MOMENTOS-L: TEORIA E APLICAÇÃO EM HIDROLOGIA[1]

Ana Esmeria Lacerda Valverde[2], Helio Garcia Leite[3], Demétrius David da Silva[4] e Fernando Falco Pruski[4]

RESUMO – Esta nota técnica foi redigida com o objetivo de apresentar o método momentos-L, que tem sido proposto para o cálculo dos parâmetros das principais distribuições de probabilidades utilizadas em estudos hidrológicos. Também foi seu objetivo inferir sobre o tipo de distribuição estatística mais empregada em aplicações específicas. Com base na revisão, pôde-se concluir que, ao analisar dados de eventos extremos, é recomendável testar a aderência, pelo menos, das seguintes distribuições de três parâmetros: Generalizada Logística, Generalizada de Eventos Extremos, Generalizada Normal, Pearson tipo III e Generalizada de Pareto. Concluiu-se também que os parâmetros dessas distribuições, e seus quantis, devem ser estimados utilizando os momentos-L derivados dos momentos ponderados por probabilidade.

Palavras-chave: Hidrologia, distribuições estatísticas e método dos momentos.

L-MOMENTS: THEORY AND APPLICATION IN HYDROLOGY

ABSTRACT – This technical note aimed to review the L-moments methods which have been proposed to calculate the parameters of the main distributions of probabilities used in hydrological studies. It also aimed to infer on the type of statistical distribution most used for specific applications. Based on the review, it was concluded that when analyzing data of extreme events it is advisable to test the adherence of, at least, the following distributions of three parameters: Generalized Logistics, Generalized of Extreme Events, Pearson type III and Generalized of Pareto. It was also concluded that the parameters of these distributions and its quantis should be estimated using the L-Moment derived of the Moments weighted by Probability.

Key words: Hidrology, statistical distributions and moments methods.

1. INTRODUÇÃO

A análise de distribuições de freqüências de vazões máximas e mínimas e a de precipitações máximas demandam o uso de distribuições estatísticas. Um dos problemas no uso de qualquer procedimento estatístico aplicado a dados hidrológicos está, segundo Silva e Assad (1998), na estimação dos parâmetros dessas distribuições. Os métodos de ajuste, dentre eles o dos momentos e o dos momentos-L, podem conduzir a resultados diferentes.

A análise de freqüência de precipitações e, ou, de vazões extremas é dificultada, em muitos casos, pela baixa densidade de estações e também pelo curto período de tempo dos registros disponíveis. Nessa situação, o hidrólogo deve procurar estimadores menos sujeitos a variações amostrais. Para isso, Damázio e

[1] Recebido em 14.03.2003 e aceito para publicação em 10.08.2004.
[2] Engenheira Agrícola.
[3] Departamento de Engenharia Florestal da UFV. CEP 36570-000, Viçosa, MG. E-mail: <hgleite@ufv.br>.
[4] Departamento de Engenharia Agrícola da UFV.

Costa (1991) sugerem a utilização da teoria dos momentos ponderados por probabilidade (MPP), pois, segundo eles, o sucesso desses estudos depende da distribuição adotada e do método usado para estimar os seus parâmetros, sendo MPP uma alternativa eficiente. Esse método é uma opção que resulta em viés menor do que os que se obtêm pelo método convencional (HENRIQUES, 1991).

Uma abordagem clássica para o estudo de vazões mínimas consiste no ajustamento de distribuições teóricas de probabilidades às séries de vazões mínimas médias de estiagens de vários dias de duração, obtidas em série histórica de vazões diárias do local em estudo. Procurou-se, com isso, caracterizar as vazões mínimas de estiagem por meio da obtenção da distribuição de probabilidades do número de dias sem chuva, da distribuição de probabilidades da vazão inicial de recessão e das constantes de depleção da água no subsolo. Para projetos de estruturas hidráulicas, como vertedouros e barragens, entre outros, bem como para previsão e controle de enchentes, faz-se necessário o conhecimento das probabilidades de ocorrência de vazões superiores a certos valores prefixados.

O objetivo deste trabalho foi apresentar algumas considerações teóricas sobre os métodos de momentos e momentos-L, que têm sido propostos para calcular os parâmetros das principais distribuições de probabilidades utilizadas em estudos hidrológicos e apresentar os estimadores dos parâmetros de algumas distribuições utilizadas nesses estudos.

2. MOMENTOS

As características das distribuições de probabilidades podem ser sumarizadas pelos momentos populacionais. O momento de primeira ordem, em relação à origem dos *X*, representa a média populacional (μ), e o momento central de ordem r = 2 é, por definição, a variância de *X*, simbolizada por σ^2. As quantidades que podem ser deduzidas do momento central de ordem 2 são o desvio-padrão (σ) e o coeficiente de variação (CV). Para $r > 2$, é usual descrever as características da função de distribuição através das razões adimensionais $\mu_r \mu_2^{-r/2}$, das quais se destacam os coeficientes de assimetria (γ) e de curtose (κ), dados por $\gamma = \mu_3 \mu_2^{-3/2}$ e $\kappa = \mu_4 \mu_2^{-2}$.

Os momentos amostrais são estimados por quantidades similares, calculadas a partir dos dados de uma amostra de tamanho n. Por exemplo, o estimador natural de μ é a média aritmética ou o momento amostral de primeira ordem em relação à origem, $\bar{x} = n^{-1}\sum_{i=1}^{n} x_i$. Os momentos amostrais (m) de ordem (r) superior são estimadores viesados dos momentos populacionais de mesma ordem, entretanto podem ser corrigidos para produzir estimadores sem viés, por exemplo, para variância, assimetria e curtose, respectivamente:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{n}{n-1} m_2, \quad \hat{\gamma} = \frac{n^2}{(n-1)(n-2)} \frac{m_3}{s^3} \quad \text{e}$$

$$\hat{\kappa} = \frac{n^2}{s^4(n-2)(n-3)} \left[\left(\frac{n+1}{n-1} \right) m_4 - 3m_2^2 \right] + 3 .$$

3. MÉTODO DOS MOMENTOS-L

Além de dependentes de *n*, as estimativas com base em momentos amostrais convencionais envolvem potências sucessivas dos desvios dos dados em relação ao valor central. Em conseqüência, pequenas amostras tendem a produzir estimativas não-confiáveis, principalmente para as funções de momentos de ordem superior, como a assimetria e curtose. Os momentos-L são medidas de posição, escala e forma das distribuições de probabilidade, similares aos momentos convencionais, porém estimadas por combinações lineares da assimetria, da curtose e do coeficiente de variação. Eles compõem um sistema de medidas estatísticas mais confiáveis para descrição das características das distribuições de probabilidades e são derivados dos momentos ponderados por probabilidade (MPP). Os MPP de uma variável aleatória *X*, descrita pela função de probabilidade acumulada F(x), são as quantidades definidas por $M_{p,r,s} = E\left\{X^p [F(x)]^r [1-F(x)]^s\right\}$.

Os momentos-L de uma variável aleatória *X* podem ser conceituados como sendo as quantidades $\lambda_r = \int_0^1 x(u) \cdot P_{r-1}^*(u)\,du$, e, em termos dos MPP, os momentos-L são dados por $\lambda_1 = \alpha_0 = \beta_0$ (média ou momento-L de posição da distribuição), $\lambda_2 = \alpha_0 - 2\alpha_1 = 2\beta_1 - \beta_0$ (momento-L de escala), $\lambda_3 = \alpha_0 - 6\alpha_1 + 6\alpha_2 = 6\beta_2 - 6\beta_1 + \beta_o$ e $\lambda_4 = \alpha_0 - 12\alpha_1 + 30\alpha_2 - 20\alpha_3 = 20\beta_3 - 30\beta_2 + 12\beta_1 - \beta_o$.

As propriedades dos momentos-L são (HOSKING e WALLIS, 1997): a) existência: se a média de uma distribuição existe, então todos os momentos-L também existem; b) singularidade: se a média de uma distribuição existe, então todos os momentos-L a definem singularmente; c) valores-limite: $-\infty \leq \lambda_1 \leq \infty$; $\lambda_2 \geq 0$; para $X \geq 0$, $0 \leq \tau \leq 1$; d) transformações lineares: se X e Y, $Y = aX + b$ são duas variáveis aleatórias de momentos-L λ_r e λ_r^*, respectivamente, então são válidas as seguintes relações $\lambda_1^* = a\lambda_1 + b$, $\lambda_2^* = a\lambda_2$; $\tau_r^* = (sinal\ de\ a)^r \tau_r$, $r \geq 3$; simetria: se X é uma variável aleatória, descrita por uma distribuição de probabilidades simétrica, então todos os quocientes de momentos-L de ordem ímpar ($\tau = 0$, $r = 3, 5, \ldots$) serão nulos.

As funções-densidade de probabilidade, *f(x)*; as funções de distribuição acumulada, *F(x)*; e a função quantil, *x(F)*, bem como os momentos-L (λ_1, λ_2, τ_3, τ_4) e os parâmetros de algumas distribuições teóricas de três parâmetros (α = parâmetro de escala, ν = parâmetro de forma e ξ = parâmetro de posição), estão representadas nos Quadros 1, 2 e 3, conforme Hosking e Wallis (1997).

4. SOBRE O USO DE DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE

As distribuições de probabilidade de dois e três parâmetros mais indicadas e utilizadas em hidrologia, no estudo de eventos de valores extremos, são do tipo I – Gumbel, do tipo II – Fréchet e do tipo III – Weibull, além da distribuição generalizada de eventos extremos. Cabe mencionar também outros modelos não-extremais como a distribuição Log-Normal, Pearson Tipo III e Log-Pearson Tipo III, assim como as distribuições de quatro parâmetros, Kappa, ou de cinco parâmetros, como as distribições Wakeby e Boughton (PINHEIRO e NAGHETTINI, 1998).

Osborn et al. (1980), utilizando as distribuições de Gumbel, Log-Normal, Pearson Tipo III e Log-Pearson Tipo III nas séries de valores máximos anuais de chuva, observaram que a distribuição que melhor se ajustou aos dados foi a de Gumbel. Aron et al. (1987) determinaram diversas alturas de chuvas, com durações de 1 a 24 horas e períodos de retorno que variaram de 1 a 100 anos, no Estado da Pensylvânia (EUA), e observaram que a distribuição Log-Pearson Tipo III apresentou melhor ajuste. Pinto et al. (1996) ajustaram modelos teóricos de distribuição de probabilidade aos dados de chuvas intensas de 29 estações pluviográficas do Estado de Minas Gerais, verificando que o modelo de Gumbel foi o que melhor se ajustou aos dados.

Matos Neto e Fraga (1983), Silva et al. (1999) e Vieira et al. (1988), analisando as precipitações intensas na cidade de Fortaleza, CE, no Estado de São Paulo e na região de Piracicaba, SP, respectivamente, utilizaram o modelo teórico de distribuição de probabilidade de Gumbel, que tem proporcionado resultados satisfatórios em vários casos. Ela foi empregada pelo Serviço Nacional de Meteorologia dos Estados Unidos para ajustar os valores extremos de alturas de chuvas a serem utilizados em mapas que relacionam a variação da altura da chuva com a área atingida (OSBORN et al., 1980).

Damázio e Costa (1991) apresentaram os resultados de uma análise de freqüência regionalizada de séries de precipitações máximas anuais, na bacia do rio Madeira. Como metodologia, usaram a teoria dos momentos ponderados por probabilidade (MPP), tendo em vista o curto período de tempo abrangido pelos registros dos pluviômetros existentes na região e em razão do fato de suas estimativas serem mais robustas e menos influenciadas pela ocorrência de valores atípicos, conhecidos como *outliers*, em comparação com o método dos momentos convencionais.

Fernandes e Heinz (1991) investigaram a robustez de várias distribuições de probabilidade usuais na análise de eventos extremos hidrológicos. A cada amostra de dados foram ajustadas seis distribuições de probabilidade pelo método dos momentos, a saber: Gumbel, Exponencial, Log-Normal a dois e três parâmetros, Pearson Tipo III e Log-Pearson Tipo III. A partir dessas distribuições foram estimados valores de extremos com 10, 100, 1.000, 10.000 e 100.000 anos de período de retorno. Para as estimativas de 1.000 e 10.000 anos de recorrência, os modelos de dois parâmetros indicaram resultados mais robustos que os modelos de três parâmetros, com destaque para as distribuições de Gumbel e Exponencial. Quanto à influência de diversos métodos de estimativa de parâmetros, destacaram-se os métodos dos momentos e da máxima verossimilhança, para as distribuições de Gumbel e Exponencial, respectivamente.

Pinheiro e Naghettini (1998) utilizaram, em estudo regional de chuvas intensas, o método de momentos-L para estimar os parâmetros da equação do tipo intensidade–duração–freqüência para a região metropolitana de Belo Horizonte, tendo sido testadas as seguintes distribuições de três parâmetros: Logística Generalizada, Generalizada de Valores Extremos, Generalizada de Pareto, log-Normal e Pearson Tipo III. Indiretamente, devido ao fato de uma distribuição de três parâmetros poder conter outra de dois parâmetros, testaram-se também as distribuições de dois parâmetros: Uniforme, Logística, Normal, Exponencial, Pareto e Valores Extremos do Tipo I (Gumbel).

R. Árvore, Viçosa-MG, v.28, n.6, p.927-933, 2004

Quadro 1 – Função densidade de probabilidade, *f(x)*, distribuição acumulada, *F(x)*, função quantil, *x(F)*, momentos e parâmetros de posição (ξ), de escala (α) e de forma (v) das distribuições Generalizada Logística e Generalizada de Valores Extremos

Table 1 – *Probability density function, f(x), cumulative distribution, F(x), quantile function, x(F), moments and position parameters (ξ), scale (α) and form (ν) of Generalized Logistics and Generalized of Extreme Events*

Função densidade de probabilidade *f(x)*	Distribuição $F(x)$	*Função Quantil* *X(F)*	Momentos -L $\lambda_1, \lambda_2, \tau_3, \tau_4$	Parâmetros de posição (ξ), de escala (α) e de forma (ν)
Generalizada Logística $f(x)=\dfrac{e^{-(1-v)y}}{\alpha\left(1+e^{-y}\right)^2}$ $y=\dfrac{\ln\left[1-\dfrac{v(x-\xi)}{\alpha}\right]}{v}$ para $\nu \neq 0$ $y=\dfrac{x-\xi}{\alpha}$, para $\nu = 0$	$F(x)=\dfrac{1}{\left(1+e^{-y}\right)}$	$\xi+\dfrac{\alpha}{v}\left[1-\left(\dfrac{1-F}{F}\right)^{v}\right]$ para $\nu \neq 0$ $\xi-\alpha\ \ln\left[\dfrac{(1-F)}{F}\right]$ para $\nu = 0$	$\lambda_1=\xi+\alpha\left[\dfrac{1}{v}-\dfrac{\pi}{\operatorname{sen}(v\ \pi)}\right]$ $\lambda_2=\dfrac{\alpha\ v\ \pi}{\operatorname{sen}(v\ \pi)}$ $\tau_3=-v$ $\tau_4=\dfrac{1+5\ v^2}{6}$ $-1<\nu<1$	$\xi=\lambda_1-\alpha\left[\dfrac{1}{v}-\dfrac{\pi}{\operatorname{sen}(v\ \pi)}\right]$ $\alpha=\dfrac{\lambda_2\ \operatorname{sen}(v\ \pi)}{v\ \pi}$ $v=-\tau_3$
Generalizada de Valores Extremos $f(x)=\alpha^{-1}e^{-(1-v)y-e^{-y}}$ $y=-\dfrac{\ln\left[1-\dfrac{v\ (x-\xi)}{\alpha}\right]}{v}$ para $\nu \neq 0$ $\dfrac{x-\xi}{\alpha}$, para $\nu = 0$	$F(x)=e^{-e^{-y}}$	$\xi+\dfrac{\alpha\left[1-(-\ln F)^{v}\right]}{v}$ para $\nu \neq 0$ $\xi-\alpha\ \ln(-\ln F)$ para $\nu = 0$	$\lambda_1=\xi+\dfrac{\alpha\left[1\text{-}\Gamma(1+v)\right]}{v}$ $\lambda_2=\dfrac{\alpha\left(1\text{-}2^{-v}\right)\Gamma(1+v)}{v}$ $\tau_3=\dfrac{2\left(1-3^{-v}\right)}{1-2^{-v}}-3$ $\tau_4=\dfrac{5\left(1-4^{-v}\right)-10\left(1-3^{-v}\right)+6\left(1-2^{-v}\right)}{1-2^{-v}}$	$\xi=\lambda_1-\dfrac{\alpha\left[1\text{-}\Gamma(1+v)\right]}{v}$ $\alpha=\dfrac{\lambda_2\ v}{\left(1-2^{-v}\right)\Gamma(1+v)}$ $v\approx 7{,}8590\ c_2+2{,}9554\ c_2^{\ 2}$ $c_2=\dfrac{2}{3+\tau_3}-\dfrac{ln\,2}{ln\,3}$

Γ(.) denota função gama: $\Gamma(x)=\int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$

Quadro 2 – Função densidade de probabilidade, *f(x)*, distribuição acumulada, *F(x)*, função quantil, *x(F)*, momentos e parâmetros das distribuições Generalizada Normal e Generalizada de Pareto*

***Table 2** – Probability density function, f(x), cumulative distribution, F(x), quantile function, x(F), moments and parameters of Generalized Normal and Generalized of Pareto**

Função densidade de probabilidade *f(x)*	Distribuição $F(x)$	*Função Quantil* *x(F)*	Momentos -L λ_1, λ_2, τ_3, τ_4	Parâmetros de posição (ξ), de escala (α) e de forma (ν)
Generalizada Normal $f(x)=\dfrac{e^{\frac{vy-y^2}{2}}}{\alpha\sqrt{2\pi}}$ $y=-\dfrac{\ln\left[1-\dfrac{v(x-\xi)}{\alpha}\right]}{v}$, para $\nu\neq 0$ $y=\dfrac{x-\xi}{\alpha}$, para $\nu=0$	$F(x)=\Phi(y)$ $\Phi(y)=\int_{-\infty}^{y}\varphi(t)\,dt$ $\varphi(y)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}y^2}$	*x(F)* não tem forma analítica explícita	$\lambda_1=\xi+\alpha\dfrac{1-e^{v^2/2}}{v}$ $\lambda_2=\dfrac{\alpha\ e^{v^2/2}}{v}\left[1-2\Phi\left(-\dfrac{v}{\sqrt{2}}\right)\right]$ $\tau_3\approx -v\dfrac{A_0+A_1\ v^2+A_2\ v^4+A_3\ v^6}{1+B_1\ v^2+B_2\ v^4+B_3\ v^6}$ $\tau_4\approx\tau_4^0+v^2\dfrac{C_0+C_1v^2+C_2v^4+C_3v^6}{1+D_1v^2+D_2v^4+D_3v^6}$	$\xi=\lambda_1-\dfrac{\alpha}{v}\left(1-e^{v^2/2}\right)$ $\alpha=\dfrac{\lambda_2\ v\ e^{-v/2}}{1-2\Phi\left(-v^2/\sqrt{2}\right)}$ $v\approx-\tau_3\dfrac{E_0+E_1\ \tau_3^2+E_2\ \tau_3^4+E_3\ \tau_3^6}{1+F_1\ \tau_3^2+F_2\ \tau_3^4+F_3\ \tau_3^6}$
Generalizada de Pareto $f(x)=\alpha^{-1}e^{-(1-v)y}$ $y=\dfrac{\ln\left[1-\dfrac{v(x-\xi)}{\alpha}\right]}{v}$, para $\nu\neq 0$ $y=\dfrac{x-\xi}{\alpha}$, para $\nu=0$	$F(x)=1-e^{-y}$	$\xi+\dfrac{\alpha\left\{-(1-F)^v\right\}}{v}$, para $\nu\neq 0$ $\xi-\alpha\ \ln(1\text{-}F)$, para $\nu=0$	$\lambda_1=\xi+\dfrac{\alpha}{1+v}$ $\lambda_2=\dfrac{\alpha}{(1+v)(2+v)}$ $\tau_3=\dfrac{1\text{-}v}{3+v}$ $\tau_4=\dfrac{(1-v)(2-v)}{(3+v)(4+v)}$, $v>-1$	$\xi=\lambda_1-(2+v)\lambda_2$ $\alpha=(1+v)(2+v)\lambda_2$ $v=\dfrac{1-3\tau_3}{1+\tau_3}$

$\tau_4^0=1{,}2260172\ 10^{-1}$; $A_0=4{,}8860251\ 10^{-1}$; $A_1=4{,}4493076\ 10^{-3}$; $A_2=8{,}8027039\ 10^{-4}$; $A_3=1{,}1507084\ 10^{-6}$; $B_1=6{,}4662924\ 10^{-2}$; $B_2=3{,}3090406\ 10^{-3}$; $B_3=7{,}4290680\ 10^{-5}$; $C_0=1{,}8756590\ 10^{-1}$; $C_1=-2{,}5352147\ 10^{-3}$; $C_2=2{,}6995102\ 10^{-4}$; $C_3=-1{,}8446680\ 10^{-6}$ $D_1=8{,}2325617\ 10^{-2}$; $D_2=4{,}2681448\ 10^{-3}$; $D_3=1{,}1653690\ 10^{-4}$; $E_0=2{,}0466534$; $E_1=-3{,}6544371$; $E_2=1{,}8396733$; $E_3=-0{,}20360244$; $F_1=-2{,}0182173$; $F_2=1{,}2420401$; $F_3=-0{,}21741801$ (Fonte: HOSKING e WALLIS, 1997).

R. Árvore, Viçosa-MG, v.28, n.6, p.927-933, 2004

Quadro 3 – Função densidade de probabilidade, *f(x)*, distribuição acumulada, *F(x)*, momentos e parâmetros da distribuição Pearson Tipo III*
***Table 3** – Probability density function, f(x), cumulative distribution, F(x), moments and parameters of Pearson type III distribution*

Função densidade de probabilidade *f(x)*	Distribuição $F(x)$	Momentos -L (λ_1, λ_2, τ_3, τ_4), para $0 < 4/\nu^2 < \infty$	Parâmetros de posição (ξ), de escala (α) e de forma (ν)
Pearson Tipo III Se ν > 0, então o domínio de x é $(\xi - 2\alpha/\nu) \le x < \infty$, e $f(x) = \dfrac{\left(x-\xi+2\frac{\alpha}{\nu}\right)^{\frac{4}{\nu^2}-1} e^{-\frac{\left(x-\xi+2\frac{\alpha}{\nu}\right)}{\frac{1}{2}\alpha\lvert\nu\rvert}}}{\left(\frac{1}{2}\alpha\lvert\nu\rvert\right)^{\frac{4}{\nu^2}}\Gamma\left(\frac{4}{\nu^2}\right)}$	$F(x) = \dfrac{G\left(\frac{4}{\nu^2}, \frac{x-\xi+2\frac{\alpha}{\nu}}{\frac{1}{2}\alpha\lvert\nu\rvert}\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{\nu^2}\right)}$	$\lambda_1 = \xi + \frac{4}{\nu^2}\frac{1}{2}\alpha\lvert\nu\rvert$ $\lambda_2 = \dfrac{\pi^{-1/2}\frac{1}{2}\alpha\lvert\nu\rvert\ \Gamma\left(\frac{4}{\nu^2}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{\nu^2}\right)}$ $\tau_3 = 6\ I_{1/3}\left(\frac{4}{\nu^2}, 2\frac{4}{\nu^2}\right) - 3$ em que $I_x(p,q)$ denota a razão da função beta incompleta, $I_x(p,q) = \dfrac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)}\int_0^x t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt$	$\xi = \lambda_1$ $\alpha = \dfrac{\lambda_2\ \pi^{1/2}\left(\frac{4}{\nu^2}\right)^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{4}{\nu^2}\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{\nu^2}+\frac{1}{2}\right)}$ $\nu = 2\left(\frac{4}{\nu^2}\right)^{-1/2} sen(\tau_3)$
Se ν = 0, a distribuição é Normal, e o domínio de x é $-\infty < x < \infty$, e $f(x) = \alpha^{-1}(2\pi)^{-1/2}\ e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{x-\xi}{\alpha}\right)^2}$	$F(x) = \varphi\left(\frac{x-\xi}{\alpha}\right)$, em que $\varphi(x) = \int_{-\infty}^{x}(2\pi)^{-1/2}\ e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt$		
Se γ < 0, o domínio de x é $-\infty < x < \xi - 2\alpha/\nu$ $f(x) = \dfrac{\left(\xi - 2\frac{\alpha}{\nu} - x\right)^{\frac{4}{\nu^2}-1} e^{-\frac{\left(\xi-2\frac{\alpha}{\nu}-x\right)}{\frac{1}{2}\alpha\lvert\nu\rvert}}}{\left(\frac{1}{2}\alpha\lvert\nu\rvert\right)^{\frac{4}{\nu^2}}\Gamma\left(\frac{4}{\nu^2}\right)}$	$F(x) = 1 - \dfrac{G\left(\frac{4}{\nu^2}, \frac{\xi-2\frac{\alpha}{\nu}-x}{\frac{1}{2}\alpha\lvert\nu\rvert}\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{\nu^2}\right)}$ $G\left(\frac{4}{\nu^2}, x\right) = \int_0^x t^{\frac{4}{\nu^2}-1} e^{-t}\,dt$		

* função quantil, *x(F)*, sem forma analítica explícita; Γ (.) é a função gama; e $G\left(\frac{4}{\nu^2}, x\right)$ é a função gama incompleta.

Valverde (2001) analisou séries históricas de precipitação de 31 estações pluviográficas localizadas na bacia do rio Doce, objetivando ajustar e estimar, por meio do método de momentos-L, os parâmetros dos modelos teóricos de distribuição de probabilidades de séries históricas regionais de precipitações máximas adimensionalizadas com base no método *index-flood*. Foi objetivo, também, estabelecer equações de intensidade–duração–freqüência regionais para a referida bacia. Foram avaliadas as seguintes distribuições de três parâmetros: Generalizada Logística, Generalizada de Eventos Extremos, Generalizada Normal, Pearson Tipo III e Generalizada de Pareto. Concluiu-se que a distribuição probabilística de três parâmetros Generalizada Logística apresentou melhor aderência aos dados de intensidade máxima média para essa bacia.

4. CONCLUSÕES

Os dados de eventos extremos apresentam um padrão peculiar de distribuição, e as funções probabilísticas acumuladas possuem formas bem caracterizadas. Portanto, é recomendável testar a aderência desses dados, pelo menos, pelas seguintes distribuições de: Generalizada Logística, Generalizada de Eventos Extremos, Generalizada Normal, Pearson Tipo III e Generalizada de Pareto. Para estimar os parâmetros dessas distribuições e seus quantis, devem ser usados os momentos-L derivados dos Momentos Ponderados por Probabilidade.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARON, G. et al. Regional rainfall intensity-duration-frequency curves for Pennsylvania. **Water Resources Bulletin**, v. 23, p. 479-485, 1987.

DAMÁZIO, J. M.; COSTA, F. S. Regionalização da curva de freqüência de precipitações máximas anuais na bacia do rio Madeira. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE RECURSOS HÍDRICOS, 9., SIMPÓSIO LUSO-BRASILEIRO DE HIDRÁULICA E RECURSOS HÍDRICOS, 5., 1991, Rio de Janeiro. **Anais...** Rio de Janeiro: ABRH/APRH, v. 4, 1991. p. 153-161.

FERNANDES, C. V. S.; HEINZ, D. O. A. F. Avaliação da robustez de distribuições de extremos. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE RECURSOS HÍDRICOS, 9., SIMPÓSIO LUSO-BRASILEIRO DE HIDRÁULICA E RECURSOS HÍDRICOS, 5., 1991, Rio de Janeiro. **Anais...** Rio de Janeiro: ABRH/APRH, 1991. v.1. p. 391-400.

HENRIQUES, A. G. Métodos de estimação dos parâmetros da distribuição de extremos de tipo 1 (Gumbel). In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE RECURSOS HÍDRICOS, 9., SIMPÓSIO LUSO-BRASILEIRO DE HIDRÁULICA E RECURSOS HÍDRICOS, 5., 1991, Rio de Janeiro. **Anais...** Rio de Janeiro: ABRH/APRH, 1991. v.1, p. 35-56.

HOSKING, J. R. M.; WALLIS, J. R. **Regional frequency analysis:** an approach based on L-moments. Cambridge: Cambridge University Press, 1997. 224 p.

OSBORN, H. B.; LANE, L. J.; MYERS, V. A. Rainfall watershed relationships for southewestern thunderstorms. **Transactions of the ASAE**, v. 23, n. 1, p. 82-87, 1980.

MATOS NETO, C. E.; FRAGA, N. S. Equação de chuvas intensas para a cidade de Fortaleza. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE HIDROLOGIA E RECURSOS HÍDRICOS, 5., 1983, Blumenau. **Anais...** Blumenau: Associação Brasileira de Hidrologia e Recursos Hídricos, 1983. p. 641-650.

PINTO, F. A. et al. Estimativa de chuvas intensas no Estado de Minas Gerais utilizando registros diários. **Revista Engenharia Agrícola**, v. 16, n. 2, p. 8-21, 1996.

PINHEIRO, M. M. G.; NAGHETTINI, M. Análise regional de freqüência e distribuição temporal das tempestades na Região Metropolitana de Belo Horizonte – RMBH. **Revista Brasileira de Recursos Hídricos**, v. 3, n. 4, p. 73-87, 1998.

SILVA, F. A. M.; ASSAD, E. D. Análise espaço-temporal do potencial hídrico climático do estado de Góias. In: SISTEMA DE INFORMAÇÕES GEOGRÁFICAS – Aplicações na Agricultura / editado por ASSAD, E. D.; SANO, E. E. 2.ed. – Brasília: Embrapa-SPI / Embrapa-CPAC, 1998. p. 273- 309.

SILVA, D. D. et al. Estimativa e espacialização dos parâmetros da equação de intensidade-duração-freqüência da precipitação para o Estado de São Paulo. **Engenharia na Agricultura**, v. 7, n. 2, p. 70-87, 1999.

VALVERDE, A. E. L. **Regionalização de chuvas intensas para a Bacia do Rio Doce**. 2001. 208 f. Dissertação (Mestrado em Ciência Florestal) – Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, 2001.

VIEIRA, D. B.; FERRÃO, A. M. A.; ZUFFO, A. C. Estudo das máximas intensidades de chuva para a região de Piracicaba. In: CONGRESSO NACIONAL DE IRRIGAÇÃO E DRENAGEM, 8., 1988, Florianópolis, SC. **Anais...** Florianópolis: Associação Brasileira de Irrigação e Drenagem, 1988. p. 1085-1099.