PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA: MELHORES INFORMAÇÕES PARA MELHORES DECISÕES

ALEXANDER HENDERSON
ROBERT SCHLAIFER

"Não é a perfeição que se procura; mas melhores decisões que as anteriormente possíveis e necessárias." — CHARLES D. FAGLE, WILLIAM H. HIGGINS e ROBERT H. ROY

Os matemáticos descobriram, nos últimos anos, novos processos que tornaram possível a solução mais rápida, fácil e exata de grande variedade de importantes problemas empresários. Êsses processos têm sido intitulados "programação linear". Na verdade, a programação linear descreve apenas um dos grupos de problemas dêsse tipo; "programação matemática" é expressão mais adequada para designá-los em conjunto.

A programação matemática não é simplesmente um meio aperfeiçoado de se executarem determinados trabalhos; é, em todos os sentidos, um *nôvo* meio. É nôvo no mesmo sentido em que o foram as partidas-dobradas na Idade Média e a mecanização do escritório no começo dêste século, ou o é a automatização atualmente. Por ser a programação matemática tão recente, nela a ponte de comunicação entre o cientista e o empresário não foi ainda construída. Por essa razão, apesar de ter feito manchetes,

---

ALEXANDER HENDERSON — Professor de Economia do *"Carnegie Institute of Technology"*. Falecido.
ROBERT SCHLAIFER — Professor de Administração da *"Harvard Business School"*.
NOTA DA REDAÇÃO: Artigo reproduzido sob autorização de *"Harvard Business Review"*, onde foi publicado em maio-junho 1954, vol. 32, n.º 3. Traduzido do inglês por FREDIANO QUILICI.

a programação matemática é compreendida em sua utilidade para as emprêsas por muito poucos administradores.

Neste artigo tentamos definir para o empresário o que é a programação matemática, descrever o que significa na prática e mostrar exatamente como utilizá-la para resolver os problemas empresários. Dividimos o artigo em quatro partes:

- A Parte I é dirigida aos executivos de cúpula. Nela examinamos os aspectos importantes da programação matemática que devem ser conhecidos pelos dirigentes que estabelecem as diretrizes da emprêsa.

- A Parte II é dirigida aos executivos responsáveis pela organização e administração de operações nas quais pode ser usada a programação matemática e aos especialistas que devem resolver os problemas dessas operações. Esta parte baseia-se em exemplos de problemas típicos.

- A Parte III mostra à administração de que forma pode a programação matemática ser empregada como instrumento valioso de planejamento. Em muitas situações, a programação é o único meio prático de obtenção de determinadas informações — sôbre custos e lucros — essenciais para o desenvolvimento da política de mercadização, o equilíbrio do equipamento produtivo, a elaboração de planos de investimentos, ou a tomada de decisões inteligentes sôbre muitos tipos de problemas de curto e longo prazos.

- Além disso, para ser usado com a Parte II, há um Apêndice, com instruções para resolver pelo método mais útil e rápido uma classe comum de problemas empresários.

PARTE I — PRINCÍPIOS BÁSICOS

Os gerentes de produção têm geralmente poucas dúvidas na escolha da máquina-ferramenta a utilizar para determinada operação quando tôdas as máquinas da fábrica estão em disponibilidade. Os chefes de despachos têm pouco trabalho para escolher a rota de entrega quando há possibilidade de suprir cada freguês pela fábrica mais próxima da emprêsa. Numa refinaria a decisão quanto ao que produzir é fácil quando a capacidade ociosa fôr tal que seja possível produzir mais do que se possa vender.

Porém, a não ser nos momentos críticos das depressões econômicas, os problemas que se apresentam à administração não são geralmente tão simples. Qualquer decisão a respeito de um determinado problema afeta não sòmente êsse problema, mas também muitos outros. Se uma operação qualquer pode ser realizada na máquina mais adequada, outra deve ser executada em máquina menos adequada. Ao Freguês A pode ser despachada mercadoria da fábrica mais próxima, mas não ao Freguês B, que também está mais perto daquela fábrica do que de outra qualquer da emprêsa. Se a refinaria produzir tôda a gasolina de 80 octanas que puder vender, não terá capacidade para satisfazer à procura de gasolina de 90 octanas.

Programas das Emprêsas

A natureza dos problemas apresentados por êsses programas é essencialmente a mesma: *um conjunto de recursos limitados deve ser repartido entre certo número de necessidades concorrentes, e tôdas as decisões são interdependentes, porque tôdas devem ser tomadas dentro de limites fixos.* Êsses limites decorrem, em parte, da capacidade da maquinaria, da fábrica das matérias-primas, do espaço de armazenamento, do capital circulante, ou de outros fatôres que normalmente impedem a administração de atuar com liberdade. Decorrem, por outro lado, das próprias diretrizes estabelecidas pela administração.

Quando há poucas alternativas possíveis — por exemplo, quando uma companhia com duas fábricas deseja fornecer a três ou quatro fregueses pelo menor custo possível de frete — qualquer programador competente pode ràpidamente encontrar a resposta certa. Entretanto, quando o número de variáveis se torna maior — quando a companhia tem uma dúzia de fábricas e 200 ou 300 fregueses espalhados por um grande território — o encarregado de descobrir o melhor programa de despachos pode levar dias na tentativa, mas terminar com um sentimento de frustração: embora se sinta perto da resposta certa, não está seguro de a ter encontrado. Pior ainda, êle não sabe em que medida está afastado dela, nem se valerá a pena dedicar mais tempo à tentativa de melhorar a programação. O gerente de produção que deva produzir 20 ou 30 produtos diferentes em 40 ou 50 máquinas-ferramentas, pode dar-se por satisfeito assim que tenha descoberto *qualquer* programação que resulte na produção desejada, sem se preocupar se outra programação poderia dar a mesma produção a um custo menor.

Nessas condições, pode haver custos desnecessàriamente elevados, pois a melhor programação não foi procurada. Os custos da própria decisão são, muitas vêzes, também elevados. Em geral, as decisões dos homens inteligentes e experientes das emprêsas se aproximam muito da "melhor solução possível" de problemas dessa espécie. Mas problemas tão complexos raramente podem ser solucionados por funcionários subalternos. Essas soluções empíricas, portanto, não são satisfatórias, eis que ocupam parte importante do tempo de supervisores e mesmo de dirigentes.

O tempo dêsses administradores não pode ser desperdiçado. Se êle fôr empregado ùnicamente na obtenção de informações, nada sobrará para a etapa seguinte, que é a tomada de decisões inteligentes. Isso produz, geralmente, uma espécie de inércia em relação a *qualquer* mudança no *statu quo;* é tão difícil prever tôdas as implicações nos custos ou nos lucros de uma modificação ou de uma série de modificações, que a administração simplesmente desiste de qualquer modificação nos programas existentes. Se, ao contrário, a administração mais fàcilmente pudesse dispor de melhores informações, ela estaria menos tentada a pôr de lado importantes problemas sem investigação e poderia tomar decisões mais perfeitas como resultado de suas investigações.

Processo rotineiro — Grande número de problemas complexos e de solução demorada podem hoje, de fato, ser resolvidos pela programação matemática. Os processos puramente rotineiros que envolvem podem ser com segurança confiados a funcionários de escritório ou a um computador. Êsses processos já têm sido aplicados com sucesso na solução de problemas empresários. Alguns dêsses problemas serão descritos neste artigo.

A palavra "matemática" pode ser enganosa. Na verdade, os processos resolvem os problemas de maneira muito semelhante àquela utilizada pelo homem experiente no trabalho. Quando se encontra em face de um problema com muitos aspectos interligados, êle principia geralmente pela procura de um programa que satisfaça os requisitos mínimos, sem levar em consideração o custo ou o lucro; depois experimenta, uma por uma, várias modificações que possam reduzir o custo, ou aumentar o lucro. Sua habilidade e experiência são necessárias por duas razões: a) para perceber as modificações desejáveis; e b) para acompanhar as repercussões de cada modificação sôbre tôdas as partes do programa.

O que a programação "matemática" faz é reduzir o processo a simples rotina. Há uma regra para se encontrar um programa inicial; outra para serem achadas as modificações sucessivas que aumentarão os lucros ou diminuirão os custos; e outra, ainda, para serem acompanhadas tôdas as repercussões de cada modificação. É *absolutamente certo* que, se forem seguidas, essas regras conduzirão ao melhor programa possível, e ficará perfeitamente claro que o melhor programa é realmente o melhor programa possível, quando fôr encontrado. Por seguir regras determinadas é que o processo pode ser ensinado a funcionários de escritório ou entregue a computadores.

Informações sôbre Custos

A determinação rápida e pouco dispendiosa dos melhores programas possíveis sob um determinado conjunto de condições não é a única vantagem que a administração pode obter da técnica de programação matemática. A situação complexa que torna difícil encontrar o melhor programa possível para o conjunto das operações, torna também difícil a obtenção de informações úteis sôbre custos referentes a pormenores das operações. Quando cada operação pode ser executada na máquina-ferramenta mais adequada, é possível obter o custo de qualquer operação pelos métodos comuns da contabilidade de custos. Mas, se a capacidade está sendo utilizada integralmente, o custo real do emprêgo de máquina para determinada operação depende dos custos excedentes decorrentes do fato de que *outra* peça tem de ser executada em máquina menos adequada. Exemplifiquemos melhor:

- Se se produz gasolina de 80 octanas em lugar de gasolina de 90 octanas que pode igualmente ser vendida, os lucros perdidos pela menor produção da gasolina de 90 octanas devem ser levados em consideração quando se examinam os lucros produzidos pela gasolina de 80 octanas.

- Quando uma companhia está fornecendo para parte de seus fregueses do Norte trazendo os suprimentos do Sul, haverá custo adicional se a um dêsses fregueses fôr feita pronta entrega de uma fábrica mais próxima, ainda que o frete para despacho da fábrica próxima seja menor do que o do Sul.

Sempre que a programação resolva o problema básico de determinação do esquema mais lucrativo, ela produzirá também informações *úteis* sôbre os custos das operações. Em muitos casos, essas informações poderão ser mais valiosas do que o próprio esquema básico. Elas poderão auxiliar a decisão de onde expandir a capacidade da fábrica, forçar as vendas, ou despender menor esfôrço, assim como a de que máquinas comprar dentro de um orçamento limitado de capital. A longo prazo, decisões inteligentes sôbre problemas dessa espécie produzirão efeitos muito mais importantes do que a escolha do melhor programa de entregas para certo período de tempo ou a melhor distribuição de máquinas para determinado mês de produção.

Limitações

A programação matemática não é panacéia patenteada que o empresário possa comprar por preço fixo e pôr em execução sem tardar. As principais limitações dessa técnica encontram-se, atualmente, em três áreas:

1. *Custo ou receita proporcionais ao volume* — Têm sido elaborados processos sòmente para a solução de problemas nos quais o custo havido ou a receita auferida em qualquer atividade possível sejam estritamente proporcionais ao volume daquela atividade; êsses são os processos que se incluem sob o título um tanto enganoso de programação *linear*. Essa limitação, entretanto, não é tão séria quanto possa parecer. Problemas que envolvem custos ou receitas não proporcionais podem freqüentemente ser resolvidos pela programação linear com o emprêgo de artifícios especiais ou por aproximações adequadas, e a pesquisa está progredindo no sentido de desenvolver processos que resolverão diretamente alguns dêsses problemas.

2. *Capacidade aritmética* — Ainda que o processo para a solução de um problema seja perfeitamente conhecido, a própria solução pode implicar tal quantidade de cálculos aritméticos, que mesmo um computador eletrônico não tenha capacidade para realizá-los. Entretanto, o problema pode algumas vêzes ser elaborado de maneira mais simples, de modo que a solução seja praticável. Por exemplo, análise cuidadosa pode indicar que são relativamente poucas as variáveis realmente essenciais, ou que é possível dividir o problema em partes de tamanho manejável.

3. *Problemas de previsão* — A terceira limitação é em geral a mais séria, especialmente na distribuição de trabalho entre máquinas-ferramentas. Bem pouco até agora tem sido realizado no sentido de resolver problemas de previsão de cargas de máquinas em que certas operações devam ser executadas antes ou depois de outras. A programação matemática pode indicar que operações —

dentro dos limites da capacidade disponível da maquinaria — deverão ser executadas em que máquinas. Porém, a disposição dessas operações em seqüência adequada deve ser geralmente solucionada como problema independente. A pesquisa está, também aqui, procurando processos para transformar em simples rotina êsse problema e algum progresso tem sido alcançado nesse sentido.

Aplicação

Na Parte II dêste artigo descrevemos uma série de casos que deverão dar ao leitor idéia do tipo de problemas para cuja solução a programação matemática pode ser de utilidade. Damos casos reais e exemplos hipotéticos. Os exemplos são — propositadamente — tão simples que poderiam ser resolvidos *sem* o emprêgo dêsses processos; o leitor poderá, assim, verificar melhor a natureza essencial da análise que a programação realiza em problemas mais complexos.

Os administradores de cúpula podem deixar para os especialistas a leitura atenta dessa parte. Seus pontos principais, porém, abaixo transcritos, poderão ser de interêsse dêsses administradores. Em resumo, a discussão dos casos indica que a programação matemática pode ser empregada para decidir:

1. *Onde entregar* — O problema é encontrar o programa de entregas que dê o menor custo de frete. Foi demonstrado pela Companhia H. J. HEINZ que a programação linear pode economizar milhares de dólares com a solução de um simples problema de previsão. Em razão de sua exatidão, possibilitou também à companhia fazer sua programação em base mensal em vez de trimestral, o que lhe permite aproveitar novas informações com maior rapidez.

2. *Onde entregar e onde produzir* — Estudo completo para determinar o programa mais econômico de produção ou compras e custos de frete pode ser elaborado tão ràpi-

damente e por tão baixo custo que qualquer alternativa possível será levada em consideração sem constituir pesado encargo para os dirigentes da emprêsa.

3. *Onde entregar, onde produzir e onde vender* — Aqui o problema é mais complexo. Fatôres tais como a política da administração no tocante a estoques mínimos de distribuidores e o esquema de preços variáveis devem e podem ser levados em conta.

4. *Qual a combinação mais vantajosa de preço e volume* — A programação matemática pode presentemente oferecer respostas a êsse problema sòmente sob determinadas condições, mas tem havido progresso nesse sentido.

5. *Que produtos fabricar* — Os problemas que podem ser resolvidos vão desde a utilização mais econômica de matérias-primas escassas até o "composto" mais lucrativo na fabricação de gasolina. Sendo em razão da simples quantidade de cálculos aritméticos que se tornam necessários os computadores, a pequena e a média emprêsas podem alugar êsse serviço; não há necessidade de a emprêsa, para utilizar a técnica, ser tão grande que possa dispor de seu próprio computador.

6. *Que produtos fabricar e que processos utilizar* — Êsse problema se apresenta quando a capacidade das máquinas é limitada. Nesses casos, a programação matemática pode produzir resultados surpreendentes. Por exemplo, pode ser necessário algum tempo ocioso em certas máquinas para a maior produção possível. Sem programação matemática, existe o perigo de se vir a fazer uso de tôdas as máquinas durante todo o tempo para satisfazer às pressões da administração, dessa maneira desservindo o objetivo real da emprêsa.

7. *Como conseguir o mais baixo custo de produção* — Aqui o problema é determinar a produção mais econômica quando a companhia está em condições de produzir tudo o que pode vender. Nestes tempos de preocupação cada vez maior com os custos, a programação matemática pode

representar instrumento valioso de administração para a redução dos custos.

O empresário que reconhece — ou suspeita que tem — um problema que possa ser resolvido pela programação matemática, geralmente terá de consultar especialistas para aprender a utilizar essa técnica. Mas a responsabilidade maior pela solução recairá sôbre o próprio empresário. Assim como ocorre na adoção de um orçamento variável de custos indiretos, cada aplicação da programação matemática requer estudo cuidadoso das circunstâncias especiais e dos problemas da companhia; e, uma vez adotada, a técnica produzirá resultados apenas proporcionais à adequação com que seja utilizada.

PARTE II — EXEMPLOS DE OPERAÇÕES

Os exemplos a seguir apresentados ilustram alguns dos usos da programação matemática. Embora em número limitado, foram organizados de maneira a dar ao leitor que os acompanhe na seqüência em que se apresentam entendimento das situações nas quais a programação matemática pode ou não ser útil e da forma de montar qualquer problema a fim de obter solução exata. Os quadros que acompanham o texto apresentam a solução matemática dos problemas descritos nos casos. O Apêndice dá instruções específicas para a utilização de processos na solução de alguns dos problemas que se apresentem em geral nas emprêsas.

Onde Entregar

Como primeiro exemplo do uso da programação matemática, examinemos o caso real de uma emprêsa em que a técnica é empregada atualmente de forma rotineira.

A Companhia H. J. HEINZ produz *ketchup* em meia dúzia de fábricas espalhadas pelos Estados Unidos da América, de Nova Jérsei à Califórnia, e distribui êsse *ketchup* a cêrca de 70 depósitos localizados em todo o país, Em 1953, a emprêsa desfrutava a agradável posição de vender tudo o que podia produzir; o produto era distribuído aos depósitos em quantidade exatamente igual ao total da capacidade de produção das fábricas. A administração pretendia realizar essa distribuição ao menor custo possível de frete; a rapidez de entrega não era importante. Entretanto, a capacidade de produção das fábricas localizadas no Oeste do país excedia as necessidades daquela região, ao passo que ocorria o oposto na região Leste; por essa razão, considerável tonelagem do produto tinha de ser remetida das fábricas do Oeste para as do Leste. Em outras palavras, o custo do frete não poderia ser minimizado simplesmente pelo suprimento de cada depósito pela fábrica mais próxima.

O Problema mais simples — Êsse problema é claramente de *programação,* porque sua essência é a minimização dos custos ligados a um conjunto determinado de capacidades de fábricas e necessidades de depósitos. Êle pode ser resolvido pela programação linear, porque o frete entre dois pontos quaisquer será proporcional à quantidade despachada. (Essas quantidades são suficientemente grandes, de maneira que pràticamente todos os despachos serão transportados à taxa de vagão fechado, *seja qual fôr* o programa de despachos escolhidos.)

Êsse, de fato, é o tipo mais simples de problema que pode ser resolvido por êsse método. Certas complexidades que dificultam consideràvelmente a solução por tentativas — em especial a existência de taxas competitivas de transporte fluvial, o que torna possível enviar o *ketchup* da Califórnia por essa via diretamente à costa Leste — não acrescentam dificuldade insuperável à solução do problema pela programação linear. Dadas as capacidades das fábricas e as necessidades dos depósitos, além de uma tabela das taxas de frete de cada fábrica para cada depósito, com lápis e papel, simplesmente, êsse problema foi resolvido pela primeira vez em cêrca de doze horas. A emprêsa passou depois a adotar regularmente o método e alguns funcionários foram treinados para se familiarizarem com a rotina de solução dêsse problema. O tempo necessário para a elaboração de programas de despachos foi, então, consideràvelmente reduzido.

Os dados reais do problema não foram divulgados pela emprêsa, mas sua grandeza aproximada é fornecida nos exemplos hipotéticos dos QUADROS 1 e 2, que mostram os dados e a solução de um problema de suprimento de 20 depósitos por meio de 12 fábricas diferentes.

O QUADRO 1 mostra os dados básicos: o corpo do quadro indica as taxas de frete; nas margens estão as capacidades diárias das fábricas e as necessidades diárias dos depósitos. Por exemplo, a Fábrica III, com uma capacidade diária de 3.000 cwt, pode suprir o Depósito G, com uma necessidade diária de 940 cwt, a um frete de 7 *cents* por cwt.[1]

Qualquer leitor que tentasse resolver o problema verificaria ràpidamente que, sem um procedimento sistemático, muito trabalho seria necessário para se encontrar um programa de despachos, mesmo aproximado, que satisfizesse, ao menor custo possível, essas necessidades e capacidades. Mas, com o uso da programação linear, o problema fica ainda mais fácil do que o da HEINZ.

O QUADRO 2 mostra o programa de distribuição de menor custo. Por exemplo, o Depósito K deve receber diàriamente 700 cwt da Fábrica I e 3.000 cwt da Fábrica III. Por outro lado, a Fábrica III nada remete ao Depósito A, embora o QUADRO 1 indique que a Fábrica III poderia despachar mercadoria para êsse depósito a custo menor do que para qualquer outro. (Os "valôres de linha" e os "valôres de coluna" constituem informações de custos cujos significados serão explicados adiante.)

Vantagens obtidas — Uma das vantagens mais importantes obtida pela emprêsa H. J. HEINZ com a introdução da programação linear foi liberar os supervisores do departamento de distribuição do encargo de preparar os progra-

1) Nota do Tradutor: 1 cwt americano = 45,36 kg.

QUADRO 1: *Taxas, Necessidades e Capacidades*

Fábrica		I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	*Necessidades Diárias (cwt)*
		Taxas de Frete (em cents por cwt)												
Depósito	A	16	16	6	13	24	13	6	31	37	34	37	40	1.820
,,	B	20	18	8	10	22	11	8	29	33	25	35	38	1.530
,,	C	30	23	8	9	14	7	9	22	29	20	38	35	2.360
,,	D	10	15	10	8	10	15	13	19	19	15	28	34	100
,,	E	31	23	16	10	10	16	20	14	17	17	25	28	280
,,	F	24	14	19	13	13	14	18	9	14	13	29	25	730
,,	G	27	23	7	11	23	8	16	6	10	11	16	28	940
,,	H	34	25	15	4	27	15	11	9	16	17	13	16	1.130
,,	J	38	29	17	11	16	27	17	19	8	18	19	11	4.150
,,	K	42	43	21	22	16	10	21	18	24	16	17	15	3.700
,,	L	44	49	25	23	18	6	13	19	15	12	10	13	2.560
,,	M	49	40	29	21	10	15	14	21	12	29	14	20	1.710
,,	N	56	58	36	37	6	25	8	19	9	21	15	26	580
,,	P	59	57	44	33	5	21	6	10	8	33	15	18	30
,,	Q	68	54	40	38	8	24	7	19	10	23	23	23	2.840
,,	R	66	71	47	43	16	33	12	26	19	20	25	31	1.510
,,	S	72	58	50	51	20	42	22	16	15	13	20	21	970
,,	T	74	54	57	55	26	53	26	19	14	7	15	6	5.110
,,	U	71	75	57	60	30	44	30	30	41	8	23	37	3.540
,,	Y	73	72	63	56	37	49	40	31	31	10	8	25	4.410
Capacidade diária (cwt)		10.000	9.000	3.000	2.700	500	1.200	700	300	500	1.200	2.000	8.900	40.000

mas de despachos. Antes disso, a preparação trimestral do programa tomava-lhes parte importante do tempo; com a introdução, êles passaram a dedicar ao problema apenas a atenção necessária para conhecer a situação, pois os pormenores de elaboração do programa foram confiados a funcionários. Aliviados da tarefa de trabalhar no que afinal não passava de aritmética "glorificada", êles dispõem agora de tempo para dedicar-se a assuntos que realmente exigem sua experiência e julgamento.

Outra vantagem importante, na opinião dos próprios administradores, é a paz de espírito que obtiveram pela convicção de que o programa *é* o de menor custo possível.

A economia nas despesas de frete da emprêsa foi suficientemente grande para que valesse a pena empregar a técnica. O primeiro programa de despachos elaborado pela programação linear resultou num custo estimado de frete semestral vários milhares de dólares menor que o do programa preparado segundo os antigos métodos da emprêsa; e essa comparação está longe de dar idéia completa da economia em fretes que ainda poderá vir a ser realizada.

Os programas de despachos baseiam-se em estimativas que estão contìnuamente sujeitas a revisão. Os dados quanto à capacidade representam, em parte, os estoques disponíveis nas fábricas, mas baseiam-se também em estimativas sôbre as futuras safras de tomates; e os dados quanto às necessidades dependem, quase inteiramente, das estimativas de vendas futuras. O fato de os programas serem agora rápida e corretamente elaborados possibilitou que a companhia os reprogramasse mensalmente em vez de por trimestre, dessa maneira utilizando-se melhor e mais prontamente de novas informações sôbre colheitas e vendas.

Além disso, o risco de devoluções de despachos foi muito reduzido com o nôvo sistema. Havia sido sempre prática da emprêsa manter, no começo da estação, as "reservas" nas regiões de produção excedente, a fim de evitar o perigo de despachos excessivos dessas regiões que tivessem de

QUADRO 2: *Programa de Distribuição de Menor Custo*

(Despachos Diários das Fábricas para os Depósitos em cwt)

Fábrica	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	*Total*	*Valor de Linha*
Depósito A	1.820												1.820	16
” B	1.530												1.530	20
” C		2.360											2.360	28
” D	100												100	10
” E		280											280	28
” F		730											730	19
” G	940												940	27
” H				1.130									1.130	28
” J		4.150											4.150	34
” K	700		3.000										3.700	42
” L	1.360					1.200							2.560	44
” M		140		1.570									1.710	45
” N	580												580	56
” P								30					30	51
” Q		1.340			500				500			500	2.840	59
” R	810						700						1.510	66
” S								90				830	970	57
” T												5.110	5.110	42
” U	2.160							180		1.200			3.540	71
” Y											2.000	2.410	4.410	61
Total	10.000	9.000	3.000	2.700	500	1.200	700	300	500	1.200	2.000	8.900	40.000	
Valor de Coluna	0	—5	—21	—24	—51	—38	—54	—41	—49	—63	—53	—36		

ser devolvidos quando fôssem revistas as estimativas de produção e vendas. De fato, essas reservas eram em grande parte estoques acidentais: quando se tornava realmente difícil distribuir a última parte da produção de uma fábrica, êsse remanescente era a reserva. A companhia pode, agora, examinar sua história passada e decidir de antemão que reservas devem ser mantidas em cada fábrica, organizando seu programa para atender exatamente a essa estimativa.

Uma vez que o programa é revisto cada mês, essas reservas podem ser modificadas à luz de informações atualizadas até serem reduzidas a zero, antes que nôvo armazenamento principie na fábrica em questão.

Problemas semelhantes — Existem muitos outros problemas importantes dessa mesma natureza nas emprêsas. Um dêles, por exemplo, seria o de uma fábrica de papel que fornecesse a cêrca de 200 fregueses, em todo o território norte-americano, de seis fábricas espalhadas numa extensão como a do Canadá.[2] Apresentam-se problemas semelhantes quando o custo do transporte é medido em função do tempo e não do dinheiro. Os primeiros esforços para resolver sistemàticamente problemas dessa natureza foram feitos durante a Segunda Grande Guerra, a fim de se minimizar o tempo gasto pelos navios descarregados. Determinadas cargas deviam ser transportadas de certas regiões para destinos específicos; como não havia, geralmente, carga de retôrno, o problema era decidir para que pôrto o navio descarregado devia ser enviado a fim de apanhar sua próxima carga. Problema parecido é o do estabelecimento do roteiro de vagões vazios.[3] Uma companhia de transportes que opere em escala nacional poderá enfrentar o mesmo problema com o retôrno de caminhões.

---

2) R. Dorfman, "Mathematical or 'Linear' Programming", *American Economic Review,* dezembro de 1953, pág. 797.

3) Veja-se *Railway Age,* 20 de abril de 1953, págs. 73 e 74.

Onde Produzir

Quando os despachos de *ketchup* foram programados para a H. J. HEINZ, as capacidades das fábricas e as necessidades dos depósitos foram fixadas antes da elaboração do programa de despachos, e o único custo que poderia ser reduzido pela programação era o do frete. Uma vez que a administração havia decidido antecipadamente quanto produzir em cada fábrica, *todos* os custos de produção era "fixos" *no que se referia ao problema da programação.*

A mesma companhia enfrenta um problema diferente em relação a outro produto, que é igualmente produzido em diversas fábricas e despachado para diversos depósitos. Nesse caso, a capacidade das fábricas excede as necessidades dos depósitos. O custo de produção varia de uma fábrica para outra, e o problema é, então, satisfazer as necessidades ao menor custo *total.* É tão importante reduzir o custo de *produção* (produzindo no lugar certo), como reduzir o custo de *frete* (despachando do lugar certo). Em outras palavras, a administração deve, agora, decidir duas questões em vez de uma: a) quanto deverá produzir cada fábrica? b) que depósitos deverão ser supridos por que fábricas?

É fascinante a procura de solução para êsses dois problemas, um a um, para simplificar o trabalho; mas, em geral, *não* será possível obter o menor custo total decidindo-se primeiro onde produzir e depois para onde despachar. É certamente melhor produzir numa fábrica de custo elevado, se êsse custo adicional puder ser mais do que recuperado pela economia de frete.

Método de solução — Êsse duplo problema pode ser resolvido pela programação linear se supusermos — como os empresários geralmente fazem — que o custo de produção em qualquer das fábricas é a soma de um custo "fixo", independente do volume, e de um custo "variável", proporcional ao volume, mas fixo por unidade, e se êsses custos forem conhecidos. O custo variável é tratado diretamente pela programação linear, ao passo que a parte fixa é tratada por um método que será explicado adiante.

Na verdade, o problema pode ser muito mais complicado e, ainda assim, passível de solução pela programação linear. Por exemplo, podemos introduzir a possibilidade do emprêgo de horas extras, ou da compra de matérias-primas por um preço até certa quantidade e por outro acima dessa quantidade. (Embora deixe de haver proporção entre a produção e o custo variável, poderemos restaurá-la por um método que descreveremos no Apêndice.)

O QUADRO 3 mostra as informações sôbre custos que são necessárias para resolver-se um exemplo hipotético dessa espécie. Supõe-se que existam sòmente quatro fábricas e quatro depósitos, mas qualquer quantidade poderia ser incluída no problema.

QUADRO 3: *Informações sôbre Custos para o Problema Duplo*

A — *Necessidades dos Depósitos* (t por dia)

Depósito	A	B	C	D	Total
Necessidades	90	140	75	100	405

B — *Capacidades das Fábricas* (t por dia)

Fábrica	I	II	III	IV	Total
Capacidade normal	70	130	180	110	490
Capacidade adicional com horas extras	25	40	60	30	155

C — *Custos Variáveis* (por t)

Fábrica	I	II	III	IV
Custo normal de produção	$30	$36	$24	$30
Horas extras	15	18	12	15
Taxas de frete para:				
Depósito A	$14	$9	$21	$18
" B	20	14	27	24
" C	18	12	29	20
" D	19	15	27	23

Supõe-se inicialmente — o que será modificado depois — que nenhuma fábrica ficará parada inteiramente e que, portanto, os "custos fixos" são realmente fixos e podem ser deixados de lado. Como o QUADRO 1, o QUADRO 3 indica as taxas de frete de cada fábrica para cada depósito, a capacidade diária de cada fábrica e as necessidades diárias de cada depósito; indica igualmente o custo "variável" — fixo por unidade — da produção de cada fábrica e o custo adicional por unidade de produção em horas extras. A capacidade total é maior do que as necessidades totais, mesmo que as fábricas trabalhem sòmente durante as horas normais.

Com base nesses dados, a solução de menor custo é dada pela Parte A do QUADRO 4. Não surpreende que essa solução não demande o emprêgo de horas extras. Desde que os custos fixos sejam tomados como realmente fixos, a conclusão é que se torna melhor usar tôda a capacidade normal das Fábricas I, II e III e sòmente 25 das 110 toneladas de capacidade normal da Fábrica IV. As restantes 85 toneladas da capacidade da Fábrica IV não serão utilizadas. O custo variável total dessa programação — custo de frete mais custo variável de produção — será de US$ 19.720 por dia.

Determinação final — Em face dêsse resultado, a administração certamente perguntará se é conveniente manter as quatro fábricas em funcionamento quando uma delas deve ficar com 80% de capacidade ociosa. Mesmo sem recorrer a horas extras, a Fábrica I, que é a menor de tôdas, poderá ser fechada, sendo o total de sua produção redistribuído entre as demais fábricas. Nesse caso, a distribuição de menor custo entre as Fábricas II, III e IV passará a ser a dada na Parte B do QUADRO 4. Nessa programação, o custo variável total será de US$ 19.950 por dia, ou sejam, US$ 230 por dia a mais do que o do programa mostrado na Parte A do QUADRO 4, em que havia o uso das quatro fábricas. Se fôr possível economizar mais do que US$ 230 por dia de custos fixos pelo fechamento da Fábrica I, então será vantajoso fazê-lo; do contrário, não.

QUADRO 4: *Programa de Distribuição de Menor Custo (Despachos Diários das Fábricas para os Depósitos em t)*

A — *Com as Quatro Fábricas em Funcionamento*

Fábrica	I	II	III	IV	Total
Depósito A			90		90
" B		80	60		140
" C		50		25	75
" D	70		30		100
Capacidade ociosa				85	85
Total	70	130	180	110	490

B — *Com a Fábrica I Fechada*

Fábrica	II	III	IV	Total
Depósito A		90		90
" B	130	10		140
" C			75	75
" D		80	20	100
Capacidade ociosa			15	15
Total	130	180	110	420

C — *Com a Fábrica IV Fechada*

Fábrica	I	II	III	Total
Depósito A			90	90
" B		55	85	140
" C		75		75
" D	70		30	100
Total	70	130	205	405

Poderá ser ainda melhor, entretanto, fechar outra fábrica — e não a Fábrica I — mesmo havendo necessidade de certa quantidade de horas extras. No caso, é de notar que uma pequena produção em horas extras (25 toneladas por dia) tornaria possível o fechamento da Fábrica IV.

Em relação a essa possibilidade, poderíamos raciocinar da seguinte maneira: com o programa de despachos do QUADRO 4 — Parte A, o único uso da capacidade da Fábrica IV é fornecer 25 toneladas diárias para o Depósito C. Procurando no Quadro 3 um substituto para êsse fornecimento, obteríamos as seguintes informações quanto aos custos por tonelada:

Fábrica	*Custo normal de produção*	*Horas extras*	*Frete para o Depósito C*	*Total*
I	\$30	\$15	\$18	\$63
II	36	18	12	66
III	24	12	29	65

Aparentemente, a maneira mais barata de empregarmos horas extras — se efetivamente tivermos de recorrer a elas — será produzindo na Fábrica I as necessárias 25 toneladas diárias, despachando-as para o Depósito C, a um custo variável de US\$ 63 por tonelada. Pelo programa do QUADRO 4-A, com tôdas as fábricas em funcionamento, o Depósito C será suprido pela Fábrica IV a um custo variável de produção de US\$ 30 que somados a US\$ 20 pelo frete, darão um total de US\$ 50 por tonelada. A modificação parece, assim, aumentar o custo em US\$ 325 por dia (25 toneladas vêzes US\$ 13 por tonelada, que é a diferença entre US\$ 63 e 50 por tonelada).

Entretanto, o fechamento da Fábrica IV não aumenta necessàriamente nesse montante o custo do programa. Se deixarmos de lado a Fábrica IV e fizermos a programação no sentido de encontrar a melhor distribuição de produção entre as demais fábricas, descobriremos que o programa da Parte C do QUADRO 4 satisfaz a tôdas as necessidades a um custo variável de US\$ 19.995 por dia, ou de sòmente US\$ 275 por dia a mais do que com tôdas as fábricas em funcionamento. As horas extras são providenciadas pela Fábrica III, que nada fornece ao Depósito C.

Dificuldades evitadas — Êsse último resultado merece a atenção do leitor. *Uma vez modificada uma parte do programa, o melhor ajuste foi um reacêrto geral de tôda a programação.* Mas êsse reacêrto geral é impraticável, a menos que uma programação completa possa ser elaborada ràpidamente e a um custo razoável. Raramente se pode saber *de antemão* se êsse trabalho trará resultados; por outro lado, é inconveniente sobrecarregar a administração com novos cálculos sempre que pequena modificação seja efetuada. A programação matemática evita essas dificuldades. Modificações — mesmo pequenas — dos dados podem ser feitas quando necessário, a despeito do fato de exigirem nôvo cálculo completo da programação, pois êsse trabalho pode ser realizado ràpidamente e com exatidão por escriturários ou máquinas.

Podemos continuar calculando o menor custo possível para o suprimento das necessidades com a Fábrica II ou a Fábrica III completamente paradas. Os resultados de tôdas as alternativas são, em resumo, os seguintes:

Frete total mais custo variável de produção

As quatro fábricas em funcionamento	US$ 19.720
Fábrica I fechada, sem horas extras	19.950
Fábrica II fechada, horas extras na Fábrica III	20.515
Fábrica III fechada, horas extras nas Fábricas I, II e IV	21.445
Fábrica IV fechada, horas extras na Fábrica III	19.995

A administração possui, agora, as informações sôbre os custos variáveis de que necessita para decidir com inteligência entre três alternativas: 1) operar tôdas as fábricas com grande quantidade de capacidade ociosa; 2) fechar a Fábrica I e, ainda assim, operar com alguma capacidade ociosa; 3) fechar as Fábricas II, III ou IV e acrescentar horas extras de trabalho. A decisão dependerá em parte da extensão em que fôr possível eliminar os custos fixos quando uma determinada fábrica fôr fechada; poderá depender mais ainda da política da companhia no tocante a suas relações com a comunidade ou de outra consideração de caráter não financeiro. A programação matemática não pode substituir o julgamento, mas pode fornecer algumas informações de que a administração necessita a fim de melhor poder julgar.

Problemas correlatos — Problemas gerais dêsse tipo apresentam-se tanto nas compras, quanto na produção e nas vendas. Uma emprêsa que compra matéria-prima em diversas localidades e a remete para processamento a diferentes fábricas localizadas em pontos diversos, deseja reduzir ao mínimo o custo total da compra e do frete; aqui a solução poderá ser obtida exatamente da forma que acabamos de descrever. Sabe-se que o Departamento de Defesa dos Estados Unidos da América realizou grandes economias utilizando-se da programação linear para decidir onde comprar e para onde remeter certos artigos que comprava de grande número de fornecedores e deviam ser despachados diretamente para as instalações militares.

Onde Vender

No primeiro exemplo, examinamos uma situação em que a administração havia fixado as vendas para cada depósito e a produção de cada fábrica antes de usar a programação para determinar a melhor maneira de despachar das fábricas para os depósitos. No segundo exemplo, a administração havia de antemão fixado as vendas de cada depósito, deixando a decisão de *onde* e *quanto* produzir para a programação.

Consideremos agora um caso no qual as vendas não estejam fixadas antecipadamente e a administração deseje determinar onde vender, onde produzir e para onde despachar, a fim de realizar o maior lucro possível.

Êsse problema geralmente surge quando as vendas excederiam a capacidade de produção da emprêsa se a procura não fôsse reduzida por aumentos de preços, mas a administração não deseja, em virtude da situação de concorrência a longo prazo, aumentar os preços. Nessas condições, torna-se necessário um método de distribuição dos produtos aos depósitos localizados nas diferentes praças (ou a fregueses em particular).

Uma das formas de fazer isso é simplesmente vender onde quer que possa ser realizado o maior lucro possível a curto prazo. Entretanto, a administração geralmente não toma posição a curto prazo apenas; é por essa razão que ela reserva para cada depósito ou cada freguês pelo menos um suprimento mínimo, vendendo sòmente o restante acima dêsse mínimo tendo em vista o maior lucro possível a curto prazo.

Há ainda outra complicação comum em problemas dessa espécie. O preço de venda do produto pode não ser o mesmo em todo o território servido, variando de lugar para lugar ou de freguês para freguês. Além disso, é possível que ocorra o que vimos no último exemplo: pode ser desejável que algumas fábricas trabalhem horas extras e outras operem sòmente com parte de sua capacidade normal, ou fiquem mesmo completamente paradas.

O programa de produção e distribuição deve, assim, ser preparado para resolver os seguintes problemas, possibilitando o maior lucro possível e atendendo à necessidade de suprir determinados depósitos com uma certa quantidade mínima de produtos:

1) Quanto deverá ser produzido em cada fábrica?

2) Quanto — se fôr necessário — deverá ser entregue a cada depósito acima do mínimo estabelecido?

3) Respondidas essas perguntas, que fábricas deverão fornecer a que depósitos?

Assim como vimos no exemplo anterior, as três perguntas devem ser respondidas ao mesmo tempo; não é possível tratá-las uma a uma. Entretanto, a despeito das novas complicações, o problema pode ainda ser resolvido pela programação linear. Na verdade, não é mais difícil de resolver que o problema anterior; a única diferença é que, em vez de nos preocuparmos com os custos, focalizamos agora os lucros resultantes do suprimento a determinado depósito por dada fábrica. Não exemplificaremos êsse caso, de vez que sua solução seria igual à apresentada no QUADRO 4 do caso anterior, com dados iguais aos do QUADRO 3, acrescentado o preço de venda em cada depósito.

Preço, Volume e Lucro

Nos exemplos anteriores partimos do pressuposto de que a administração havia fixado os preços de venda *antes* da elaboração do programa de produção e distribuição. As quantidades a serem produzidas e despachadas resultavam dos preços preestabelecidos.

Essa é por certo uma situação comum, mas é igualmente muito comum que a administração considere o efeito dos preços sôbre o volume *antes* que os preços sejam fixados. Isso significa que o volume de vendas deve ser previsto, para cada caso, dentro de uma variedade de preços possíveis. Supomos, além disso, que essas previsões serão feitas separadamente para cada um dos depósitos mencionados nos exemplos anteriores.

Nessas condições o problema não poderá ser resolvido *diretamente* pela programação linear, porque a margem, ou seja, a diferença entre o preço de venda num dado depósito e o custo variável de produção e remessa de uma determinada fábrica a êsse depósito não será mais diretamente proporcional às quantidades produzidas e vendidas. Enquanto as quantidades aumentam, os preços diminuem, e a relação entre a margem total e as quantidades vendidas diminui. Mesmo assim, poderemos ainda usar a programação linear para resolver o problema, de maneira rápida, correta e econômica se houver um único preço de venda para todo o território servido. Poderemos calcular a melhor programação para cada um dos preços propostos, determinar o lucro de cada programa e escolher a alternativa mais lucrativa.

Entretanto, se os preços podem variar de lugar para lugar e a administração deseja fixar cada preço local de maneira a obter o maior lucro total, torna-se pràticamente impossível usar a programação linear. Ainda que existissem sòmente dez pontos de distribuição para os quais devessem ser consideradas previsões de preços e quantidade, e mesmo que cada gerente de depósito submetesse previsões para cinco preços diferentes apenas, teríamos que calcular aproximadamente dez milhões de programas diferentes e depois escolher o mais lucrativo.

Na prática, mediante uma quantidade razoável de cálculos, geralmente é possível encontrar um programa que seja provàvelmente o melhor — ou que mais se aproxime dêle — mas a solução dêsse problema de programação matemática, como muitos outros, depende de pesquisas futuras de que resultem métodos para solução direta de problemas não lineares. Como dissemos, tem havido algum progresso nesse sentido.

Que e Como Produzir

Os casos discutidos até agora se referiram a problemas relativos a *onde* — e quanto — comprar, vender, produzir e despachar. A programação matemática pode igualmente ser utilizada nas decisões sôbre *o que* e *como* produzir a fim de maximizar os lucros ou minimizar os custos, em face de carência de matérias-primas, máquinas ou outros recursos produtivos. Alguns problemas dessa espécie podem ser resolvidos por funcionários, utilizando-se processos como os discutidos anteriormente; outros, entretanto, podem exigir computadores eletrônicos e novos processos.

Problema típico da primeira categoria de problemas, que implica a escolha de matérias-primas escassas, é o seguinte: uma emprêsa fabrica quatro produtos: A, B, C e D, com uma única matéria-prima que pode ser comprada em três diferentes teores: I, II e III. O custo de transformação e a quantidade de matéria-prima necessária para produzir uma tonelada do produto variam de acôrdo com o produto e o teor da matéria-prima empregada, como indica o QUADRO 5.

Se houvesse disponibilidade de suprimentos ilimitados de cada teor de matéria-prima a preço fixo, cada produto poderia ser fabricado com o teor no qual a soma do custo da matéria-prima e do custo de transformação fôsse menor. Mas as quantidades de cada teor que podem ser compradas aos preços "normais" é limitada, como indica o quadro; quantidades a mais de cada teor podem ser adquiridas, mas sòmente pelo custo adicional indicado.

QUADRO 5: *Custos, Disponibilidades e Preços*

A — *Rendimentos e Custos de Transformação*

Teor	I	II	III
Produto	*T de matéria-prima por t de produto*		
A	1,20	1,80	2,00
B	1,50	2,25	2,50
C	1,50	2,25	2,50
D	1,80	2,70	3,00
	Custo de transformação por t de produto		
A	$ 18	$ 30	$ 42
B	30	60	69
C	57	63	66
D	54	81	126

B — *Custos e Disponibilidades de Matéria-Prima*

Teor	I	II	III
Preço normal por t	$ 48	$ 24	$ 18
Quantidades disponíveis a preço normal (em t)	100	150	250
Preço extra por t	$ 72	$ 36	$ 42
Quantidades disponíveis a preço extra (em t)	100	150	400

C — *Preços e Potenciais de Vendas*

Produto	A	B	C	D
Preço por tonelada	$ 96	$ 150	$ 135	$ 171
Potencial de vendas (em t)	200	100	160	50

Os produtos são vendidos FOB na fábrica do fornecedor; os preços de venda já foram fixados; êles aparecem no quadro, ao lado das previsões — feitas pelo departamento de vendas — das quantidades de cada produto que podem ser vendidas a êsses preços.

O problema é, então, determinar *que* produtos fabricar, em que quantidades fabricá-los, e mais: *como* fabricá-los, ou, em outras palavras, que teor de matéria-prima deve ser empregada para cada produto. A solução vem indicada no QUADRO 6.

QUADRO 6: *Programa mais Lucrativo de Produção*

Produto	*T de produto*		*T de matéria-prima empregada*		
	Potencial de vendas	*Produção*	*Teor I*	*Teor II*	*Teor III*
A	200	200		210	167
B	100	100	100		83
C	160	160			400
D	50	0	—	—	—
Total de matéria-prima			100	210	650
Adquirida a preço normal			100	150	250
Adquirida a preço extra			0	60	400

Uso de computadores — Devemos lembrar que, ao discutir o uso da programação matemática pela Companhia H. J. HEINZ, salientamos o fato de que os programas de despachos são elaborados por um funcionário com lápis e papel apenas e num tempo muito razoável. Isso acontece apesar de haver 6 fábricas e 70 depósitos que tornam necessária a escolha de 75 rotas que serão realmente utilizadas, de um total de 420 possíveis. Essa facilidade de solução, mesmo nos casos em que há grande número de variáveis, dá-se tanto na escolha de matérias-primas a serem empregadas — que acabamos de discutir — como nos problemas anteriormente abordados. Todos êsses problemas podem ser resolvidos pelo conhecido "processo do problema de transporte".

Outros problemas, ao contrário, exigem o emprêgo de computadores eletrônicos. A êles se aplica o "processo geral". Embora os cálculos necessários no caso sejam de aritmética elementar, a *quantidade* de cálculos deve ser muito maior do que no processo de transporte. Isso quer dizer que — a menos que um matemático encontre a simplificação para determinado problema —, não será possível que funcionários encontrem a solução através de cálculos manuais num tempo razoável quando fôr grande o número de variáveis, como geralmente se verifica na maioria dos casos práticos.

Se dado problema pode ser resolvido pelo processo do problema de transporte ou deve sê-lo pelo processo geral, não depende, porém, de implicar transporte ou não, mas sim da *forma* dos dados. Por exemplo, o problema discutido sôbre matérias-primas pode ser resolvido como problema de transporte porque *qualquer* produto exigiria mais 50% de matéria-prima se fôsse utilizado o teor II em vez de I, ou mais 67% se o teor III fôsse empregado em vez de I. Mas, se o baixo rendimento dos teores inferiores variasse em função de um determinado produto final, teria sido necessário o emprêgo do processo geral.

O fato de o processo geral exigir freqüentemente o uso de computador eletrônico, de maneira alguma significa que êsse processo possa ser aplicado sòmente por grandes emprêsas que disponham de computadores próprios. Felizmente, todos os problemas que reclamam o emprêgo dêsse processo são *matemàticamente* os mesmos, ainda que a *significação* física e econômica de cada problema possa ser completamente diferente. Por isso mesmo, o computador de um escritório central de serviços, uma vez que seja devidamente codificado, pode resolver o processo geral para qualquer problema que vá até determinado tamanho. O computador poderá, então, ser usado para resolver prontamente e a baixo custo os vários problemas de muitas emprêsas diferentes. Êsse tipo de serviço pode ser adquirido ao preço de horas trabalhadas, e o tempo necessário para resolver um problema é, em geral, supreendentemente curto.

A composição mais lucrativa — Examinemos agora um caso que requer o uso do processo geral: a gasolina vendida como combustível para automóveis ou aviões não resulta, em geral, de um único processo de refinação, mas de uma combinação de vários produtos da refinaria com a adição de certa quantidade de chumbo tetraetila. Até certo ponto, cada componente necessita de instalações especiais de refinação. Conseqüentemente, a administração de uma refinaria pode enfrentar o seguinte problema: dado um suprimento diário e limitado de cada um dos vários componentes, como deverão êles ser combinados para produzir que tipos de combustíveis, a fim de se obter o maior lucro possível? O problema fica ainda mais complexo pelo fato de não existir "receita" única para qualquer tipo de produto final. Em geral, o produto final pode ser composto de várias maneiras, desde que sejam satisfeitas certas especificações.

Êsse é problema típico de programação, tanto porque o uso de determinado componente para obtenção de um produto final significa menor disponibilidade para emprêgo em outro, como também porque o emprêgo de um componente para produzir determinada qualidade de um dado produto final significa que será necessária menor quantidade de outros componentes para produzir aquela qualidade de produto final. Mas é êsse um problema de natureza linear? Examinemos mais de perto as relações entre as características dos componentes e as características das composições resultantes.

As duas medidas mais importantes das características da qualidade da gasolina como combustível são seu número de qualidade (PN) — que é função do número de octanas e descreve as propriedades antidetonantes — e sua pressão de vapor (RVP), que indica a volatilidade do combustível. Para a maioria das gasolinas de alto padrão para aviação, existem de fato dois PN especificados: o 1-c PN que se aplica à mistura fraca, e o 3-c PN, que se aplica à mistura rica. Cada um dos vários componentes tem seus próprios RVP e PN.

Os PN e RVP necessários no produto final são produzidos pela mistura adequada de componentes e pela adição de chumbo tetraetila (TEL) para melhorar o PN. A quantidade de TEL que pode ser usada em qualquer combustível é limitada por várias razões; como o TEL constitui freqüentemente o modo mais barato de se obter o desejado PN (especialmente no caso das gasolinas de aviação), é prática comum o emprêgo da quantidade máxima permitida dêsse produto químico.

Pelo exposto, verifica-se que o problema será de natureza linear se os RVP e os PN de qualquer produto final forem simplesmente médias ponderadas dos RVP e PN dos vários componentes (cada PN sendo calculado para a quantidade predeterminada de TEL a ser usada no produto final). Embora não represente estritamente a situação quanto ao PN, essa proposição se aproxima tanto dela que serve normalmente de base para os cálculos das composições. O problema pode, assim, ser resolvido diretamente pela programação linear.

A. CHARNES, W. W. COOPER e B. MELLON aplicaram a programação linear para a escolha da combinação mais lucrativa numa refinaria e, embora tivessem sido obrigados a simplificar o problema a fim de realizar as computações com uma máquina de calcular sòmente, os resultados de seus cálculos foram de considerável interêsse para a administração da emprêsa.[4] (Os computadores modernos poderão tratar maior quantidade de dados em muito menos tempo, e é por isso que muitas das grandes emprêsas petrolíferas estão atualmente interessadas em usá-los.)

Os dados — reproduzidos a seguir — que CHARNES, COOPER e MELLON apresentam para mostrar a natureza dos cálculos, são, naturalmente, em grande parte fictícios.

4) A. CHARNES, W. W. COOPER e B. MELLON, "Blending Aviation Gasolines — A Study in Programming Interdependent Activities in an Integrated Oil Company", *Econometrica*, abril de 1952, pág. 135.

Considera-se que a refinaria dispõe de suprimentos diários e fixos dos quatro componentes seguintes: alquilato, gasolina de *cracking* catalítico, gasolina de destilação direta e isopentana. As quantidades disponíveis e as especificações de qualidade estão indicadas no QUADRO 7. Êsses componentes podem ser combinados para produção de qualquer de três gasolinas de aviação A, B e C, cujas especificações e preços de venda vêm também indicados no QUADRO 7.

QUADRO 7: *Quantidades Disponíveis e Especificações de Qualidade*

A — *Especificações do Produto*

Produto	*RVP máximo*	*1-c PN mínimo*	*3-c PN mínimo*	*TEL máximo em cc. por galão de gasolina*	*Preço por barril*	*Custo de TEL por barril de gasolina*
Gasolina de aviação						
A	7,0	80,0	—	0,5	$ 4,960	$ 0,051770
B	7,0	91,0	96,0	4,0	5,846	0,409416
C	7,0	100,0	130,0	4,0	6,451	0,409416
Gasolina de automóvel	—	—	—	3,0	4,830	0,281862

B — *Especificações dos Componentes*

	Fornecimento de barris por dia	*RVP*	1-c PN		3-c PN
			0,5 cc. *TEL*	4,0 cc. *TEL*	4,0 cc. *TEL*
Alquilato	3.800	5,0	94,0	107,5	148,0
Catalítico	2.652	8,0	83,0	93,0	106,0
Destilação direta	4.081	4,0	74,0	87,0	80,0
Isopentana	1.300	20,5	95,0	108,0	140,0

Os componentes não usados nas três gasolinas de aviação são empregados na produção de gasolina extra para automóvel, cujo preço de venda aparece igualmente no quadro. As especificações de qualidade da gasolina para automóvel não são indicadas, porque êsse produto é constituído principalmente de componentes não incluídos no estudo; êsses componentes são adicionados em proporções adequadas para produzir as especificações desejadas de qualidade.

A administração decidiu usar todo o suprimento de componentes disponíveis, de uma ou de outra forma. Portanto, os custos dos componentes poderão ser desprezados na escolha do programa de fabricação, porque êles não variarão, qualquer que seja o programa escolhido. Os próprios custos operacionais serão os mesmos, qualquer que seja o produto final, e por isso podem igualmente ser desprezados na solução do problema. O único fator de custo variável é o TEL — uma vez que alguns dos produtos levam mais TEL do que outros — e seu custo por barril é indicado no QUADRO 7.

A solução do problema é dada no QUADRO 8. No caso real, entretanto, a determinação precisa do programa de combinação mais lucrativa não foi o resultado que apresentou maior interêsse para a administração da companhia, já que, se lhes fôsse dado tempo suficiente, os programadores experientes da companhia poderiam chegar a conclusões sôbre programas tão lucrativos ou quase tão lucrativos quanto aquêles derivados pela programação matemática. (A pesquisa que indicou isso, porém, talvez tenha sido favorável demais aos métodos tradicionais, pois eram dados adiantadamente aos programadores os resultados dos cálculos da programação; dessa maneira, êles sabiam antecipadamente o resultado que deveriam tentar obter.)

QUADRO 8: *Composto mais Lucrativo de Produtos*

Produto	*Quantidade produzida*	*Combinação dos seguintes componentes*			
		Alquilato	*Catalítico*	*Destilação direta*	*Isopentana*
Gasolina de aviação					
A	0	0	0	0	0
B	5.513	0	2.625	2.555	333
C	6.207	3.800	27	1.526	854
Gasolina de automóvel	113	0	0	0	113
Total	11.833	3.800	2.652	4.081	1.300

As informações paralelas é que realmente impressionaram a administração. De um lado, assim como no caso da HEINZ, tornou-se claro que seriam poupados tempo e esfôrço de pessoal categorizado se o trabalho fôsse tornado rotineiro pelo emprêgo da programação matemática. Isso, por sua vez, possibilitava o cálculo de programas para grande variedade de necessidades e suposições que antes não haviam sido consideradas.

Exemplificando: o composto de produtos mais lucrativo indicado no QUADRO 8 não contém gasolina de aviação A. Entretanto, a política da emprêsa, por razões de boas relações com os clientes, determinava a produção de 500 barris diários dêsse produto. Quando o problema foi recomputado levando êsse fato em consideração, verificou-se que o composto de produtos mais lucrativo contendo 500 barris de gasolina de aviação A provocava uma redução de lucros de cêrca de US$ 80.000 anuais, em relação à programação do QUADRO 8.

Êsse prejuízo era consideràvelmente maior do que a administração tinha imaginado. Êsse custo poderia ter sido calculado com precisão pelos programadores da companhia, mas o que ocorre é que quando os cálculos exigem muito tempo de pessoal categorizado — isso os torna muito caros — êles simplesmente não são realizados.

Programação "côncava" — O campo da refinação de gasolina é talvez aquêle que mais atenção tenha recebido para a aplicação da programação matemática. Tipo interessante de programação *não* linear também foi tentado nesse campo. O método recebeu a denominação de "programação côncava".

No exemplo visto da gasolina, o problema pôde ser resolvido pela programação linear porque o pressuposto foi o de que os RVP e PN de qualquer produto seriam a simples média ponderada dos RVP e PN dos componentes, sendo os PN calculados para uma predeterminada quantidade de TEL no produto. Já assinalamos, também, que sob determinadas condições, essa suposição não representa estritamente a realidade. A programação linear torna-se particularmente inaplicável quando o problema implica a produção de gasolina para automóvel, em vez de gasolina de alto padrão para aviação. Nesse caso não é evidente, de antemão, que será mais econômico empregar a quantidade máxima permissível de TEL, e o PN não é, definitivamente, proporcional à quantidade de TEL empregado.

Os processos desenvolvidos para dar tratamento a situações como essas resolveram o problema em várias situações reais.[5] Os resultados mostram a quantidade mais lucrativa de TEL a ser usada nos vários produtos, assim como a combinação mais lucrativa dos componentes existentes nos estoques da refinaria.

Que Processos Usar

Alguns dos problemas mais complexos de limitação de recursos das emprêsas se referem não aos materiais, mas à capacidade produtiva da fábrica. Exemplo típico é o problema da escolha de produtos que deverão ser fabricados e de processos de fabricação a serem usados quando a falta de capacidade de maquinaria restrinja a produção. O problema pode mesmo originar-se da falta de apenas alguns tipos de máquinas, numa emprêsa que, de modo geral, esteja adequadamente equipada. A Companhia SKF, por exemplo, relatou uma economia de US$ 100.000 num ano com o uso de técnicas de programação desenvolvidas pela programação linear.[6]

Entretanto, em vez de descrever o caso da SKF, imaginemos um exemplo hipotético que dê oportunidade de mostrar uma das formas pelas quais podem ser considerados pela programação matemática os custos de preparação das máquinas.

---

5) Veja-se A. S. MANNE, "Concave Programming for Gasoline Blends", *Report P-383 da Rand Corporation*, Santa Mônica, 1953.

6) *Factory Management and Maintenance*, janeiro de 1954, págs. 136 e 137. A técnica aqui descrita se parece muito com o "processo da preferência de lucros" mencionado no Apêndice.

Êsses custos não podem ser tratados diretamente pela programação linear, porque não são proporcionais ao volume de produção. Êles podem, porém, ser tratados indiretamente, pelos mesmos meios que foram aplicados ao problema de custos fixos que podiam ser evitados pelo fechamento definitivo de uma fábrica, tal como vimos no caso descrito sob o título "Onde Produzir".

Por exemplo: uma oficina mecânica tem capacidade suficiente em máquinas-ferramentas, com exceção de três tipos de máquinas: I, II e III. Essas máquinas são usadas (com as demais) para fabricar três produtos: A, B e C. Cada produto pode ser fabricado por vários processos. É possível, por exemplo, reduzir o tempo necessário de esmerilamento por maior usinagem, mas isso requer maior tempo de usinagem. Para sermos específicos, suponhamos que para cada produto existam três roteiros alternativos de operação, a que denominaremos Processos 1, 2 e 3.

Se houvesse suficiente tempo disponível em tôdas as máquinas, o processo mais econômico seria escolhido para cada produto em particular, e a companhia fabricaria tanto quanto pudesse vender daquele produto. Mas, em virtude da falta de capacidade, o processo que deve ser usado para cada produto tem de ser escolhido em face de seu efeito sôbre a disponibilidade de maquinaria para a fabricação dos outros dois produtos; a quantidade a ser produzida deve ser calculada para todos os produtos em conjunto, de forma a se obter o maior lucro possível na fabricação global dos produtos.

As necessidades de cada processo para cada produto nos três tipos críticos de máquinas estão indicadas no QUADRO 9; são tempos por unidade (tempos-padrões devidamente ajustados quanto à eficiência). Por exemplo, se o Produto B fôr produzido pelo Processo 3, cada unidade necessitará de 0,2 horas na máquina de tipo II, 1,0 hora na máquina de tipo III e nenhum tempo na de tipo I. As disponibilidades semanais de horas de máquinas estão também indicadas no quadro, com descontos por tempo estimado para manutenção e reparos, mas sem dedução do tempo de preparação.

O QUADRO 9 mostra também a quantidade de unidade de cada produto que deve ser produzida semanalmente para atender os pedidos aceitos, além da "margem" que será realizada sôbre quaisquer unidades adicionais que possam ser produzidas. Essa margem é o preço de venda menos todos os custos de produção desembolsados *(out-of-pocket)*, *com exceção* dos custos de operação das máquinas programadas. Uma vez que essas máquinas são "pontos de estrangulamento", elas serão usadas em tempo integral, ou pràticamente integral, e, portanto, seus custos operacionais serão pràticamente os mesmos, qualquer que seja o programa escolhido.

Solução do problema — Para resolver o problema, desprezam-se os tempos de preparação das máquinas (indicados no QUADRO 9), assim como foram inicialmente desprezados os custos fixos para a decisão de onde produzir o *ketchup*. Deduzem-se simplesmente seis horas de cada uma das disponibilidades semanais de cada máquina, desenvolvendo-se o programa com base na suposição de que qualquer programa implicaria exatamente seis horas de tempo total de preparação em cada tipo de máquina. Poderemos posteriormente reajustar êsse dado tendo em vista a quantidade e os tempos de preparação efetivamente necessários para o programa.

O QUADRO 10 mostra o programa mais lucrativo, *se a suposição referente ao tempo de preparação fôr correta.* Êle exige apenas a produção semanal das 100 unidades necessárias do Produto A e das 200 de B, mas, em relação ao Produto C, requer a produção de 394 unidades em vez das necessárias 300. Em outras palavras, os cálculos indicam que o uso mais lucrativo que pode ser dado à capacidade disponível — depois de cumpridas as obrigações assumidas — é fabricar o Produto C.

Observando-se o tempo de preparação que é realmente necessário para êsse programa, verifica-se que êle excede

QUADRO 9: *Necessidades da Oficina*

A — *Tempos de Máquinas por Unidade*

Tipo de máquina		I	II	III
Produto	*Processo*	*Horas de máquina por unidade*		
A	1	0,2	0,2	0,2
A	2	0,4	—	0,3
A	3	0,6	0,1	0,1
B	1	0,2	0,3	0,4
B	2	0,1	0,1	0,8
B	3	—	0,2	1,0
C	1	0,2	0,1	0,7
C	2	0,1	0,6	0,4
C	3	—	0,8	0,2

B — *Total de Horas de Máquinas Disponíveis por Semana*

Tipo de máquina	I	II	III
Horas	118	230	306

C — *Necessidades de Produção e "Margens"*

Produto	A	B	C
Quantidade mínima de unidades necessárias por semana	100	200	300
Margem unitária sôbre a produção adicional	$10	$20	$30

D — *Tempos de Preparação de Máquinas*

Tipo de máquina		I	II	III
Produto	*Processo*	*Horas de máquinas por preparação*		
A	1	2,4	0,6	1,2
A	2	1,8	—	1,8
A	3	1,2	1,8	1,2
B	1	3,0	1,2	2,4
B	2	0,6	3,0	1,2
B	3	—	3,6	1,2
C	1	2,4	1,8	3,0
C	2	1,2	1,2	1,2
C	3	—	2,4	2,4

a estimativa de seis horas nos três tipos de máquinas (vide totais indicados na Parte B do QUADRO 10). Para reajustar os dados tendo-se em vista essa diferença, pode-se simplesmente reduzir na mesma proporção as horas de máquinas disponíveis, recalculando depois o programa. Mas o exame do programa do QUADRO 10 traz à luz outro fato que também deve ser levado em conta: o de que sòmente 8 unidades por semana do Produto A serão fabricadas pelo Processo 3.

QUADRO 10: *Emprêgo mais Lucrativo da Capacidade, com Seis Horas de Tempo de Preparação por Máquina*

A — *Programa Baseado em Seis Horas de Tempo de Preparação por Máquina*

Tipo de máquina		I	II	III	
Produto	*Processo*	*Horas Produtivas de Máquinas*			*Unidades Produzidas*
A	1	18,4	18,4	18,4	92
A	3	4,8	0,8	0,8	8
B	1	40,0	60,0	80,0	200
C	1	48,8	24,4	170,8	244
C	3	—	120,0	30,0	150
	Total	112,0	223,6 *	300,0	

B — *Tempos Efetivos de Preparação Requeridos pelo Programa*

Tipo de máquina		I	II	III
Produto	*Processo*	*Horas de Tempo de Preparação*		
A	1	2,4	0,6	1,2
A	3	1,2	1,8	1,2
B	1	3,0	1,2	2,4
C	1	2,4	1,8	3,0
C	3	—	2,4	2,4
	Total	9,0	7,8	10,2

(*) Diferença em relação a 306,0 decorrente de arredondamento dos números.

Uma vez que essas máquinas constituem pontos de estrangulamento, não necessitamos, na realidade, de nenhum cálculo de custos para saber que constitui desperdício preparar uma máquina para produção quase desprezível. (Essa decisão pode ser conferida, como veremos adiante).

Portanto, eliminamos o Processo 3 de fabricação do Produto A antes de reajustarmos as horas de máquinas disponíveis em relação aos tempos de preparação efetivamente necessários, e depois recalculamos o programa, excluindo mais uma vez os processos indesejáveis.

Uma das características mais úteis da programação linear é a de que nela os cálculos não precisam ser puramente mecânicos e podem sempre ser revistos para adaptar-se à realidade.

O programa revisto aparece no QUADRO 11, ao lado de algumas informações de custos que correspondem aos "valôres de linha" e "valôres de coluna" dos problemas do *ketchup.* Essas informações serão discutidas mais detidamente na PARTE III dêste artigo. Neste momento interessa observar que elas confirmam a decisão de rejeitar o Processo 3 para o Produto A. O uso dêsse processo para a produção de 8 unidades economizaria US$ 51,20 (8 × US$ 6,40) em tempo de operação, mas custaria aproximadamente US$ 100 de tempo de preparação (1,8 horas numa máquina do tipo II no valor de US$ 27,80 por hora, mais 1,2 horas numa máquina do tipo III no valor de US$ 38,80 por hora.)

Conviria indagar também, a esta altura, se não seria melhor usar um único processo para o Produto C. A prática nos diz, entretanto, que a fabricação do Produto C por meio de cada um dos métodos é suficientemente grande para tornar desprezível o custo de preparação; isso pode ser confirmado ainda pela análise das informações de custos e de outros dados do QUADRO 11. O argumento, porém, é um pouco mais complexo do que aquêle que se refere ao Processo 3 para o Produto A e não será discutido aqui.

Características do programa — O programa final prevê, ainda, apenas as quantidades necessárias dos Produtos A e B; a escolha adequada dos processos para todos os produtos torna possível fabricar 88 unidades semanais acima das necessidades mínimas do Produto C. Êsse dado não

QUADRO 11: *Emprêgo mais Lucrativo da Capacidade Disponível*

A — *Programa Revisto com Base nas Necessidades Efetivas de Tempo de Preparação*

Tipo de máquina			I	II	III	*Unidades Produzidas*
Produto	*Processo*		*Horas de máquinas*			
A	1	Preparação	2,4	0,6	1,2	100
		Operação	20,0	20,0	20,0	
B	1	Preparação	3,0	1,2	2,4	200
		Operação	40,0	60,0	80,0	
C	1	Preparação	2,4	1,8	3,0	238
		Operação	47,6	23,8	166,6	
C	3	Preparação	—	2,4	2,4	150
		Operação	—	120,2	30,0	
Tempo Ocioso			2,6	—	—	
Total			118,0	230,0	305,6*	

B — *Margem Adicional por Hora Adicional de Máquina*

Tipo de máquina	I	II	III
Margem	—	$27,80	$38,80

C — *Perda de Margem com a Produção de uma Unidade por Processos Diferentes dos Selecionados* **

Produto	*Processo* 1	2	3
A	—	$(1,70)***	$(6,40)***
B	—	10,00	20,80
C	—	2,20	—

D — *Perda de Margem com a Produção de uma Unidade a mais de Produto Diferente de C*

Produto	*Perda*
A	$3,30
B	3,00

* Diferença em relação a 306,0, decorrente de arredondamento dos números.

** Aqui aparece a perda resultante do tempo de operação do processo em questão. A perda decorrente da preparação da máquina para o processo adicional pode ser calculada pelo valor de uma hora de máquina indicada na parte anterior.

*** Números negativos.

difere muito das 94 unidades indicadas no programa inicial (QUADRO 10). Aquêle programa, a despeito de basear-se em pressuposto bastante aproximado, provou, na verdade, que servia para orientar bem, em relação ao uso adequado da capacidade disponível; foram necessários sòmente refinamentos de menor importância para transformá-lo no programa realmente mais lucrativo. Um problema mais complexo poderia, naturalmente, exigir diversas aproximações sucessivas, e não sòmente duas, como no caso simples que analisamos.

Característica significativa do programa final é o fato de que prevê uma certa quantidade de tempo ocioso nas máquinas do tipo I. Qualquer programa que empregasse integralmente êsse tipo de máquina produziria *menos* lucro do que o programa do QUADRO 11.

Num caso de aplicação da programação matemática a uma oficina mecânica, resultado dêsse mesmo tipo provou ser de considerável importância prática. Sem justificação que pudesse ser comprovada, haveria muita hesitação do pessoal de produção em incluir tempo ocioso num programa quando a administração estivesse fazendo pressão no sentido de haver a maior produção possível. Em tais condições, existe o perigo de elaborar-se programa menos eficiente do que seria possível, simplesmente porque os esforços do pessoal estão concentrados em descobrir um programa que utilize tôdas as máquinas 100% do tempo.

O Custo mais Baixo de Produção

Os exemplos vistos se aplicam ao problema da obtenção da produção mais lucrativa quando a emprêsa não pode produzir tudo o que pode vender. A programação matemática pode ser igualmente valiosa quando o problema é conseguir a produção necessária pelo menor custo possível.

Caso interessante é o seguinte: um dos maiores frigoríficos norte-americanos usa a programação linear para descobrir a forma mais econômica de produzir uma certa ração para aves, com todos os componentes nutritivos necessários. Para resolver um problema dessa espécie há necessidade dos seguintes dados: lista das substâncias nutritivas essenciais (minerais, proteínas etc.) com as quantidades em que deverão entrar numa libra de ração; lista dos materiais que poderiam ser utilizados para produzir o alimento, com o preço de cada um; e tabela indicando a quantidade de cada componente contido numa libra de cada possível mistura de ração.[7]

Êsse problema é, evidentemente, muito parecido com o da gasolina de aviação já discutido, com a diferença de que, neste caso, o objetivo do programa é a obtenção de uma produção fixa pelo menor custo e não de uma produção que maximize os lucros.

Problema exatamente igual pode surgir quando haja mais de um produto final. Uma refinaria pode ter de enfrentar a seguinte situação: suponha-se que, em vez de haver quantidade inadequada de componentes, haja ampla capacidade para produzir tudo o que se possa vender. Como já vimos, cada produto vendido pode ser combinado de diversas maneiras a partir dos produtos intermediários, tais como alquilatos e gasolina de *cracking* catalítico, e cada um dêsses produtos intermediários pode ser produzido por várias qualidades de petróleo e em diversas proproporções. A refinaria deve decidir que petróleo adquirir e como deve ser refinado, de maneira a produzir os necessários produtos finais pelo menor custo possível.

CHARNES, COOPER e MELLON demonstraram que é possível usar a programação linear para resolver um problema ainda mais complexo do que êsse, introduzindo, por exemplo, a possibilidade de usar tanto petróleo importado, como nacional, e levando em consideração fatôres tais como impostos e direitos alfandegários, e as diferenças de

7) O uso da programação matemática em vários problemas de economia agrária é descrito em artigos do *Journal of Farm Economics*, 1951, pág. 229; 1953, págs. 471 e 823; e 1954, pág. 78.

custos entre transporte por petroleiros fretados ou próprios.[8]

A programação pode, também, auxiliar a reduzir os custos numa oficina mecânica, quando haja capacidade suficiente para a produção de tudo o que possa ser vendido de cada produto; pode, ainda, indicar como fabricar cada produto pelo processo mais econômico. Tudo o que se exige para que exista um problema de programação é que a capacidade das melhores ou mais econômicas máquinas de um determinado tipo na emprêsa — por exemplo, perfuratrizes de alta rotação — seja insuficiente para as necessidades totais da produção.

Suponhamos, por exemplo, que um fabricante deseje produzir determinadas quantidades de cinco diferentes peças de uma perfuratriz, de A a E, e disponha para isso de três diferentes máquinas, I, II e III. Cada máquina pode produzir qualquer das peças, mas os índices operacionais são diferentes, conforme se pode ver pelos tempos por unidade do QUADRO 12.

QUADRO 12: *Índices de Produção, Necessidades e Custos*

Máquina / *Peça*	I	II	III	*Produção Semanal Média (unidades)*
	Tempo de Máquina por Unidade (minutos)			
A	0,2	0,4	0,5	4.000
B	0,1	0,3	0,5	9.000
C	0,2	0,2	0,4	7.000
D	0,1	0,3	0,3	9.000
E	0,2	0,3	0,5	4.000
	Custo operacional variável (por hora)			
	$12	$9	$9	

8) A. CHARNES, W. W. COOPER e B. MELLON, "A Model for Programming and Sensitivity Analysis in an Integrated Oil Company", mimeografado pelo *Carnegie Institute of Technology*, a ser publicado na revista *Econometrica*.

Se a Máquina II para a fabricação de qualquer peça fôsse proporcionalmente mais lenta do que a Máquina I e se o mesmo valesse para a Máquina III, êsse problema não exigiria muito esfôrço para ser solucionado; mas, quando a inferioridade de uma máquina se relaciona com uma peça em particular, a programação linear se torna útil.

O custo variável por hora (mão-de-obra direta, fôrça, manutenção e reparos etc.) de operação de cada máquina é indicado no quadro, já que as máquinas não constituem *tôdas* pontos de estrangulamento, e que a finalidade do problema é evitar — tanto quanto possível — os custos operacionais.

O quadro também indica as necessidades médias semanais de produção de cada peça, embora devamos supor que a

QUADRO 13: *Programa de Menor Custo e Informações Adicionais Sôbre Custos*

A — *Distribuição de Menor Custo das Máquinas*

	Primeira Alternativa de Programa			*Segunda Alternativa de Programa*		
Máquina	I	II	III	I	II	III
Peça	*Média de minutos por semana*					
A	600		500	467		833
B	900			900		
C		1.400			1.400	
D	900			900		
E		1.000	333	133	1.000	
Tempo ocioso			1.567			1.567
Total	2.400	2.400	2.400	2.400	2.400	2.400

B — *Custo de uma Unidade Adicional de Produto*

Peça	A	B	C	D	E
Custo	$0,0750	$0,0375	$0,0500	$0,0375	$0,0750

C — *Valor de uma Hora Adicional de Máquina*

Máquina	I	II	III
Valor	$10,50	$7,50	$0,00

administração possa fabricar cada peça em série, reduzindo, dessa maneira, o custo de preparação a ponto de poder desprezá-lo na determinação do programa. Supomos que os tempos de preparação, manutenção e reparos ocorram aos sábados, podendo-se, portanto, admitir que cada máquina esteja em disponibilidade 40 horas por semana.

O programa de menor custo que trará como resultado a produção necessária aparece no QUADRO 13, ao lado de informações adicionais sôbre custos. Como já foi mencionado, a produção no quadro é indicada em têrmos de *médias* semanais; a extensão real de cada fabricação em série poderá ser determinada mais tarde, da mesma forma pela qual se determina o lote econômico.

PARTE III — INFORMAÇÕES SÔBRE CUSTOS E LUCROS

A determinação do programa mais lucrativo sob determinado conjunto de condições não é, de forma alguma, a única vantagem que pode ter a administração pela aplicação inteligente da programação matemática. Em muitos casos, essa técnica será de igual — ou mesmo de maior — valor, como o único meio prático de se obterem informações essenciais sôbre custos e lucros para decisões adequadas em muitos tipos de problemas, tanto a longo, como a curto prazo.

Necessidade de Programação

Que espécie de informações sôbre custos pode a programação matemática proporcionar? O caso da composição de gasolina apresentado na Parte II dêste artigo exemplifica bem a resposta.

Naquela situação, a administração teve ciência de que a fabricação de gasolina de Aviação A resultava na redução de cêrca de US$ 80.000 nos lucros anuais, muito mais, portanto, do que imaginara. De notar, porém, é que êsse sentido da palavra "custo" — diferença entre lucro que resulta de ação num sentido em relação a outra em sentido diferente — é completamente diferente do puramente contábil da palavra. Informações dêsse tipo não podem ser fornecidas pelos processos contábeis normais. De fato, a programação matemática é o único meio de obtenção rápida e exata de informações quando existam muitas combinações possíveis de vários fatôres que se inter-relacionem.

Custos para decisões — Em alguns casos, é perfeitamente clara a necessidade de se examinar o efeito de uma decisão sôbre os lucros totais e não sôbre os custos ou o lucro contábil. No exemplo da gasolina, a administração tinha perfeita ciência de que estava perdendo dinheiro com a produção de gasolina de Aviação A, embora suas demonstrações financeiras indicassem lucro; era apenas desconhecida a extensão do prejuízo. Em outras situações, ao contrário, o custo contábil é realmente enganoso, o que é fácil de esquecer.

Um exemplo ajudará a esclarecer êsse ponto. Parece evidente que o custo de frete para determinado depósito seja simplesmente a conta de frete dos despachos destinados a êsse depósito. Mas a administração procede bem se pensa duas vêzes antes de agir com base nessa "evidência".

Suponha-se que o gerente de vendas de uma companhia cujo programa de despachos seja o do QUADRO 2 descubra que está ficando muito difícil e caro vender as mercadorias destinadas ao Depósito E, ao passo que as vendas do Depósito T poderiam ser fàcilmente aumentadas. O preço de venda é o mesmo em ambas as localidades e, em virtude da concorrência, não pode ser prontamente modificado. O gerente de vendas descobre, então, que o Depósito E está sendo suprido a um custo de frete de 23 *cents* por cwt, ao passo que o frete para o Depósito T é de apenas 6 *cents* por cwt. Êle propõe, portanto, que os suprimentos e as vendas sejam desviados de E para T, aumentando dessa maneira os lucros da emprêsa pela economia de frete de 17 *cents* por cwt e pela redução do custo de propaganda e de outras despesas de vendas.

O gerente de despachos provàvelmente responderá que os dois depósitos não estão sendo supridos pela mesma fábrica e que se os suprimentos agora enviados da Fábrica II para o Depósito E forem despachados para o Depósito T, o custo do frete não cairá para 6 *cents* por cwt, mas aumentará dos 23 *cents* atuais para 54 *cents,* provocando um prejuízo de 31 *cents* por cwt.

Na verdade, nenhum dos dois está certo. Na eventualidade de os suprimentos serem desviados do Depósito E para o Depósito T, haverá, de fato, custo extra de frete e não economia. Mas, *se a mudança fôr adequadamente programada* (os suprimentos anteriormente enviados de II para E deverão ser enviados a Q, que poderá, então, receber menos de XII, que, por sua vez, poderá suprir a quantidade adicional a T), o custo extra será de 14 *cents* sòmente por cwt. Êsse é o custo que a administração deverá comparar com o custo extra — estimado — de venda pelo Depósito E.

Êsse exemplo e o caso da composição de gasolina tipificam a forma pela qual a programação matemática pode ser empregada para calcular o custo ou o lucro resultantes de uma decisão da administração. De maneira geral, qualquer programa é determinado de modo a produzir o maior lucro possível sob dado conjunto de condições. Se a administração tiver em mente uma alteração em qualquer dessas considerações, nôvo programa deverá ser computado, comparando-se os lucros decorrentes de cada um dos dois conjuntos de condições.

Dados disponíveis — Em alguns casos, não é necessário nem sequer computar nôvo programa, para encontrar-se o custo ou o lucro aplicáveis a uma decisão proposta. A própria computação do programa original proporciona, como subproduto gratuito, os custos ou os lucros decorrentes de certas modificações nas condições em que se baseia o programa, *desde que essas modificações não sejam muito grandes.* Na linguagem dos economistas, êsses dados adicionais são os custos "marginais" ou os índices de lucro.

No nosso exemplo: pela transferência de vendas do Depósito E para o Depósito T, o custo marginal é imediatamente encontrado pela comparação dos "valôres de linha" indicados no QUADRO 2 para os dois depósitos. O valor para E é de 28 *cents* por cwt, o valor para T de 42 *cents*, e o custo extra é, portanto, de 14 *cents* por cwt (42 — 28). Podemos estar certos de que êsse será o custo extra sòmente se um único cwt fôr desviado de um depósito para outro. Para encontrar o custo de uma transferência maior, deveremos estudar o próprio programa. Se assim fizermos, descobriremos que a taxa marginal permanecerá igual, ainda que todo o suprimento agora atribuído a E seja desviado para T. Se, ao contrário, estivéssemos considerando a transferência do Depósito G para T, descobriríamos que a taxa marginal de 15 *cents* (42 — 27) apenas se aplicaria aos primeiros 180 cwt.

Os "valôres de coluna" do QUADRO 2 proporcionam informações semelhantes quanto ao custo ou à economia resultantes da mudança de produção de uma fábrica para outra. Se a produção fôr aumentada na Fábrica V e diminuída na Fábrica VI, haverá uma economia de 13 *cents* por cwt (—38 — [—51]) até um certo limite. Estudo do programa mostra que êsse limite é, novamente, 180 cwt.

Os custos indicados nos QUADROS 11 e 13 são taxas marginais da mesma natureza. De fato, essas informações poderiam ser dadas em relação a todos os programas desenvolvidos neste artigo.

Talvez o emprêgo mais importante das taxas marginais seja o de que elas dão imediatamente um dado *mínimo* para o custo de qualquer modificação que *reduza* os lucros, ou um dado máximo para a lucratividade de modificações que *aumentem* os lucros. Quando o programa do QUADRO 11 indica, por exemplo, que uma hora adicional de máquina do tipo III vale US$ 38,80, podemos estar certos de que dez horas adicionais não valerão mais do que US$ 388, embora possam valer menos. O exame dos custos marginais pode, assim, ser de utilidade prática para a limitação de alternativas que sejam dignas de investigação mais profunda.

Utilização das Informações

Consideremos, agora, alguns exemplos de informações sôbre certos custos e lucros, que podem ser obtidas através da programação matemática e serão úteis nas decisões administrativas.

Custo do produto — O caso da composição de gasolina exemplificou bem o uso da programação matemática para a determinação da verdadeira lucratividade de dado produto, mas a tecnologia da composição de gasolina é tão complexa, que não é fácil perceber como se consegue a solução. Uma vez que é difícil empregar inteligentemente a técnica sem realmente entender como funciona, damos a seguir exemplo mais simples do mesmo tipo de problema.

No caso relativo à distribuição das máquinas-ferramentas da Parte II, havia capacidade ociosa disponível depois de atendidos os compromissos já assumidos. (Vide QUADRO 13.) Suponha-se que, depois de elaborada a programação, um freguês faça um pedido de 1.000 unidades adicionais da Peça D da perfuratriz. Qual será o custo dêsse pedido?

A Máquina III é a única com capacidade ociosa; se a quantidade adicional da Peça D fôr fabricada nessa máquina, custará US$ 75 (500 minutos a US$ 9 por hora). Entretanto, a decisão mais econômica é a de produzir na Máquina I as 1.000 unidades adicionais da Peça D, conseguindo-se 100 minutos para isso pela retirada de 500 unidades da Peça A dessa máquina, que serão fabricadas na Máquina III. Se isso fôr feito, o custo contábil das 1.000 unidades de D será sòmente de US$ 20 (100 minutos a US$ 12 por hora), mas o aumento do custo total será de US$ 37,50 (250 minutos a US$ 9 por hora para fabricar as 500 unidades de A na Máquina III). Assim, o custo efetivo das 1.000 unidades adicionais de

D será de US$ 0,0375 cada uma, conforme se vê no QUADRO 13. Qualquer preço acima da soma dêsse dado e do custo da matéria-prima da peça aumentará o custo fixo.

Fregueses mais lucrativos — O exemplo da transferência de vendas do Depósito E para o Depósito T, discutido anteriormente, mostra como a programação pode ser usada para indicar quais os fregueses mais lucrativos numa situação em que a única diferença entre êles seja a relativa ao custo do frete. O problema não seria de mais difícil resposta, se alguns fregueses fôssem supridos por fábricas de custo mais elevado de produção do que outras. De fato, existe pouca diferença entre a determinação da lucratividade de um produto e a lucratividade de um cliente.

Política mercadológica — As informações de custos e lucros calculadas pela programação matemática podem servir à administração quando decide que produtos fabricar, que preços estabelecer e onde expandir o esfôrço de vendas. Desejamos frisar, entretanto, que não estamos propondo que a administração constitua seu programa mercadológico considerando apenas o lucro a curto prazo. A programação proporciona as informações; mas *não* oferece resposta aos problemas de diretrizes administrativas.

Ao saber que determinados produtos ou fregueses não são lucrativos nas condições presentes, compete à administração, em primeiro lugar, decidir se a situação é de natureza temporária ou não. Isso quer dizer que a administração deverá prever os futuros custos e potenciais de vendas em variedade razoável de pressupostos, para depois calcular a lucratividade dos vários produtos ou mercados em várias combinações dêsses pressupostos. É nesse sentido que a programação matemática dará real contribuição, pois é sòmente quando tais cálculos podem ser fàcilmente realizados que a administração pode permitir-se a investigação de grande número de alternativas.

Depois de efetuados êsses cálculos, a administração poderá decidir-se ou pela alteração dos preços, ou pela recusa de determinados pedidos, ou pela aceitação de certos pedidos mesmo tendo prejuízo a curto prazo, ou pela instalação de mais capacidade produtiva de natureza e localização que permitam que os produtos ou mercados em questão se tornem lucrativos.

Custo dos melhoramentos — Outra espécie de custo que importa, freqüentemente, conhecer, é o custo de melhorias realizadas na qualidade do produto ou do serviço prestado ao freguês. Problema parecido se apresenta quando é necessário decidir se melhor qualidade de material adquirido a custo mais elevado aumentará a receita ou reduzirá outros custos, de modo a justificar plenamente seu custo maior. Vejamos alguns exemplos disso.

1. Custo de entrega rápida — De acôrdo com o programa de despachos do QUADRO 2, o Depósito M deve ser suprido parcialmente pela Fábrica II, a um custo de 40 *cents* por cwt, e parcialmente pela Fábrica IV, a 21 *cents* por cwt. Imaginemos que os estoques estejam baixos nesse depósito e que o seu gerente desejasse obter fornecimento rápido da fonte mais próxima, que é a Fábrica V. Por ser essa a fábrica mais próxima, o frete dela para o Depósito M, 10 *cents* por cwt, é naturalmente mais baixo do que os das outras fábricas que normalmente suprem o depósito; mas, o emprêgo dessa rota mais curta necessàriamente provocará *aumento* no custo total, porque o programa, tal como se apresenta, proporciona o custo total mais baixo possível.

A programação indica imediatamente que o custo suplementar será de 16 *cents* por cwt para as primeiras 140 cwt despachadas para M da Fábrica V. O custo mais elevado que se aplica às quantidades adicionais pode ser calculado fàcilmente.

2. Escolha do processo numa oficina mecânica — No caso da oficina de capacidade total limitada, o Quadro 11 indicou que o curso de ação mais lucrativo era a fabricação

do Produto B pelo Processo 1. Suponhamos agora que — apesar de um produto adequado resultar dêsse processo — fôsse possível obter melhor qualidade pelo Processo 3. Valeria a pena usar êsse processo a fim de melhorar o atendimento aos fregueses, ou poderia o preço ser aumentado o suficiente para recuperar uma parte do custo adicional?

O programa do QUADRO 11 mostra imediatamente que o custo suplementar resultante do emprêgo do Processo 3 para o Produto B será de, pelo menos, US$ 20,80 por unidade. O custo se eleva porque o emprêgo dêsse processo em vez do Processo 1 retira parte da capacidade que estava sendo usada para a produção do Produto C, que produz uma "margem" de US$ 30 por unidade. Podem ser produzidas até 128 unidades de B pelo Processo 3 em lugar do Processo 1, ao custo de US$ 20,80 por unidade. Se forem fabricadas 128 unidades, a capacidade total da oficina será empregada na produção dos compromissos já assumidos para os três produtos, e a ulterior utilização do Processo 3 para o Produto B será impossível.

3. Custo das propriedades antidetonantes — Na refinaria estudada por CHARNES, COOPER e MELLON, as propriedades antidetonantes (PN) eram especificadas para as gasolinas de Aviação B e C, tanto para a mistura rica como para a pobre. Durante os estudos, interessante problema foi levantado quanto ao custo adicional resultante das especificações da mistura rica. Verificou-se que o custo importava em mais de US$ 1.000 por dia. Em outras palavras, os lucros poderiam ter aumentado nesse montante se fôssem necessárias sòmente propriedades da mistura pobre nos produtos. Cálculos mais aprofundados produziram o resultado — igualmente interessante — de que os requisitos da mistura fraca nesses dois combustíveis não custavam nada; o atendimento das especificações da mistura rica produzia automàticamente um atendimento mais do que suficiente dos requisitos da mistura fraca.

4. Valor da melhoria nos materiais — Os engenheiros da mesma refinaria sugeriram que se a volatilidade da

gasolina de destilação direta usada na composição pudesse ser reduzida, seria possível ter um produto com valor de mercado consideràvelmente maior. Ainda aqui, a programação proporcionou informações significativas e exatas. Foi possível demonstrar que se os RVP dessa mistura pudessem ser reduzidos em uma unidade, de 4,0 para 3,0, o valor de mercado dos produtos poderia ser aumentado em US$ 84 por dia. Assim, se a produção melhorada pudesse ser obtida a custo adicional menor do que êsse, valeria a pena tentá-la; do contrário, não.

Novos investimentos — Algumas das decisões mais importantes da administração são as relativas à escolha de investimentos de novos capitais. A escolha é feita geralmente pela comparação do custo de cada investimento proposto com o aumento de lucro que irá produzir. Quando vários investimentos propostos se referem ao *mesmo* processo produtivo e quando êsse processo produz uma diversidade de produtos, pode ser extremamente difícil, sem o emprêgo de técnica sistemática de computação, determinar o lucro adicional resultante de qualquer dos investimentos ou de qualquer combinação dêsses investimentos.

1. Máquinas-ferramentas — Consideremos, por exemplo, o caso da oficina mecânica visto na Parte II, em que as vendas eram limitadas pela capacidade da maquinaria. Pelo programa do QUADRO 11, tôdas as máquinas de tipos II e III operavam a plena capacidade; e, embora houvesse tempo ocioso nas máquinas de tipo I, êle era muito pequeno, e sòmente existia porque não seria lucrativo preparar a máquina para produzir 8 unidades apenas por semana do Produto A pelo Processo 3. Nessas condições, qual seria o retôrno do investimento em máquina nova de um dos três tipos? Procuraremos a resposta a essa pergunta num dos três tipos de máquinas, imaginando que a administração previu que a procura, os preços e os custos atuais não sofrerão modificações no futuro. Supondo-se que a oficina adquira mais uma máquina do tipo III, ela estará disponível durante 38 horas por semana (um turno com desconto para tempo inativo). Calcula-se sim-

plesmente um nôvo programa nas condições indicadas no QUADRO 9, com a diferença de que o tempo disponível nas máquinas de tipo III será aumentado de 300 para 338 horas.

O nôvo programa indica um aumento na "margem" de US$ 960 por semana — preço de venda menos todos os custos de produção, com exceção dos custos das máquinas que constituem os pontos de estrangulamento. (Para se achar o *lucro* adicional produzido pela nova máquina, devemos subtrair a mão-de-obra, os custos indiretos de operação da máquina, a depreciação e os outros custos resultantes de sua propriedade.)

O resultado decorre do fato de que a máquina adicional tornará possível produzir 32 unidades a mais do Produto C por semana. Observe-se que os US$ 960 de margem sôbre as 38 horas de uso representam sòmente US$ 25,30 por hora, muito menos do que os US$ 38,80 indicados no QUADRO 11. Como há mais tempo disponível nas máquinas de tipo III, os pontos de estrangulamento, com êsse tipo de máquina, tornam-se relativamente menos importantes, ficando mais importantes com os outros dois tipos de máquinas.

2. Matérias-primas — Podemos citar tanto o caso da refinaria de gasolina como o hipotético de escolha de matérias-primas (ambos na Parte II) como duas situações em que seria muito difícil calcular a lucratividade do investimento sem o emprêgo da programação matemática. O problema da refinaria implicava apenas a escolha do modo mais lucrativo de combinar os suprimentos *existentes* de materiais. A programação matemática prontamente indicaria a receita adicional de vendas que poderia ser obtida — a preços atuais — se a refinaria aumentasse suas instalações para aumentar a produção.

Quanto ao outro caso, as matérias-primas tinham de ser compradas no mercado; como mostra o QUADRO 6, não era lucrativa a fabricação do Produto D, em razão do suprimento limitado dêsse material a preços normais. A programação poderia prontamente indicar quanto a companhia poderia investir numa fonte de matérias-primas, a fim de obtê-las a custo mais razoável.

3. Programação e previsões — Nas decisões sôbre investimentos, mais do que nos outros tipos de decisões discutidos, os dados importantes não são tanto os fatos do presente imediato, mas as previsões das condições que prevalecerão no futuro. Nenhuma decisão sôbre investimento pode ser tomada racionalmente a menos que seja possível explorar sua lucratividade dentro de um conjunto de hipóteses a respeito de futuros custos e mercados.

É difícil fazerem-se as necessárias previsões; mas sem o emprêgo de técnica sistemática de cálculo e a exploração completa de suas implicações tornam-se pràticamente impossíveis, tal o volume de tempo, dificuldades e despesas que implicam. É por essa razão que parece provável que a programação matemática venha a ganhar importância na esfera do planejamento, maior mesmo do que a que tem atualmente no campo das decisões operacionais.

Como ocorre nessas aplicações, porém, a programação matemática não é aqui tampouco uma panacéia. A administração poderá empregá-la com grande vantagem no planejamento e na elaboração de diretrizes, mas, primeiramente, os executivos deverão compreendê-la corretamente e utilizá-la com inteligência ao lado dos demais instrumentos de previsão e planejamento. Em outras palavras, o destino da programação matemática encontra-se hoje na mão dos administradores. Os cientistas e inventores realizaram sua tarefa; o problema é agora dos que dela se utilizem.

APÊNDICE

INSTRUÇÕES PARA A SOLUÇÃO DE PROBLEMAS POR PROCESSO ÚTIL E RÁPIDO

Existem diversos métodos para a solução de problemas de programação linear. Um dêles dá resultado em todos os casos, mas leva muito tempo para ser executado; é o "processo geral", que será apresentado adiante. Os outros são relativamente rápidos, mas darão resultado sòmente em certos casos; são, por exemplo, o "processo da preferência de lucros" e o "processo do problema de transporte".

Apenas uma classe muito restrita de problemas pode ser resolvida manualmente, com grande facilidade, pelo "processo da preferência de lucros". Bom exemplo de seu uso foi a programação de dois tipos de máquinas-ferramentas que constituíam ponto de estrangulamento nas operações de uma emprêsa. O exemplo foi publicado com instruções bastante claras quanto ao método de solução [9].

O método mais rápido e freqüentemente mais útil é, de longe, o "processo do problema de transporte" [10]. Como já foi observado, êle tem êsse nome porque foi desenvolvido para determinar os programas de despachos de menor custo, mas pode também ser usado em problemas que não incluam transporte. (Da mesma forma, determinados problemas de transporte não podem ser resolvidos por meio dêle.) Em virtude de sua simplicidade, daremos instruções completas sôbre seu emprêgo, primeiro elaborando um exemplo simples, e depois dando algumas sugestões para a redução de problemas mais complexos a uma forma que permita a solução por êsse método.

---

9) Veja-se A. Charnes, W. W. Cooper e D. Farr, "Linear Programming and Profit Preference Scheduling for a Manufacturing Firm", *Journal of the Operations Research Society of America*, I, maio de 1953, págs. 114 a 129. (O leitor deve estar advertido de que existem muitos erros nos Quadros 3 e 4 dessa publicação.) A técnica é idêntica à usada pela SKF.

10) Êsse processo foi desenvolvido por G. B. Dantzig; veja T. C. Koopmans, *"Activity Analysis of Production and Allocation"* (Nova Iorque, *John Wiley & Sons Inc.*, 1951, págs. 359 a 373).

Processo do Problema de Transporte

O exemplo se refere à distribuição da produção entre três fábricas diferentes, para atender às necessidades de quatro depósitos, de maneira a obter o menor custo possível de frete. Êsse exemplo implica tão poucas variáveis que poderia ser resolvido muito mais ràpidamente pelo raciocínio comum do que pelo uso de processo formal. Entretanto, o exemplo é adequado e serve para explicar o processo, que poderá, então, ser usado para problemas mais complexos, extremamente difíceis de resolver pelo raciocínio comum. Além disso, uma vez compreendido, o processo pode ser consideràvelmente simplificado; daremos sugestões nesse sentido.

O QUADRO A apresenta os dados do problema: as taxas de frete de cada fábrica para cada depósito, a capacidade de produção de cada fábrica e as necessidades de cada depósito. Examinemos as várias etapas de solução.

QUADRO A: *Taxas, Necessidades e Capacidades*

Fábrica	I	II	III	*Necessidades dos Depósitos (t)*
	Taxas de frete (dólares por t)			
Depósito A	1,05	0,90	2,00	35
" B	2,30	1,40	1,40	10
" C	1,80	1,00	1,20	35
" D	1,00	1,75	1,10	25
Capacidade da fábrica (t)	5	60	40	105

Elaboração de programa inicial — Primeiro, pelo processo que se segue, estabelece-se um programa de despachos que satisfaça às necessidades e capacidades fixas, sem levar em consideração os custos. Toma-se a Fábrica I e atribuem-se as 5 toneladas de sua capacidade ao Depósito A. Satisfazem-se as restantes 30 toneladas de necessidades dêsse depósito pela Fábrica II. Depois, usam-se 10 toneladas de capacidade da Fábrica II para satisfazer o Depósito B, e distribuem-se suas 20 toneladas restantes para atender parcialmente ao Depósito C. Completam-se as necessidades de C pela Fábrica III e usa-se o restante da capacidade da Fábrica III para satisfazer o Depósito D. Isso produz o programa inicial do QUADRO B. O processo poderia, naturalmente, ser empregado para fazer essa distribuição de fábricas para depósitos em problemas de qualquer grandeza.

QUADRO B: *Programa Inicial de Despachos* (t)

Fábrica	I	II	III	*Total*
Depósito A	5	30		35
" B		10		10
" C		20	15	35
" D			25	25
Total	5	60	40	105

O programa inicial pode basear-se na intuição quanto à melhor solução, em lugar de no processo completamente "cego" descrito no texto; se a intuição fôr boa, os cálculos seguintes serão muito reduzidos. Inicia-se com qualquer das fábricas e usa-se sua capacidade para atender às necessidades daqueles depósitos que pareça mais econômico atribuir a essa fábrica. Quando a capacidade da fábrica fôr totalmente distribuída, passa-se para outra fábrica qualquer; em primeiro lugar, usa-se sua capacidade para completar as necessidades do depósito parcialmente atendido na última distribuição; continua-se, depois, satisfazendo a qualquer outro depósito ao qual pareça razcável distribuir a produção da segunda fábrica.

A única regra que não deve ser esquecida é a de que cada depósito deve ter necessidades totalmente preenchidas antes de passar-se para outro. Se o número de fábricas fôr maior do que o número de depósitos, é perfeitamente legítimo inverter o procedimento. Inicia-se pela distribuição de um depósito por uma série de fábricas, e quando as necessidades tiverem sido satisfeitas, passa-se para nôvo depósito, usando-o para absorver a capacidade restante da última fábrica, passando-se, então, para outras fábricas.

O modo mais fácil de se fazer o trabalho é usar papel quadriculado; nas explicações que se seguem faremos referência às localizações nos quadros como "quadrículas"; por exemplo: diz-se que o número localizado na Linha B e Coluna III está localizado na Quadrícula B III.

Valôres de linha e valôres de coluna — Em seguida, constrói-se um "quadro de custos", mediante o seguinte processo:

1) Colocam-se as taxas de frete, tomadas do QUADRO A, nas rotas que estão sendo usadas no QUADRO B. Isso produzirá o QUADRO C, com exceção dos "valôres de linha" e dos "valôres de coluna".

2) Colocam-se os "valôres de linha" e os "valôres de coluna" indicados no QUADRO C. Para fazer isso, atribui-se um valor de linha qualquer à Linha A; escolhemos 0,00 como êsse valor, mas poderia ter sido qualquer outro. Agora, em cada quadrícula da Linha A que contém uma taxa, coloca-se um valor de coluna — positivo ou negativo — de modo que a soma dos valôres de linha e de coluna sejam iguais ao valor do quadro. Na Coluna 1 colocamos um valor de coluna de 1,05, porque 1,05 + 0,00 = 1,05, encontrado na Quadrícula A-I; na Coluna II colocamos um valor de 0,90, porque 0,90 + + 0,00 = 0,90 na Quadrícula A-II.

3) Com isso, foram atribuídos todos os valôres de coluna que podemos atribuir com base no valor de linha para a Linha A. Em seguida, devemos atribuir outros valôres de linha com base nesses valôres de coluna. Procuramos, então, linhas que não tenham valor de linha, mas contenham taxas nas quadrículas para as quais existam valôres de coluna. Observamos

QUADRO C: *Taxas para as Rotas Usadas no Quadro B (em dólares por t)*

Fábrica	I	II	III	*Valor de Linha*
Depósito A	1,05	0,90		0,00
" B		1,40		0,50
" C		1,00	1,20	0,10
" D			1,10	0,00
Valor de coluna	1,05	0,90	1,10	

que as Linhas B e C têm taxas na Coluna II, que tem um valor de coluna de 0,90. O valor de linha para a Linha B deve ser estabelecido em 0,50, porque 0,90 + 0,50 = 1,40, que é a taxa em B-II. Pelo mesmo raciocínio, obtemos 0,10 como valor de linha para a Linha C.

4) Como não pode ser atribuído mais nenhum valor de linha, voltamos à atribuição dos valôres de coluna, procurando as taxas que tenham valor de linha, mas não de coluna. Observamos que existe 1,20, na Quadrícula C-III, que tem um valor de linha de 0,10, mas nenhum valor de coluna. O valor de coluna deverá ser de 1,10, a fim de que se tenha 1,10 + 0,10 = 1,20.

5) Finalmente, estabelece-se o valor de linha que está faltando. Na Linha D existe 1,10 na Quadrícula D-III, com um valor de coluna de 1,10 e nenhum valor de linha. Se o total dos valôres de linha e de coluna deve igualar o valor na quadrícula, o valor de linha deve ser 0,00.

Êsse processo de atribuição alternada de valôres de linha e de coluna pode estender-se ao preenchimento de valôres de linha e de coluna para qualquer quadro de custos, desde que não exista "degenerescência" no quadro correspondente de rotas. Êsse têrmo e um método de tratar da matéria serão descritos adiante.

Na ausência de degenerescência, a impossibilidade de se completarem os valôres de linha e de coluna, ou a existência de contradição entre êsses valôres, indicam que houve êrro, quer na elaboração do quadro de rotas (QUADRO B), quer na colocação do quadro de custos (QUADRO C) das taxas que correspondem às rotas no Quadro B. Por outro lado, não é essencial que os valôres de linha sejam distribuídos na ordem A, B, C e D e os valôres de coluna na ordem, I, II e III; êles podem ser derivados em qualquer ordem que seja possível.

O quadro de custos — Em seguida, transformamos o QUADRO C num quadro de custos completo, o QUADRO D, preenchendo tôdas as quadrículas em branco com o total dos valôres de linha e de coluna. Por exemplo, o 1,55 na Quadrícula B-I é o total do valor de linha para a Linha B (0,50) e o valor de coluna para a Coluna I (1,05). Os dados assim obtidos aparecem no QUADRO D em tipo comum, ao passo que os dados extraídos do QUADRO C, que correspondem às rotas atualmente em uso (no QUADRO B), são indicados em grifo. (Na prática, o quadro de custos pode ser elaborado diretamente, sem o preenchimento dos valôres de linha e de coluna.)

QUADRO D: *Custos para as Rotas Usadas no Quadro B (em dólares por t)*

Fábrica	I	II	III	*Valor de Linha*
Depósito A	*1,05*	*0,90*	*1,10*	0,00
" B	*1,55*	*1,40*	*1,60*	0,50
" C	*1,15*	*1,00*	*1,20*	0,10
" D	*1,05*	*0,90*	*1,10*	0,00
Valor de coluna	1,05	0,90	1,10	

Revisão do programa — Dispomos agora de um conjunto completo de quadros: um de taxas, outro de rotas e outro de "custos". Em seguida, procuramos a melhor modificação a fazer no quadro de rotas a fim de reduzir o custo do frete. Para encontrar essa modificação, comparamos o quadro de custos, D, com o quadro de taxas, A, procurando a quadrícula em que o número no QUADRO D seja *maior,* pela maior diferença, do que o número correspondente no QUADRO A. Trata-se da Quadrícula B-III. O fato de o QUADRO D indicar 1,60, enquanto que o QUADRO A mostra 1,40, sugere-nos (por razões a serem explicadas adiante) que, se efetuarmos despachos da Fábrica III para o Depósito B, e realizarmos os reacertos devidos no restante do programa, serão economizados 20 *cents* por tonelada despachada por essa nova rota.

O próximo problema é descobrir que reacertos deverão ser feitos no resto do programa e, portanto, encontrar quanto *podemos* despachar pela nova rota de III para B. Para fazer isso, construímos o QUADRO E, copiando primeiro o QUADRO B (na prática não haveria necessidade de copiar o quadro) e depois realizando o processo que se segue.

1) Na Quadrícula B-III escreve-se $+ x$: essa é a quantidade, ainda desconhecida, que será despachada pela nova rota de III para B. Com isso, sobrecarregamos a capacidade da Fábrica III pela quantia x, e devemos, portanto, diminuir de x a quantidade que III deve fornecer a outro depósito. Isso feito, será necessário completar o suprimento dêsse depósito por outra fábrica, e assim por diante.

2) Para localizar as fábricas e os depósitos que *não* serão afetados, coloca-se, no QUADRO E, um asterisco ao lado de qualquer número que seja o único na sua linha *ou* na sua coluna, lembrando-se que o x em B-III é contado como um número. Isso leva à colocação de um asterisco ao lado do 5 em A-I e ao lado de 25 em D-III. Considerando-se como não existentes os números que levam asteriscos, examina-se novamente o quadro e coloca-se um asterisco ao lado de quaisquer números que agora ficaram sòzinhos em sua linha ou coluna, em virtude da eliminação anterior dos números com asteriscos. Isso leva à colocação de um asterisco ao lado de 30 em A-II, porque com o 5 em A-I com asterisco, A-II ficou só em sua linha.

Procuram-se novamente no quadro os números que ficaram isolados em suas linhas ou colunas. Neste caso não encontramos nenhum e, assim, a operação está terminada; caso contrário, continuam-se as eliminações, até que não sejam encontrados números isolados.

QUADRO E: *Modificações a Serem Efetuadas nas Rotas do Quadro B* (t)

Fábrica	I	II	III	*Total*
Depósito A	5*	30*		35
" B		10−x	+x	10
" C		20+x	15−x	35
" D			25*	25
Total	5	60	40	105

3) Tendo terminado os processos anteriores, fazemos agora todos os ajustes necessários, modificando as quantidades a serem despachadas nas rotas que *não* tenham sido eliminadas pelo asterisco. (Com alguma prática, as rotas afetadas por uma mudança podem ser fàcilmente encontradas, sem que seja necessário colocar asteriscos nas rotas não afetadas.) O $+ x$ em B-III sobrecarrega a Fábrica III; dessa maneira, escreve-se $- x$ ao lado do 15 em C-III. Como ao Depósito C agora está faltando x, escreve-se $+ x$ ao lado

de 20 em C-II. Agora a Fábrica II ficou sobrecarregada; assim, escreve-se — x ao lado de 10 em B II. Êste último — x equilibra o + x da Linha B com o qual iniciamos, de maneira que o efeito do uso da nova rota foi completamente reajustado em todo o programa.

4) Uma vez que iremos economizar 20 *cents* por tonelada despachada pela nova rota de III para B, desejamos desviar tôda a tonelagem possível para essa rota. Portanto, observamos tôdas as quadrículas nas quais escrevemos — x e descobrimos que o menor número com — x ao lado é o 10 em B-II. Êsse é o limite que se pode desviar e, portanto, o valor da incógnita x. Elaboramos agora o QUADRO F, subtraindo 10 no QUADRO E em qualquer — x escrito e adicionando 10 onde exista + x.

Êsse é o nosso primeiro programa revisto de despachos. Multiplicando os despachos de cada rota pela taxa dessa rota, o leitor poderá verificar que a redução no custo total de frete foi de fato 20 *cents* por tonelada vêzes 10 toneladas desviadas para a nova rota.

QUADRO F: *Primeiro Programa Revisto de Despachos (t)*

Fábrica	I	II	III	*Total*
Depósito A	5	30		35
" B			10	10
" C		30	5	35
" D			25	25
Total	5	60	40	105

Repetição do processo — O resto da solução se obtém pela simples repetição do processo descrito para o primeiro melhoramento no programa. Construímos nôvo quadro de custos, G, copiando em primeiro lugar do QUADRO A as taxas para as rotas usadas no QUADRO F (essas taxas aparecem em grifo no QUADRO G, calculando depois os valôres de linha e de coluna e depois preenchendo as outras quadrículas em tipo comum). Em seguida, comparamos, quadrícula por quadrícula, o QUADRO G com o QUADRO A, observando que a quadrícula com a maior diferença em favor de G é D-I (1,05 contra 1,00). Colocamos, portanto, + x em D-I no QUADRO H, removemos as quadrículas "isoladas" com os asteriscos, e seguimos colocando + x e —x, como já foi indicado. A quadrícula de menor número com um — x ao lado é A-I com um valor de 5; portanto, adicionamos ou subtraímos 5, conforme esteja indicado por + x ou — x, para obter o QUADRO J.

QUADRO G: *Custos para as Rotas Usadas no Quadro F (Em dólares por t)*

Fábrica	I	II	III	*Valor de Linha*
Depósito A	*1,05*	*0,90*	1,10	0,00
" B	1,35	1,20	*1,40*	0,30
" C	1,15	*1,00*	*1,20*	0,10
" D	1,05	0,90	*1,10*	0,00
Valor de coluna	1,05	0,90	1,10	

QUADRO H: *Modificações a Serem Efetuadas no Quadro F (t)*

Fàbrica	I	II	III	*Total*
Depósito A	5—x	30+x		35
" B			10*	10
" C		30—x	5+x	35
" D	+x		25—x	25
Total	5	60	40	105

QUADRO J: *Segundo Programa Revisto de Despachos (t)*

Fábrica	I	II	III	*Total*
Depósito A		35		35
" B			10	10
" C		25	10	35
" D	5		20	25
Total	5	60	40	105

QUADRO K: *Custos para as Rotas Usadas no Quadro J (em dólares por t)*

Fábrica	I	II	III	*Valor de Linha*
Depósito A	1,00	*0,90*	1,10	0,00
" B	1,30	1,20	*1,40*	0,30
" C	1,10	*1,00*	*1,20*	0,10
" D	*1,00*	0,90	*1,10*	0,00
Valor de coluna	1,00	0,90	1,10	

Do QUADRO J elaboramos um nôvo quadro de custos, K. Comparando o QUADRO K com o QUADRO A, descobrimos que *cada* tipo comum no QUADRO K é menor do que o dado correspondente no QUADRO A. Não há mais possibilidade de melhoramentos; de fato, qualquer modificação efetuada no programa do QUADRO J resultará em *aumento* no custo do frete. Houvesse quadrículas em que o número em tipo comum no QUADRO K fôsse igual à taxa do QUADRO A, isso teria indicado uma rota que poderia ser usada sem aumentar ou reduzir o custo total do frete.

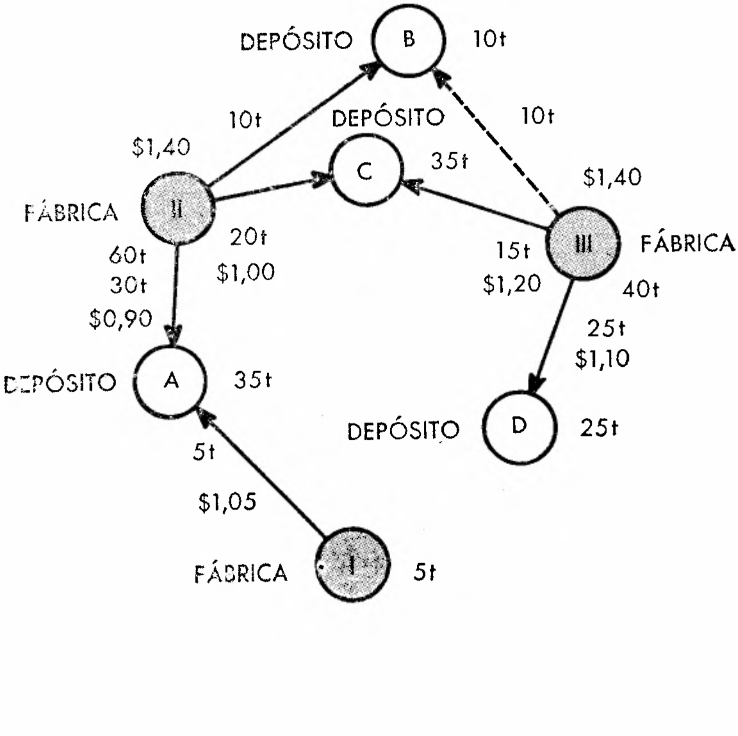
Porque o processo funciona — Para se compreender porque êsse método funciona, consideremos a Figura A. Essa figura corresponde ao programa de despachos indicado no QUADRO B, com uma linha ligando cada fábrica a cada depósito para onde deverão ser efetuados os despachos. Em cada linha vem indicada a tonelagem transportada ao longo da rota, além da taxa de frete aplicável a essa rota, de acôrdo com o QUADRO A. A figura também mostra uma linha tracejada, da Fábrica III ao Depósito B, correspondente ao *x* que colocamos na Quadrícula B-III do QUADRO E.

Suponhamos agora que sejam despachadas *x toneladas* da Fábrica III para o Depósito B. Cada tonelada despachada custará US$ 1,40, que é a taxa entre êsses dois pontos. Mas, para cada tonelada que B obtenha de III, necessitará de uma tonelada a menos de II, economizando, dessa maneira, US$ 1,40 de frete. A Fábrica III, por outro lado, não poderá suprir como antes tanto B como C, ao passo que a Fábrica II agora tem excesso de produção. A solução mais simples é fazer com que III despache menos para C, assim economizando US$ 1,20 por tonelada, enquanto que II compensará a diferença a um custo de frete de US$ 1 por tonelada. O efeito líquido será uma economia de 20 *cents* por tonelada, mesmo que os despachos de III para B custem tanto quanto os despachos anteriores de II para B.

Essa economia de 20 *cents* por tonelada é exatamente a diferença entre US$ 1,60 da Quadrícula B-III do QUADRO D e US$ 1,40 na mesma quadrícula do QUADRO A. Isso ocorre em geral; os dados em tipos comuns num "quadro de custos" indicam a economia *líquida* que pode ser realizada sôbre *outras* rotas pelo reacêrto do programa, desde que despachos diretos sejam feitos ao longo da rota em questão. Em outras palavras, os dados em tipos comuns indicam o custo da "não utilização" de uma rota; o custo da utilização é, simplesmente, a taxa de frete tal como vem indicada no QUADRO A.

O melhor programa possível só terá sido encontrado quando não haja mais nenhuma rota não utilizada para a qual o custo de usá-la seja menor do que o custo de *não* usá-la. Em qualquer etapa dêsse processo, poderá haver mais do que uma rota na qual o custo de não utilização seja maior do que o custo de utilização. Demos a regra segundo a qual a modificação deve ser feita introduzindo-se a rota para a qual seja máxima a diferença entre os dois custos. Essa regra não é absoluta, mas acredita-se que seu emprêgo geralmente reduza o número de passos necessários para se chegar ao melhor programa possível.

FIGURA A: *Rotas Usadas no Quadro B*



Qualquer programa é o melhor programa possível se não existem rotas não usadas para as quais o custo de utilização seja menor do que o custo de não utilização. Êsse é um fato importante, porque significa que uma solução pode ser conferida simplesmente com a elaboração do correspondente quadro de custos. Não há necessidade de se conferir todo o trabalho que produziu a solução. Se há erros, constitui perda de tempo voltar atrás para encontrá-los; no fim, tudo dará certo, bastando que se continuem efetuando mudanças sucessivas até que surja o melhor programa possível. É essa mais uma razão pela qual o processo do problema de transporte é realmente adequado para computação manual, enquanto que o processo geral não o é; existe uma forma de conferência razoàvelmente simples para a exatidão da solução final obtida pelo processo geral, mas a correção de quaisquer erros cometidos é muito mais difícil.

A figura indica, também, porque chegamos ao valor de 10 para o x do GRÁFICO E. Se efetuarmos despachos diretos de III para B, devemos reduzir os despachos de II para B e de III para C. Ambos não podem ser reduzidos para menos de zero. A rota de II para B é a de menor carga, 10 toneladas, sendo, portanto, de 10 toneladas a maior quantidade que podemos despachar de III para B. O QUADRO E tem $-x$ ao lado de cada rota que será reduzida como resultado da modificação e $+x$ ao lado de cada rota que será aumentada. As rotas com asteriscos no QUADRO E são as que *não* estão no "circuito" III-B-II-C-III.

Em alguns casos poderiam ser feitos reacertos que dariam maior economia por tonelada ou possibilitariam o desvio de maiores tonelagens do que as resultantes do uso das regras dadas acima. É perfeitamente possível realizar modificações mais gerais no programa em qualquer etapa, desde que sejam efetuadas de acôrdo com a regra dada para início do programa. Por outro lado, êsses reajustes gerais nunca são *necessários,* porque é absolutamente certo que o método de solução por etapas acima descrito conduzirá finalmente ao melhor programa possível.

Solução para a degenerescência — O processo descrito serve para resolver qualquer problema — de qualquer dimensão — de "transporte", com exceção daqueles em que apareça a degenerescência num quadro de rotas, em alguma etapa de solução do problema.

O quadro de rotas está degenerado se pode ser dividido em duas ou mais partes, cada uma das quais contendo um grupo de fábricas cuja capacidade combinada satisfaça exatamente as necessidades combinadas dos depósitos a elas atribuídos. O QUADRO L dá exemplo de situação dêsse tipo, que poderia ter-se originado da solução do exemplo que acabamos de mostrar.

Os Depósitos A e D esgotam exatamente a capacidade da Fábrica II, enquanto que os Depósitos B e C usam tôda a capacidade das Fábricas I e III. Nessas circunstâncias, o processo não funciona, porque é impossível construir um quadro de custos correspondente a um quadro degenerado de rotas (no caso, o quadro de custos correspondente ao QUADRO L).

QUADRO L: *Programa de Despachos que Poderia Ter Ocorrido Antes de se Chegar à Solução*

Fábrica	I	II	III	*Total*
Depósito A		35		35
" B	5		5	10
" C			35	35
" D		25		25
Total	5	60	40	105

Essa dificuldade pode ser resolvida de forma simples: se o número de fábricas fôr menor do que o de depósitos, divide-se uma unidade de despachos por duas vêzes o número de fábricas. (Se os despachos forem medidos por décimos de tonelada, por exemplo, dividimos 1/10 t — não 1 t — pelo dôbro do número de fábricas.) Toma-se qualquer número conveniente que seja menor do que êsse quociente, adicionando-o à capacidade de cada uma das fábricas; adiciona-se a mesma quantidade *total* à capacidade de qualquer depósito. Se o número de depósitos fôr menor do que o número de fábricas, inverte-se a regra.

Em qualquer caso, resolve-se o problema como se as quantidades adicionais constituíssem partes reais das necessidades e capacidades; depois, quando o problema tiver sido resolvido, arredondam-se todos os números fracionários a unidade mais próxima de despacho. (Uma rota com menos de meia unidade é arredondada para zero.) *A solução assim encontrada não é aproximada: é exata.*

Quando Usar

Em sua aplicação original, — tal como vimos no exemplo estudado — o problema de transporte consiste na distribuição de um conjunto de recursos, a um conjunto de destinações, de tal maneira que seja mínimo o custo total do transporte das fontes às destinações. A capacidade individual de cada fonte e as necessidades individuais de cada destino são antecipadamente fixadas, e a capacidade total é igual às necessidades totais. Uma unidade das necessidades de qualquer destino pode ser satisfeita por uma unidade de capacidade de qualquer fonte, variando sòmente o custo do frete de acôrdo com a fonte utilizada.

Êsse problema pode ser fàcilmente visto como um problema de distribuição de um conjunto de *insumos* [11] de qualquer natureza a uma *produção* igualmente de qualquer natureza, de maneira que o *custo total de transformação* seja mínimo. Os insumos podem ser estoques disponíveis de várias matérias-primas, por exemplo, em vez da capacidade de várias fábricas, enquanto que a produção pode ser representada pelas quantidades fabricadas dos vários produtos, em vez das quantidades de um único produto despachadas para vários depósitos.

Não há realmente diferença quando o problema seja maximizar lucros em vez de minimizar custos. No lugar de um "quadro de taxas" que dê o custo de transformação de uma unidade qualquer de insumo em outra unidade qualquer de produção, temos um "quadro de margens" fornecendo a margem que será realizada por essa transformação. Essa margem é a receita obtida pela venda da unidade de produção, menos os custos variáveis para a sua produção.

O programa é desenvolvido exatamente da forma vista no exemplo dado, com a diferença de que as novas "rotas" são introduzidas quando a margem pela não utilização da rota fôr menor do que a margem pelo seu emprêgo, e não quando o custo de não usá-la fôr maior do que o custo de sua utilização.

Para ser resolvido pelo processo de transporte, o problema deve ter as seguintes características formais:

1) Uma unidade *qualquer* de insumo pode ser usada para produzir uma unidade *qualquer* de produção.

2) O custo ou a margem resultantes da conversão de uma unidade de determinado insumo em uma unidade de determinada produção podem ser expressos

---

11) *Nota do Tradutor*: no original "input". A palavra insumo vem sendo usada para traduzir "input", ou seja, fatôres de produção aplicados.

por uma única quantidade, sem se levar em consideração o número de unidades produzidas.

3) A quantidade de cada insumo e produção é antecipadamente fixada, e o total de insumos é igual ao total da produção.

Se o problema não puder ser colocado na forma especificada por essas três características, não poderá ser resolvido pelo processo de transporte. Entretanto, essas são características *formais*, e é muitas vêzes possível introduzir artifícios que colocarão o problema nessa forma, mesmo que à primeira vista êle pareça completamente diferente. É impossível dar lista completa dêsses artifícios. Trataremos dos mais comuns, que tornam possível a solução pelo processo de transporte de todos os problemas discutidos no artigo até o título "Que E Como Produzir".

Insumos e produção não fixados antecipadamente — Em muitos problemas, conhecemos adiantadamente apenas a quantidade disponível de determinado insumo e a quantidade de determinada produção que poderia ser vendida. O que se deseja é programar para se determinar quanto de cada um será lucrativo utilizar ou fazer. Isso viola o terceiro requisito citado anteriormente, mas a dificuldade é fàcilmente contornada pela introdução de insumos e produção fictícios.

Se, por exemplo, a capacidade total da fábrica excede as necessidades totais dos depósitos, criamos um depósito fictício e o tratamos exatamente como se fôsse real. O custo ou o lucro resultantes do suprimento de uma unidade ao depósito fictício por qualquer fábrica são colocados no quadro de taxas como zero, e as necessidades do depósito fictício são consideradas iguais à diferença entre a capacidade total e as necessidades reais totais. Aquela parcela da capacidade de qualquer fábrica que o programa final atribui ao depósito fictício é a capacidade que deverá ser deixada ociosa.

Se a produção potencial total excede o total dos insumos disponíveis, criamos um insumo fictício igual à diferença entre os dois. O custo ou a margem do suprimento de uma unidade de produção resultantes do insumo fictício, são estabelecidos em zero no quadro de custos ou margens; quando o programa final pedir produção com os insumos fictícios, essa quantidade de produção potencial, na realidade, não deverá ser produzida.

Num caso como o descrito na Parte II sob o título "Onde Vender", é possível que os insumos em potencial não sejam utilizados e, ao mesmo tempo, a produção em potencial não seja executada. Isso requer o emprêgo tanto de insumos como de produção fictícios. Uma vez que nem a quantidade total dos insumos que serão realmente utilizados, nem a quantidade total da produção real são conhecidas até que o programa seja computado, a quantidade de insumo fictício deve ser estabelecida como sendo igual ou maior do que o total da produção real e potencial, e a quantidade da produção fictícia deve ser estabelecida como igual ou maior do que o total do insumo potencial e real. As quantidades atribuídas fictìciamente são arbitrárias, mas o total dos insumos reais mais os fictícios deve ser igual ao total da produção real mais a fictícia. O programa final indicará certa quantidade de produção fictícia a ser suprida por um insumo fictício, mas êsse dado não tem nenhum significado e deve ser desprezado.

Insumos e produção a preços variáveis — Pode ocorrer que uma fábrica tenha possibilidade de fabricar certa quantidade de produção a determinado custo e quantidade adicional a custo maior (por exemplo, pelo uso de horas extras), ou que certa quantidade de um material possa ser obtida a um preço e quantidades adicionais a preços mais elevados. Pode também ser possível vender certa quantidade de produto a um preço e quantidades adicionais a preços menores. Êsses casos são resolvidos tratando-se o insumo em cada custo como um insumo separado, ou a produção a cada preço como uma produção isolada. Dessa maneira, podemos montar um quadro de custos ou margens que mostre um único custo unitário ou uma única margem para a conversão de qualquer insumo em qualquer produção.

Observe-se que êsse método *não* funcionará se o preço pelo qual *tôda* a produção fôr vendida depender da quantidade vendida. Como foi assinalado na Parte II em "Preço, Volume e Lucro", êsse *não* é um problema de programação *linear*.

Processos impossíveis — O primeiro requisito formal assim estabelecido requer que uma unidade de qualquer produção seja produzida por uma unidade de qualquer insumo. Em alguns casos, determinadas combinações de insumo-produção podem ser ou prática ou totalmente impossíveis. Por exemplo, o serviço de frete ligando dada fábrica a determinado depósito pode ser tão deficiente que a administração em caso algum permitirá seu uso; pode, por outro lado, ser simplesmente impossível fazer determinado produto com certo material. Essa situação não causa nenhuma dificuldade na solução do problema, porque tudo o que temos de fazer é atribuir um "custo" fictício, extremamente alto, para a transformação dêsse insumo nessa produção. Podemos, assim, estar certos de que o processo não desejado não aparecerá na solução final.

Unidades artificiais — Em outros problemas, a *quantidade* de produção que pode ser obtida de uma unidade de insumo depende daquela produção em particular e do insumo em questão. Em problemas que implicam a escolha de matérias-primas, por exemplo, o rendimento de qualquer material pode depender da produção, e a quantidade de material necessário para determinada

QUADRO M: *Margens, Potencial de Vendas e Disponibilidades*

Produto	A	B	C	D	*Quantidade Disponível (em toneladas equivalentes)*
Material	Margem por Tonelada Equivalente				
I a $48/t	$17	$32	$4	$17	100
I a $72/t	(7)*	8	(20)*	(7)*	100
II a $24/t	19	24	12	14	100
II a $36/t	1	6	(6)*	(4)*	100
III a $18/t	15	24	16**	(5)*	150
III a $24/t	5	14	6	(15)*	250
Vendas em potencial (em toneladas equivalentes)	240	150	240	90	

* Quantidade negativa.
** *Cálculo para o Produto C e o material de teor III a preço normal* — Como vem indicado no quadro de rendimentos (5), 2,5 t de III substituem 1,5 t de I, de modo que 1 t de III = 0,6 toneladas equivalentes. Conforme se vê no mesmo quadro, 1,5 t de I é necessária para produzir 1 t de C, do modo que 1 t de C = 1,5 tonelada equivalente.
Material disponível: 250 t, ou 0,6 × 250 = 150 t equivalentes.
Potencial de vendas: 160 t, ou 1,5 × 160 = 240 t equivalentes.
Preço do produto: US$ 135 por t, ou 135/1,5 = US$ 90 por tonelada equivalente.
Custo de transformação: US$ 66 por tonelada produzida, ou 66/1,5 = US$ 44 por tonelada equivalente.
Custo da matéria-prima: US$ 18 por tonelada, ou 18/0,6 = US$ 30 por tonelada equivalente.
Margem: US$ 90 (preço de venda) — US$ 44 (custo de transformação) — US$ 30 (custo da matéria-prima) = US$ 16 por tonelada equivalente.

produção pode depender da qualidade do material usado. Êsses problemas não podem, em geral, ser resolvidos pelo processo de transporte, mas em alguns casos os dados podem ser simplificados de forma a permitirem solução por êsse processo.

Isso ocorreu no primeiro problema discutido de matérias-primas. O artifício foi expressar cada produção, não em têrmos da quantidade de produto, mas em têrmos da quantidade de material de teor I que seria necessária para produzi-lo, e expressar os insumos dos materiais de teores II e III em têrmos da quantidade de material de teor I que poderiam substituir. Isso tornou necessário, naturalmente, fazer modificações nos custos unitários de compras dos materiais II e III e em todos os custos unitários de transformação. O QUADRO M mostra a forma que o QUADRO 5 deveria ter antes de se computar o programa do QUADRO 6.

Deve estar clara agora a razão pela qual os casos subseqüentes não puderam ser resolvidos pelo processo de transporte. Se o problema da matéria-prima fôsse modificado de modo que a inferioridale de rendimento dos materiais de baixo teor variasse de produto para produto, não seria mais possível expressar êsses insumos de tal maneira que uma unidade de qualquer insumo pudesse produzir uma unidade de qualquer produção.

Nos problemas da oficina mecânica, a quantidade de tempo em uma máquina que poderia ser substituída por uma hora em outra máquina variava de acôrdo com o produto fabricado e o processo utilizado. O problema da gasolina de aviação é ainda mais complexo, porque uma simples unidade de qualquer produção resulta da combinação de diversos insumos.

São êsses os problemas que demandam o uso do processo geral.

O Processo Geral

"Método Simplex" é o nome técnico do processo geral. Existem atualmente duas versões ligeiramente diferentes dêsse método. A versão original[12] funciona realmente bem só para pequenos problemas, em virtude de os erros nos arredondamentos se avolumarem de etapa em etapa. A computação de grandes problemas por meio de máquinas é melhor executada pelo método modificado de CHARNES e LEMKE[13].

O processo geral pode ser usado manualmente com o auxílio de uma máquina de calcular comum, quando é pequeno o número de variáveis, como vimos nos exemplos discutidos no texto. Entretanto, requer o uso de computadores eletrônicos na maioria dos problemas práticos, não pela dificuldade, mas pela simples quantidade de cálculos aritméticos necessários. O caso discutido do problema simplificado da gasolina de aviação exigiu vários dias de computação manual para solução pelo processo geral, ao passo que a resposta a um problema com o dôbro de componentes e duas vêzes o número de produtos finais, num computador eletrônico, poderia ser obtida em uma hora ou menos. Existem, ainda, algumas limitações de dimensão para solução de problemas pelos computadores existentes com os códigos de instruções atuais e, por outro lado, alguns problemas que podem ser resolvidos custam tempo ou dinheiro demais para que valha a pena resolvê-los. Entretanto, em muitos casos, a análise matemática de um problema muito grande pode indicar que há possibilidade de executá-lo ou subdividi-lo em partes exeqüíveis.

---

12) Veja-se A. CHARNES, W. W. COOPER e A. HENDERSON, *"An Introduction to Linear Programming"* (Nova Iorque, *John Wiley & Sons*, Ind., 1953).

13) Veja-se *Proceedings of the Association for Computing Machinery* (Pittsburgh, *Richard Rimbach Associates*, 1952, págs. 97 e 98).

Alguns problemas indubitàvelmente permanecerão sem solução, mas, enquanto não tenham sido feitas muitas aplicações práticas, não se poderá saber se isso virá a constituir obstáculo freqüente ou raro. Deve ser lembrado que rápido progresso está sendo realizado, tanto na pesquisa matemática[14], como na construção de computadores e na elaboração de códigos de computação. Se as emprêsas acharem que é importante resolver problemas de programação linear, é certo que serão encontrados meios de se resolver a grande maioria dos problemas que venham a ocorrer.

14) Importante progresso recente encontra-se em A. CHARNES e C. E. LEMKE, *"Computational Theory of Linear Programming I; The Bounded Variables Problem"*, O.N.R. Research Memorandum n.º 10 (Pittsburgh, Graduate School of Industrial Administration, Carnegie Institute of Technology, 1954).