

# O MODELO DE FORMAÇÃO DE PREÇOS DE ATIVOS — (CAPITAL ASSET PRICING MODEL) TEORIA E EVIDÊNCIA

1. Introdução;
2. Conceito de dominância;
3. Função de utilidade do investidor;
4. Diversificação de Markowitz;
5. Fronteira eficiente;
6. Seleção de porta-fólio;
7. Pressupostos básicos do modelo de formação de preços de ativos;
8. Desenvolvimento do modelo;
9. Estudo de Douglas;
10. Estudo de Lintner;
11. Estudo de Miller e Scholes;
12. Estudo de Black, Jensen e Scholes;
13. Estudo de Fama e MacBeth;
14. Conclusão.
15. Anexo

Fernando Bins Luce\*

Jorge Queiroz de Moraes Jr.\*\*

\* Professor colaborador do programa de pós-graduação em administração da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Candidato ao título de Ph. D. pela Michigan State University.

\*\* Professor assistente da Escola de Administração de Empresas de São Paulo, da Fundação Getúlio Vargas. Candidato ao título de Ph. D. pela Michigan State University.

## 1. INTRODUÇÃO

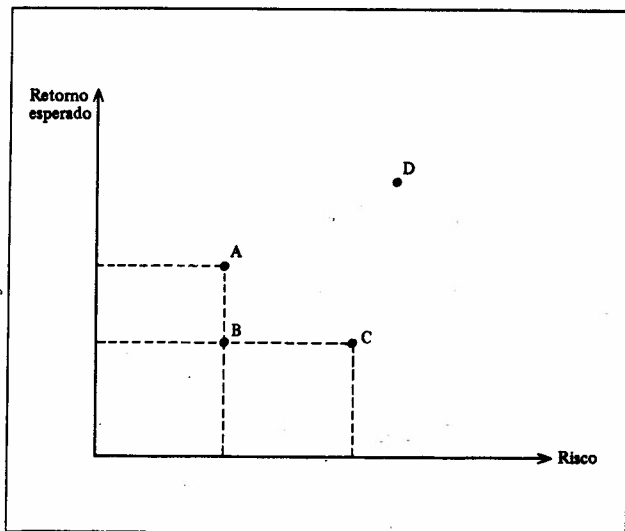
Este trabalho visa sintetizar os mais recentes desenvolvimentos na área do mercado de capitais, especificamente na formação de preços de ativos.

Partindo-se do conceito de dominância e do conceito de retorno esperado e variância deste retorno, será apresentada a teoria e a evidência que sustentam o modelo de formação de preços de ativos (*capital asset pricing model*).

## 2. CONCEITO DE DOMINÂNCIA

O conceito de dominância estabelece que o investidor racional prefere o investimento que proporcione o maior retorno esperado para o mesmo nível de risco ou, inversamente, o menor risco para o mesmo retorno esperado.

Figura 1



No espaço risco-retorno, ilustrado na figura 1, o ativo B domina o ativo C, pois apresenta menor risco para o mesmo retorno esperado. Por outro lado, o ativo A domina o ativo B, uma vez que seu retorno esperado é maior para o mesmo nível de risco. Evidentemente, o ativo A domina o ativo C. No entanto, nada pode ser dito, em termos de dominância, com respeito ao ativo D em relação a qualquer um dos outros ativos da figura, pois tanto o seu retorno esperado quanto o seu risco são maiores do que os dos ativos A, B e C. Por outro lado, fica claro que a decisão de investimento resume-se a uma escolha entre os ativos A e D.

## 3. FUNÇÃO DE UTILIDADE DO INVESTIDOR

A decisão de investimento entre A e D dependerá da utilidade do investidor, que é definida como função do

retorno esperado e do risco (medido pelo desvio padrão ou variância dos retornos), simbolicamente:

$$U = U[E(R), \tau R]$$

onde:

$U$  — função de utilidade do investidor  
 $E(R)$  — retorno esperado  
 $\tau R$  — desvio padrão dos retornos

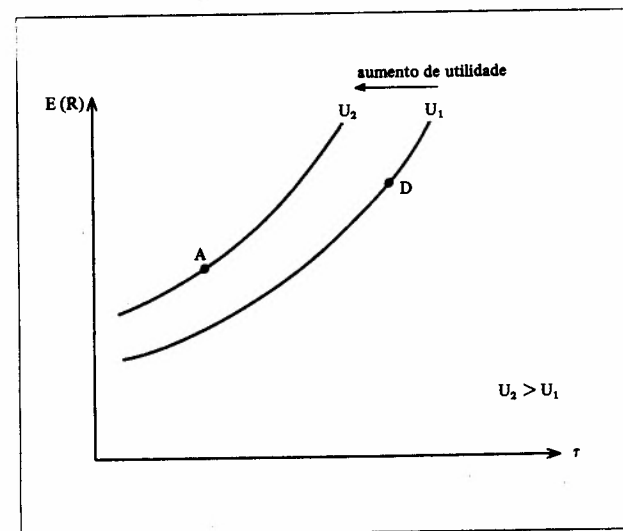
sendo que:  $\frac{\delta U}{\delta E(R)} > 0$ ;  $\frac{\delta U}{\delta \tau R} < 0$

Desta forma, um aumento no retorno esperado, *ceteris paribus*, implica um aumento de utilidade do investidor; e um aumento de risco, *ceteris paribus*, resulta em uma redução de utilidade.

No contexto risco-retorno podem ser traçadas curvas de utilidade constante chamadas curvas de indiferença ou isoutilidade para as quais  $dU = 0$ .

Na figura 2 o investidor escolherá o ativo  $A$ , pois está situado em uma curva de indiferença com maior utilidade do que a curva de indiferença do ativo  $D$ .

Figura 2



#### 4. DIVERSIFICAÇÃO DE MARKOWITZ

Até então, os ativos  $A$  e  $D$ , para efeito de decisão de investimento, foram considerados como sendo mutuamente exclusivos. No entanto, o investidor poderá colocar parte de sua poupança em  $A$  e parte em  $D$ .

Diversificação de Markowitz consiste na combinação de ativos, cujos retornos não sejam perfeita e positivamente correlacionados.

Suponhamos que o indivíduo coloque uma proporção  $\alpha$  (sendo  $0 < \alpha < 1$ ) de sua poupança no ativo  $A$  e  $(1 - \alpha)$  no ativo  $D$ , formando um porta-fólio. O retorno esperado deste porta-fólio será dado por:

$$E(R_p) = \alpha E(R_A) + (1 - \alpha) E(R_D) \quad (1)$$

onde:

$E(R_A)$  — retorno esperado do ativo  $A$   
 $E(R_D)$  — retorno esperado do ativo  $D$

O desvio padrão do retorno do porta-fólio será:

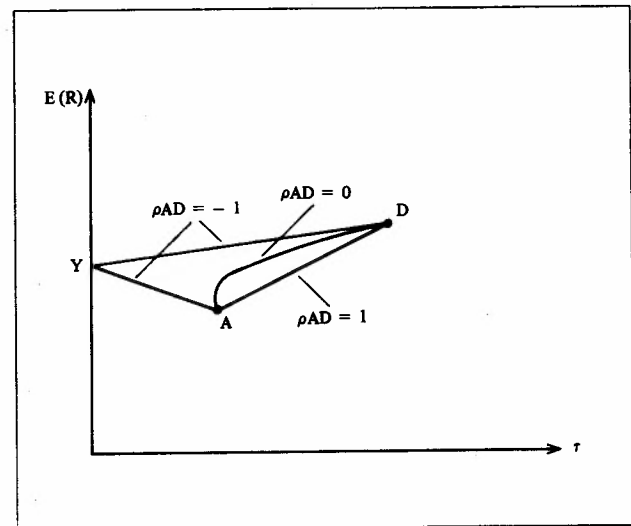
$$\tau R_p = \sqrt{\alpha^2 \tau R_A^2 + (1 - \alpha)^2 \tau R_D^2 + 2 \alpha(1 - \alpha) \tau R_A \tau R_D \rho_{AD}} \quad (2)$$

onde:

$\tau R_A$  — desvio padrão do retorno do ativo  $A$   
 $\tau R_D$  — desvio padrão do retorno do ativo  $D$   
 $\rho_{AD}$  — coeficientes de correlação entre os retornos dos ativos  $A$  e  $D$

A figura 3 mostra as possíveis combinações dos ativos  $A$  e  $D$  para  $\rho_{AD} = 1$ ,  $\rho_{AD} = 0$  e  $\rho_{AD} = -1$ .

Figura 3



No caso de  $\rho_{AD} = 1$ , resolvendo a equação (2) teremos:

$\tau R_p = \alpha \tau R_A + (1 - \alpha) \tau R_D$ , representado pelo segmento linear  $AD$ .

Se os ativos  $A$  e  $D$  são menos do que perfeita e positivamente correlacionados ( $\rho_{AD} < 1$ ), o desvio padrão do porta-fólio resultante será menor do que no caso de correlação perfeita. Para  $\rho_{AD} = -1$ , o desvio padrão do porta-fólio será:

$$\tau R_p = \alpha \tau R_A - (1 - \alpha) \tau R_D,$$

portanto existirá uma certa proporção  $\alpha$ , para a qual  $\tau R_p = 0$ , como representado na figura 3 pelo ponto  $Y$ .

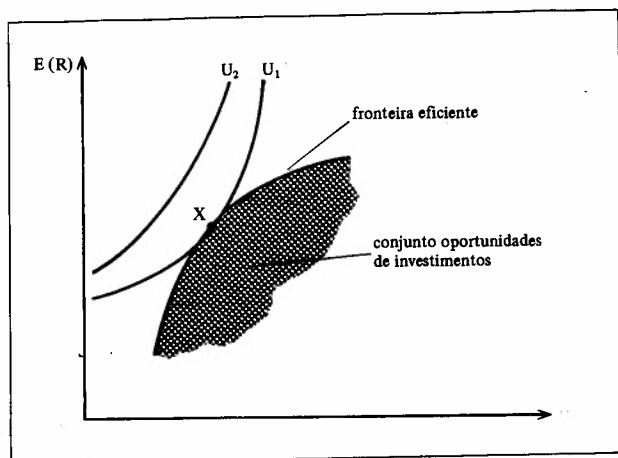
Desta forma a diversificação permite uma redução no risco, sem prejuízo no retorno esperado, dado pela equação (1).

#### 5. FRONTEIRA EFICIENTE

Admitamos que todas as opções de investimento existentes no mercado sejam colocadas no espaço risco-

retorno. Estas opções de investimento, bem como todas as possíveis combinações entre elas, constituem o conjunto oportunidades de investimento. Neste conjunto, algumas combinações dominarão a outras. Define-se fronteira eficiente como o lugar geométrico dos pontos referentes aos porta-fólios que não são dominados por outros. Assim sendo, um porta-fólio será eficiente somente se estiver localizado na fronteira eficiente. Na figura 4 estão representados o conjunto oportunidades de investimento e a fronteira eficiente.

Figura 4

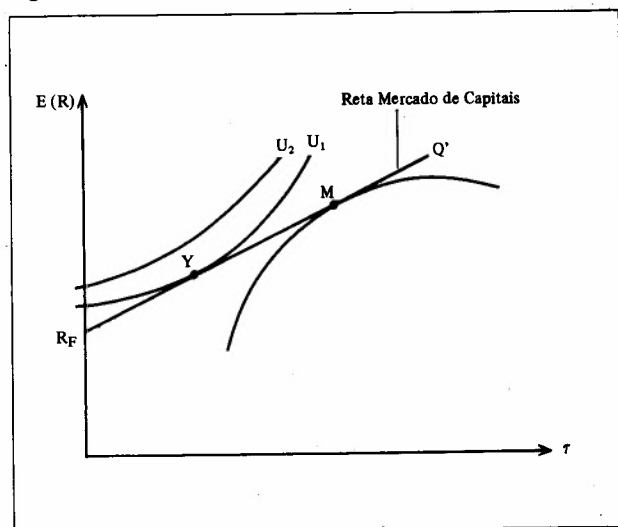


## 6. SELEÇÃO DE PORTA-FÓLIO

Dados o conjunto oportunidade de investimento e as preferências do investidor, o porta-fólio escolhido será aquele que maximize a utilidade do indivíduo, ou seja, o ponto da tangência entre a fronteira eficiente e uma curva de indiferença, representado por  $X$  na figura 4.

A partir deste momento, admitamos a existência de um título sem risco, denotado por  $R_F$ . Assim sendo, o processo de diversificação considerará também a existência deste ativo. A linha partindo de  $R_F$  e tangenciando a fronteira eficiente representará todas as combinações possíveis entre o título sem risco e o porta-fólio  $M$  (conforme ilustrado na figura 5).

Figura 5



Esta linha será a *nova fronteira eficiente*, uma vez que todos os seus pontos não são dominados por outro porta-fólio. Da mesma forma o investidor selecionará aquela combinação do título sem risco e o porta-fólio  $M$  que maximize sua utilidade (representada por  $Y$  na figura 5).

O mercado de capitais estaria em desequilíbrio se  $M$  não fosse o *porta-fólio de mercado*, isto é, o porta-fólio que contém todos os ativos existentes no mercado, na mesma proporção, em valor, que no mercado.

Pontos entre  $M$  e  $R_F$ , na figura 5, representam combinações do ativo sem risco e do porta-fólio de mercado. Pontos à direita de  $M$ , ao longo da reta  $R_F M Q$ , constituem porta-fólios onde o investidor toma emprestado a uma taxa igual ao retorno do título sem risco e investe no porta-fólio de mercado.

A reta  $R_F M Q$  é denominada *reta mercado de capitais* (RMC).

## 7. PRESSUPOSTOS BÁSICOS DO MODELO DE FORMAÇÃO DE PREÇOS DE ATIVOS

O modelo de formação de preços de ativos caracteriza-se como normativo e seus pressupostos básicos são os seguintes:

1. Período único — os investidores maximizam sua utilidade dentro do contexto de um único período.
2. Mercado de capitais perfeitamente competitivo, ou seja, inexistência de taxas, comissões e outros custos de transação; os ativos são perfeitamente divisíveis e suas quantidades predeterminadas; nenhum investidor é capaz de promover alterações nos preços dos ativos.
3. Existência de título sem risco. Os investidores podem tomar emprestado a uma taxa equivalente ao retorno deste título.
4. Expectativas dos investidores são homogêneas com relação aos retornos esperados e suas variâncias e covariâncias.
5. Todos os investidores analisam os porta-fólios com base em dois parâmetros: retorno esperado e desvio padrão (ou variância).
6. Os investidores são considerados avessos a risco, ou seja, existe uma preferência por menor risco, *ceteris paribus*.

## 8. DESENVOLVIMENTO DO MODELO

Retornemos ao problema da seleção de porta-fólio, considerando as preferências do investidor. Na figura 6, a escolha recairá no porta-fólio  $Y$ , que é o ponto de tangência entre a nova fronteira eficiente e uma curva de isoutilidade do investidor. Dessa forma, as inclinações da reta mercado de capitais (RMC) e a curva de utilidade do investidor  $U_1$  no ponto  $Y$  deverão ser iguais.

A função de utilidade do investidor, como visto, é dada por:

$$U = U[E(R), \tau R] \quad (3)$$

A inclinação da curva de isoutilidade  $U_1$  será obtida pela diferenciação total da equação (3), igualando-a a zero (uma vez que se trata de uma curva de utilidade constante). Assim sendo, matematicamente teremos:

$$dU = \frac{\delta U}{\delta E(R)} dE(R) + \frac{\delta U}{\delta \tau R} d\tau R = 0$$

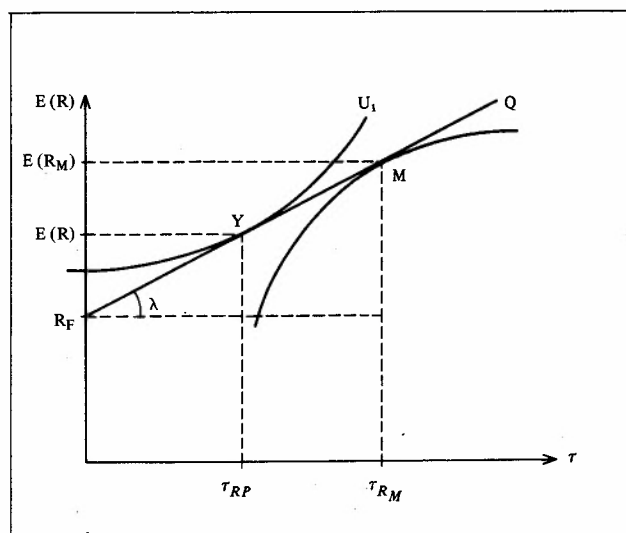
ou

$$\frac{dE(R)}{d\tau R} = - \frac{\delta U/\delta \tau R}{\delta U/\delta E(R)} \quad (4)$$

Por outro lado, a inclinação da RMC, conforme ilustrado na figura 6, será o ângulo  $\lambda$ , onde:

$$\lambda = \frac{E(R_M) - R_F}{\tau R_M} = \frac{E(R_M) - R_F}{\tau R_M} \quad (5)$$

Figura 6



Igualando as equações (4) e (5), teremos:

$$\lambda = - \frac{\delta U/\delta \tau R}{\delta U/\delta E(R)} \quad (6)$$

Sendo  $x_j$  a proporção do porta-fólio investida no título  $j$  e  $(1 - \sum x_j)$  a proporção investida no título sem risco, o retorno esperado do porta-fólio  $Y$  poderá ser expresso por:

$$E(R_e) = \sum_{j=1}^N x_j E(R_j) + (1 - \sum_{j=1}^N x_j) R_F \quad (7)$$

onde:

$E(R_j)$  — retorno esperado do título  $j$   
 $j = (1, 2, \dots, n)$  = títulos no mercado

E o desvio padrão será:

$$\tau R_e = [\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N x_j x_k \text{cov}(R_j, R_k)]^{1/2} \quad (8)$$

onde:

$\text{cov}(R_j, R_k)$  — covariância entre os retornos dos títulos  
 $x_j$  — proporção do título  $j$  no porta-fólio  $e$   
 $x_k$  — proporção do título  $k$  no porta-fólio  $e$

Nosso interesse está na determinação de uma equação para o retorno esperado de um título genérico  $j$ . Para tanto, tomemos a derivada da função de utilidade do indivíduo, com relação a  $x_j$ , igualando-a a zero:

$$\frac{\delta U}{\delta E(R_e)} \cdot \frac{\delta E(R_e)}{\delta x_j} + \frac{\delta U}{\delta \tau R_e} \cdot \frac{\delta \tau R_e}{\delta x_j} = 0 \quad (9)$$

Rearranjando os termos da equação (9):

$$\frac{\frac{\delta U}{\delta \tau R_e}}{\frac{\delta U}{\delta E(R_e)}} = - \frac{\frac{\delta E(R_e)}{\delta x_j}}{\frac{\delta \tau R_e}{\delta x_j}} \quad (10)$$

Igualando a equação (10) com a (6), rearranjando os termos, teremos:

$$\lambda \frac{\delta \tau R_e}{\delta x_j} = \frac{\delta E(R_e)}{\delta x_j} \quad (11)$$

Porém as derivadas das equações (7) e (8), com relação a  $x_j$ , serão dadas por:

$$\frac{\delta E(R_e)}{\delta x_j} = E(R_j) - R_F \quad (12)$$

$$\frac{\delta \tau R_e}{\delta x_j} = \frac{\text{cov}(R_j, R_M)}{\tau R_M} \quad (13)$$

onde:

$R_M$  — retorno do porta-fólio de mercado.

No anexo encontra-se a dedução da equação (13).

Substituindo as equações (12) e (13) em (11), teremos:

$$E(R_j) = R_F + \lambda \frac{cov(R_j, R_M)}{\tau R_M} \quad (14)$$

Assim sendo, o retorno esperado de um título genérico  $j$  possui dois componentes básicos:

- o retorno do título sem risco ( $R_F$ )
- prêmio pelo risco do investimento

Este prêmio será determinado pelo produto do risco do título genérico  $j$   $\left[ \frac{cov(R_M, R_j)}{\tau R_M} \right]$ , e a unidade de risco de mercado  $\lambda$ .

Com isto observa-se que o risco de um título genérico  $j$  será uma função da covariância de seu retorno com o retorno de mercado, e não da variância de seus retornos.

## 9. ESTUDO DE DOUGLAS

George Douglas, utilizando técnicas de regressão linear, encontrou uma associação estatisticamente significativa entre retornos e variâncias desses retornos.

No modelo de formação de preços de ativos o risco de um título é função da covariância de seus retornos com o retorno do porta-fólio de mercado. De acordo com os resultados obtidos por Douglas, o investidor estaria sendo compensado por um risco que seria diversificável. No entanto, as covariâncias poderiam ter uma significativa associação positiva com as variâncias, de tal forma que aquelas seriam representadas por estas. Em vista desta possibilidade, foi estabelecida a regressão entre os retornos e as suas variâncias e covariâncias. A conclusão foi que dada a variância de um título, sua covariância não é significativamente relacionada com o retorno. Com isto a teoria desenvolvida anteriormente seria invalidada.

## 10. ESTUDO DE LINTNER

O modelo de formação de preços de ativos pode ter também a seguinte forma:

$$E(R_j) = R_F + \beta [E(R_M) - R_F] \quad (15)$$

onde:

- $E(R_j)$  — retorno esperado de um título genérico  $j$
- $R_F$  — retorno do título sem risco
- $E(R_M)$  — retorno esperado do porta-fólio de mercado

$$\beta = \text{Beta} = \frac{cov(R_M, R_j)}{\tau^2 R_M}$$

onde:

- $cov(R_M, R_j)$  — covariância entre o retorno do porta-fólio de mercado e o retorno de um título genérico  $j$
- $\tau^2 R_M$  — a variância dos retornos do porta-fólio de mercado

Lintner, interessado em testar a validade do modelo expresso pela equação (15), desenvolveu uma metodologia que consistia em dois estágios.

No primeiro, foram determinados os coeficientes  $\beta_j$  para 301 ações no mercado americano, no período de 1954 a 1963, regredindo retornos anuais de cada título com o excesso de retorno ( $R_M - R_F$ ), conforme a expressão:

$$R_j = \alpha_j + \beta_j (R_M - R_F) + E_j \quad (16)$$

onde:

- $E_j$  — erro

$\alpha_j, \beta_j$  — parâmetros da regressão

No segundo estágio, Lintner utilizou-se novamente de técnicas de regressão, considerando como variável dependente o retorno médio dos títulos no período do estudo e como variáveis independentes os betas e as variâncias dos resíduos, ambos obtidos no primeiro estágio. O modelo para o teste foi o seguinte:

$$\bar{R}_j = a + b_1 \beta_j + b_2 s^2(e_j) + E_j' \quad (17)$$

onde:

- $E_j'$  — erro
- $a, b_1$  e  $b_2$  — parâmetros da regressão

Para a validação do modelo de formação de preços de ativos, os parâmetros da equação (17) deveriam apresentar o seguinte comportamento:

- $b_1$  seria uma estimativa do excesso de retorno ( $R_M - R_F$ )
- $b_2$  não deveria ser significativa diferente de zero

No entanto, esses comportamentos esperados não foram confirmados. O coeficiente  $b_1$  foi muito abaixo do excesso de retorno ( $R_M - R_F$ ) observado no mercado e o coeficiente  $b_2$  estatisticamente diferente de zero, mostrando uma forte associação entre os retornos e a variância dos resíduos.

A exemplo de Douglas, a conclusão dos testes desenvolvidos por Lintner é contrária à moderna teoria de formação de porta-fólios. No entanto, uma análise acurada dos procedimentos utilizados nestes estudos mostrará tendências (bias) que invalidam seus resultados.

## 11. ESTUDO DE MILLER E SCHOLES

Miller e Scholes reproduziram o trabalho de Lintner para 631 ações no mesmo período. Os resultados fo-



ram semelhantes aos de Lintner, porém o parâmetro da variância dos resíduos foi maior e mais significativa.

A partir deste ponto, Miller e Scholes procederam a uma análise das possíveis tendências que poderiam ter sido introduzidas no desenvolvimento dos testes, agrupando-as em duas classes:

- tendências originadas por inadequadas especificações do modelo
- tendências originadas por erros nas variáveis utilizadas para representar riscos e retornos.

Na primeira classe de origem de tendências foram incluídos os seguintes aspectos: a) problemas ocasionados na invariabilidade da taxa de retorno do título sem risco; b) possível relação não-linear entre risco e retorno; c) variância dos resíduos não-constante (heteroscedasticidade). A conclusão da análise destas tendências não apresentou evidências que permitissem refutar o trabalho de Lintner.

Por outro lado as tendências referentes a erros nas variáveis foram suficientes para justificar os resultados obtidos por Lintner, ainda que o comportamento de preços de títulos no mercado possa ser expresso pelo modelo de formação de preços de ativos. As seguintes fontes de tendências foram abordadas.

### 36 11.1 Erros nas estimativas de $\beta_j$

Os valores do parâmetro  $\beta_j$ , na primeira regressão [veja modelo na equação (16)], estão sujeitos a variações ocasionadas por diferentes amostragens; em outras palavras, seu intervalo de confiança é muito amplo, englobando quase todos os betas observados no mercado. Este fato poderia estar ocasionando uma redução do coeficiente  $b_1$  da segunda regressão [veja modelo na equação (17)]. Evidências confirmaram a existência desta tendência, embora esta não seja suficiente para explicar as diferenças entre os resultados de Lintner e os previstos pelo modelo de formação de preços de ativos.

### 11.2 Variância dos resíduos como aproximação do risco medido pela covariância

A existência de correlação entre a variância dos resíduos e beta ocasionaria uma distorção no coeficiente  $b_2$  da equação (17), que seria sistematicamente superestimado, caso a correlação fosse positiva. Mais uma vez a hipótese de tendência foi confirmada, mas ainda não o suficiente para explicar integralmente os resultados de Lintner.

### 11.3 Não-normalidade da distribuição de probabilidade dos resíduos

Observando a distribuição dos dados utilizados por Lintner, Miller e Scholes concluíram pela sua não-normalidade, o que explicaria o significativo valor do parâmetro  $b_2$  da equação (17).

Com isto Miller e Scholes demonstraram que as conclusões de Douglas e Lintner não podem ser consideradas como definitivas.

## 12. ESTUDO DE BLACK, JENSEN E SCHOLLES

Estes autores também testaram a validade do modelo de formação de preços de ativos, utilizando-se, porém, de uma metodologia que evitou os problemas apontados por Miller e Scholes.

Visando obter a maior dispersão possível de betas e procurando evitar as variações de amostragem Black, Jensen e Scholes agruparam títulos em dez porta-fólios de igual número de títulos de acordo com o valor de seus betas.

O modelo testado foi o seguinte:

$$R_j - R_F = \alpha_j + \beta_j (R_M - R_F) + E_j \quad (18)$$

Para a validação do modelo de formação de preços de ativos o parâmetro  $\alpha_j$  não pode ser significantemente diferente de zero. Black, Jensen e Scholes dividiram os dados em quatro períodos diferentes e obtiveram valores para  $\alpha_j$  que refutam a hipótese referida. Além disso, estes valores flutuavam consideravelmente entre os diversos períodos. Por outro lado, a hipótese da linearidade entre betas e excesso de retornos foi confirmada. Surpreendentemente, em um dos períodos esta relação mostrou-se negativa.

Em vista desses resultados, a forma tradicional do modelo de preços de ativos fica questionada.

### 12.1 Extensão do modelo

Fischer Black sugeriu a seguinte formulação para o modelo de formação de preços de ativos:

$$E(R_j) = E(R_Z) + [E(R_M) - E(R_Z)]\beta_j \quad (19)$$

onde:

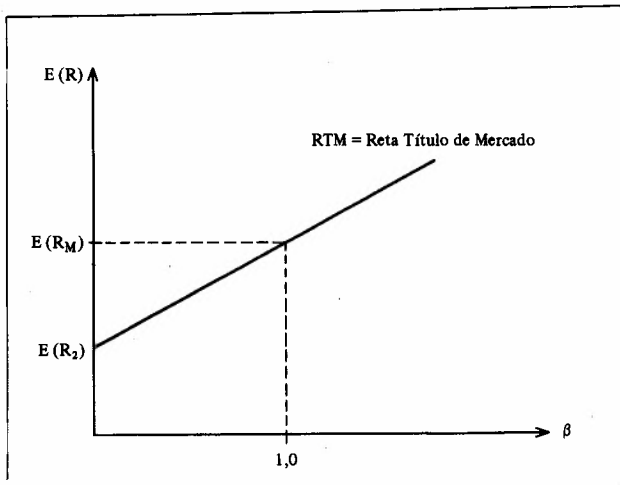
$E(R_Z)$  — retorno esperado do porta-fólio, cuja covariância de seus retornos com o retorno de mercado é igual a zero (ou seja, porta-fólio zero-beta)

Este modelo é consistente com os resultados obtidos por Black, Jensen e Scholes, pois admite a linearidade entre  $R_j$  e  $\beta_j$ , bem como explica a relação negativa encontrada em um dos períodos [para tanto,  $E(R_Z) > E(R_M)$ ].

O porta-fólio zero-beta está localizado na fronteira eficiente e apresenta a menor variância dos retornos entre todos os porta-fólios com beta igual a zero. Isto significa que este porta-fólio não contribui em nada para a variância dos retornos de mercado.

A equação (19) pode ser, graficamente, assim, representada:

Figura 7



Como pode ser observado, o porta-fólio de mercado possui beta igual a 1, pois:

$$\beta = \frac{\text{cov}(R_p, R_M)}{\tau^2 R_M}$$

mas:

$$\text{cov}(R_M, R_M) = \tau^2 R_M$$

A reta apresentada na figura 7 é chamada de reta título de mercado.

### 13. ESTUDO DE FAMA E MACBETH

Em trabalho semelhante ao de Black, Jensen e Scholes, estes autores chegaram a conclusões que suportam a formulação teórica do modelo de formação de preços de ativos, que inclui o porta-fólio zero-beta.

### 14. CONCLUSÃO

Podemos concluir que existem evidências empíricas que suportam a validade do modelo de formação de preços de ativos na formulação que inclui o porta-fólio zero-beta.

A validade deste modelo é de crucial importância para o estudo de finanças. A estrutura de capital, o custo de capital, a teoria da avaliação e o orçamento de capital são algumas áreas que sofrem profundas modificações em seus conceitos tradicionais quando se aceita a teoria do modelo de formação de preços de ativos.

### 15. ANEXO

Derivada da função do desvio padrão de um porta-fólio em relação a  $x_j$ .

Retomemos a equação (8).

$$\begin{aligned} \tau R_e &= \left[ \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N x_j x_k \text{cov}(R_j, R_k) \right]^{-1/2} \\ \frac{\delta \tau R_e}{\delta x_j} &= \frac{1}{2} [\sum x_j \sum x_k \text{cov}(R_j, R_k)]^{-1/2} \cdot \\ & [2 \sum x_k \text{cov}(R_j, R_k)] \\ &= \frac{\sum x_k \text{cov}(R_j, R_k)}{[\sum x_j \sum x_k \text{cov}(R_j, R_k)]^{1/2}} \end{aligned} \quad (A1)$$

O retorno do porta-fólio de mercado será dado por:

$$E(R_M) = \sum X_j E(R_j)$$

$$\text{onde: } X_j = \frac{x_j}{\sum x_j}$$

Sendo  $\alpha = \sum x_j$ , teremos:

$$x_j = \alpha X_j$$

O numerador da equação (A1) será:

$$\sum x_k \text{cov}(R_j, R_k) = \text{cov}(R_j, \alpha \sum X_k R_k)$$

$$\text{mas: } \sum X_k R_k = R_M$$

Então:

$$\sum x_k \text{cov}(R_j, R_k) = \text{cov}(R_j, \alpha R_M) = \alpha \text{cov}(R_j, R_M) \quad (A2)$$

Por outro lado, o denominador da equação será dado por:

$$\begin{aligned} [\sum x_j \sum x_k \text{cov}(R_j, R_k)]^{1/2} &= \tau R_e \\ \text{porém,} \\ \tau R_e &= \alpha \tau R_M \end{aligned} \quad (A3)$$

Finalmente, substituindo as equações (A2) e (A3) na equação (A1), teremos:

$$\frac{\delta \tau R_e}{\delta x_j} = \frac{\alpha \text{cov}(R_j, R_M)}{\alpha \tau R_M} = \frac{\text{cov}(R_j, R_M)}{\tau R_M}$$

### REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

a) Teoria

Black, F. Capital market equilibrium with restricted borrowing. *Journal of Business*, 45(3):444-54, July 1972.

Fama, E. F. & Miller, M. H. *The theory of finance*. New York, Holt, Rinehart & Winston, 1972.

Francis, J. C. & Archer, S. H. *Portfolio analysis*, Englewood-Cliffs, N. J., Prentice-Hall, 1971.

Friend, F. & Blume, M. Measurement of Portfolio performance under uncertainty. *The American Economic Review*, 60(4):561-75, Sept. 1969.

Lintner, John. Security prices, risk and maximal gains from diversification. *Journal of Finance*, 20(4): 587-615, Dec. 1965.

Markowitz. Portfolio selection. *Journal of Finance*, 7(1):77-91, Mar. 1952.

Mossin, J. Equilibrium in a capital asset market. *Econometrica*, 34(4):768-83, Oct. 1966.

Jensen, M. C. Capital markets. Theory and evidence. *Bell Journal of Economics and Management Science*, 3:357-98, Oct. 1972.

Sharpe, F. Capital asset prices. A Theory of market equilibrium under conditions of risk. *Journal of Finance*, 19(3):425-42, Sept. 1964.

Tobin, J. Liquidity preference as behavior towards risks. *Review of Economic Studies*, 25:65-85, Feb. 1958.

#### b) Evidência

Black, F.; Jensen M. & Scholes, M. The capital asset pricing model: some empirical results. In: Jensen, Michael, ed. *Studies in the theory of capital = markets*. New York, Praeger, 1972.

Black, F. Capital market equilibrium with restricted borrowing. *Journal of Business*, 45:444-55, July 1972.

Douglas, G. W. Risk in the equity markets: an empirical appraisal of market efficiency. *Yale Economic Essays*, 9:3-45, Spring, 1969.

Fama, E. F. & Macbeth, F. D. Risk, return and equilibrium: empirical tests. *Journal of Political Economy*, 81:607-36, May/June 1973.

Foster, G. Asset pricing models. Further tests. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Mar. 1978. p. 39-53.

Jensen, M. C. Capital markets: theory and evidence. *Bell Journal of Economics and Management Science*, 3:357-98, Fall, 1972.

Miller, M. & Scholes. M. Rates of return in relation to risk a re-examination of some recent findings. In: Jensen, Michael, ed. *Studies in the theory of capital markets*, New York, Praeger, 1972.