,00	Cr$ 9,00
	Cr$ 49,00

5.3 Margem de contribuição unitária:

Cr$ 26,00

5.4 Ponto de equilíbrio das vendas:

$$\frac{\text{Cr\$ } 5.000.000,00}{\text{Cr\$ } 26,00/\text{Cr\$ } 75,00} = \text{Cr\$ } 14.423.076$$

5.5 Ponto de equilíbrio em unidades de composto:

$$\frac{\text{Cr\$ } 5.000.000,00}{\text{Cr\$ } 75,00 - \text{Cr\$ } 49,00} = 192.308$$

6. Composto de produtos n.º 6: $2A - 3B - 5C$

6.1 Preço unitário de venda do composto de produtos:

produto A: 2 × Cr$ 10,00	Cr$ 20,00
produto B: 3 × Cr$ 8,00	Cr$ 24,00
produto C: 5 × Cr$ 5,00	Cr$ 25,00
	Cr$ 69,00

6.2 Custo unitário do composto de produtos:

produto A: 2 × Cr$ 5,00	Cr$ 10,00
produto B: 3 × Cr$ 6,00	Cr$ 18,00
produto C: 5 × Cr$ 3,00	Cr$ 15,00
	Cr$ 43,00

6.3 Margem de contribuição unitária:

Cr$ 26,00

6.4 Ponto de equilíbrio das vendas:

$$\frac{\text{Cr\$ } 5.000.000,00}{\text{Cr\$ } 26,00/\text{Cr\$ } 69,00} = \text{Cr\$ } 13.269.230$$

6.5 Ponto de equilíbrio em unidades de composto:

$$\frac{\text{Cr\$ } 5.000.000,00}{\text{Cr\$ } 69,00 - \text{Cr\$ } 43,00} = 192.308$$

Os pontos de equilíbrio dos diversos compostos de produtos podem ser resumidos no quadro a seguir:

Tabela 1

Pontos de equilíbrio dos diversos compostos de produtos

	Descrição do composto	Ponto de equilíbrio em vendas	Ponto de equilíbrio em unidades
Composto de produtos N.º 1	5A – 3B – 2C	Cr$ 12.000.000,00	142.857
Composto de produtos N.º 2	5A – 2B – 3C	Cr$ 11.571.428,00	142.857
Composto de produtos N.º 3	3A – 5B – 2C	Cr$ 13.793.103,00	172.414
Composto de produtos N.º 4	3A – 2B – 5C	Cr$ 12.241.379,00	172.414
Composto de produtos N.º 5	2A – 5B – 3C	Cr$ 14.423.076,00	192.308
Composto de produtos N.º 6	2A – 3B – 5C	Cr$ 13.269.230,00	192.308

Os seis compostos de produtos diferentes são contrastados no gráfico de lucro-volume da figura 1. Como se pode concluir de uma análise do diagrama, o ponto de equilíbrio (e o seu respectivo gráfico) depende da composição dos produtos vendidos. Como o produto *A* é o mais lucrativo em *termos de vendas* (isto é, a margem de contribuição de *A* é igual a 50% das vendas, a margem de contribuição de *C* é igual a 40% das vendas e a margem de contribuição de *B* é igual a 25% das vendas), naturalmente o composto formado de cinco unidades de *A*, duas unidades de *B* e três unidades de *C* (o composto de produtos n.º 2, representado pela combinação $5A + 2B + 3C$), deveria oferecer à firma o ponto de equilíbrio mais baixo em termos de vendas.

Por outro lado, à medida que se altera a composição dos produtos vendidos muda o ponto de equilíbrio. Por esta razão, a composição $2A + 5B + 3C$ (composto de produtos n.º 5) deveria oferecer o ponto de equilíbrio mais alto, já que o produto de menor margem de contribuição unitária (o produto *B*) figura no "pacote" com cinco unidades, enquanto que o produto *A* (o produto de maior margem de contribuição unitária) aparece com apenas duas unidades e o produto *C* (o produto que oferece a segunda maior margem de contribuição unitária) é representado na composição com apenas três unidades.

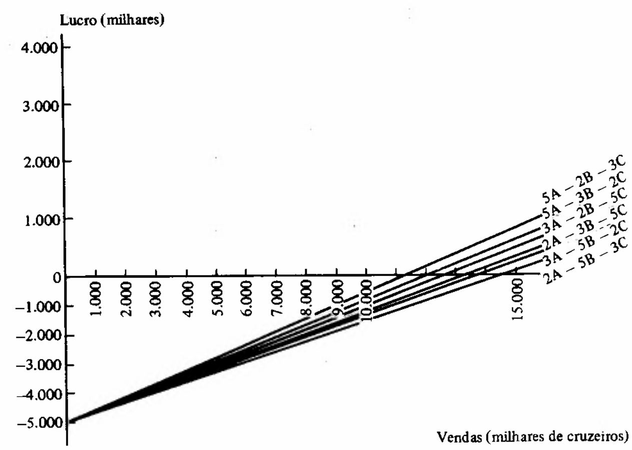
É conveniente lembrar que, quanto maior for a margem de contribuição de um determinado composto de produtos, tanto menor será o ponto de equilíbrio das vendas. Por sua vez, quanto menor for a margem de contribuição de um composto de produtos, tanto maior será o ponto de equilíbrio das vendas. Isto pode ser facilmente verificado com um exame da figura 1. O composto de produtos n.º 2 ($5A + 2B + 3C$) possui a maior margem de contribuição em termos de vendas, 43,21%, por isto tem o menor ponto de equilíbrio de vendas, Cr$ 11.571.428,00. O composto de produtos n.º 5 ($2A + 5B + 3C$) desfruta da menor margem de contribuição em termos de vendas, 34,67%, por conseguinte tem o maior ponto de equilíbrio de vendas, Cr$ 14.423.076,00.

Se observarmos a natureza das equações das linhas que aparecem na figura 1, tornar-se-á evidente que as inclinações das retas correspondem aos índices de margem de contribuição do composto de produtos correspondente. Logo, quanto maior for esse índice, tanto maior será a inclinação (ou o coeficiente angular da reta).

Aceita a pressuposição de que os custos fixos da empresa (Cr$ 5.000.000,00) não se modificam com todas as possíveis combinações dos três produtos *A*, *B* e *C*, todas as retas deverão partir de vendas nulas e ter origem no mesmo ponto do eixo de lucro (prejuízo), que corresponderá ao valor negativo dos custos fixos. Se todas as retas têm origem no mesmo ponto, aquela que possuir a maior inclinação deverá interceptar o eixo das vendas no ponto mais baixo. Devemos lembrar, por outro lado, que o lucro é nulo em todos os pontos de interseção das diversas retas com o eixo das vendas. Conseqüentemente, o ponto de interseção do eixo de vendas representa o ponto de equilíbrio, para o composto de produtos correspondente, e a composição de produtos que oferecer a maior margem de contribuição será beneficiada com o ponto de equilíbrio mais baixo.

Figura 1

Gráfico de lucro-vendas



Com referência ao gráfico de lucro-vendas da figura 1, torna-se necessário explicitar o significado do eixo de vendas. Os valores registrados neste eixo significam o valor das vendas correspondente à produção do período, inexistindo, por conseguinte, o problema da contabilização dos estoques para fins de apuração do lucro. Esta convenção é estabelecida com vistas a preservar a compatibilidade com a hipótese de contribuição marginal constante, estipulada na análise do ponto de equilíbrio. Como todas as mercadorias produzidas podem ser vendidas a um preço especificado, para fins de tomada de decisão, o valor de vendas da produção passa a ser mais relevante, em nossa opinião, do que o montante das vendas reais, pelo menos no que se refere à apuração do lucro.

Suponhamos, agora, que o administrador de nossa empresa hipotética tenha que decidir quanto à composição específica dos produtos *A, B* e *C* a ser produzida e vendida no período seguinte. Vamos supor, ademais, que a atual capacidade produtiva da firma possa ser utilizada para fabricar qualquer um dos três produtos e que o mercado desses bens seja ilimitado. Estas hipóteses são irreais, naturalmente, porém a simplificação do problema proporciona um meio de avaliação da utilidade dos conceitos de custo-volume-lucro na resolução do problema do composto ótimo de produtos. A avaliação das limitações da análise do custo-volume-lucro, por sua vez, proporciona-nos um ponto de partida para a demonstração de como a técnica da programação linear funciona como uma extensão realmente significativa da primeira abordagem.

6. A DECISÃO DO COMPOSTO DE PRODUTOS, SUJEITA A UMA RESTRIÇÃO

A análise de custo-volume-lucro que acabamos de elaborar proporcionou-nos algumas informações importantes sobre os pontos de equilíbrio dos diversos compostos de produtos examinados, as margens de contribuição de cada composto e o número de "pacotes" necessários para alcançar o ponto de nivelamento entre as receitas e despesas projetadas, aceitos, é claro, os pressupostos de preços constantes, despesas fixas determinadas e custos variáveis controlados. Anotamos, por exemplo, que a margem de contribuição unitária do produto *A* é de Cr$ 5,00, a do produto *B* é de Cr$ 2,00 e a do produto *C* é de Cr$ 2,00. Como a única diferença entre o lucro líquido e a renda marginal é o montante de Cr$ 5.000.000,00 de despesas fixas, o administrador de nossa empresa hipotética poderá maximizar o lucro líquido, mediante a escolha de uma combinação dos produtos *A, B* e *C* que maximize a contribuição total. Mantém-se, evidentemente, inalterada a hipótese de que os custos fixos assim permaneçam durante o intervalo de tempo considerado e para o volume de produção estipulado.

O agente decisório deverá proceder ao cálculo de um índice de desejabilidade de cada produto, mediante a comparação da margem de contribuição unitária, com alguma medida relativa ao montante do *fator de produção escasso,* utilizado na produção e venda de cada produto. Suponhamos, por exemplo, que os produtos *A, B* e *C* possam ser fabricados e vendidos em qualquer combinação, sujeitos apenas a uma restrição bastante simples: que existem somente 1.400.000 horas de produção disponíveis. Se cada unidade do produto *A* necessitar 1,0 hora de produção, cada unidade do produto *B* exigir 0,5 hora de fabricação e cada unidade do produto *C* demandar 0,35 hora da área de manufatura, poderão ser calculados os seguintes índices de lucratividade:

	Produto *A*	Produto *B*	Produto *C*
Margem de contribuição unitária	Cr$ 5,00	Cr$ 2,00	Cr$ 2,00
Horas de fabricação exigidas por unidade	Cr$ 1,00	Cr$ 0,50	Cr$ 0,35
Índice de lucratividade: margem de contribuição por hora	$ 5,00	$ 4,00	$ 5,71

Neste exemplo, bastante simplificado, conclui-se que o administrador de nossa empresa hipotética preferiria o produto *C* aos produtos *A* e *B*. Efetivamente, se não houvesse outras restrições, o produto *B* jamais seria produzido, limitando-se a empresa a fabricar e vender os produtos *C* e *A*, que oferecem maior contribuição marginal por hora de fabricação. Esta situação pode ser retratada num diagrama de lucro-vendas. Na figura 2, os três planos de vendas são representados no gráfico lucro-vendas. As vendas, em nível de equilíbrio, são as seguintes:

1. Cr$ 10.000.000,00, se a empresa vender apenas o produto *A*.

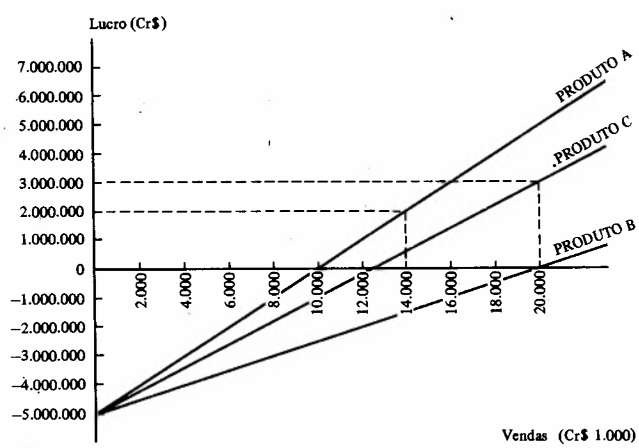
2. Cr$ 20.000.000,00, se a empresa vender apenas o produto *B*.

3. Cr$ 12.500.000,00, se a empresa vender apenas o produto *C*.

Do ponto de vista do lucro, apesar do ponto de equilíbrio mais elevado, o produto *C* é mais desejável.

Figura 2

Gráfico de lucro-vendas



Aparentemente contraditório? Sim. Convém lembrar, porém, que, dada a restrição de produção (1.400.000 horas disponíveis), a empresa tem condições de fabricar e vender 1.400.000 unidades do produto *A*, contra 4.000.000 de unidades do produto *C*. Como se pode ver na figura 2, ao nível de Cr$ 14.000.000,00 de vendas do produto *A*, o lucro é de Cr$ 2.000.000,00. Ao nível de vendas de Cr$ 20.000.000 do produto *C*, todavia, o lucro é de Cr$ 3.000.000,00. Dos três produtos da empresa, por conseguinte, *C* é o mais desejável.

Como já vimos, nas situações em que o administrador lida com poucos produtos e manipula poucas restrições, a margem de contribuição por hora de produção pode constituir um índice satisfatório na abordagem de problemas relativos a compostos de produtos. A hora de produção é utilizada como uma medida do fator escasso. Podemos, portanto, generalizar este índice denominando-o *contribuição marginal por fator escasso.*

O fator escasso pode variar de situação para situação. Enquanto existir apenas um, porém, a abordagem da análise de custo-volume-lucro é suficiente. Consideraremos, por exemplo, o problema de decidir sobre a maneira de utilizar espaço de venda adicional num supermercado ou loja de departamentos. A margem de contribuição por metro quadrado de área de vendas, para cada linha de produtos concorrente, pode tomar o lugar de um índice perfeitamente apropriado para auxiliar na decisão de como usar o espaço adicional. Neste caso, o fator escasso é a área de vendas.

O método descrito em páginas anteriores (elaborado basicamente a partir do conceito do ponto de equilíbrio) apresenta, naturalmente, uma dificuldade óbvia, que é a da existência de muitas restrições em vez de apenas uma. Além disso, o administrador necessita analisar uma grande variedade de produtos e não apenas três. Nestas condições, a análise tradicional de custo-volume-lucro torna-se insuficiente, dando lugar ao emprego de uma técnica mais poderosa, a programação linear.

Os conceitos enunciados na exposição da análise de custo-volume-lucro permanecem inalterados A diferença principal reside no fato de que a programação linear possibilita a manipulação de inúmeros produtos e inúmeras restrições (ou fatores escassos), o que não pode ser tratado pela abordagem do ponto de equilíbrio, não obstante serem essas as condições que se apresentam, na maioria das vezes, em que o agente decisório deve tomar uma resolução com respeito ao composto de produtos a ser fabricado e vendido.

Antes de passarmos à resolução do problema da formulação de um composto ótimo de produtos, façamos um resumo do que conseguimos apurar, até o momento, com a utilização da análise de custo-volume-lucro, para a resolução do problema de composição das vendas de nossa empresa hipotética. A avaliação individual dos seis compostos de produtos é apresentada na tabela 2.

Tabela 2

Comparação dos seis compostos de produtos

(1) Número de ordem do composto de produtos	(2) Descrição do composto	(3) Margem de contribuição unitária Cr$	(4) Horas necessárias à produção de uma unidade	(5)* Número total de compostos fabricados	(6)* Margem de contribuição total Cr$	(7)* Lucro previsto Cr$	(8)* Faturamento previsto Cr$
1	5A–3B–2C	35,00	7,20	194.444	6.805.555,00	1.805.555,00	16.333.330,00
2	5A–2B–3C	35,00	7,05	198.582	6.950.355,00	1.950.355,00	16.085.100,00
3	3A–5B–2C	29,00	6,20	225.806	6.548.387,00	1.548.387,00	18.064.510,00
4	3A–2B–5C	29,00	5,75	243.478	7.060.869,00	2.060.869,00	17.286.950,00
5	2A–5B–3C	26,00	5,55	252.252	6.558.558,00	1.558.558,00	18.918.910,00
6	2A–3B–5C	26,00	5,25	266.667	6.933.333,00	1.933.333,00	18.399.990,00

* Calculado com base no número de horas de produção disponíveis: 1.400.000.

Possibilita-nos esta tabela enfatizar algumas conclusões úteis, relacionadas com a intrincada questão do preenchimento simultâneo de diversos objetivos, ou seja, a determinação de um composto ótimo de produtos. Se o objetivo da firma for a maximização do lucro, o composto de produtos a ser selecionado deverá ser o de número 4, 3*A*-2*B*-5*C*, que proporciona à companhia um lucro estimado de Cr$ 2.060.869,00. Se, contudo, o objetivo principal da companhia for a maximização do faturamento, o composto de produtos a ser escolhido deverá ser o de número 5, 2*A*-5*B*-3*C*, capaz de render à empresa vendas estimadas de Cr$ 18.918.918,00. Se o objetivo básico da organização, entretanto, for a produção do menor número de compostos de produto, então a escolha teria de recair sobre o composto número 1, formado de 5 unidades do produto *A*, mais 3 unidades do produto *B* e mais 2 unidades do produto *C*.

Como vimos em páginas anteriores, o faturamento máximo que nossa empresa hipotética poderia alcançar seria de Cr$ 22.400.000,00, caso o agente decisório optasse pela produção exclusiva do produto *B*, o que redundaria na fabricação de 2.800.000 unidades e no lucro projetado de Cr$ 600.000,00. A tabela 3, apresentada a seguir, compara os diversos compostos de produtos, com base nos critérios do ponto de equilíbrio, lucro projetado e faturamento previsto.

Tabela 3

Classificação dos seis compostos de produtos segundo os critérios do ponto de equilíbrio, lucro projetado e faturamento previsto

Número de ordem do composto de produtos	Descrição do composto	Classificação pelo ponto de equilíbrio	Classificação pelo lucro projetado	Classificação pelo faturamento previsto	Percentagem do faturamento máximo alcançado
1	5A–3B–2C	2.º	4.º	5.º	81,67
2	5A–2B–3C	1.º	2.º	6.º	80,43
3	3A–5B–2C	5.º	6.º	3.º	90,32
4	3A–2B–5C	3.º	1.º	4.º	86,43
5	2A–5B–3C	6.º	5.º	1.º	94,59
6	2A–3B–5C	4.º	3.º	2.º	92,00

Permite-nos esta tabela extrair as seguintes conclusões, relativas aos compostos de produtos mais interessantes para nossa empresa hipotética:

1. Pelos critérios do ponto de equilíbrio mais baixo e do lucro projetado mais alto, os dois compostos preferidos seriam: a) $5A + 2B + 3C$ e b) $5A + 2B + 5C$.
2. Pelos critérios do lucro projetado mais elevado e do faturamento mais alto, os dois compostos de produtos prediletos seriam: a) $2A + 3B + 5C$ e b) $2A + 5B + 3C$.
3. Pelos critérios do ponto de equilíbrio mais baixo e do faturamento mais elevado, os dois compostos de produtos favorecidos seriam: a) $3A + 2B + 5C$ e b) $2A + 3B + 5C$.

7. LIMITAÇÕES DA ANÁLISE DE CUSTO-VOLUME-LUCRO COMO MÉTODO DE RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DO COMPOSTO ÓTIMO DE PRODUTOS

Como já tivemos oportunidade de observar, o ponto de equilíbrio é o ponto de interseção da curva de custo total com a curva de receita total, ou o volume de produção e venda de uma firma em que a receita gerada por essas vendas é equivalente ao custo de produzi-las. A análise de ponto de equilíbrio convencional representa a receita e o custo total por meio de linhas retas. Tal convenção pressupõe, naturalmente, que a produção e venda de uma firma possam ser aumentadas sem alteração do preço de venda e que a empresa opera com a mesma eficiência em todos os níveis. Logo, para aumentar o lucro, é necessário apenas fazer crescer o número de unidades vendidas.

Constitua, embora, a análise de custo-volume-lucro um instrumento útil no planejamento e controle da composição ótima das vendas de uma empresa, essa abordagem ressente-se de limitações que dificultam seu emprego como procedimento para resolução do problema do composto ótimo de produtos. Os dados envolvidos, em qualquer análise de custo-volume-lucro, baseiam-se em certas condições hipotéticas, que raramente são satisfeitas na pática. O analista mercadológico deve estar consciente dessas restrições e preparado para interpretar as soluções encontradas, diante do conjunto de limitações decorrentes do emprego irrestrito da análise de custo-volume-lucro. Salientemos algumas das pressuposições básicas em que se fundamenta esta técnica:

1. A composição real das vendas será idêntica à combinação prevista. A relação entre os custos e os lucros varia diretamente com a capacidade de se prever o volume de vendas para cada linha de produtos, com razoável grau de precisão.

2. Os preços de vendas dos produtos não variam em níveis diferentes de atividade. Se for necessário reduzir preços ou oferecer descontos para obter um volume de vendas maior, a relação custo-volume-lucro será afetada. Aceita-se normalmente a premissa de que os preços dos diversos produtos constantes durante o período de tempo coberto pela análise e que não variarão de um nível de atividade para outro. Esta pressuposição, como sabe qualquer analista de vendas experiente, só é possível de ser aceita em teoria, pois na prática a realidade é outra...

3. A capacidade produtiva da fábrica permanecerá relativamente constante. Como ninguém ignora, uma alteração nos recursos de fabricação de uma empresa, por menor que seja, afetará a relação entre custos, volume e lucro.

4. A eficiência do setor de produção será igual à que foi prevista. O emprego de materiais substitutos de preços mais baixos, a substituição de operações manuais por maquinaria e outros programas semelhantes de redução de custos poderão exercer considerável influência na relação entre custos e lucros.

5. Os preços das matérias-primas, os custos de mão-de-obra e os preços dos materiais empregados na produção não sofrerão alterações significativas a partir da data em que as projeções de custo-volume-lucro foram elaboradas.

6. O padrão de mudança dos custos variáveis será razoavelmente próximo do que foi estipulado. As análises de ponto de equilíbrio pressupõem que um custo variável examinado seja perfeitamente variável, independentemente do nível de atividade em que a empresa operar.

7. As conclusões apresentadas pela análise de custo-volume-lucro estão fundamentadas na mescla de produtos selecionada pelo analista de vendas. Tivemos oportunidade de referir, todavia, que o número de compostos de produtos pode atingir cifras inimagináveis, à medida em que aumenta a gama de produtos fabricados e/ou vendidos por uma firma. Apenas para reenfatizar este ponto, lembramos que o número de permutações possíveis de n produtos tomados n a n é dado pela seguinte fórmula:

$$P_{n-n} = \frac{n!}{(n-n)}$$

Para o caso de uma companhia que mercadizasse apenas 10 produtos diferentes, o número possível de permutações desses produtos tomados 10 a 10 seria o seguinte:

$$P_{10-10} = \frac{10!}{(10-10)!} = \frac{10!}{0!} =$$

$$= 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 3.628.800$$

Quantos desses 3.628.800 compostos de produtos deveriam ser considerados pelo analista, para efeito de estipular antecipadamente o elenco de combinações supostamente ótimas?

8. No exemplo por nós examinado, considerou-se apenas uma restrição para a determinação do composto ótimo de produtos: a existência de uma limitação de horas disponíveis de fabricação. Qualquer analista de vendas não ignora, entretanto, que existem inúmeras outras limitações de ordem produtiva, financeira, de mercado e de disponibilidade de recursos humanos.

9. A análise de custo-volume-lucro proporciona soluções, dentro de um elenco restritivo de limitações, ao problema do composto ótimo de produtos, apenas para um intervalo de tempo muito limitado. As soluções obtidas não são capazes de se ajustarem às variações

ocorridas nas oportunidades de mercado e recursos que se oferecem ao administrador. Qualquer composto de produtos, se for ótimo, só o será num determinado instante e deixará de sê-lo num intervalo de tempo não muito longo.

10. As relações examinadas entre receitas, custos e lucros são presumidas lineares, na análise de custo-volume-lucro. O feitio da relação funcional entre a resposta do mercado e o nível de esforço mercadológico é geralmente desconhecido. Como assinala Philip Kotler, o mercado é formado de compradores em diversos estágios de percepção, interesse, preferência e intenção. Por conseguinte, existe grande variação na propensão desses compradores a reagir aos esforços e estímulos mercadológicos.[6]

8. RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DO COMPOSTO ÓTIMO DE PRODUTOS PELA TÉCNICA DE PROGRAMAÇÃO LINEAR

A programação linear é uma técnica quantitativa exata, que indica para o agente decisório a distribuição ótima de recursos escassos, a fim de maximizar ou minimizar um certo objetivo estipulado. A característica principal desta metodologia é, como o próprio nome indica, o fato de que todas as relações expressas pelas equações apresentadas são de natureza *linear,* isto é, tais relações são apresentadas por uma linha reta. Esta restrição desencoraja a aplicabilidade universal da programação linear a todos os tipos de problemas encontrados na administração empresarial. Deve-se ressaltar, porém, o elevado número de situações que podem ser adequadamente representadas por relações lineares, possibilitando, assim, a utilização da programação linear.

O problema da programação linear em geral pode ser descrito da seguinte forma: "Dado um conjunto de m desigualdades ou equações contendo r variáveis, deseja-se encontrar valores não negativos destas variáveis que satisfaçam as restrições e maximizem alguma função linear das variáveis".

Matematicamente, o enunciado acima significa o seguinte: existem m desigualdades ou equações contendo r variáveis (m pode ser maior, igual a ou menor do que r) da forma:

$$a_{i\,1}x_1 + a_{i\,1}x_2 + \dots + a_{i\,r}x_r \ \{\geq, =, \leq\}\ b_i \quad i = i, \dots, m, \qquad (1)$$

onde, para cada restrição, um e apenas um dos sinais $\geq$, $=$, $\leq$ é verdadeiro, porém o sinal pode variar de uma restrição para outra. Procura-se determinar valores das variáveis x_j que satisfaçam (1).

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, r,$$

e que maximizem ou minimizem uma função linear

$$z = c_1x_1 + \dots + c_rx_r.$$

Os a_{ij}, b_i e c_j devem assumir, por hipótese, valores constantes conhecidos.

Qualquer conjunto de x_j que satisfaça as restrições (1) será denominado de uma *solução* do problema da programação linear. Qualquer solução que satisfaça as restrições de não-negatividade é considerada uma *solução viável.* Qualquer solução viável que torne ótima a função objetivo tem o nome de *solução viável ótima.* A tarefa da resolução de um problema de programação linear consiste em encontrar uma solução viável ótima. Normalmente, existe um número infinito de soluções viáveis para um problema de programação linear. Destas soluções todas, procura-se descobrir uma que torne ótima a função objetivo.[7]

Antes de passar à exposição da resolução do problema do composto ótimo de produtos, pela técnica de programação linear, relembremos os pontos principais de nossa firma hipotética:

1. A empresa fabrica e comercializa três produtos: *A*, *B* e *C*.

2. O mercado para estes três produtos da firma é ilimitado.

3. Os preços de vendas unitários são os seguintes:
3.1 O produto *A* é vendido ao preço de Cr$ 10,00 por unidade.
3.2 O produto *B* é vendido ao preço de Cr$ 8,00 por unidade.
3.3 O produto *C* é vendido ao preço de Cr$ 5,00 por unidade.

4. Os custos variáveis unitários dos três produtos são estes:
4.1 O produto *A* tem um custo variável unitário de Cr$ 5,00.
4.2 O produto *B* tem um custo variável unitário de Cr$ 6,00.
4.3 O produto *C* tem um custo variável unitário de Cr$ 3,00.

5. As margens de contribuição unitárias dos produtos são:
5.1 A margem de contribuição unitária de *A* é de Cr$ 5,00.
5.2 A margem de contribuição unitária de *B* é de Cr$ 2,00.
5.3 A margem de contribuição unitária de *C* é de Cr$ 2,00.

6. O total de custos fixos é de Cr$ 5.000.000,00. Este montante não depende dos níveis de produção e vendas dos produtos *A*, *B* e *C*.

7. A companhia dispõe de um total de 1.400.000 horas de produção ou 445 horas de produção por dia.

8. Cada unidade do produto *A* requer uma hora de fabricação.
Cada unidade do produto *B* exige 0,5 hora de produção.

Cada unidade do produto C demanda 0,35 hora de fabricação.

9. A firma utiliza três tipos de máquinas em seu processo produtivo: máquina tipo I, máquina tipo II e máquina tipo III. A máquina tipo I tem 15 horas disponíveis. A máquina tipo II tem 12 horas disponíveis e a máquina tipo III tem 8 horas disponíveis.

10. Cada unidade do produto A utiliza 0,5 hora da máquina I, 0,3 hora da máquina II e 0,2 hora da máquina III.

11. O produto B utiliza 0,1 hora da máquina I, 0,15 hora da máquina II e 0,25 hora da máquina III, para produzir uma unidade.

12. O produto C utiliza 0,05 hora da máquina I, 0,18 hora da máquina II e 0,12 hora da máquina III, para a fabricação de uma unidade. O tempo de conversão das máquinas I, II e III da produção de um produto para outro é tão pequeno que pode ser desprezado.

13. O grupo de máquinas I tem 205 horas disponíveis. O grupo de máquinas II tem 140 horas disponíveis e o grupo de máquinas III tem 100 horas disponíveis.

A função objetivo deste problema de distribuição de recursos escassos é a maximização da margem de contribuição total de nossa firma hipotética, visto que aceitamos a hipótese de que o montante de custo fixo não sofrerá alterações durante o intervalo de tempo considerado relevante para a nossa análise. Por conseguinte, o objetivo da nossa companhia será o de maximizar a margem de contribuição total, que pode ser expresso como segue:

Maximizar $MC = 5\,X_1 + 2\,X_2 + 2\,X_3$,

em que X_1 representa o número de unidades do produto A, X_2 é o número de unidades do produto B e X_3 é o total de unidades do produto C.

As restrições podem ser expressas como segue:

$$0{,}5\,X_1 + 0{,}1XX_2 + 0{,}05\,X_3 \leq 205$$
$$0{,}3\,X_1 + 0{,}15\,X_2 + 0{,}18\,X_3 \leq 140$$
$$0{,}2\,X_1 + 0{,}25\,X_2 + 0{,}12\,X_3 \leq 100$$
$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

Existem duas abordagens básicas usadas na técnica de programação linear: o método gráfico e o processo simplex. O método gráfico envolve, geralmente, a análise de um problema em termos de um gráfico bi ou tridimensional. O processo simplex faz uso de um *algoritmo* (ou método de busca) um pouco mais complicado. Embora o método gráfico seja mais fácil de entender do que o processo simplex, este último algoritmo pode resolver problemas muito mais complicados. Por esta razão, neste trabalho procuraremos solucionar o problema do composto ótimo de produtos através do algoritmo simplex.

O primeiro passo a ser dado no desenvolvimento do método simplex consiste em criar *variáveis artificiais* adequadas. A necessidade do uso destas variáveis prende-se ao fato de que estamos lidando com desigualdades. Como a combinação ótima da utilização das máquinas tipo I, tipo II e tipo III talvez não use todas as horas de produção disponíveis, temos necessidade de representar matematicamente esses recursos não utilizados. Em conseqüência da introdução desses recursos não empregados, sob a forma de variáveis artificiais, poderemos converter as desigualdades descritas anteriormente em igualdades.

Vamos representar pelo símbolo U o número de horas de produção não utilizadas pelas máquinas do tipo I. Se somarmos U ao número de horas de produção usadas pelas máquinas do tipo I, teremos uma expressão que engloba todas as 205 horas disponíveis. Como toda a capacidade de produção disponível das máquinas tipo I passa a ser utilizada, esta relação pode ser expressa pela equação:

$$0{,}5\,X_1 + 0{,}1\,X_2 + 0{,}05X_3 + U = 205. \qquad (2)$$

Esta equação indica que as horas de produção gastas na fabricação de X_1 unidades do produto A, de X_2 unidades de produto B e X_3 unidades do produto C, mais quaisquer horas não despendidas no processo produtivo, são iguais a 205.

Podemos aplicar também o mesmo tipo de raciocínio às horas de fabricação não empregadas nas máquinas dos tipos II e III. É possível que nem todas as combinações ótimas dos produtos A, B e C façam uso das horas de produção disponíveis nas máquinas tipos II e III. Representemos essas horas por V e W, respectivamente. Portanto, teremos as seguintes igualdades adicionais:

$$0{,}3\,X_1 + 0{,}15\,X_2 + 0{,}18\,X_3 + V = 140 \qquad (3)$$

$$0{,}2\,X_1 + 0{,}25\,X_2 + 0{,}12\,X_3 + W = 100 \qquad (4)$$

No desenvolvimento subseqüente do método simplex, torna-se necessário incluir, em cada equação, qualquer quantidade desconhecida que exista. Em termos das igualdades (2), (3) e (4) que acabamos de apresentar, devemos acrescentar a variável artificial U, que representa o montante de horas de fabricação não utilizadas pelas máquinas tipo I, às equações (3) e (4), que se relacionam, respectivamente, com as horas de produção gastas nas máquinas tipos II e III. Semelhantemente, as variáveis V e W, referentes às horas de fabricação não utilizadas pelas máquinas tipos II e III, devem ser acrescentadas às igualdades em que elas não figuram inicialmente. Desta forma, todas as três equações conterão as variáveis artificiais U, V e W.

Para que as relações de igualdade nas três equações não sejam afetadas pela introdução das variáveis artificiais, estas serão precedidas dos coeficientes zero, sempre que for necessário. Podemos, pois, reescrever as igualdades (2), (3) e (4) como segue:

$$0,5\,X_1 + 0,1\,X_2 + 0,05\,X_3 + 1U + 0V + 0W = 205 \quad (5)$$

$$0,3\,X_1 + 0,15\,X_2 + 0,18\,X_3 + 0U + 1V + 0W = 140 \quad (6)$$

$$0,2\,X_1 + 0,25\,X_2 + 0,12\,X_3 + 0U + 0V + 1W = 100 \quad (7)$$

Como as horas não utilizadas de fabricação não afetam o lucro final da companhia, deverão ser precedidas de coeficientes zero na função objetivo. Teremos, pois:

$$MC = 5\,X_1 + 2\,X_2 + 2\,X_3 + 0U + 0V + 0W \quad (8)$$

Finalmente, vamos resumir todas as expressões, acima indicadas na notação usual de um problema de programação linear, antes de passarmos ao estágio em que se procura descobrir uma solução inicial ao problema de otimização.

$$\text{Maximizar } MC = 5\,X_1 + 2\,X_2 + 2\,X_3 + 0U + 0V + 0W \quad (9)$$

sujeito às seguintes restrições:

$$0,5\,X_1 + 0,1\,X_2 + 0,5\,X_3 + 1U + 0V + 0W = 205 \quad (10)$$

$$0,3\,X_1 + 0,15\,X_2 + 0,18\,X_3 + 0U + 1V + 0W = 140 \quad (11)$$

$$0,2\,X_1 + 0,25\,X_2 + 0,12\,X_3 + 0U + 0V + 1\,W = 100 \quad (12)$$

$$X_1, X_2, X_3, U, V, W \geq 0 \quad (13)$$

Sob a forma matricial, este problema seria apresentado como segue:

$$\text{Maximizar } MC = 5\,X_1 + 2\,X_2 + 2\,X_3 + 0U + 0V + 0W$$

Sujeito a

$$\begin{bmatrix} 0,5 & 0,10 & 0,05 & 1 & 0 & 0 \\ 0,3 & 0,15 & 0,18 & 0 & 1 & 0 \\ 0,2 & 0,25 & 0,12 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ U \\ V \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 205 \\ 140 \\ 100 \end{bmatrix}$$

Para utilizar o método simplex, é necessário elaborar um quadro inicial. Para o caso de nossa firma hipotética, o quadro inicial aparece na figura 3 e foi preparado quase integralmente com base nos dados contidos na formulação do problema da determinação do composto ótimo de produtos. O quadro sumaria todos os dados de que necessitamos para desenvolver uma solução inicial do problema.[8]

Examinemos, a seguir, cada segmento do quadro inicial que aparece na figura 3.

Figura 3

Quadro inicial do problema da maximização da margem de contribuição dos produtos A, B e C

			5	2	2	0	0	0	Linha dos objetivos
Lucro (L_j) (Cr$)	Programa	Quantidade	X_1	X_2	X_3	U	V	W	Linha das variáveis
0	U	205	0.5	0.1	0.05	1	0	0	
0	V	140	0.3	0.15	0.18	0	1	0	
0	W	100	0.2	0.25	0.12	0	0	1	
Coeficientes da função objetivo	Variáveis do programa	Quantidades das variáveis do programa	Matriz inicial			Matriz identidade			

Nossas primeiras combinações das quantidades dos produtos *A*, *B* e *C* serão, por hipótese, iguais a zero para cada produto. Os dados que são mostrados no quadro inicial refletem esta pressuposição. Na coluna intitulada "Lucro (L_j)", relacionamos os coeficientes das variáveis na solução inicial. Como a primeira "solução" envolve quantidades iguais a zero para X_1, X_2 e X_3, as variáveis que examinamos são, respectivamente, U, V e W (variáveis artificiais) e seus coeficientes de lucro não nulos. A segunda coluna, correspondente ao "programa", relaciona as designações sob forma de letras das variáveis que estão sendo examinadas, neste caso correspondentes às variáveis artificiais U, V e W. A terceira coluna, denominada "quantidade", indica a quantidade de cada variável no programa: 205 horas de produção para as máquinas do tipo I, 140 horas de produção para as máquinas do tipo II e 100 horas de produção para as máquinas do tipo III. Por conseguinte, as três primeiras colunas da figura 3 nada mais são do que uma indicação das variáveis no programa expressas sob a forma de símbolos (U, V e W), sua margem de contribuição unitária (0, 0, 0) e as respectivas quantidades disponíveis (205, 140, 100).

Vejamos, a seguir, as cinco linhas que aparecem no lado direito do quadro inicial. Comecemos pela linha das variáveis. Esta é apenas uma relação de todas as variáveis que poderiam ser empregadas na busca das possíveis soluções para o problema. Estas variáveis incluem, naturalmente: quantidades do produto *A* (X_1), quantidades do produto *B* (X_2) e montantes do produto *C* (X_3), mais as variáveis artificiais correspondentes aos produtos *A* (U), *B*(V) e *C*(W). A linha superior (correspondente aos objetivos) mostra a margem de contribuição unitária das seis variáveis. Como já vimos, cada unidade do produto $A(X_1)$ proporciona uma margem de contribuição de Cr$ 5,00; cada unidade do produto $B(X_2)$ deixa uma margem de contribuição de Cr$ 2,00; cada unidade do produto $C(X_3)$ oferece uma margem de contribuição de Cr$ 2,00. As variáveis artificiais (U, V e W) contribuem, naturalmente, com zero para o lucro final da nossa firma hipotética.

Os coeficientes 0,5, 0,10 e 0,05, que figuram na terceira linha, representam as frações de hora que os produtos A, B e C requerem das máquinas tipo I para a produção de uma unidade. Os coeficientes 0,3, 0,15 e 0,18 têm significados idênticos e referem-se às máquinas tipo II. Finalmente, os coeficientes 0,2, 0,25 e 0,12 têm os mesmos significados e dizem respeito às máquinas do tipo III. Coletivamente, estes seis coeficientes relativos aos produtos A, B e C formam uma matriz que leva o nome de *matriz inicial*.

Resta-nos explicar o papel desempenhado pela matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

que tem o nome de *matriz identidade* e figura nas linhas 3, 4 e 5, ao lado da matriz inicial. Forma-se uma matriz identidade mediante a inserção de algarismos 1 na diagonal principal (do canto superior esquerdo para o canto inferior direito) de qualquer matriz quadrada (matrizes dos tipos 2×2, 3×3, 4×4 e assim por diante) e a introdução de zeros nas caselas fora da diagonal principal.

Uma propriedade importante de uma matriz identidade refere-se ao fato de que, se ela for empregada para multiplicar uma outra matriz quadrada, a matriz resultante será igual à matriz quadrada original, diferente da matriz identidade. Este conceito de matriz identidade desempenha um importante papel no algoritmo simplex.

As igualdades (10), (11) e (12) informam-nos de que dispomos de três equações e que podemos obter soluções para, no máximo, três incógnitas (as quais formarão uma solução básica). Como já tivemos ocasião de esclarecer, uma solução básica e viável consiste de três variáveis com valores positivos e três com valores iguais a zero (a viabilidade refere-se à condição de que nenhuma das variáveis pode assumir valores negativos). Por conseguinte:

$$\begin{gathered} U = 205 \\ V = 140 \\ W = 100 \\ X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 0 \end{gathered}$$

constituem uma solução básica e viável. Como X_1, X_2 e X_3 são nulos, a primeira solução pode ser representada por:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 205 \\ 140 \\ 100 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{aligned} 1U + 0V + 0W &= 205 \\ = \quad 0U + 1V + 0W &= 140 \\ 0U + 0V + 1W &= 100 \end{aligned}$$

ou

$$B_1 \times \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 205 \\ 140 \\ 100 \end{bmatrix},$$

onde B_1 representa a matriz dos coeficientes das três variáveis que aparecem na solução.

O elenco de soluções a considerar depende do número de maneiras pelas quais poderemos selecionar três colunas diferentes de nossa matriz original A, que constituirão soluções básicas e viáveis. Representamos estas colunas por meio de vetores coluna a, b, e, u, v, w.*. Representaremos, portanto, nossos vetores como segue:

$$a = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,3 \\ 0,2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0,10 \\ 0,15 \\ 0,25 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 0,05 \\ 0,18 \\ 0,12 \end{bmatrix},$$

$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

O conjunto de vetores referentes à solução inicial é dado pelos vetores u, v, w. Ao passar de uma solução para a próxima, estaremos, efetivamente, substituindo um vetor por outro a fim de encontrar novas soluções básicas e viáveis. O método simplex consiste, em parte, em determinar qual vetor deve ser introduzido na solução e qual vetor dever ser substituído (ou eliminado). Vejamos como se determina a solução inicial e como se procura encontrar uma solução melhor. 19

Examinemos, para começar, os resultados produzidos pelos aumentos das quantidades de X_1, X_2 e X_3. Observemos que a introdução de X_1 aumenta o lucro da companhia em Cr$ 5,00, a de X_2 em Cr$ 2,00 e a de X_3 em Cr$ 2,00. Suponhamos que tenha sido escolhida a variável X_1 para fazer parte da solução e, por conseguinte, precisamos determinar quais das variáveis U, V e W deverá ser retirada da base (isto é, assumir o valor zero). O leitor deve estar lembrado de que nossa solução inicial resultou em valores iguais a zero para X_1, X_2 e X_3 e os seguintes valores para as variáveis artificiais U, V e W:

$$\begin{gathered} U = 205 \\ V = 140 \\ W = 100 \end{gathered}$$

Logo, ao introduzirmos a variável X_1 na solução seguinte, precisamos retirar uma das três variáveis U, V e W, para lhe dar lugar na solução.

O vetor a tem os seguintes componentes:

$$\begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,3 \\ 0,2 \end{bmatrix}$$

Estes "coeficientes" mostram o efeito sobre as outras variáveis do aumento de uma unidade na produção de X_1. Em termos das nossas restrições originais, e ignorando as variáveis X_2 e X_3 que são iguais a zero, notamos que, na primeira equação (10):

$$0,5\,X_1 + 1U + 0\,V + 0\,W = 205,$$
$$0,5\,X_1 = 205 - 1\,U.$$

Logo, como U só pode assumir um valor igual ou maior do que zero, o valor máximo de X_1 que pode ser produzido é igual a $\frac{205}{0,5} = 410$.

Considerando a segunda equação (11), vemos que

$$0,3\,X_1 = 140 - 1\,V,$$

o que nos mostra que X_1 pode ser aumentado até $\frac{140}{0,3} = 467$, antes de V assumir um valor negativo. Finalmente, nossa terceira equação (12) revela que X_1 pode ser aumentado até $\frac{100}{0,2} = 500$, antes de W tornar-se negativo. Como $\frac{205}{0,5}$ representa o menor cociente, o vetor a entrará na solução em lugar do vetor u. Nosso problema, pois, resume-se em encontrar valores para as variáveis X_1, V e W que satisfaçam as equações:

$$0,5\,X_1 + 0\,V + 0\,W = 205 \qquad (14)$$
$$0,3\,X_1 + 1\,V + 0\,W = 140 \qquad (15)$$
$$0,2\,X_1 + 0\,V + 1\,W = 100 \qquad (16)$$
$$X_2 = X_3 = U = 0$$

Estas equações devem ser resolvidas, simultaneamente, para a determinação dos valores X_1, V e W. Da equação (14) obtemos o seguinte valor para X_1:

$$X_1 = \frac{205}{0,5} = 410.$$

Substituindo o valor achado para X_1 na equação (15), encontramos:

$$(0,3)\,(410) + 1\,V = 140 \text{ ou}$$
$$V = 17$$

Da mesma forma, substituindo $X_1 = 410$ na equação (16), achamos:

$$(0,2)\,(410) + 1\,W = 100 \text{ ou}$$
$$W = 18$$

A solução final pode ser representada sob a forma matricial como segue:

$$\begin{array}{ccc} a & v & w \end{array} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X_1 \\ V \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 410 \\ 17 \\ 18 \end{bmatrix}$$

Podemos observar que o procedimento para chegar a esta solução consistiu, realmente, da conversão do enunciado geral de:

$$\begin{array}{ccc} a & v & w \end{array} \quad \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0 \\ 0,3 & 1 & 0 \\ 0,2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X_1 \\ V \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 205 \\ 140 \\ 100 \end{bmatrix}$$

em

$$\begin{array}{ccc} a & v & w \end{array} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X_1 \\ V \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 410 \\ 17 \\ 18 \end{bmatrix}$$

O vetor a tem a mesma forma que o vetor original u, o qual substituiu na solução. Poderíamos ter chegado a este resultado sem ter de reescrever cada equação, mediante a execução das seguintes operações sobre as "linhas":

1. Dividir a primeira linha por 0,5, o coeficiente de X_1 na equação (14). Este produto nos dá uma nova equação:

$$X_1 + 0\,V + 0\,W = 410 \qquad (17)$$

2. Multiplicar a nova equação (17) por $-0,3$ e somar os componentes resultantes à equação (15). Esta operação nos proporciona a equação:

$$0\,X_1 + 1\,V + 0\,W = 17 \qquad (18)$$

3. Multiplicar a equação (17) por $-0,2$ e somar o resultado à equação (16), o que nos fornecerá uma nova equação, a saber:

$$0\,X_1 + 0\,V + 1\,W = 18 \qquad (19)$$

Suponhamos, agora, que realizemos estas mesmas operações elementares nos vetores b, c e u. Estes procedimentos transformarão o vetor b de

$$\begin{bmatrix} 0,10 \\ 0,15 \\ 0,25 \end{bmatrix}$$

em

$$\begin{bmatrix} 0,20 \\ 0,09 \\ 0,21 \end{bmatrix}$$

O vetor c transforma-se de

$$\begin{bmatrix} 0{,}05 \\ 0{,}18 \\ 0{,}12 \end{bmatrix}$$

em

$$\begin{bmatrix} 0{,}10 \\ 0{,}15 \\ 0{,}10 \end{bmatrix}$$

Aplicando os mesmos procedimentos ao vetor u, este se transformará de

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

em

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -0{,}6 \\ -0{,}4 \end{bmatrix}$$

Se fizermos o vetor x representar os valores das soluções, e ao mesmo tempo incluirmos estes vetores revisados em sua ordem original, mostrando também as margens de contribuição de cada produto, teremos construído o que no algoritmo simplex se convencionou de *quadros simplex* (tabela 4).

O primeiro quadro contém os vetores transformados e os valores do vetor x obtidos na primeira tentativa: 410, 17 e 18. Logo abaixo deste quadro, figuram os valores correspondentes às melhorias resultantes do aumento de uma unidade da variável considerada.

O segundo e terceiro quadros mostram os passos que levam à solução ótima do nosso problema. Após concluir a feitura do quadro 1, calculamos o efeito líquido de aumentar X_2 ou X_3 (isto é, tornando positivo cada um deles). Como as linhas de cada quadro representam equações, podemos calcular o efeito produzido pela introdução de X_2, levando em consideração a variação da margem de contribuição ocasionada pela redução de X_1 em 0,20 (casela 1.2, onde o primeiro algarismo se refere à linha e o segundo à coluna); uma redução em V de 0,09 (casela 2.2); e uma redução em W de 0,21 (casela 3.2). A redução na margem de contribuição seria:

(0,20) (Cr\$ 5,00) + (0,09) (Cr\$ 0,00) + (0,21) (Cr\$ 0,00) = Cr\$ 1,00.

Cotejando este resultado com o aumento da margem de contribuição, que resultaria da produção de uma unidade de X_2 em substituição de uma unidade de X_1, teríamos Cr\$ 2,00. Obtemos, assim, um aumento líquido de Cr\$ 1,00, o qual será colocado na última linha do quadro 1. Deve-se observar que as operações necessárias consistem em somar os produtos obtidos pela multiplicação das margens de contribuição de cada variável da solução pelos coeficientes encontrados nas respectivas caselas.

Utilizando estes mesmos procedimentos nas colunas correspondentes aos vetores a, c e u, constatamos que a introdução de X_3 é, provavelmente, nossa melhor escolha para o estágio 2 (a variação líquida resultante da introdução de X_3 é Cr\$ 1,50). Determinamos, por sua vez, que o vetor c deveria substituir o vetor v, visto que o máximo de X_3 que poderia ser produzido equivale ao mínimo dos cocientes 17/0,15 e 18/0,10 (ou seja, dividem-se os valores relacionados na coluna correspondente ao vetor x pelos coeficientes existentes em c). O quadro 2 resulta da execução das operações necessárias à conversão do vetor c no quadro 1 à forma

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

já que ele deve substituir o vetor v.[10]

Comparemos, na seqüência, os resultados decorrentes dos aumentos dos valores das diversas variáveis. Notemos (quadro 2) que ocorrerá uma melhoria na solução se nela inserirmos b. Como o mínimo dos dois cocientes positivos, 195/0,14 e 8/0,17 é 8/0,17, o vetor w será removido da base.

O quadro final, de número 3, é calculado com base na aplicação das operações necessárias sobre as linhas para converter o vetor b de

$$\begin{bmatrix} 0{,}14 \\ 0{,}60 \\ 0{,}07 \end{bmatrix}$$

em

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ao apurarmos a solução final, verificamos que a inserção dos vetores u, v ou w levará a solução encontrada a degenerar numa variação negativa, decorrente da entrada dessas variáveis artificiais. No mesmo passo, verificamos que a solução não poderá ser melhorada se aumentarmos de uma unidade qualquer uma das três variáveis X_1, X_2 e X_3. Logo, a solução final encontrada é a seguinte:

X_1 (unidades do produto A) = 392
X_2 (unidades do produto B) = 87
X_3 (unidades do produto C) = 44

O conjunto total de procedimentos ilustrados no quadro forma o que se convencionou chamar de método simplex de programação linear. O método inclui regras para a seleção de vetores que entram e saem da base e adaptações no quadro para cada solução.

A tabela 4, onde aparecem os quadros simplex números 1, 2 e 3, contém sete colunas, assim discriminadas:

Coluna	*Vetor*	*Quantidade*	*Produto*	*Variável Artificial*	*Solução*
1	a	X_1	A	-	x_1
2	b	X_2	B	-	x_2
3	c	X_3	C	-	x_3
4	u	U	-	U	-
5	v	V	-	V	-
6	w	W	-	W	-
7	x	X	-	-	x

Tabela 4

Quadros simplex do problema da determinação do composto ótimo de produtos

Vetores Margem de contribuição	a 5	b 2	c 2	u 0	v 0	w 0	x 0	
Variáveis na solução (margens de contribuição)								
X_1 (5) V (0) W (0)	1 0 0	0,20 0,09 0,21	0,10 0,15 0,10	2 –0,6 –0,4	0 1 0	0 0 1	410 17 18	Quadro n.º 1 (solução 2)
Melhoria na solução, se a variável for aumentada (por unidade)	0	1	1,50	–10	0	0		
Inserir c; retirar v								
Novo quadro								
X_1 (5) X_3 (2) W (0)	1 0 0	0,14 0,60 0,15	0 0 0	2,4 –4 0	–0,67 6,67 –0,67	0 0 1	399 113 7	Quadro n.º 2 (solução 3)
Melhoria na solução, se a variável for aumentada (por unidade)	0	0,10	0	–4	–10	0		
Novo quadro								
X_1 (5) X_2 (2) X_3 (2)	1 0 0	0 0 1	0 1 0	2,4 –4 0	–0,04 9,05 –4,47	–0,93 –4 6,67	392 87 44	Quadro n.º 3 (solução 4)
Melhoria na solução, se a variável for aumentada (por unidade)	0	0	0	–4	–8,96	–0,69		

9. INTERPRETAÇÃO DA SOLUÇÃO DO COMPOSTO ÓTIMO DE PRODUTOS ENCONTRADA PELA TÉCNICA DE PROGRAMAÇÃO LINEAR

Como se pode deduzir do quadro simplex número 3, as soluções ótimas, encontradas pela técnica de programação linear, para o problema da combinação dos três produtos *A*, *B* e *C* de nossa firma hipotética, são estas:

X_1 (unidades do produto *A*) = 392
X_2 (unidades do produto *B*) = 87
X_3 (unidades do produto *C*) = 44

Necessitamos de verificar se estas soluções satisfazem às três restrições estipuladas no início da formulação do nosso problema:

1. Restrição da disponibilidade de horas das máquinas tipo I
$0,5\,(X_1) + 0,1\,(X_2) + 0,05\,(X_3) = 205$
$0,5\,(392) + 0,1\,(87) + 0,05\,(44) = 206,9$[11]

2. Restrição da disponibilidade de horas das máquinas tipo II
$0,3\,(X_1) + 0,15\,(X_2) + 0,18\,(X_3) = 140$
$0,3\,(392) + 0,15\,(87) + 0,18\,(44) = 138,6$

3. Restrição da disponibilidade de horas das máquinas tipo III
$0,2\,(X_1) + 0,25\,(X_2) + 0,12\,(X_3) = 100$
$0,2\,(392) + 0,25\,(87) + 0,12\,(44) = 105,4$[12]

4. Restrição quanto à não-negatividade das soluções.
$X_1 = 392 \quad 0$
$X_2 = 87 \quad 0$
$X_3 = 44 \quad 0$

Considerando que nossa firma hipotética tem uma disponibilidade presumida de produção diária de 445 horas, necessitamos de multiplicar os valores encontrados para X_1 (392), X_2 (87) e X_3 (44) por
11 (correspondente a 11 horas de trabalho por dia)
X 5,5 (correspondente a 5,5 dias por semana)
X 52 (correspondente a 52 semanas por ano).

Teremos, assim:
X_1 (número de unidades do produto *A* fabricadas e vendidas por ano) = 392 × 11 × 5,5 × 52 = = 1.233.232.

X_2 (número de unidades do produto *B* fabricadas e vendidas por ano) = 87 × 11 × 5,5 × 52 = 273.702

X_3 (número de unidades do produto *C* fabricadas e vendidas por ano) = 44 × 11 × 5,5 × 52 = 138.424

Este total de unidades produzidas utilizaria o seguinte número de horas de fabricação de nossa companhia hipotética:
1.233.232 (1 hora) + 273.702 (0,5 hora) + 138.424 (0,35 hora) = 1.233.232 + 136.851 + 48.448 = = 1.418.531 horas.

Como observamos anteriormente, o excesso de horas de fabricação previstas, em relação à disponibilidade máxima de 1.400.000 horas/ano, deve-se ao processo de arredondamento dos cálculos procedidos na resolução do nosso problema pela programação linear.

Determinemos, a seguir, a lucratividade que a companhia obteria caso sua administração decidisse executar o composto de produtos encontrado pela técnica de programação linear.

A margem de contribuição total desta produção e venda seria a seguinte:

1.233.232 (Cr\$ 5,00) + 273.702 (Cr\$ 2,00) + 138.424 (Cr\$ 2,00) =
Cr\$ 6.166.160,00 + Cr\$ 547.404,00 +
+ Cr\$ 276.848,00 = Cr\$ 6.990.412,00

O lucro líquido seria este:
Cr\$ 6.990.412,00 – Cr\$ 5.000.000,00 = = Cr\$ 1.990.412,00

O faturamento anual que esta combinação de produtos proporcionaria à nossa firma hipotética seria o seguinte:

1.233.232 (Cr$ 10,00) + 273.702 (Cr$ 8,00) + 138.424 (Cr$ 5,00) =
Cr$ 12.332.320,00 + Cr$ 2.189.616,00 + Cr$ 692.120,00 = Cr$ 15.214.056,00

A combinação de produtos que acabamos de encontrar seria do tipo:

75% formada de produtos *A*
16% formada de produtos *B*
9% formada de produtos *C*

O ponto de equilíbrio deste composto de produtos seria dado por:

$$V_E = \frac{\text{Cr\$ } 5.000.000{,}00}{\dfrac{\text{Cr\$ } 42{,}50}{92{,}30}} = \text{Cr\$ } 10.858.823{,}00$$

Cada componente de produtos $7{,}5A + 1{,}6B + 0{,}9C$ demandaria 8,615 horas de fabricação e, com a restrição de 1.400.000 horas de produção disponíveis por ano, nossa empresa poderia produzir 162.507 "pacotes". Como comparar a solução achada pela técnica de programação linear com a que desenvolvemos mediante a abordagem de custo-volume-lucro? Examinemos as tabelas 2 e 3.

O maior lucro projetado seria proporcionado pelo composto de produtos $3A + 2B + 5C$, o qual seria de Cr$ 2.060.869,00, caso a empresa produzisse e vendesse 243.478 "pacotes" contendo este composto. O lucro previsto para o composto ótimo de produtos, determinado pela técnica de programação linear, seria de Cr$ 1.990.412,00, com a produção e venda de 162.507 pacotes. Este lucro seria equivalente a 97% do lucro proporcionado pelo composto $3A + 2B + 5C$. Para proporcionar o lucro acima de 2.060.869,00, este composto exigiria um faturamento anual de Cr$ 17.286.956,00. A combinação $7{,}5A + 1{,}6B + 0{,}9C$ demandaria um faturamento anual de Cr$ 15.210.910,00. Com um faturamento equivalente a 88% do exigido pelo composto $3A + 2B + 5C$, portanto, a combinação de produtos estimada pela técnica de programação linear seria capaz de gerar um lucro equivalente a 97% do primeiro. Naturalmente, do ponto de vista da administração financeira, a solução encontrada pela programação linear é sensivelmente superior à determinada pela abordagem de custo-volume-lucro.

O maior faturamento previsto seria dado pelo composto de produtos $2A + 5B + 3C$, o qual seria de Cr$ 18.918.918,00 para uma produção e venda de 252.252 "pacotes". O faturamento máximo, alcançado pela solução elaborada pela técnica da programação linear, seria de Cr$ 15.210.910,00 para uma produção e venda de 162.507 "pacotes". O lucro projetado para o faturamento máximo de Cr$ 18.918.918,00, a ser alcançado pela combinação $2A + 5B + 3C$, seria de Cr$ 1.558.558,00. Comparativamente ao composto de produtos determinado pela programação linear, a situação seria esta: com um faturamento equivalente a 80% do gerado pelo composto $2A + 5B + 3C$, o lucro previsto seria 28% mais elevado. Salienta-se, novamente, a vantagem financeira oferecida pela combinação calculada pela programação linear em relação ao melhor composto (em termos de faturamento anual) desenvolvido pela análise de custo-volume-lucro.

O ponto de equilíbrio mais baixo seria alcançado pelo composto de produtos $5A + 2B + 3C$, no montante de Cr$ 11.571.428,00. Esta combinação de produtos, entretanto, poderia proporcionar um lucro máximo de Cr$ 1.950.355,00, para um faturamento máximo de Cr$ 16.085.106,00, resultante da venda e produção de 198:582 "pacotes". A combinação de produtos encontrada pela programação linear seria capaz, todavia, de gerar um lucro de 2,4% mais alto com um faturamento 5,4% menor e com um ponto de equilíbrio 6,2% mais baixo. Obviamente, a solução do composto ótimo de produtos encontrada pela técnica de programação linear oferece implicações financeiras que não podem ser desprezadas.

A tabela 5, que apresentamos logo a seguir, estabelece uma comparação entre os quatro melhores compostos encontrados pela análise de custo-volume-lucro (segundo os critérios de maior lucro previsto, maior faturamento projetado, menor ponto de equilíbrio e menor volume de "pacotes" produzidos) com a solução desenvolvida pela técnica de programação linear.

Tabela 5

Comparação entre os compostos ótimos de produtos elaborados pela análise de custo-volume-lucro, com a solução encontrada pela técnica de programação linear

Número de ordem do composto	Descrição do composto	Lucro previsto Cr$	Faturamento projetado Cr$	Ponto de equilíbrio Cr$	Número de "pacotes" produzido
4	3A–2B–5C	2.060.869,00	17.286.956,00	12.241.379,00	243.478
5	2A–5B–3C	1.558.558,00	18.918.918,00	14.423.076,00	252.252
2	5A–2B–3C	1.950.355,00	16.085.106,00	11.571.428,00	198.582
1	5A–3B–2C	1.805.555,00	16.333.332,00	12.000.000,00	194.444
P. linear	7,5A–1,6B–0,9C	1.990.412,00	15.214.056,00	10.858.823,00	162.507

Sob os pontos de vista conjuntos das administrações das operações industriais, de estoques, financeira, mercadológica e de vendas, o composto de produtos $7{,}5A + 1{,}6B + 0{,}9C$, determinado pela técnica de programação linear, é sensivelmente superior às quatro combinações dos produtos *A*, *B* e *C*, estudadas pela análise de custo-volume-lucro, com base em permutações de 50%, 30% e 20% dos três produtos.

10. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA GERAL DE DETERMINAÇÃO DO COMPOSTO ÓTIMO DE PRODUTOS PELA TÉCNICA DA PROGRAMAÇÃO LINEAR

A capacidade real da programação linear, como técnica substitutiva da análise de custo-volume-lucro, torna-se aparente em situações onde são diversos os produtos analisados e várias as restrições consideradas. A forma geral do problema de programação linear, envolvendo muitos produtos e inúmeras restrições, pode ser apresentada como segue:

Maximizar a margem de contribuição

$$MC = C_1X_1 + C_2X_2 + \dots + C_nX_n$$

sujeita a:

$$A_{11}X_1 + A_{12}X_2 + \dots A_{1n}X_n \leq B_1$$

$$A_{21}X_1 + A_{22}X_2 + \dots A_{2n}X_n \leq B_2$$

$$A_{m1}X_1 + A_{m2}X_2 + \dots A_{mn}X_n \leq B_m$$

De acordo com o enunciado do problema acima apresentado, a empresa tem n produtos, em que n é um número grande. Os produtos são indicados pelos símbolos X_1, X_2 até X_n. A margem de contribuição de cada produto é dada pelos coeficientes C, C_1, C_2 até C_n. A margem de contribuição total resulta da soma da contribuição unitária multiplicada pelo número de unidades vendidas de cada produto.

As desigualdades relativas às restrições representam diversas limitações possíveis de produção e vendas. As restrições de vendas podem relacionar-se com limitações de mercado, limitações da linha de produtos, restrições orçamentárias de propaganda e/ou promoção de vendas, limitações de horas disponíveis do trabalho de venda pessoal, restrições de estoques, de espaço em lojas de clientes, participação de mercado, imposições legais e fiscais, etc. Existem m restrições dessa natureza e cada restrição envolve n produtos. Cada um dos coeficientes A_{ij}, que aparecem nas inequações, representa o número de unidades do fator restritivo (B_{ij}) que são necessárias para produzir uma unidade do produto (X_{ij}). Por exemplo: se a verba para fim promocional for de Cr\$ 5.000.000,00, e de 40.000 horas a limitação de esforço de venda pessoal; se cada unidade do produto X_1 requerer Cr\$ 500,00 de promoção e 50 horas de venda pessoal e cada unidade do produto X_2 demandar Cr\$ 1.000,00 de promoção e 100 horas de venda pessoal, são as seguintes as restrições:

(1) Cr\$ 500,00 X_1 + Cr\$ 1.000,00 $X_2 \leq$ Cr\$ 5.000.000,00

(2) $50\,X_1 + 100\,X_2 \leq 40.000$

O problema consiste em encontrar uma solução, isto é, os valores dos X_{ij} que possibilitem a maior margem de contribuição possível e, ao mesmo tempo, satisfaçam todas as m restrições. A solução matemática deste problema pode ser achada pela técnica denominada algoritmo simplex. Esta técnica já foi programada em computadores eletrônicos, de modo que é viável uma solução fornecida pelo computador.

11. RESUMO E CONCLUSÕES

A determinação do composto ótimo de produtos, para uma firma que produza e/ou venda uma linha diversificada de mercadorias e/ou serviços, constitui uma decisão crítica para o administrador mercadológico, com extensas repercussões sobre o lucro final e com influência considerável sobre a situação econômico-financeira da empresa. Embora o conceito de otimização de uma linha de produtos seja de operacionalização extremamente difícil, duas abordagens podem ser utilizadas na tentativa de encontrar uma solução do problema.

A primeira abordagem envolve a análise de custo-volume-lucro. Esta técnica pode ser empregada com sucesso quando o número de produtos é bastante pequeno e as restrições de fatores escassos são poucas. Os elementos básicos utilizados na análise de custo-volume-lucro são a margem de contribuição unitária de cada produto e um enunciado de fatores escassos, ou seja, uma ou mais afirmações relativas a restrições de produção e vendas.

A abordagem de custo-volume-lucro fundamenta-se na escolha *a priori* de uma determinada combinação de produtos considerada viável pelo agente decisório. Aceita-se como premissa básica que a composição final das vendas da companhia será exatamente igual à prevista. Presume-se, também, que os preços de vendas dos diversos produtos não sofrerão modificações com as variações dos níveis de atividades desempenhadas. Aceita-se, por outro lado, a hipótese de que a capacidade produtiva da fábrica permanecerá inalterada durante o período de tempo coberto pela análise e que a eficiência do setor de produção será igual à prevista. Finalmente, pressupõe-se que o padrão de flutuação dos custos variáveis estará muito próximo do que foi prognosticado.

A análise de custo-volume-lucro torna-se inadequada em situações onde são inúmeros os produtos e muitas as restrições, o que acontece amiúde na área da administração mercadológica. Em tais circunstâncias, a técnica de programação linear pode ser empregada com real proveito pelo executivo de *marketing*. As soluções ótimas para os problemas de formulação de compostos de produtos podem ser tentadas por uma técnica de programação matemática denominada programação linear.

Todos os elementos necessários à resolução do problema da determinação do composto ótimo de produtos, pela técnica de programação linear, são bastante conhecidos dos administradores mercadológicos, com exceção, talvez, dos procedimentos matemáticos que conduzem à resolução do problema. Em situações problemáticas simples, o método algébrico ou gráfico pode ser tentado com êxito. Os problemas difíceis (nos quais é vasto o número de produtos e grande a variedade de restrições) podem ser solucionados mediante o algoritmo simplex (descrito no presente trabalho numa situação bastante simplificada, envolvendo três produtos apenas e uma restrição somente) ou com o emprego de um computador.

As preocupações de linearidade da renda marginal e do custo marginal, normalmente aceitas na abordagem da programação linear, não devem representar dificuldades intransponíveis para o administrador mercadológico. A bem da verdade, muitas vezes ele próprio aceita de bom grado hipóteses semelhantes de relações lineares, quando procura calcular a lucratividade de produtos, clientes, territórios de vendas, vias de distribuição e outras unidades mercadológicas. Deve-se lembrar, por outro lado que muitos problemas não-lineares podem ser resolvidos pelas técnicas de programação linear. Esteja esta, embora, fundamentada em relações lineares entre as variáveis estudadas, inúmeros problemas não-lineares da administração mercadológica (envolvendo, por exemplo, a programação de verbas de propaganda em veículos publicitários diferentes, a determinação de roteiros de vendedores, a localização de depósitos e armazéns) podem ser solucionados pela programação linear, desde que certas modificações sejam previamente realizadas.

Com a generalização do processamento eletrônico de dados em nosso País, muitos são os pacotes de computação existentes que possibilitam a resolução do problema da determinação do composto ótimo de produtos, pela técnica de programação linear. Não se admite, por conseguinte, que o administrador mercadológico não utilize adequadamente esta poderosa técnica de programação matemática, que começou a ser amplamente usada na administração nos primeiros anos da década de 1950.

[1] Veja Kelley, Eugene J. *Marketing: strategy and functions.* Prentice-Hall, 1965. p. 74-75. (Foundations of Marketing Series).

[2] Para uma exposição mais pormenorizada da abordagem econômica deste problema, veja Brens, H. *Product equilibrium under monopolistic competition.* Harvard University Press, 1951; Howard, J. A. *Marketing management: analysis and planning.* Richard D. Irwin, 1967. cap. 10 e Cohen, K. J. & Cyert, R. M. *Theory of the firm.* Prentice-Hall, 1965.

[3] Veja Kotler, Philip. *Marketing management: analysis, planning and control.* 1. ed. Prentice-Hall, 1967. p. 298-9.

[4] Kotler, Philip. op. cit. p. 299.

[5] Este número corresponde ao total de permutações de três objetos diferentes (os algarismos 5, 3 e 2) tomados três a três. O total destas permutações é dado por ${}_{n}p_{n} = \frac{n!}{(n -)!} = n!$ Em nosso caso, o total de permutações de três objetos tomados três a três é 3! (fatorial de 3) $= 3 \times 2 \times 1 = 6$.

[6] Para uma exposição pormenorizada da complexidade do processo mercadológico, veja Kotler, Philip. *Marketing decision making: a model building approach.* Holt, Rinehart and Winston, 1971. p. 2-5.

[7] Para uma exposição pormenorizada da técnica de programação linear, recomenda-se a leitura de *Linear programming,* de G. Hadley (Addison-Wesley Publishing Company, 1962).

[8] Para uma análise mais ampla da resolução de problemas de otimização na administração mercadológica pelo algoritmo simplex, veja Jolson, Marvin A. & Hise, Richard T. *Quantitative techniques for marketing decisions.* The MacMillan Company, 1973. cap. 4.

[9] Convencionamos representar matrizes por letras maiúsculas do alfabeto, em grifo e vetores por letras minúsculas do alfabeto, também em grifo.

[10] Dividir a segunda linha do quadro número 1 por 0,15. Multiplicar o resultado por — 0,10 e somar o produto à primeira linha do quadro número 1. Teremos: −0,10 (0, 0,6, 1 − 4, 6, 7, 0 // 113,33) = (0, −0,06, −0,1 + 0,4, −0,67,0 // 410), teremos (1, 0,14, 0, 2,4, −0,67, 0 // 399). Procedendo de maneira semelhante, encontraremos os valores correspondentes à terceira linha do quadro número 2.

[11] Os excessos de horas de produção do composto ótimo de produtos, relativamente às disponibilidades, devem-se a arredondamentos dos cálculos.

[12] Veja nota